Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jan Kotera

Vlnky a zpracování obrazu

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Miloš Zahradník, CSc.

Studijní program: Fyzika–obecná fyzika

2008

Rád bych poděkoval vedoucímu práce doc. RNDr. Milošovi Zahradníkovi, CSc. za pomoc při tvorbě tohoto textu.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapujčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne Jan Kotera

Obsah

1 Úvod **5**
Použité značení 7
Fourierova transformace 7

2 Waveletová transformace **9**
Inverzní transformace a zachování energie 12
Časově–frekvenční rozlišení 14

3 Ortogonální waveletové báze **17**
Konjugované reflexní filtry 20
Ortogonální wavelety 25
Algoritmus rychlé waveletové transformace 30

4 Waveletová transformace a hladkost funkcí **35**
Bodová a stejnoměrná regularita 35
Maxima amplitudy waveletové transformace a detekce singularit 37

5 Víceškálová detekce hran v obrazu **45**
Algoritmus rychlé detekce hran 47

6 Závěr **54**

Název práce: Vlnky a zpracování obrazu
Autor: Jan Kotera
Katedra (ústav): Katedra matematické analýzy
Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Miloš Zahradník, CSc.
e-mail vedoucího: Milos.Zahradnik@mff.cuni.cz

Abstrakt: Práce studuje základy spojité waveletové transformace, teorii MRA, tedy vlastnosti a konstrukce ortonormálních waveletových bází, souvislost regularity analyzované funkce s rychlostí ubývání waveletové transformace a na závěr popisuje využití waveletové transformace k víceškálové detekci hran v obrazu.

Klíčová slova: wavelet, spojitá waveletová transformace, MRA, víceškálová detekce hran v obrazu

Title: Wavelets and Image Processing
Author: Jan Kotera
Department: Faculty of Mathematical Analysis
Supervisor: doc. RNDr. Miloš Zahradník, CSc.
Supervisor's e-mail address: Milos.Zahradnik@mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we study the continuous wavelet transform, multiresolution analysis (MRA) theory, which describes the properties and construction methods of wavelet orthonormal bases, we relate the regularity of analyzed signal to the decay of the wavelet transform at low scales and at the end we present an application of the wavelet theory to the multiscale edge detection in images.

Keywords: wavelet, continuous wavelet transform, multiresolution analysis (MRA), multiscale edge detection

1 Úvod

V teorii zpracování signálů je Fourierova transformace základním nástrojem a v některých případech (zejména studium chování lineárních časově invariantních filtrů) je i nástrojem ideálním. V mnoha případech tomu tak bohužel není. Problémy se objeví v okamžiku, kdy nás zajímají nikoliv celkové, stacionární vlastnosti signálu, ale začneme se zajímat o lokální chování. V takových případech je Fourierova transformace téměř bezcenná, neboť k 'měření' signálu používá elementy $e^{i\omega t}$, které jsou zcela nelokalizované a signál vždy zkoumají jako celek, na lokální nespojitosti či singularity nedokážou zaměřit. To je ale zásadní nedostatek, jak při analýze, tak při případné další transformaci signálu. Lokální změny signálu totiž často obsahují cenné informace a také při zpracování nebo kompresi bývá vhodnou strategií popsat chování transformace na individuálních detailech, nikoliv na signálu jako celku. Ve fourierovské reprezentaci je toto obtížné.
Částečným řešením problému je tzv. okénková Fourierova transformace, která z analyzované funkce vyřízne jen okolí zkoumaného bodu a tím umožní analýzu lokalizovat. Její nevýhodou je konstantní tzv. časově–frekvenční rozlišení, tedy schopnost zkoumat signál ve zvoleném bodě časově–frekvenční roviny. Aniž bychom zabíhali do detailů, představme si, že zkoumáme nespojitosti nebo singularity signálu, ty jsou v signálu přesně lokalizované, ale jejich frekvenční spektrum je hodně široké ve vysokých frekvencích. Naopak pomalé pravidelné změny jsou časově hůře lokalizované, ale jejich frekvenční spektrum je velmi úzké. Hodilo by se nám tak, kdyby časově–frekvenční rozlišení transformace bylo proměnlivé v závislosti na poloze zkoumaného bodu. Toto nám okénková Fourierova transformace nenabídne.

Myšlenka waveletové transformace je velmi prostá. Namísto korelace signálu s nelokalizovaným jádrem $e^{i\omega t}$ je u waveletové transformace jako jádro použita (téměř) obecná funkce ψ, obvykle dobře lokalizovaná, která představuje pozorovací okénko waveletové transformace. Této funkci ψ se říká wavelet. Jeho posuny a roztahováním či smršťováním zaměříme v analyzovaném signálu na zvolené místo a vybereme si, jak velké okolí tohoto místa nás zajímá (tomu říkáme škála). Jako jsme okénkovou Fourierovu transformaci uvažovali v daném čase a frekvenci, uvažujeme tak waveletovou transformaci v daném čase a při určité škále. Protože po funkci ψ požadujeme, jak uvidíme, aby měla nulový integrál, lze pak myšlenku waveletové transformace slovně vyjádřit 'Jak moc se mění funkce f v okolí daného bodu a na rozměrech úměrných dané škále.' V první kapitole ukážeme, že časově–frekvenční rozlišení je u waveletové transformace ve smyslu předchozího odstavce příznivější než u okénkové Fourierovy transformace.

Dále uvidíme, že podobně, jako lze u Fourierovy transformace svázat regularitu funkce s ubýváním její Fourierovy transformace, lze u waveletové transformace svázat regularitu s ubýváním waveletové transformace pro zmenšující se škálu (tedy pro rostoucí pozorovací rozlišení). Na rozdíl od Fourierovy transformace zde však není myšlena celková regularita, ale regularita na zvoleném intervalu či v jediném bodě. Zde se tedy dobře využije 'lokálnost' waveletové transformace. Zmíněné vlastnosti mají využití například k detekci singularit, což je při zpracování signálu často potřeba.

Tím, že waveletová transformace popisuje funkci jedné proměnné dvěma spojitými proměnnými, musí nutně docházet k určité nadbytečnosti informací, která kazí efek-

tivní numerickou analýzu a zvyšuje objem uchovávaných dat. Dalším problémem je, že se spojitými veličinami se numericky obtížněji pracuje než s diskrétními. Oba tyto problémy by se daly vyřešit, pokud bychom spojitou waveletovou transformaci navzrokovali ve spočetně mnoha diskrétních hodnotách tak, abychom stále dostali kompletní reprezentaci analyzované funkce, ale s menším objemem dat. Pokud se nám takto povede nadbytečnost snížit až na nulu, dostaneme vyjádření vstupní funkce v nějaké spočetné bázi. Je možné najít takovou bázi, aby koeficienty rozvoje funkce vzhledem k této bázi byly hodnoty waveletové transformace této funkce rozmístěné dostatečně hustě, abychom tak zachovali výhody spojité waveletové transformace? Ve druhé kapitole si ukážeme, že to možné je, a když už budeme konstruovat waveletové báze, tak rovnou ortonormální.
Teorie ortonormálních waveletových bází bývá právem považována za srdce teorie waveletů, neboť otevírá dveře k mnoha aplikacím waveletové teorie. Ačkoliv se těmito aplikacemi v této práci nebudeme zabývat, neboť rozsah práce by tak byl už neúnosný, zmiňme jako možné využití například aproximaci signálů, odstranění šumu a kompresi dat, což jsou oblasti, ve kterých se uplatní mnohé dobré vlastnosti waveletů.

Zpracování obrazových dat je nedílnou součástí moderní doby. Každé cvaknutí digitálním fotoaparátem s sebou nese nutnost spuštění mnoha obraz zpracovávajících algoritmů, z nichž mnohé mají hluboké matematické pozadí (filtrace šumu, umělé doostření, změna rozměrů obrazu, ...) a uložení každé fotky končí její kompresí pro úsporu místa. Při kompresi obrazu podávají wavelety opravdu excelentní výkony (bohužel však v době psaní této práce nejsou zatím tyto kompresní metody široce rozšířeným standardem). Je však třeba podotknout, že na ně zcela nestačí 'jednoduché' ortonormální báze, kterými se zabýváme ve druhé kapitole, ale jejich sofistikovanější zobecnění. Toto téma je tak jednou z mnoha zajímavých možností dalšího studia.
Jiným způsobem zpracování je tzv. rozpoznání či lokalizace objektů na obraze, například poznávací značky auta překračujícího rychlost. Základním a nejjednodušším úkolem z této kategorie je tzv. rozpoznání hran, tedy okrajů předmětů na obraze. Toto je tématem poslední kapitoly. V duchu waveletů nebudeme samozřejmě zkoumat obraz 'jen tak', ale s proměnlivým pozorovacím rozlišením (které nám zajistí waveletová transformace) a tak umožníme lépe specifikovat, o jak velké hrany nám v obraze jde. Nedostatkem detekce hran přímo ve vstupním obraze (tedy při pevném rozlišení) je totiž nalezení velikého množství hran, z nichž většina je zcela nežádoucí, neboť souvisí jen s výplněmi předmětů (vzor koberce v místnosti, stébla trávy na zahradě), které se skutečnými hranami nemají mnoho společného, ale v záplavě těchto falešných hran se ty skutečné velmi obtížně hledají. Protože rozpoznání hran je často prvním krokem v lokalizaci či rozpoznání objektů, tato neschopnost odlišit objekty a vzorky velmi ztěžuje efektivní zpracování (například při hledání psa ležícího na trávníku jsme zahlceni množstvím stébel, místo abychom hledali jen objekty přibližně veliké jako pes).

Celá práce popisuje teorii waveletů jen velmi základním způsobem, neboť jinak to při udržení rozumného rozsahu ani není možné, a představovaná témata či možnosti jsou tak jen špičkou ledovce, pod kterou se skrývá ještě mnoho zajímavých (a často poměrně náročných) předmětů k dalšímu studiu. Jednou z možností, jak se o teorii a využití waveletů dozvědět, je studium vynikající knihy [2], která také tvořila základní (nikoliv samozřejmě jedinou) literaturu při práci na tomto textu. Mnoho odkazů na doporučenou literaturu lze nalézt na internetových stránkách `www.wavelet.org`, na kterých jsou i jiné zajímavosti týkající se waveletů.

Text vznikl jako bakalářská práce v rámci studijního programu fyzika—obecná fyzika, nikoliv matematika, proto si neklade za cíl být matematicky zcela precizní, ale jde spíše o naznačení pricipů a vzájemných souvislostí. Některé delší nebo méně důležité důkazy jsou z důvodu omezení rozsahu práce vynechány.

Použité značení

f', $f^{(n)}$	derivace resp. n–tá derivace funkce f
$\widehat{f}(\omega)$	Fourierova transformace funkce f v bodě ω
$\mathrm{FT}\,[f]\,(\omega)$	Fourierova transformace funkce f v bodě ω
$\check{f}(t)$	inverzní Fourierova transformace funkce f v bodě t
$\mathrm{FT}^{-1}\,[(]\,\widehat{f})(t)$	inverzní Fourierova transformace funkce $\widehat{f}$ v bodě t
z^*	komplexní sdružení čísla $z \in \mathbb{C}$
$\langle f\,,\,g\rangle$	skalární součin funkcí f a g
$\|f\|$	norma (typicky v $\mathbf{L^2}(\mathbb{R})$) funkce f
$f * g(t)$	konvoluce funkcí f a g v bodě t
$f * g[n]$	diskrétní konvoluce posloupností f a g v bodě n
$f[n]$	n–tý prvek posloupnosti f
$\delta(t)$	Diracova distribuce
$\delta[n]$	diskrétní Diracova distribuce
$\delta_{i,j}$	Kroneckerovo delta
$\mathrm{W}f(u,s)$	spojitá waveletová transformace funkce f v bodě u při škále s
$\mathrm{W}_2 f(n,j)$	dyadická waveletová transformace funkce f v bodě n při škále 2^{-j}
$\lfloor\alpha\rfloor$	dolní celá část čísla $\alpha \in \mathbb{R}$
$U \oplus V$	ortogonální součet prostorů, tímto říkáme, že $U \perp V$ a pak $U \oplus V = \mathrm{span}\,\{U \cup V\}$

Fourierova transformace

Protože definice Fourierovy transformace se napříč literaturou liší, upřesněme zde, jakou Fourierovu transformaci v průběhu práce používáme.

Definice 1.1. *Fourierovou transformací* fuknce $f \in \mathbf{L^1}(\mathbb{R})$ rozumíme fukci $\widehat{f}(\omega)$ definovanou vztahem

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t$$

Inverzní Fourierovou transformací funkce $f \in \mathbf{L^1}(\mathbb{R})$ rozumíme funkci $\check{f}(t)$ definovanou vztahem

$$\check{f}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(\omega)\,\mathrm{e}^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

Fourierovou transformací a inverzní Fourierovou transformací funkce $f \in \mathbf{L^2}(\mathbb{R})$ rozumíme standardní rozšíření Fourierovy transformace resp. inverzní Fourierovy transformace funkcí z $\mathbf{L^1}(\mathbb{R})$ na prostor $\mathbf{L^2}(\mathbb{R})$, které je popsáno ve většině knih zabývajících se Fourierovou transformací, podrobně například v [1].

Pro takto definovanou Fourierovu transformaci platí pro všechna $f, g \in \mathbf{L^2}(\mathbb{R})$ Plan-

cherelova a Parsevalova rovnost ve tvaru

$$\|f\| = \frac{1}{2\pi}\|\widehat{f}\|$$
$$\langle f\,,\, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\left\langle \widehat{f}\,,\, \widehat{g}\right\rangle$$

a přechod derivace na násobení polynomem podle vzorců

$$\mathrm{FT}\left[(-i\,t)^k f(t)\right](\omega) = \widehat{f}^{(k)}(\omega)$$
$$\mathrm{FT}\left[f^{(k)}(t)\right](\omega) = (i\,\omega)^k \widehat{f}(\omega)$$

Definice 1.2. Fourierovou transformací posloupnosti $f[n] \in \mathbf{l^2}(\mathbb{Z})$ rozumíme funkci $\widehat{f}(\omega) \in \mathbf{L^2}\,[-\pi\,,\,\pi]$ definovanou vztahem

$$\widehat{f}(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f[n]\,\mathrm{e}^{-i\omega n}$$

Konvergenci řady chápeme ve smyslu prostoru $\mathbf{L^2}\,[-\pi\,,\,\pi]$
Inverzní Fourierovou transformací funkce $\widehat{f} \in \mathbf{L^2}\,[\pi\,,\,\pi]$ rozumíme posloupnost $f[n] \in \mathbf{l^2}(\mathbb{Z})$ definovanou vztahem

$$f[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widehat{f}(\omega)\,\mathrm{e}^{i\omega n}\,\mathrm{d}\omega$$

2 Waveletová transformace

Fourierova transformace představuje korelaci signálu f s 'vlnami' $e^{i\omega t}$. Její nevýhodou je naprostá nelokalizovanost prvků $e^{i\omega t}$, takže pro všechna ω je analyzována vždy celá funkce f. To je nevýhodné třeba při rozkladu funkcí do fourierovských bází, kdy změna funkce v jednom místě způsobí změnu všech Fourierových koeficientů. Nebo při analýze regularity je zkoumaná funkce brána jako celek a není možné se zajímat jen o vybraný interval a podobně. Tyto problémy částečně řeší tzv. okénková Fourierova transformace, o které je krátce pojednáno na straně 14, u té však není možné zvolit si 'míru přiblížení' ke zkoumané funkci a tím pádem její časově–frekvenční rozlišení není vždy ideální, protože zůstává konstantní. Podrobnosti dále uvidíme.
Představíme tedy v této kapitole tzv. spojitou waveletovou transformaci, která bude představovat korelaci signálu s obecnými prvky, tzv. wavelety, jejichž škálováním a translací lze na analyzovanou funkci velmi pružně nahlížet. Nejde na první pohled o nijak převratnou myšlenku, ale v dalších kapitolách uvidíme, že možnosti waveletové transformace jsou poměrně veliké.

Definice 2.1. Řekneme, že funkce $\psi \in \mathbf{L^2}(\mathbb{R})$ je *wavelet*, jestliže má nulový průměr, tedy

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t)\,\mathrm{d}t = 0 \tag{2.1}$$

Tyto funkce budeme typicky uvažovat normované, tedy $\|\psi\| = 1$ a se středem v $t = 0$, tedy

$$\int_{\mathbb{R}} t|\psi(t)|^2\,\mathrm{d}t = 0$$

Integrálem v (2.1) rozumíme limitu (pokud existuje)

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-n}^{n} \psi(t)\,\mathrm{d}t = 0 \tag{2.2}$$

Prakticky používané wavelety jsou až na výjimky velmi dobře lokalizované, tedy rychle klesající v nekonečnu, a lokálně integrovatelné, takže s konvergencí integrálu (2.1) a podobných v nekonečnu obvykle není problém. Proto již dále na tuto limitní interpretaci integrálů nebudeme vždy upozorňovat.
Z daného (tzv. *mateřského*) waveletu ψ získáme translací a přeškálováním systém waveletů značených $\psi_{u,s}$ vztahem

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{|s|}}\psi\left(\frac{t-u}{s}\right) \tag{2.3}$$

pro $u \in \mathbb{R}$ a $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tyto funkce zůstanou normované $\|\psi_{u,s}\| = \|\psi\| = 1$ a mají střed v $t = u$.

Definice 2.2. Řekneme, že wavelet ψ splňuje *podmínku přípustnosti* (*admissibility condition*), jestliže

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left|\widehat{\psi}(\omega)\right|^2}{|\omega|}\,\mathrm{d}\omega < +\infty \tag{2.4}$$

Význam této podmínky vyplyne v dalším textu. Definice waveletu a podmínka přípustnosti nejsou nezávislé, definice waveletu je pro prakticky zajímavé funkce ve skutečnosti nutnou podmínkou ke splnění podmínky přípustnosti, jak ukazuje následující lemmátko.

Lemma 2.3. *Nechť funkce* $\psi \in \mathbf{L^1}(\mathbb{R}) \cap \mathbf{L^2}(\mathbb{R})$ *splňuje podmínku přípustnosti* (2.4). *Pak* ψ *je wavelet.*

Důkaz: Je-li C_ψ konečné, musí být nutně kvůli konvergenci integrálu

$$\lim_{\omega \to 0} \widehat{\psi}(\omega) = 0$$

a protože Fourierova transformace funkce ψ z $\mathbf{L^1}(\mathbb{R})$ je spojitá, je pak

$$0 = \widehat{\psi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \psi(t)\,\mathrm{d}t$$

□

Mezi podmínkou přípustnosti a definicí waveletu panuje i obrácený vztah, který je ve skutečnosti motivací pro definici waveletu ve tvaru (2.1), tedy že pro velkou třídu funkcí je již nulový průměr (2.1) postačující ke splnění podmínky přípustnosti. Je-li například ψ wavelet, tedy z (2.1) $\widehat{\psi}(0) = 0$ a navíc $\widehat{\psi}$ je (alespoň v okolí počátku) spojitě diferencovatelná, je pak $|\widehat{\psi}(\omega)|^2 / |\omega|$ integrovatelné v okolí 0 a v okolí nekonečna není problém neboť $\psi \in \mathbf{L^2}(\mathbb{R})$ a tudíž i $\widehat{\psi} \in \mathbf{L^2}(\mathbb{R})$ — tedy ψ pak splňuje podmínku přípustnosti. Ke spojité diferencovatelnosti $\widehat{\psi}$ stačí dostatečně rychlý pokles ψ v nekonečnu, například konvergence integrálu

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |t|)\,|\psi(t)|\;\mathrm{d}t < +\infty$$

jak plyne z vlastností Fourierovy transformace. Tato podmínka je pro prakticky uvažované wavelety často splněna, neboť v praxi používané wavelety jsou téměř vždy časově dobře lokalizované. Definici waveletu pak stačí uvažovat ve snadno ověřitelném tvaru (2.1) a (pro spojitou waveletovou transformaci) důležitější podmínka přípustnosti je tak splněna automaticky.

Příklad 2.4. Nejjednodušším waveletem je Haarův wavelet, což je po částech konstantní funkce definovaná vztahem

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \; t \in \left[0\,,\, \tfrac{1}{2}\right) \\ -1 & \text{pro } t \in \left[\tfrac{1}{2}\,,\, 1\right) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Haarův wavelet je také nejjednodušší z ortogonálních waveletů, o kterých pojednává další kapitola. Jde o to, že z jeho celočíselných translací a přeškálování lze sestavit ortonormální bázi $\mathbf{L^2}(\mathbb{R})$. Takové wavelety se dobře hodí k mnoha aplikacím, například k aproximaci signálu, filtraci šumu a podobně. Haarovské aproximace jsou však po částech konstantní, takové jsou zcela nevhodné třeba k aproximaci obrazových dat, neboť opticky nepůsobí tak dobře jako hladké aproximace. Také matematické vlastnosti Haarova waveletu nejsou vhodné (můžeme zmínit například to, že není kolmý na žádný nekonstantní polynom, důsledky budou dále ukázány). Proto se Haarův wavelet příliš nepoužívá.

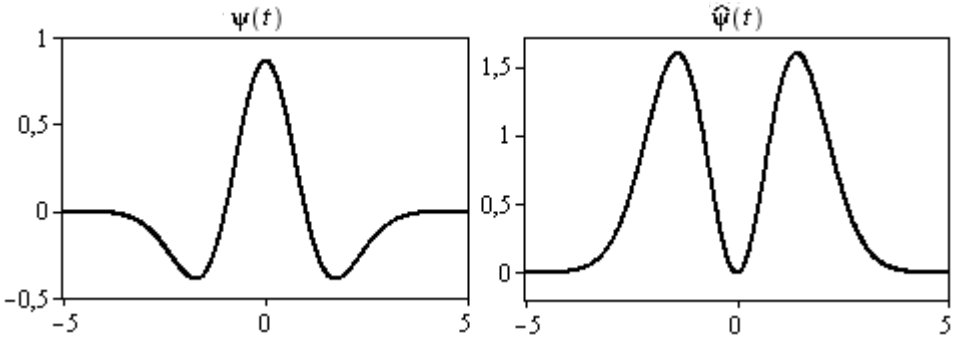
Příklad 2.5. Dalším známým waveletem je tzv. 'Mexický klobouk', což je záporně vzatá druhá derivace Gaussiánu. Jeho normalizovaný tvar je

$$\psi(t) = \frac{-2}{\pi^{1/4}\sqrt{3\sigma}} \left(\frac{t^2}{\sigma^2} - 1\right) \exp\left(\frac{-t^2}{2\sigma^2}\right)$$

a jeho Fourierova transformace má tvar

$$\widehat{\psi}(\omega) = \frac{\sqrt{8}\,\sigma^{5/2}\pi^{1/4}}{\sqrt{3}}\omega^2 \exp\left(\frac{-\sigma^2\omega^2}{2}\right)$$

Grafy těchto funkcí pro $\sigma = 1$ jsou na obrázku 1. Mexický klobouk je nekonečně hladký a dobře lokalizovaný jak v čase tak ve frekvenci, využívá se například v geofyzice při analýze seismických signálů, jeho vícerozměrná zobecnění jsou používána v počítačové grafice.



Obrázek 1: Wavelet Mexický klobouk a jeho Fourierova transformace

Definice 2.6. *Waveletová transformace* funkce (signálu) $f \in \mathbf{L^2}(\mathbb{R})$ v bodě (čase) u a při škále s je definována vztahem

$$\mathrm{W}f(u,s) = \langle f\ ,\ \psi_{u,s}\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\frac{1}{\sqrt{|s|}}\psi^*\left(\frac{t-u}{s}\right)\,\mathrm{d}t \tag{2.5}$$

Je-li energie ($\mathbf{L^2}(\mathbb{R})$ norma) waveletu ψ koncentrována převážně okolo $t = 0$, lze na waveletovou transformaci pohlížet jako na měření změny funkce f v okolí bodu u, kde velikost tohoto okolí je úměrná škále s, převrácená hodnota $1/s$ tak představuje pozorovací rozlišení.
Waveletovou transformaci definujeme i pro s záporná, důvodem je však jen pohodlná formulace některých vět, hodnoty $\mathrm{W}f(u,s)$ pro záporná s jsou duplicitní k hodnotám pro kladná s a nemají žádný reálný význam.

Waveletová transformace jako lineární filtr Definici waveletové transformace je možné přepsat pomocí konvoluce do tvaru, který v teorii zpracování signálů odpovídá aplikaci lineárního časově invariantního filtru. Platí

$$\mathrm{W}f(u,s) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\frac{1}{\sqrt{|s|}}\psi^*\left(\frac{t-u}{s}\right)\,\mathrm{d}t = f * \overline{\psi}_s(u) \tag{2.6}$$

kde

$$\overline{\psi}_s(t) = \frac{1}{\sqrt{|s|}}\psi^*\left(\frac{-t}{s}\right)$$

Waveletová transformace signálu f v bodě (u,s) je tedy hodnota signálu f po aplikaci filtru $\overline{\psi_s}$ v bodě u.

Inverzní transformace a zachování energie

Věta 2.7. *Nechť $\psi \in \mathbf{L^2}(\mathbb{R})$ je wavelet splňující podmínku přípustnosti* (2.4)*, tedy*

$$C_\psi = \int_{\mathbb{R}} \frac{\left|\widehat{\psi}(\omega)\right|^2}{|\omega|} \,\mathrm{d}\omega < +\infty$$

Pak pro každou funkci $f \in \mathbf{L^2}(\mathbb{R})$ platí vzorec pro inverzní transformaci

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{W}f(u,s) \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) \,\mathrm{d}u \frac{\mathrm{d}s}{s^2} \tag{2.7}$$

a pro zachování energie *(analogie Plancherelovy rovnosti)*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\mathrm{W}f(u,s)|^2 \,\mathrm{d}u \frac{\mathrm{d}s}{s^2} \tag{2.8}$$

Důkaz: Cílem tohoto a dalších důkazů je ukázat, jak předložená tvrzení fungují, nejedná se často o matematicky zcela precizní důkaz, neboť celý text nemá ryze matematický, ale spíše technický charakter. Integrály přes s jsou opět chápány podobně jako v (2.2), tedy například v rovnici (2.7)

$$f(t) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{C_\psi} \int\limits_{|s| \in \left(\frac{1}{n}, n\right)} \cdots \frac{\mathrm{d}s}{s^2}$$

a podobně.

Důkaz inverzní formule Rozepišme pravou stranu rovnice (2.7) (označme ji $P(t)$). Tečka značí proměnou, přes kterou je počítána konvoluce.

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{W}f(u,s) \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) \,\mathrm{d}u \,\frac{\mathrm{d}s}{s^2} = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{W}f(\cdot,s) * \psi_s\,(t) \frac{\mathrm{d}s}{s^2} = \\ &= \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} f * \overline{\psi_s} * \psi_s\,(t) \frac{\mathrm{d}s}{s^2} \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} \psi_s(t) &= \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{t}{s}\right) \\ \overline{\psi_s}(t) &= \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi^*\left(\frac{-t}{s}\right) \end{aligned}$$

Spočteme nyní Fourierovu transformace pravé strany vztahu (2.7), tedy $\widehat{P}(\omega)$. Zaměníme pořadí integrace a aplikujeme tak Fourierovu transformaci přímo na vnitřek integrálu (integrace probíhá podle s, zatímco Fourierovu transformaci počítáme podle t). Dále využijeme faktu, že Fourierova transformace převádí konvoluci na součin Fourierových transformací. Pro Fourierovy transformace jednotlivých zúčastněných funkcí platí

$$\begin{aligned} \widehat{\psi_s}(\omega) &= \sqrt{|s|}\,\widehat{\psi}(s\omega) \\ \widehat{\overline{\psi_s}}(\omega) &= \sqrt{|s|}\,\widehat{\psi}^*(s\omega) \end{aligned}$$

Dostaneme tedy

$$\widehat{P}(\omega) = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega)\, \sqrt{|s|}\, \widehat{\psi}^*(s\omega)\, \sqrt{|s|}\, \widehat{\psi}(s\omega) \frac{\mathrm{d}s}{s^2} =$$
$$= \widehat{f}(\omega) \frac{1}{C_\psi} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{\left|\widehat{\psi}(s\omega)\right|^2}{|s|} \mathrm{d}s}_{=C_\psi} = \widehat{f}(\omega)$$

Po zřejmé substituci a dosazení z definice podmínky přípustnosti (2.4) neboli z předpokladů věty dostaneme

$$\widehat{P}(\omega) = \widehat{f}(\omega)$$

Z prostoty Fourierovy transformace pak dostáváme hledané tvrzení.

Důkaz zachování energie Důkaz provedeme přímou úpravou pravé strany rovnice (2.8). Nejprve pomocná úprava: pomocí Parsevalovy rovnosti pro Fourierovu transformaci lze definici waveletové transformace (2.5) (která má tvar skalárního součinu) přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} \mathrm{W}f(u,s) &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi^* \left(\frac{t-u}{s} \right) \mathrm{d}t = \text{(Parseval pro FT)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega)\, \sqrt{|s|}\, \widehat{\psi}^*(s\omega)\, \mathrm{e}^{i\omega u}\, \mathrm{d}\omega = \text{(inv. FT)} \\ &= \mathrm{FT}^{-1} \left[\widehat{f}(\cdot)\, \sqrt{|s|}\, \widehat{\psi}^*(s\,\cdot) \right](u) \end{aligned} \tag{2.9}$$

Nyní rozepíšeme pravou stranu dokazované rovnosti, tedy (2.8)

$$\begin{aligned} \mathrm{RHS}(2.8) &= \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\mathrm{W}f(u,s)|^2 \, \mathrm{d}u \frac{\mathrm{d}s}{s^2} = \quad \text{(dosazení za W}f(u,s) \text{ z (2.9))} \\ &= \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \left| \mathrm{FT}^{-1} \left[\widehat{f}(\cdot)\, \widehat{\psi}^*(s\,\cdot) \right](u) \right|^2 \mathrm{d}u}_{\text{Plancherel pro FT}} |s| \, \frac{\mathrm{d}s}{s^2} = \\ &= \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{f}(\omega) \right|^2 \frac{\left|\widehat{\psi}(s\omega)\right|^2}{|s|} \, \mathrm{d}\omega \, \mathrm{d}s = \quad \text{(Fubini)} \\ &= \frac{1}{C_\psi} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{f}(\omega) \right|^2 \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{\left|\widehat{\psi}(s\omega)\right|^2}{s} \mathrm{d}s}_{=C_\psi} \, \mathrm{d}\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{f}(\omega) \right|^2 \mathrm{d}\omega = \|f\|^2 \quad \text{(Plancherel pro FT)} \end{aligned}$$

□

Stejným způsobem je možné formulovat a dokázat Parsevalovu rovnost pro spojitou waveletovou transformaci, tedy zachování skalárního součinu. Důkaz je zcela analogický důkazu předchozí věty, uveďme tedy jen samotné tvrzení.

Věta 2.8. *Nechť $\psi \in \mathbf{L^2}(\mathbb{R})$ je wavelet splňující podmínku přípustnosti* (2.4)*, pak pro všechna $f, g \in \mathbf{L^2}(\mathbb{R})$ platí*

$$\langle f\ ,\ g\rangle = \frac{1}{C_\psi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{W}f(u,s)\,(\mathrm{W}g(u,s))^*\ \mathrm{d}u\frac{\mathrm{d}s}{s^2}$$

Časově–frekvenční rozlišení

Jak již bylo použito v důkazu zachování energie (v rovnosti (2.9)), waveletovou transformaci je možné přepsat pomocí Parsevalovy rovnosti pro Fourierovu transformaci jako skalární součin signálu a waveletu (tedy 'časový')

$$\mathrm{W}f(u,s) = \langle f\ ,\ \psi_{u,s}\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\frac{1}{\sqrt{|s|}}\psi^*\left(\frac{t-u}{s}\right)\mathrm{d}t$$

nebo Fourierových transformací signálu a waveletu ('frekvenční')

$$\mathrm{W}f(u,s) = \frac{1}{2\pi}\left\langle \widehat{f}\ ,\ \widehat{\psi_{u,s}}\right\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega)\sqrt{|s|}\,\widehat{\psi}^*(s\omega)\mathrm{e}^{i\omega u}\,\mathrm{d}\omega \tag{2.10}$$

Máme-li mateřský wavelet, který je dobře lokalizován jak v čase tak ve frekvenci, může nás zajímat, jaké je jeho *časově–frekvenční rozlišení*, tedy jak velký časový a frekvenční interval signálu má podstatný vliv na hodnotu waveletové transformace v daném bodě. Tato úvaha je velmi známá a typická pro Fourierovu transformaci a její praktický důsledek je velmi dobře vidět u tzv. okénkové Fourierovy transformace (*windowed Fourier transform*).

Připomeňme krátce, co je to okénková Fourierova transformace. Máme-li tzv. *okénko* $g(t)$, což je okvykle reálná, symetrická a rychle klesající funkce se středem v počátku (typickým oknem je Gaussián), definujeme *okénkovou Fourierovu transformaci* funkce f v bodě u a frekvenci ω vztahem

$$\mathrm{WFT}[f](u,\omega) = \left\langle f(t)\ ,\ g(t-u)\,\mathrm{e}^{i\omega t}\right\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,g(t-u)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t$$

Oknem g tak z funkce f vyřízneme okolí bodu u, které nás zajímá a dále spočteme obyčejnou Fourierovu transformaci.

Pomocí okénkové Fourierovy transformace je zkoumáno frekvenční zastoupení signálu v daném čase. Ani u signálu se zřejmým frekvenčním zastoupením, jako je například $\mathrm{e}^{i\omega t^2}$, kde frekvence roste lineárně s časem, nezískáme při analýze v časově–frekvenční rovině (u,ω) ostrou přímku, ale 'rozmazanou čáru' na kterou můžeme nahlížet jako na pravděpodobnostní rozložení frekvenčního zastoupení v čase. Toto je důsledkem známé Heisenbergovy nerovnosti, která je jednou z často uváděných vlastností Fourierovy transformace a která ve zkratce říká, že funkce nemůže být libovolně přesně jak časově tak frekvenčně lokalizovaná — jedno je na úkor druhého. Podrobné informace je možné nalézt například v [1].
Waveletová transformace bude z principu věci zatížena podobnou neurčitostí, pojďme se však podívat na konkrétní výsledky.
Mějme mateřský wavelet ψ který je normovaný $\|\psi\| = 1$ s časovým středem v nule, tedy

$$\int_{\mathbb{R}} t\,|\psi(t)|^2\ \mathrm{d}t = 0$$

Spočtěme jeho rozložení (rozptyl) v čase

$$\sigma_t^2 = \int_{\mathbb{R}} t^2 \, |\psi(t)|^2 \, \mathrm{d}t$$

Ve stejném duchu spočtěme jeho střední frekvenci a frekvenční rozptyl

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \omega \left|\widehat{\psi}(\omega)\right|^2 \mathrm{d}\omega$$
$$\sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (\omega - \eta)^2 \left|\widehat{\psi}(\omega)\right|^2 \mathrm{d}\omega$$

Normovací koeficient $\frac{1}{2\pi}$ pochází z tvaru Plancherelovy věty pro FT, neboť $\|\widehat{\psi}\| = \|\psi\| = 1$ pouze při uvažování míry $\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}$ na frekvenční ose.
Mateřský wavelet ψ generuje systém jednotlivých prvků (atomů) $\psi_{u,s}$ a waveletová transformace $\mathrm{W}f(u,s)$ je pak 'korelace' signálu f s konkrétním prvkem $\psi_{u,s}$ tohoto systému. Připomeňme definici a Fourierovu transformaci prvků $\psi_{u,s}$

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right)$$
$$\widehat{\psi}_{u,s}(\omega) = \sqrt{|s|}\, \widehat{\psi}(s\omega)\, \mathrm{e}^{-i\omega u}$$

Po snadných výpočtech dostáváme pro jejich časově–frekvenční polohu a rozptyl

$$\int_{\mathbb{R}} t \, |\psi_{u,s}(t)|^2 \, \mathrm{d}t = u \qquad \text{(časový střed } \psi_{u,s})$$
$$\int_{\mathbb{R}} (t-u)^2 \, |\psi_{u,s}(t)|^2 \, \mathrm{d}t = s^2\sigma_t^2 \qquad \text{(časový rozptyl } \psi_{u,s})$$
$$\int_{\mathbb{R}} \omega \left|\widehat{\psi}_{u,s}(t)\right|^2 \mathrm{d}\omega = \frac{\eta}{s} \qquad \text{(frekvenční střed } \psi_{u,s})$$
$$\int_{\mathbb{R}} \left(\omega - \frac{\eta}{s}\right)^2 \left|\widehat{\psi}_{u,s}(t)\right|^2 \mathrm{d}\omega = \frac{\sigma_\omega^2}{s^2} \qquad \text{(frekvenční rozptyl } \psi_{u,s})$$

Použijme nyní pro transformaci signálu f dobře časově i frekvenčně lokalizovaný wavelet, tedy takový, aby hodnoty $|\psi|$ byly velmi malé mimo interval $(-\sigma_t\,,\,\sigma_t)$ (nebo jemu úměrný interval) a hodnoty $|\widehat{\psi}|$ byly velmi malé mimo interval $(-\sigma_\omega\,,\,\sigma_\omega)$ (je známé, že nelze požadovat více, tedy aby nosiče ψ resp. $\widehat{\psi}$ byly obsaženy v těchto intervalech — žádná taková netriviální funkce ψ totiž neexistuje). Pak vzhledem k tvaru waveletové transformace a již zmíněnému přepisu pomocí Parsevalovy rovnosti (viz (2.10))

$$\mathrm{W}f(u,s) = \langle f\,,\,\psi_{u,s}\rangle = \frac{1}{2\pi}\left\langle \widehat{f}\,,\,\widehat{\psi}_{u,s}\right\rangle =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} f(t)\psi_{u,s}^*(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega)\widehat{\psi}_{u,s}^*(\omega)\,\mathrm{d}\omega$$

dostáváme, že hodnota tranformace zavisí na hodnotách funkce f (signálu) v časovém resp. frekvenčním rozmezí

$$(u - s\sigma_t\,,\; u + s\sigma_t) \quad \text{resp.} \quad \left(\frac{\eta}{s} - \frac{\sigma_\omega}{s}\,,\; \frac{\eta}{s} + \frac{\sigma_\omega}{s}\right) \tag{2.11}$$

Z tohoto důvodu hovoříme o časově–frekvenčním rozlišení transformace, neboť výrazy v (2.11) nám udávají, jak přesně je transformace schopna zaměřit na konkrétní bod v

časově–frekvenční rovině představující signál. V ideálním případě by bylo možné analyzovat signál v přesně zvoleném bodě, tedy ptát se 'Jaká je míra zastoupení frekvence ω v čase t?', namísto toho (2.11) popisuje nikoliv bod, ale obdélník. Čím menší bude plocha tohoto obdélníka, tím je tedy 'celkové rozlišení' transformace lepší. Vidíme ale, že plocha tohoto obdélníka je rovna $2\sigma_t\sigma_\omega$ bez ohledu na zvolený čas u a škálu s, tedy toto celkové rozlišení je dáno čistě použitým mateřským waveletem a je ve všech bodech transforamce stejné. Z Heisengergovy nerovnosti pro Fourierovu transformaci víme, že nelze sestrojit wavelet, kde $2\sigma_t\sigma_\omega$ bude libovolně malé, vždy se musíme spokojit s nějakou 'neurčitostí' nebo 'rozmazáním'.
Na rozdíl od konstantního celkového rozlišení dostáváme, že rozlišení na časové ose klesá s rostoucí škálou s, zatímco frekvenční rozlišení odpovídajícím způsobem roste a naopak. Dále vidíme, že s rostoucím časovým rozlišením (klesající škálou s) se kromě růstu frekvenční neurčitosti pousouvá analyzovaný bod k vyšším frekvencím (neboť střední zkoumaná frekvence je $\frac{\eta}{s}$).
Získané výsledky můžeme porovnat například s okénkovou Fourierovou transformací. Pro tu platí, že časově–frekvenční rozlišení (plocha obdélníka) je konstantní na celé časově–frekvenční rovině. Naproti tomu rozlišení waveletové transformace bývá někdy (poněkud přehnaně) označováno za adaptivní, neboť při nízkých frekvencích dosahuje dobrého frekvenčního rozlišení, naopak při vysokých dobrého časového rozlišení. Tato vlastnost je pro některé aplikace výhodná. Například analýza nespojitostí nebo singularit v signálu se týká vysokých frekvencí a tyto poruchy jsou v signálu velmi přesně časově lokalizovány, naopak studium nízkých frekvencí (pomalu měnících signál) vyžaduje ze zkoumaného signálu široký 'časový vzorek'. Z tohoto hlediska je tedy chování waveletové transformace (nutno říci, že jen pro některé aplikace) příznivé a výhodnější než v případě okénkové Fourierovy transformace.

3 Ortogonální waveletové báze

Spojitá waveletová transformace často není jako analytický nástroj ideální, jednodimenzionální signál reprezentuje funkcí dvou proměnných, tím vzniká velká nadbytečnost informací, což zejména v aplikacích jako je aproximace signálu (komprese), filtrace šumu nebo kdekoliv je potřeba rychlé efektivní zpracování způsobuje problémy. Také její výpočet a rekonstrukční formule jsou numericky složité. Nabízí se otázka, zda by nebylo možné znát waveletovou tranformaci jen ve spočetně mnoha diskrétních bodech vhodně rozložených tak, aby si tato reprezentace uchovala výhody spojité waveletové tranformace a bylo z ní možné analyzovanou funkci zpětně rekonstruovat. S takovou diskrétní možinou by se v numerických aplikacích podstatně lépe pracovalo. Nebo se můžeme vydat (zdánlivě) jinou cestou, a ptát se, zda je možné sestrojit takovou spočetnou bázi $\mathbf{L^2}(\mathbb{R})$, která bude indexována translačním a škálovým indexem podobně jako spojitá waveletová transformace a opět si uchová se její dobré vlastnosti. Tato kapitola ukazuje, jakým způsobem je možné splnit oba tyto cíle najednou. Pomocí teorie tzv. multirozkladu, jehož autory jsou S.Mallat a Y.Meyer a který je často považován za jádro waveletové teorie, je možné sestrojit takové wavelety ψ, že množina jejich translací a škálování

$$\left\{\sqrt{2^j}\,\psi\left(2^j t - n\right)\right\}_{j,n\in\mathbb{Z}}$$

tvoří dokonce ortonormální bázi $\mathbf{L^2}(\mathbb{R})$, index j je škálovací, index n translační. Libovolnou funkci $f \in \mathbf{L^2}(\mathbb{R})$ je tak možné rozložit do této báze

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f\,,\,\psi_{j,n}\rangle\,\psi_{j,n}$$

a koeficienty

$$d_j[n] = \langle f\,,\,\psi_{j,n}\rangle$$

jsou hodnoty spojité waveletové transformace $\mathrm{W}f(u,s)$ ve vhodně zvolených diskrétních bodech. Zároveň je ukázáno, jakým způsobem je možné pomocí Mallatova algoritmu rychlé waveletové transformace tyto koeficienty velmi efektivně počítat. Tento způsob rozkladu funkce je pro mnohé numerické aplikace podstatně výhodnější, než spojitá waveletová transformace, a přitom jsou zachovány mnohé její dobré analytické vlastnosti.

Poznámka. Používáme zde českého názvu *multirozklad* převzatého z knihy [3]. Tento název není zcela ideální, ale českých ekvivalentů anglického termínu *multiresolution analysis* mnoho není. Nejčastěji se tak v literatuře multirozklad označuje anglickou zkratkou *MRA*, kterou zde také budeme český výraz multirozklad často nahrazovat.

Definice 3.1. Řekneme, že posloupnost uzavřených podprostorů $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ prostoru $\mathbf{L^2}(\mathbb{R})$ tvoří *multirozklad* (dále píšeme zkráceně *MRA*), jestliže jsou splněny následující podmínky:

1. **Monotonie**
$$V_j \subseteq V_{j+1}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$
2. **Škálování**
$$f(\cdot) \in V_j \iff f(2\,\cdot) \in V_{j+1}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

3. **Aproximace při nulovém rozlišení**

$$\bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} V_j = \{\mathbf{0}\}$$

4. **Aproximace při plném rozlišení**

$$\overline{\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} V_j} = \mathbf{L^2}(\mathbb{R})$$

5. **Existence škálové funkce**
   Existuje funkce $\varphi \in V_0$ (zvaná *škálová funkce, scaling function*) taková, že posloupnost $\{\varphi(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tvoří ortonormální bázi prostoru V_0

Podmínky z definice 3.1 nejsou zcela nezávislé, pro představu uveďme bez důkazu následující tvrzení:

Lemma 3.2.

– *Nechť jsou splněny podmínky* (1), (2), (5) *z definice 3.1, potom je splněna podmínka* (3)*, tedy*

$$\bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} V_j = \{\mathbf{0}\}$$

– *Nechť je navíc $\widehat{\varphi}$ z definice 3.1 je spojitá v počátku, pak platí*

$$|\widehat{\varphi}(0)| \neq 0 \iff \overline{\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} V_j} = \mathbf{L^2}(\mathbb{R})$$

Implikace zprava doleva platí dokonce ve tvaru $\implies |\widehat{\varphi}(0)| = 1$.

Multirozklad $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ se škálovou funkcí φ představuje rozklad prostoru $\mathbf{L^2}(\mathbb{R})$ na systém do sebe vnořených podprostorů, ve kterém každý z podprostorů představuje aproximaci funkce (signálu) z prostoru $\mathbf{L^2}(\mathbb{R})$ při určitém stupni rozlišení (neboli při určitém měřítku, škále). S rostoucím j v definici 3.1 stoupá přesnost této aproximace zatímco s klesajícím j přesnosti aproximace klesá a detaily původní funkce se ztrácejí. V tomto duchu podejme určitou slovní interpretaci definice MRA.
Požadavek (1) o vzájemném zanoření prostorů $\{V_j\}$ říká, že aproximace na úrovni $j+1$ obsahuje všechny potřebné informace k výpočtu aproximace na 'horší' úrovni j (této vlastnosti se v souvislosi s MRA říká 'kauzalita'). Přechodem $f(\cdot) \to f(2\,\cdot)$ dojde ke zjemnění detailů funkce f a požadavek (2) říká, že představuje-li $f(\cdot)$ aproximaci na úrovni j pak vzhledem k dvojnásobnému zjemnění detailů představuje $f(2\,\cdot)$ aproximaci na úrovni $j+1$, tedy 'lepší' úrovni. Požadavky (3) a (4) říkají, že s klesající přesností aproximace (tedy s klesajícím j) dojde limitně ke ztrátě všech detailů aproximované funkce, naopak s rostoucí přesností aproximace lze daný $\mathbf{L^2}(\mathbb{R})$ signál popsat libovolně přesně. Existence škálové funkce, jejíž celočíselné translace generují ortonormální bázi prostoru V_0, mimo jiné říká, že prostor V_0 aproximací na úrovni 0 je invariantní vůči celočíselné translaci.
Prostor V_0 však není samozřejmě jediný s touto vlastností, z podmínek (2) a (5) z definice 3.1 je zřejmá platnost následujících tvrzení:

– $f(\cdot) \in V_0 \iff f(2^j \cdot) \in V_j \quad \forall j \in \mathbb{Z}$

– Pro všechna $j \in \mathbb{Z}$ tvoří posloupnost $\{\varphi_{j,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ortonormální bázi prostoru V_j, kde

$$\varphi_{j,n}(t) = \sqrt{2^j}\,\varphi(2^j t - n)$$

Škálová funkce představuje v systému aproximací jakousi jednotkovou aproximační buňku, která je na různých úrovních odpovídajícím způsobem škálována a tím určuje aproximační rozlišení.
Celkově tedy dostáváme rozklad prostoru $\mathbf{L^2}(\mathbb{R})$ na systém vzájemně vnořených podprostorů, z nichž každý je generován ortonormální bází, která je však tvořena jen celočíselnými translacemi jediné vhodné funkce a napříč těmito prostory se tyto 'vhodné funkce' liší jen vzájemným přeškálováním.

Na systém prostorů $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ lze nahlédnout ještě jiným názorným způsobem. Zmíněné projekce na prostory V_j představující aproximaci signálu mají tvar

$$P_{V_j} f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f\,,\, \varphi_{j,n}\rangle\, \varphi_{j,n}$$

kde pak koeficienty rozvoje $a_j[n] = \langle f\,,\, \varphi_{j,n}\rangle$ představují (pro obvykle používané škálové funkce, tedy vhodného tvaru a dostatečně lokalizované) diskrétní aproximaci signálu f při rozlišení 2^j. Tuto diskrétní aproximaci lze je přepsat do konvolučního tvaru

$$a_j[n] = \int_{\mathbb{R}} f(t)\sqrt{2^j}\varphi^*(2^j t - n)\,\mathrm{d}t = f * \overline{\varphi_j}\left(\frac{n}{2^j}\right) \tag{3.1}$$

kde $\overline{\varphi_j}(t) = \sqrt{2^j}\varphi^*(-2^j t)$. Diskrétní aproximace $a_j[n]$ tedy představuje signál f po aplikaci lineárního filtru s impulsní charakteristikou $\overline{\varphi_j}$. Protože běžné škálové funkce mají Fourierovu transformaci nezanedbatelnou typicky jen v omezeném intervalu $[-\pi\,,\,\pi]$, jsou Fourierovy transformace $\widehat{\overline{\varphi_j}}$ nezanedbatelné v intervalech $\left[-2^j\pi\,,\,2^j\pi\right]$. Diskrétní aproximace $a_j[n]$ signálu a tudíž v podstatě i projekce na V_j jsou tedy pak jen jakési low–pass filtrace signálu f.

Poznámka. K definici MRA uveďme dvě poznámky. Po posloupnosti prostorů $\{V_j\}$ požadujeme, aby byla rostoucí. Zde není literatura jednotná a v některých zdrojích se tato posloupnost zavádí klesající. Na vyložené teorii to samozřejmě nic nezmění, s nadsázkou lze říci, že vše se spraví substitucí $j \to -j$, ale považujeme za vhodné na to upozornit.
Dále poznamenejme, že v některých pokročilejších textech se nepožaduje, aby posloupnost $\{\varphi(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tvořila *ortonormální* bázi prostoru V_0, ale o něco slabší *Riezsovu* bázi. Tuto báze je nejprve potřeba vhodným způsobem ortogonalizovat a poté se pokračuje stejnou cestou, po jaké jdeme zde. Pro první seznámení považujeme za dostatečné začínat rovnou s ortonormální bází.

Nyní uveďme pomocné tvrzení, které nám částečně chrakterizuje škálovou funkci φ.

Lemma 3.3. *Nechť $\varphi \in \mathbf{L^2}(\mathbb{R})$, pak je ekvivalentní*

– $\{\varphi(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *je ortonormální množina v* $\mathbf{L^2}(\mathbb{R})$

– *Pro skoro všechna $\omega \in \mathbb{R}$ platí*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}\,(\omega + 2k\pi)|^2 = 1 \tag{3.2}$$

Důkaz: Protože zřejmě platí

$$\langle \varphi(\cdot - i)\,,\, \varphi(\cdot - j)\rangle = \langle \varphi(\cdot)\,,\, \varphi(\cdot - (i-j))\rangle \quad \forall i,j$$

platí ekvivalence (symbol $\delta_{i,j}$ značí Kroneckerovo delta)

$$\langle \varphi(\cdot - i)\,,\, \varphi(\cdot - j)\rangle = \delta_{i,j} \;\; \forall i,j \quad \Longleftrightarrow \quad \langle \varphi(\cdot)\,,\, \varphi(\cdot - n)\rangle = \delta_{0,n} \;\; \forall n$$

Pro ukázání vzájemné ortonormality všech translací stačí tedy vycházet z pravé strany této ekvivalence. Nyní k vlastnímu důkazu. Protože

$$\mathrm{FT}\left[\varphi(t-n)\right] = \widehat{\varphi}(\omega)\mathrm{e}^{-i\omega n}$$

je

$$\begin{aligned}
\delta_{0,n} = \langle \varphi(\cdot)\,,\, \varphi(\cdot - n)\rangle &= \frac{1}{2\pi}\left\langle \widehat{\varphi}(\cdot)\,,\, \widehat{\varphi(\cdot - n)}\right\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\omega)\widehat{\varphi}^{*}(\omega)\mathrm{e}^{i\omega n}\,\mathrm{d}\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}(\omega)|^2\,\mathrm{e}^{i\omega n}\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_0^{2\pi} |\widehat{\varphi}(\omega + 2k\pi)|^2\,\mathrm{e}^{i\omega n}\,\mathrm{d}\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\omega + 2k\pi)|^2\,\mathrm{e}^{i\omega n}\,\mathrm{d}\omega
\end{aligned}$$

Poslední rovnost představuje výpočet n-tého Fourierova koeficientu 2π periodické funkce $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\omega + 2k\pi)|^2$, protože ten má být roven $\delta_{0,n}$, neboli roven 1 pro $n = 0$ a nulový jinak, musí být rozkládaná funkce v $\mathbf{L^2}(\mathbb{R})$ rovna $\mathrm{e}^{-i\omega 0} \equiv 1$. Obráceným směrem je důkaz stejný. □

Konjugované reflexní filtry

Je zřejmé, že systém MRA je zcela určen svou škálovou funkcí, neboť máme-li k dispozici škálovou funkci φ, nezbývá než položit

$$V_j = \overline{\mathrm{span}}\,\{\varphi_{j,n},\, n \in \mathbb{Z}\} \tag{3.3}$$

a má-li φ 'vhodné vlastnosti' (tedy je-li to opravdu škálová funkce), generují pak prostory V_j systém MRA. Klíčové tedy stanovit ony 'vhodné vlastnosti', které musí φ splňovat.
Z axiomů MRA víme, že

- $V_0 \subset V_1$
- $\varphi \in V_0$, neboť je to jeden z vektorů ortonormální báze V_0
- $\left\{\sqrt{2}\,\varphi(2\cdot - n)\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ je ortonormální báze V_1

Vidíme tedy, že musí být možné vyjádřit φ v bázi V_1, konkrétně

$$\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]\varphi_{1,n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]\sqrt{2}\,\varphi(2t - n) \tag{3.4}$$

kde

$$h[n] = \langle \varphi\,,\, \varphi_{1,n}\rangle = \left\langle \varphi(\cdot)\,,\, \sqrt{2}\,\varphi(2\cdot - n)\right\rangle$$

Aplikací Fourierovy transformace na (3.4) dostaneme

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] \mathrm{e}^{-i\frac{\omega n}{2}} \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Můžeme tedy napsat

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \widehat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right) \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad \text{kde} \quad \widehat{h}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] \mathrm{e}^{-i\omega n} \tag{3.5}$$

Funkce $\widehat{h}$ je Fourierova transformace (v $\mathbf{l^2}(\mathbb{Z})$) posloupnosti $h[n]$, která je však navíc pro kompaktnější zápis některých rovnic a tvrzení přenásobená konstantou $1/\sqrt{2}$ je třeba to mít na paměti v dalším textu. Někdy bývá funkce $\widehat{h}$ nazývána low–pass filtr příslušející k MRA, neboť dále uvidíme, že $\widehat{h}(0) = 1$ a v rovnici (3.5) je vidět, že $\widehat{h}$ představuje onu low–pass filtraci prostoru V_1 na V_0, o které byla řeč v úvodu k MRA. Tímto způsobem je možné pokračovat dále a vyjádřit Fourierovu transformaci φ jako součin

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \widehat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right) \widehat{h}\left(\frac{\omega}{4}\right) \cdots \widehat{h}\left(\frac{\omega}{2^p}\right) \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^p}\right)$$

Předpokládáme-li že $\widehat{\varphi}$ je spojitá v počátku, tedy $\lim_{p\to\infty} \widehat{\varphi}(2^{-p}\omega) = \widehat{\varphi}(0)$, můžeme dokonce přejít k limitě i v součinu a vyjádřit Fourierův obraz škálové funkce ve tvaru

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \left(\prod_{p=1}^{+\infty} \widehat{h}\left(2^{-p}\omega\right) \right) \widehat{\varphi}(0) \tag{3.6}$$

Z lemmatu 3.2 vidíme, že pro $\widehat{\varphi}$ spojité je nutně $|\widehat{\varphi}(0)| = 1$, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že je přímo $\widehat{\varphi}(0) = 1$ a zjednodušit tak zápis rovnice (3.6). Oprávněnost tohoto postupu bude ještě ukázána.

Z axiomů MRA jsme tedy zjistili, že škálovou funkci je možné zapsat ve tvaru (3.5) nebo dokonce (3.6). Zde však vyvstává několik otázek: Pro jaké $\widehat{h}$ resp. přímo $h[n]$ konverguje nekonečný součin v (3.6) k $\mathbf{L^2}(\mathbb{R})$ funkci? Je každá funkce, jejíž Fourierova transformace má tvar (3.5) resp. (3.6) skutečně škálovou funkcí? Generují prostory definované vztahem (3.3) systém MRA?

Při praktickém použití teorie MRA je jedním z prvních úkolů samotné vytvoření MRA systému, neboť definice MRA je poměrně přísná a samotné její splnění není snadné. Pokud jsou však odpovědi na výše položené otázky kladné, dostáváme tak jednu z možností jak MRA vytvořit. Vidíme totiž, že MRA je plně dáno jen posloupností $h[n] \in \mathbf{l^2}(\mathbb{Z})$ neboť stačí zvolit vhodnou takovou posloupnost, zavést škálovou funkci φ podle rovnice (3.6) a aproximační prostory V_j rovnicí (3.3). Budeme-li se držet této možnosti konstrukce MRA, je pro nás startovním bodem posloupnost $h[n]$ a pro tuto posloupnost musíme stanovit podmínky, za jakých je celá konstrukce smysluplná a výše popsaný postup skutečně vytvoří MRA systém. Na tuto otázku odpovídá následující tvrzení, které dává nutné a postačující podmínky pro konstrukci MRA systému, jde o centrálních větu v teorii MRA a uvedeme zde jen malou část jejího důkazu. Plný důkaz je možné nalézt např. v [2].

Věta 3.4 (Mallat, Meyer)**.** *Nechť $\varphi \in \mathbf{L^2}(\mathbb{R})$ je integrovatelná škálová funkce MRA. Položme $h[n]$ jako koeficienty rozvoje φ v bázi $\left\{\varphi_{1,n} \equiv \sqrt{2}\,\varphi(2\cdot - n)\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ a $\widehat{h}(\omega)$ jako*

Fourierovu transformaci této posloupnosti přenásobenou $1/\sqrt{2}$*, konkrétně*

$$h[n] = \langle \varphi\,,\, \varphi_{1,n} \rangle = \Big\langle \varphi(\cdot)\,,\, \sqrt{2}\,\varphi(2\cdot - n) \Big\rangle \tag{3.7}$$

$$\widehat{h}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] \mathrm{e}^{-i\omega n} \tag{3.8}$$

Pak $\widehat{h}(\omega)$ *nutně splňuje*

$$\left|\widehat{h}(\omega)\right|^2 + \left|\widehat{h}(\omega+\pi)\right|^2 = 1 \quad \textit{pro s.v.} \quad \omega \in \mathbb{R} \tag{3.9}$$

a

$$\widehat{h}(0) = 1 \tag{3.10}$$

Nechť je naopak $\widehat{h}(\omega) \in \mathbf{L^2}\,[-\pi\,,\,\pi]$ 2π*–periodická funkce, spojitě diferencovatelná v okolí počátku, která dále splňuje nutné podmínky* (3.9) *a* (3.10) *a navíc*

$$\inf_{\omega \in [-\pi/2\,,\,\pi/2]} \left|\widehat{h}(\omega)\right| > 0$$

Potom

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{p=1}^{+\infty} \widehat{h}\left(2^{-p}\omega\right)$$

je Fourierova transformace škálové funkce $\varphi \in \mathbf{L^2}(\mathbb{R})$ *a prosotory*

$$V_j = \overline{\operatorname{span}}\,\{\varphi_{j,n},\, n \in \mathbb{Z}\}\,, \quad j \in \mathbb{Z}$$

generují MRA.

Důkaz: Důkaz celého tvrzení je poměrně technický, uvedeme zde tedy jen důkaz nutných podmínek.

Důkaz nutné podmínky (3.9) Nutná podmínka (3.9) je přímým důsledkem faktu, že $\{\varphi(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ je ortonormální. Z lemmatu 3.3 víme, že toto je ekvivalentní podmínce (3.2), neboli

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\varphi}\,(\omega + 2k\pi)\right|^2 = 1 \quad \text{pro s.v.} \quad \omega \in \mathbb{R}$$

Dosazením za $\widehat{\varphi}$ z rovnice (3.5), neboli $\widehat{\varphi}(\omega) = \widehat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right)\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$ dostaneme

$$1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\varphi}\,(\omega + 2k\pi)\right|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + k\pi\right)\right|^2 \left|\widehat{h}\left(\frac{\omega}{2} + k\pi\right)\right|^2 =$$

rozdělíme součet na sudé a liché členy a využijeme 2π–periodicity $\widehat{h}$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + 2k\pi\right)\right|^2 \left|\widehat{h}\left(\frac{\omega}{2} + 2k\pi\right)\right|^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2k\pi\right)\right|^2 \left|\widehat{h}\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2k\pi\right)\right|^2 =$$

$$= \left|\widehat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2 \underbrace{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + 2k\pi\right)\right|^2}_{=\,1 \text{ z } (3.2)} + \left|\widehat{h}\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)\right|^2 \underbrace{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2k\pi\right)\right|^2}_{=\,1 \text{ z } (3.2)}$$

Tedy

$$\left|\widehat{h}(\omega)\right|^2 + \left|\widehat{h}(\omega+\pi)\right|^2 = 1$$

Důkaz nutné podmínky (3.10) Dosazením $\omega = 0$ do rovnice (3.5) dostaneme $\widehat{\varphi}(0) = \widehat{h}(0)\widehat{\varphi}(0)$. Pro $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$ je tedy nutně $\widehat{h}(0) = 1$, což je dokazovaná podmínka (3.10). Fakt, že $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$ nebo dokonce $|\widehat{\varphi}(0)| = 1$ plyne z lemmatu 3.2, které jsme však uvedli bez důkazu. Pojďme tedy nyní ukázat tuto část lemmatu, čímž zároveň dokončíme důkaz nutných podmínek ve větě 3.4
Označíme-li opět symbolem P_{V_j} ortogonální projekci funkce $f \in \mathbf{L^2}(\mathbb{R})$ na V_j, plyne z podmínky (4) definice MRA 3.1 (aproximace při plném rozlišení), že pro všechna $f \in \mathbf{L^2}(\mathbb{R})$ platí

$$\lim_{j \to +\infty} \left\| f - P_{V_j} f \right\|^2 = 0$$

Z Plancherelovy rovnosti pro Fourierovu transformaci plyne pak pro všechna $f \in \mathbf{L^2}(\mathbb{R})$

$$\lim_{j \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \left\| \widehat{f} - \widehat{P_{V_j} f} \right\|^2 = 0 \tag{3.11}$$

Spočtěme nyní Fourierovu transformaci projekce P_{V_j}. Ortogonální projekce na V_j má tvar

$$P_{V_j} f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f \,,\, \varphi_{j,n} \rangle \, \varphi_{j,n}$$

Jak již víme, koeficienty $\langle f \,,\, \varphi_{j,n} \rangle$ je možno zapsat v konvolučním tvaru (3.1), tedy

$$\langle f \,,\, \varphi_{j,n} \rangle = f * \overline{\varphi}_j \left(2^{-j} n \right)$$

kde $\varphi_j(t) = \sqrt{2^j}\, \varphi(2^j t)$ a $\overline{\varphi}_j(t) = \sqrt{2^j}\, \varphi^*(-2^j t)$. Ortogonální projekci můžeme tedy napsat ve tvaru

$$P_{V_j} f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f * \overline{\varphi}_j \left(2^{-j} n \right) \varphi_j \left(t - 2^{-j} n \right) = \varphi_j * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f * \overline{\varphi}_j \left(2^{-j} n \right) \delta \left(t - 2^{-j} n \right)$$

V poslední rovnosti je použit zápis pomocí Diracových δ–funkcí, na pravé straně konvoluce je diskrétní vzorkování funkce $f * \overline{\varphi}_j$ v hodnotách $2^{-j} n$ (tzv. diracovský hřeben). Při výpočtu Fourierovy transformace projekce $P_{V_j} f(t)$ použijeme nyní tzv. Whittakerovu větu, kterou zde volně uvedeme.

Věta (Whittaker)**.** *Mějme fukci $f(t)$ a proveďme její pravidelné diskrétní vzorkování v intervalech délky T. Tuto diskrétní verzi lze pak zapsat jako přenásobení funkce diracovským hřebenem resp. součet δ–funkcí v odpovídajících bodech:*

$$f_d(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT) \delta(t - nT)$$

Pro její Fourierovu transformaci zřejmě platí

$$\widehat{f}_d(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT) \mathrm{e}^{-inT\omega}$$

Whittakerova věta říká, že tuto Fourierovu transformaci (de facto Fourierovu řadu) lze zapsat pomocí Fourierovy transformaci funkce f a to sečtením všech jejích translací o násobky $2\pi/T$, konkrétně

$$\widehat{f}_d(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f} \left(\omega - \frac{2k\pi}{T} \right) \tag{3.12}$$

Fourierova transformace $\widehat{f_d}$ je tedy $2k\pi/T$–periodická. Whittakerova věta jinými slovy říká, že Fourierova transformace vzorkovací distribuce je opět vzorkovací distribuce, přičemž násobení je Fourierovou transformací standardním způsobem převedeno na konvoluci.
Tuto větu použijeme v důkazu pro výpočet Fourierovy transformace $P_{V_j} f(t)$. Víme

$$P_{V_j} f(t) = \varphi_j * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f * \overline{\varphi}_j \left(2^{-j} n\right) \delta \left(t - 2^{-j} n\right)$$

Dále spočteme dílčí Fourierovu transformaci $\widehat{\overline{\varphi}}_j(\omega) = \sqrt{2^{-j}}\, \widehat{\varphi}^* \left(2^{-j}\omega\right)$, takže Fourierova transformace konvoluce $f * \overline{\varphi}(t)$ je $\sqrt{2^{-j}} \widehat{f}(\omega) \widehat{\varphi}^* \left(2^{-j}\omega\right)$. V poslední rovnici pro $P_{V_j} f(t)$ je na pravé straně vzorkování funkce $f * \overline{\varphi}_j$ v pravidelných intervalech $2^{-j}n$ — v tomto místě použijeme na výpočet Fourierovy transformace Whittakerovu formuli a dostaneme

$$\widehat{P_{V_j} f}(\omega) = \widehat{\varphi}\left(2^{-j}\omega\right) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}\left(\omega - 2^j\, 2k\pi\right) \widehat{\varphi}^* \left(2^{-j}\omega - 2k\pi\right)$$

Rovnice (3.11) platí pro všechna $\widehat{f} \in \mathbf{L^2}(\mathbb{R})$, zvolme například

$$\widehat{f}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \ \omega \in [-\pi\,,\, \pi] \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Jak lze ověřit, pro $j \geq 0$ a $\omega \in [-\pi\,,\, \pi]$ je $\widehat{P_{V_j} f}(\omega) = \left|\widehat{\varphi}(2^{-j}\omega)\right|^2$. Z rovnice (3.11) zřejmě plyne

$$\lim_{j\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{f}(\omega) - \widehat{P_{V_j} f}(\omega)\right|^2 \mathrm{d}\omega = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{j\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\widehat{f}(\omega) - \widehat{P_{V_j} f}(\omega)\right|^2 \mathrm{d}\omega = 0$$

Dosaďme nyní vyjádření $\widehat{P_{V_j} f}$ do poslední rovnice a dostaneme

$$\lim_{j\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left|1 - \left|\widehat{\varphi}(2^{-j}\omega)\right|^2\right|^2 \mathrm{d}\omega = 0$$

Protože $\varphi \in \mathbf{L^1}(\mathbb{R})$, je $\widehat{\varphi}$ spojitá a tedy $\lim_{j\to+\infty} \widehat{\varphi}(2^{-j}\omega) = \widehat{\varphi}(0)$. Pak musí být

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|1 - |\widehat{\varphi}(0)|^2\right|^2 \mathrm{d}\omega = 0 \quad \Longrightarrow \quad |\widehat{\varphi}(0)| = 1$$

což jsme chtěli ukázat. □

Tato věta nám tedy říká, za jakých okolností je možné z diskrétní posloupnosti $h[n]$ sestavit MRA systém. Posloupnosti, které splňují rovnici (3.9) se nazývají *konjugované reflexní filtry, conjugate mirror filters*, hrají důležitou roli v tzv. perfektní rekonstrukci v rychlých algoritmech waveletové transformace. Zde připomeneme, že funkci $\widehat{h}(\omega)$ jsme definovali jako Fourierovu transforamci posloupnosti $h[n]$ *navíc přenásobenou* $1/\sqrt{2}$, v některé literatuře se proto mohou podmínky (3.9) a (3.10) objevit ve tvaru

$$\left|\widehat{h}(\omega)\right|^2 + \left|\widehat{h}(\omega + \pi)\right|^2 = 2 \quad \text{pro s.v.} \quad \omega \in \mathbb{R}$$
$$\widehat{h}(0) = \sqrt{2}$$

Uveďme ještě, že MRA je možné konstruovat přímo zadáním škálové funkce φ, z tvrzení lemmatu 3.2 a provedených pozorování o struktuře MRA je možné zformulovat následující větu.

Věta 3.5. *Nechť funkce* $\varphi \in \mathbf{L^2}(\mathbb{R})$ *splňuje*

- *Množina* $\{\varphi(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *je ortonormální v* $\mathbf{L^2}(\mathbb{R})$
- *Pro nějaké* $h[n] \in \mathbf{l^2}(\mathbb{Z})$ *platí rovnost*

$$\varphi(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h[n]\sqrt{2}\,\varphi(2t-n) \quad v\ \mathbf{L^2}(\mathbb{R})$$

- $\widehat{\varphi}$ *je spojitá v počátku a platí* $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$

Potom prostory

$$V_j = \overline{\text{span}}\,\{\varphi_{j,n},\, n \in \mathbb{Z}\}$$

tvoří MRA se škálovou funkcí φ

Ortogonální wavelety

Nyní se konečně dostáváme k hlavnímu významu MRA, kterým je konstrukce ortogonálních waveletových bází. Již byla zavedena spojitá waveletová transformace a ukázány některé její vlastnosti, nyní je naším cílem zavést takovou transformaci, aby namísto spojitých proměnných $u, s \in \mathbb{R}$ byla transformovaná funkce reprezentována diskrétními hodnojami $j, n \in \mathbb{Z}$. Toho dosáhneme tak, že nalezneme ortonormální bázi $\{\psi_{j,n}\}_{j,n\in\mathbb{Z}}$ prostoru $\mathbf{L^2}(\mathbb{R})$ a provedeme rozklad funkce $f \in \mathbf{L^2}(\mathbb{R})$ vzhledem k této bázi:

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f\,,\, \psi_{j,n}\rangle\, \psi_{j,n}$$

Jako obvykle, i zde bude hlavním požadavkem, aby celá báze $\{\psi_{j,n}\}$ vznikla jen translacemi a přeškálovaním jediné funkce, tzv. *mateřského waveletu (mother wavelet)* ψ.
MRA poksytuje jednu z možností jak takovou waveletovou bázi sestavit. Mějme MRA s prostory V_j podle definice 3.1. Víme, že např. $V_0 \subset V_1$, zaveďme tedy prostor W_0 (nechť takový existuje) jako ortogonální doplněk V_0 do V_1 (zapisujeme $V_1 = V_0 \oplus W_0$). Analogicky zaveďme ostatní prostory W_j, tedy $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$. Víme, že prostory V_j představují možné aproximace funkcí z $\mathbf{L^2}(\mathbb{R})$ při rozlišení j. Odpovídající projekce mají tvar

$$P_{V_j} f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f\,,\, \varphi_{j,n}\rangle\, \varphi_{j,n}$$

Jaký je význam prostorů W_j? Je-li W_j ortogonální doplněk V_j do V_{j+1}, pak zřejmě mezi projekcemi na V_{j+1} ('lepší' rozlišení) a V_j ('horší' rozlišení) platí vztah

$$P_{V_{j+1}} = P_{V_j} + P_{W_j}$$

Prostor W_j tedy obsahuje detaily, které se zachovají při aproximaci s rozlišením $j+1$, ale ztratí při rozlišení j a tato rovnice říká, že přidáním detailů na j–té úrovni k aproximaci na téže úrovni dostaneme aproximaci na lepší $j+1$–ní úrovni. Prostory V_j můžeme tedy nazvat *aproximační prostory (resolution/approximation space)* a prostory W_j *prostory detailů (detail space)*
Podívejme se na další vlastnosti prostorů W_j. Z definice je zřejmé že pro všechna $j \in \mathbb{Z}$ platí

$$V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1} = V_{j-2} \oplus W_{j-2} \oplus W_{j-1} = \cdots = \bigoplus_{k<j} W_k$$

Tedy složením všech detailů které spadají do rozlišení menšího než j dostaneme aproximaci funkce při rozlišení j. Protože z definice MRA je $\mathbf{L^2}(\mathbb{R}) = \overline{\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} V_j}$, je pak

$$\mathbf{L^2}(\mathbb{R}) = \overline{\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} W_j} \tag{3.13}$$

neboli složením veškerých detailů (na všech škálách) aproximované funkce získáme tuto funkci zpět. Dále vidíme z vlastnosti (2) definice 3.1, že platí

$$f(\cdot) \in W_j \iff f(2\cdot) \in W_{j+1}$$

stejně jako analogický vztah pro škálovou funkci. Stačí tedy najít $\psi \in W_0$ takovou, aby $\{\psi(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ byla ortonormální báze W_0, pak položíme-li

$$\psi_{j,n}(t) = \sqrt{2^j}\,\psi(2^j\,t - n) \tag{3.14}$$

tak $\{\psi_{j,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ bude ortonormální báze W_j a $\{\psi_{j,n}\}_{j,n\in\mathbb{Z}}$ bude ortonormální báze $\mathbf{L^2}(\mathbb{R})$. Předmětem dalšího textu bude právě konstrukce mateřského waveletu ψ pomocí MRA. Ještě poznamenejme, že MRA není jediný způsob konstrukce ortogonálních waveletů, existují dokonce wavelety takové, že neexistuje žádný MRA systém, ve kterém by představovaly mateřský wavelet, jedná se však o prakticky zcela nezajímavé pomalu klesající wavelety a tyto 'patologické' příklady vymizí, bude-li po waveletech požadovat například hladkost nebo kompaktní nosič — pro každý takový wavelet již existuje odpovídající MRA systém.
Uveďme nyní větu, která dává recept jakým způsobem konstruovat wavelety z daného MRA, přičemž pokračuje v cestě jakou bylo vytvořeno MRA, tedy pomocí konjugovaných reflexních filtrů. Jde opět o centrální větu teorie ortogonálních waveletů.

Věta 3.6 (Mallat, Meyer)**.** *Nechť je dáno MRA se škálovou funkcí φ a s odpovídajícím konjugovaným reflexním filtrem h a jeho Fourierovou tranasformací $\widehat{h}$ definované rovnicemi* (3.7) *a* (3.8)*. Definujme funkci ψ takovou, že její Fourierova transformace má tvar*

$$\widehat{\psi}(\omega) = \widehat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right)\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{3.15}$$

kde

$$\widehat{g}(\omega) = \mathrm{e}^{-i\omega}\widehat{h}^*(\omega + \pi) \tag{3.16}$$

Označíme-li

$$\psi_{j,n}(t) = \sqrt{2^j}\,\psi\left(2^j\,t - n\right)$$

Pak $\{\psi_{j,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tvoří ortonormální bázi W_j a $\{\psi_{j,n}\}_{j,n\in\mathbb{Z}}$ tvoří ortonormální bázi $\mathbf{L^2}(\mathbb{R})$.

Důkaz: Nejprve nalezneme vyjádření pro diskrétní filtr $g[n]$. Protože $\psi(t) \in W_0 \subset V_1$, vyjádřeme tuto funkci v bázi V_1.

$$\psi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[n]\varphi_{1,n}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[n]\sqrt{2}\,\varphi(2t - n) \tag{3.17}$$

kde

$$g[n] = \langle \psi\,,\,\varphi_{1,n}\rangle = \left\langle \psi\,,\,\sqrt{2}\,\varphi(2\cdot - n)\right\rangle$$

Po aplikaci Fourierovy transformace dostaneme

$$\widehat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[n]\mathrm{e}^{-i\frac{\omega n}{2}}\,\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \widehat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right)\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

kde

$$\widehat{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[n] \mathrm{e}^{-i\omega n}$$

Vztah (3.16) mezi diskrétními filtry $h[n]$ a $g[n]$ resp. jejich Fourierovými transformacemi $\widehat{h}$ a $\widehat{g}$ ještě ukážeme. Pokračujme nyní v důkazu tím, že dokážeme platnost následujícího tvrzení:

Tvrzení ♣: *Množina $\{\psi_{j,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ je ortonormální báze W_j, právě když jsou splněny tyto dvě podmínky:*

$$|\widehat{g}(\omega)|^2 + |\widehat{g}(\omega+\pi)|^2 = 1 \quad \textit{pro s.v.} \omega \in \mathbb{R} \tag{3.18}$$

a

$$\widehat{g}(\omega)\widehat{h}^*(\omega) + \widehat{g}(\omega+\pi)\widehat{h}^*(\omega+\pi) = 0 \quad \textit{pro s.v.} \omega \in \mathbb{R} \tag{3.19}$$

Toto tvrzení zřejmě stačí dokázat pro $j = 0$, pro ostatní j je pak platnost zřejmá z definice $\psi_{j,n}$ a prostorů W_j. Potřebujeme ukázat následující věci:

- Ortonormalitu množiny $\{\psi(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$
- Vzájemnou ortogonalitu prostorů V_0 a W_0
- Vztah $V_0 \oplus W_0 = V_1$ $\big($čímž získáme úplnost báze $\{\psi(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}\big)$

Z lemmatu 3.3 víme, že ortonormalita $\{\psi(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ je ekvivalentní rovnici

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\psi}\left(\omega + 2k\pi\right)\right|^2 = 1 \quad \text{s.v. v } \mathbb{R}$$

Dosaďme za ψ z rovnice (3.15) a využijme 2π–periodicity $\widehat{g}$

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\psi}\left(\omega + 2k\pi\right)\right|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + k\pi\right)\right|^2 \left|\widehat{g}\left(\frac{\omega}{2} + k\pi\right)\right|^2 = \\
&\text{rozdělíme součet na sudé a liché členy} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + 2k\pi\right)\right|^2 \left|\widehat{g}\left(\frac{\omega}{2} + 2k\pi\right)\right|^2 + \\
&+ \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2k\pi\right)\right|^2 \left|\widehat{g}\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2k\pi\right)\right|^2 = \\
&= \left|\widehat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2 \underbrace{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + 2k\pi\right)\right|^2}_{=\,1 \text{ z ortonormality } \varphi(\cdot - n)} + \left|\widehat{g}\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)\right|^2 \underbrace{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2k\pi\right)\right|^2}_{=\,1 \text{ z ortonormality } \varphi(\cdot - n)} = \\
&= |\widehat{g}(\omega)|^2 + |\widehat{g}(\omega+\pi)|^2
\end{aligned}$$

Tím jsme dokázali, že podmínka (3.18) je ekvivalentní ortonormalitě $\{\psi(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Pokračujme dále, ukažme nyní, že prostory V_0 a W_0 jsou ortogonální. To platí, právě když množiny $\{\psi(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ a $\{\psi(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ jsou ortogonální, neboli

$$\langle \psi(\cdot - i)\,,\, \varphi(\cdot - j)\rangle = 0 \;\forall\, i, j \in \mathbb{Z} \;\text{ resp. }\; \langle \psi(\cdot)\,,\, \varphi(\cdot - n)\rangle = \psi * \overline{\varphi}(n) = 0 \;\forall\, n \in \mathbb{Z}$$

kde $\overline{\varphi(t)} = \varphi^*(-t)$. Fourierova transformace konvoluce $\psi * \overline{\varphi}(t)$ je $\widehat{\psi}(\omega)\widehat{\varphi}^*(\omega)$ a Fourierovu transformaci diskrétně vzorkované posloupnosti $\psi * \overline{\varphi}(n)$ můžeme opět vyjádřit pomocí Whittakerovy formule (3.12) pro $T = 1$. Dostaneme

$$\mathrm{FT}\left[\psi * \overline{\varphi}(n)\right](\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{\psi}(\omega + 2k\pi)\widehat{\varphi}^*(\omega + 2k\pi)$$

Ortogonalita V_0 a W_0 je pak ekvivaletní s rovnicí

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{\psi}(\omega + 2k\pi)\widehat{\varphi}^*(\omega + 2k\pi) = 0 \quad \text{pro s.v. } \omega \in \mathbb{R}$$

Dosaďme nyní za $\widehat{\psi}$ z rovnice (3.15) a za $\widehat{\varphi}$ z rovnice (3.5), dostaneme

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{\psi}(\omega + 2k\pi)\widehat{\varphi}^*(\omega + 2k\pi) = \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{g}\left(\frac{\omega}{2} + k\pi\right)\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + k\pi\right)\widehat{h}^*\left(\frac{\omega}{2} + k\pi\right)\widehat{\varphi}^*\left(\frac{\omega}{2} + k\pi\right) = \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{g}\left(\frac{\omega}{2} + 2k\pi\right)\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + 2k\pi\right)\widehat{h}^*\left(\frac{\omega}{2} + 2k\pi\right)\widehat{\varphi}^*\left(\frac{\omega}{2} + 2k\pi\right) + \\
&\quad + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{g}\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2k\pi\right)\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2k\pi\right)\widehat{h}^*\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2k\pi\right)\widehat{\varphi}^*\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2k\pi\right) = \\
&= \widehat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right)\widehat{h}^*\left(\frac{\omega}{2}\right) \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{\psi}\left(\frac{\omega}{2} + 2k\pi\right)\right|^2}_{=1 \text{ z ortonormality } \varphi(\cdot - n)} + \\
&\quad + \widehat{g}\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)\widehat{h}^*\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{\psi}\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2k\pi\right)\right|^2}_{=1 \text{ z ortonormality } \varphi(\cdot - n)} = \\
&= \widehat{g}(\omega)\widehat{h}^*(\omega) + \widehat{g}(\omega + \pi)\widehat{h}^*(\omega + \pi)
\end{aligned}$$

Ukázali jsme tedy opět ekvivalenci vzájemné ortogonality prostorů V_0 a W_0 a platnosti rovnice (3.19). Zbývá nám ukázat, že prostory V_0 a W_0 generují V_1 ($V_0 \oplus W_0 = V_1$). K tomu stačí, že každý vektor z V_1 je vyjádřitelný vektory z V_0 a W_0. Protože $\varphi_{1,n}$ je báze V_1, stačí ukázat, že pro všechny možné složky $a[n] \in \mathbf{l^2}(\mathbb{Z})$ daného vektoru vzhledem k bázi V_1 existují složky $b[n] \in \mathbf{l^2}(\mathbb{Z})$ resp. $c[n] \in \mathbf{l^2}(\mathbb{Z})$ nějakých vektorů z V_0 resp. W_0 tak, že

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n]\varphi_{1,n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b[n]\varphi_{0,n} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c[n]\psi_{0,n} \tag{3.20}$$

neboli

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n]\sqrt{2}\varphi(2t - n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b[n]\varphi(t - n) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c[n]\psi(t - n) \tag{3.21}$$

Aplikací Fourierovy transformace na rovnici (3.21) dostaneme

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\widehat{a}\left(\frac{\omega}{2}\right)\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \widehat{b}(\omega)\widehat{\varphi}(\omega) + \widehat{c}(\omega)\widehat{\psi}(\omega)$$

kde $\widehat{a}$, $\widehat{b}$, $\widehat{c}$ jsou po řadě Fourierovy transformace(v $\mathbf{l^2}(\mathbb{Z})$) posloupností $a[n]$, $b[n]$, $c[n]$. Dosadíme-li z rovnic (3.5) a (3.15) za $\widehat{\varphi}(\omega) = \widehat{h}(\omega/2)\widehat{\varphi}(\omega/2)$ a $\widehat{\psi}(\omega) = \widehat{g}(\omega/2)\widehat{\varphi}(\omega/2)$, dostaneme ekvivalentní rovnici

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\widehat{a}(\omega) = \widehat{b}(2\omega)\widehat{h}(\omega) + \widehat{c}(2\omega)\widehat{g}(\omega) \tag{3.22}$$

Potřebujeme ukázat jak nalézt koeficienty $b[n]$ a $c[n]$ z daných koeficientů $a[n]$. Ukážeme to pomocí jejich Fourierovy transformace.
Zvolíme-li

$$\widehat{b}(2\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\widehat{a}(\omega)\widehat{h}^*(\omega) + \widehat{a}(\omega+\pi)\widehat{h}^*(\omega+\pi)\right) \tag{3.23a}$$

$$\widehat{c}(2\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\widehat{a}(\omega)\widehat{g}^*(\omega) + \widehat{a}(\omega+\pi)\widehat{g}^*(\omega+\pi)\right) \tag{3.23b}$$

jsou pak $\widehat{b}$ a $\widehat{c}$ 2π–periodické funkce z $\mathbf{L^2}\,[-\pi\,,\,\pi]$, a tedy Fourierovy obrazy nějakých posloupností $b[n]$ a $c[n]$ z $\mathbf{l^2}(\mathbb{Z})$. Lze ověřit, že rovnice (3.22) je splněna, dosadíme-li do pravé strany z rovnic (3.23), k ověření je třeba využít předpoklady tvrzení ♣ (3.18), (3.19) a již známou rovnici (3.9). Protože rovnice (3.22) je ekvivalentní rovnici (3.21), splnili jsme tak poslední bod důkazu tvrzení ♣, neboť pro dané $a[n]$ zvolíme $b[n]$ a $c[n]$ jako inverzní transformace rovnic (3.23).
Dokončeme důkaz celé věty. Víme, že funkce, jejíž Fourierova transformace má tvar (3.15)

$$\widehat{\psi}(\omega) = \widehat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right)\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

generuje ortonormální bázi $\{\psi_{j,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ prostoru W_j právě když Fourierova transformace $\widehat{g}$ splňuje podmínky (3.18) a (3.19). Protože $\widehat{g}$ dané rovnicí (3.16)

$$\widehat{g}(\omega) = \mathrm{e}^{-i\omega}\widehat{h}^*(\omega+\pi)$$

z předpokladu věty obě uvedené podmínky splňuje, (ověření opět plyne z (3.9)) je tím věta dokázána. Fakt, že $\{\psi_{j,n}\}_{j,n\in\mathbb{Z}}$ je ortonormální bází $\mathbf{L^2}(\mathbb{R})$ je důsledkem vzájemné ortogonality prostorů W_j pro různá j a vztahu (3.13)

$$\mathbf{L^2}(\mathbb{R}) = \overline{\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} W_j}$$

který již byl již diskutován dříve. Prostory W_j a W_i pro $i < j$ jsou ortogonální protože $W_j \perp V_j \supset W_i$. □

Tato věta nám ukazuje, jakým způsobem je možné konstruovat ortogonální wavelety pomocí MRA. Máme-li k dispozici filtr $\widehat{h}$, pomocí kterého jsme vytvářeli MRA, definujeme filtr $\widehat{g}$ vztahem (3.16) a mateřský wavelet ψ vztahem (3.15). Opět poznamenejme, že filtr $\widehat{g}$ je v některé literatuře nazýván high–pass filtr příslušející k MRA, neboť $\widehat{g}(0) = 0$. Ze vztahu (3.15) vidíme, že prostor detailů W_j vzniká high–pass filtrací prostoru V_{j+1}, podobně jako 'horší' aproximační prostor V_j vzniká low–pass filtrací 'lepšího' aproximačního prostoru V_{j+1} (z (3.5)). Kombinací vztahů (3.9) a (3.16) dostaneme

$$|\widehat{h}(\omega)|^2 + |\widehat{g}(\omega)|^2 = 1 \quad \forall\,\omega \in \mathbb{R}$$

Tento vztah je možné interpretovat tak, že rozkladem $V_{j+1} \to V_j \oplus W_j$ nedojde k žádné ztrátě energie.

K vztahu (3.16), který popisuje $\widehat{g}$ je možno spočítat inverzní Fourierovu transformaci a dostaneme

$$g[n] = (-1)^{1-n} h[1-n]$$

Do rovnice (3.17) pak můžeme za $g[n]$ dosadit a získáme tak přímé vyjádření mateřského waveletu

$$\psi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^{1-n} h[1-n] \sqrt{2}\, \varphi(2t-n)$$

Z daného MRA se škálovou funkcí φ lze takto mateřský wavelet velice snadno spočítat, filtr $h[n]$ určíme ze škálové funkce pomocí definičního vztahu (3.7).

Algoritmus rychlé waveletové transformace

Jsme nyní v situaci, že máme k dispozici waveletovou bázi $\psi_{j,n}$ a chceme rozložit danou funkci f do tvaru

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f\,,\, \psi_{j,n}\rangle\, \psi_{j,n}$$

Jde nám tedy o výpočet koeficientů

$$d_j[n] = \langle f\,,\, \psi_{j,n}\rangle \quad \forall j, n \in \mathbb{Z}$$

V praxi je však třeba postavit tuto úlohu trochu jinak, zřejmě nelze počítat nekonečný počet koeficientů $d_j[n]$ a získat tak plný waveletový rozklad.
Vstupní funkci f ('naměřený signál') je třeba od začátku uvažovat v určité aproximaci, tedy jako jeho projekci na některý z prostorů V_j. Tuto projekci můžeme popsat pomocí jejích koeficientů $a_j[n]$

$$P_{V_j} f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \underbrace{\langle f\,,\, \varphi_{j,n}\rangle}_{a_j[n]} \varphi_{j,n}$$

tedy

$$a_j[n] = \langle f\,,\, \varphi_{j,n}\rangle$$

Takovou projekci je možné dále rozdělit na 'horší aproximaci' $P_{V_{j-1}}$ a 'chybějící detaily' $P_{W_{j-1}}$, tyto projekce lze opět popsat pomocí jejich koeficientů $a_{j-1}[n]$ a $d_{j-1}[n]$. Takto můžeme postupovat dále až řekněme k projekci na V_0 a W_0, kde získáme koeficienty $a_0[n]$ a $d_0[n]$. Při každém takovémto kroku provedeme rozklad

$$V_k = V_{k-1} \oplus W_{k-1}$$

takže koeficienty a_k na k-té úrovni se nám rozdělí horší aproximační koeficienty a_{k-1} a waveletové koeficienty d_{k-1}. Po provedení všech kroků dostaneme tedy $a_0[n]$ jako výslednou (nejhorší) aproximaci signálu spolu s posloupností waveletových koeficientů $d_0, d_1, \ldots, d_{j-1}$, které představují ztracené detaily potřebné pro návrat k původnímu signálu na úroveň j. Proces

$$a_j \longrightarrow d_{j-1}, \ldots, d_1, d_0, a_0$$

se nazývá *waveletová analýza (dekompozice)* signálu f a obrácený proces

$$a_0, d_0, d_1, \ldots, d_{j-1} \longrightarrow a_j$$

se nazývá *waveletová syntéza (rekonstrukce)* singálu f. V této kapitole ukážeme rychlý algoritmus, jakým je možné tyto procesy realizovat. Z plného waveletového rozkladu výše se nám zatím podařilo 'odstranit jedno nekonečno' týkající se j a tedy škálování, zbývá nám ještě druhé v podobně n a tedy translací. Protože vstupní signál f uvažujeme z $\mathbf{L^2}(\mathbb{R})$, můžeme předpokládat že dostatečně rychle ubývá a po zanedbání malých hodnot pro vysoká $|n|$ tak dostaneme jen konečný počet vstupních koeficientů $a_j[n]$, které aproximují počáteční signál konečné délky.
Pro názorný zápis Mallatova algoritmu zaveďme dva operátory na prostoru $\mathbf{l^2}(\mathbb{Z})$, U (upsampling) a D (downsampling).

Definice 3.7. Pro $x[n] \in \mathbf{l^2}(\mathbb{Z})$ definujeme

$$D(x)[n] = x[2n]$$
$$U(x)[n] = \begin{cases} x[n/2] & \text{pro } n \text{ sudé,} \\ 0 & \text{pro } n \text{ liché} \end{cases}$$

Operátor D tedy zmenší vstupní vektor tím, že vynechá liché členy, operátor U naopak roztáhne vstupní vektor tak, že mezi každé dvě hodnoty vloží nulu.
Uveďme tedy nyní Mallatův algoritmus.

Věta 3.8 (Mallat)**.** *Mějme $f \in \mathbf{L^2}(\mathbb{R})$, $h[n]$ a $g[n]$ filtry MRA jako ve větách 3.4 a 3.6. Označme $a_j[n]$ resp. $d_j[n]$ škálové resp. waveletové koeficienty na j–té úrovni.*
Pak pro výpočet dekompozice(analýzy) platí pro všechna j (značíme $\overline{x}[n] = x^*[-n]$)

$$a_{j-1}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h^*[k-2n]a_j[k] = D\left(a_j * \overline{h}\right)[n] \tag{3.24}$$

$$d_{j-1}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g^*[k-2n]a_j[k] = D\left(a_j * \overline{g}\right)[n] \tag{3.25}$$

a pro výpočet rekonstrukce(syntézy) platí pro všechna j

$$a_j[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[n-2k]a_{j-1}[k] + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g[n-2k]d_{j-1}[k] = U\left(a_{j-1}\right) * h\,[n] + U\left(d_{j-1}\right) * g\,[n] \tag{3.26}$$

Důkaz:
Důkaz vztahu (3.24) Pro $j, n \in \mathbb{Z}$ mějme $\varphi_{j-1,n} \in V_{j-1}$. Protože $V_{j-1} \subset V_j$, můžeme vyjádřit $\varphi_{j-1,n}$ v bázi V_j

$$\varphi_{j-1,n} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle \varphi_{j-1,n}\,,\, \varphi_{j,k} \rangle\, \varphi_{j,k}$$

Rozepišme koeficienty tohoto rozkladu

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{j-1,n}\,,\, \varphi_{j,k} \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \sqrt{2^{j-1}} \varphi\left(2^{j-1}t - n\right) \sqrt{2^j} \varphi^*\left(2^j t - k\right)\, \mathrm{d}t = \\ &\text{(substituce } t' = 2^{j-1}t - n) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sqrt{2} \varphi(t) \varphi^*\left(2t - k + 2n\right)\, \mathrm{d}t = \langle \varphi\,,\, \varphi_{1,k-2n} \rangle = h[k-2n] \end{aligned} \tag{3.27}$$

Potom tedy z předchozí rovnice

$$\varphi_{j-1,n} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k-2n]\varphi_{j,k}$$

Toto je první z několika podobných vztahů, které vycházejí přímo z podstaty MRA — principu škálování a jsou základem celého algoritmu. Spočteme-li na nyní na obou stranách rovnice skalární součin s f, dostaneme

$$\underbrace{\langle f\,,\,\varphi_{j-1,n}\rangle}_{a_{j-1}[n]} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h^*[k-2n]\,\underbrace{\langle f\,,\,\varphi_{j,k}\rangle}_{a_j[k]}$$

neboli

$$a_{j-1}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h^*[k-2n]a_j[k]$$

což je požadovaná rovnost (3.24).

Důkaz vztahu (3.25) Protože $V_{j-1} \oplus W_{j-1} = V_j$, je $W_{j-1} \subset V_j$, zcela analogicky tak rozepíšeme $\psi_{j-1,n}$ do báze V_j.

$$\psi_{j-1,n} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle \psi_{j-1,n}\,,\,\varphi_{j,k}\rangle\,\varphi_{j,k}$$

Podobně jako v předchozím případě spočteme

$$\begin{aligned}\langle \psi_{j-1,n}\,,\,\varphi_{j,k}\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \sqrt{2^{j-1}}\psi\left(2^{j-1}t-n\right)\sqrt{2^j}\varphi^*\left(2^jt-k\right)\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sqrt{2}\psi(t)\varphi^*\left(2t-k+2n\right)\,\mathrm{d}t = \langle \psi\,,\,\varphi_{1,k-2n}\rangle = g[k-2n]\end{aligned} \tag{3.28}$$

a tedy obdobně

$$\psi_{j-1,n} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g[k-2n]\varphi_{j,k}$$

Spočtením skalárního součinu f s oběma stranami rovnice dostaneme (3.25).

Důkaz vztahu (3.26)
Víme, že $V_{j-1} \oplus W_{j-1} = V_j$. Protože $\{\varphi_{j-1,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ resp. $\{\psi_{j-1,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ je ortonormální báze V_{j-1} resp. W_{j-1}, jejich sjednocení je pak ortonormální báze V_j. Vyjádříme tedy $\varphi_{j,n}$ vzhledem k této bázi

$$\varphi_{j,n} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle \varphi_{j,n}\,,\,\varphi_{j-1,k}\rangle\,\varphi_{j-1,k} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle \varphi_{j,n}\,,\,\psi_{j-1,k}\rangle\,\psi_{j-1,k}$$

Dosadíme za skalární součiny z rovnic (3.27) a (3.28) (při záměně $k \leftrightarrow n$), dostaneme

$$\varphi_{j,n} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h^*[n-2k]\varphi_{j-1,k} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g^*[n-2k]\psi_{j-1,k}$$

Provedeme-li opět skalární součin s f na obou stranách, dostaneme

$$a_j[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[n-2k]a_{j-1}[k] + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g[n-2k]d_{j-1}[k]$$

což je dokazovaná rovnost (3.26). □

Inicializace algoritmu V praxi nemáme vstupní signál f jako skutečnou funkci z $\mathbf{L^2}(\mathbb{R}) \cap V_j$, ale jako diskrétně naměřené hodnoty $b[n] \in \mathbf{l^2}(\mathbb{Z})$, které odpovídají vzorkování takové funkce f ve vzdálenostech řekněme N^{-1}, tedy

$$b[n] = f(N^{-1}n)$$

Zajímá nás, jak z těchto vstupních dat snadno získat posloupnost škálových koeficientů $a_j[n]$ pro první rekurzi algoritmu. Pokusme se zde názorně ukázat použitelný postup, aniž bychom příliš lpěli na korektním důkazu, preciznější a obecnější odvození uvedeného postupu lze ve formě lemmatu nalézt například v [3], Lemma 5.4.1.
Uvažujeme počáteční aproximaci na prostoru V_j, ten aproximuje funkce s detaily v měřítku 2^{-j}, musíme tedy zvolit prostor V_j takový, aby $N^{-1} = 2^{-j}$. Funkce φ představuje jednotkovou aproximační buňku v prostoru V_0, jejím přeškálováním získáme odpovídající aproximační buňku v prostoru V_j. Z dané posloupnosti $b[n]$ zkusme naopak *zvolit* za f funkci

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b[n]\,\varphi\left(2^j t - n\right) \quad \in V_j$$

Potom z ortonormality $\{\varphi_{j,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$

$$a_j[n] = \langle f\,,\,\varphi_j, n\rangle = \frac{b[n]}{\sqrt{2^j}} = \frac{b[n]}{\sqrt{N}}$$

Koeficienty $a_j[n]$ lze tedy spočítat opravdu snadno, podívejme se však, zda je taková *volba* funkce f možná. Protože můžeme předpokládat (viz lemma 3.2, důkaz ve větě 3.4), že

$$\widehat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

je pak (předpokládáme-li hladké f a φ)

$$b[n] = \sqrt{N}\,a_j[n] = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\varphi\left(Nt - n\right) N\,\mathrm{d}t$$

vážený průměr z funkčních hodnot z okolí $N^{-1}n$ jehož velikost je úměrná N^{-1}. Pro dostatečně velká N (tedy husté vzorkování počáteční funkce f, vysoký aproximační prostor V_j) je pak

$$b[n] \approx f(N^{-1}n)$$

což jsme chtěli, tento způsob výpočtu vstupních hodnot $a_j[n]$ z daného diskrétního měření $b[n]$ můžeme považovat za korektní.

Složitost algoritmu Podívejme se nyní, jaká je výpočetní náročnost Mallatova dekompozičního algoritmu, pro rekonstrukční algoritmus je úvaha analogická. Předpokládejme, že filtry $h[n]$ a $g[n]$ mají jen konečný počet nenulových složek, označme jej K. Toto je pravda (právě) u kompaktních waveletů. Ačkoliv jsou velmi často užívány i wavelety, které nemají kompaktní nosič, jsou tyto wavelety vždy dobře lokalizované, tedy rychle klesající v nekonečnu. Hodnoty φ a ψ a tudíž pak $h[n]$ a $g[n]$ lze pak zanedbat mimo nějaký omezený interval. Vstupní data $a_j[n]$ nechť mají N nenulových nebo nezanedbatelných složek.
Pro pevné n provedeme podle (3.24) nejvýše K násobení a sčítání, neboť více nenulových složek vektoru h není. Spočteme-li takto L složek nového vektoru, bude to celkem nejvýše $K\,L$ násobení a sčítání. Kolik nových nenulových složek však na každé úrovni dostaneme? Lze si rozmyslet, že díky 'downsamplingu' neboli dvojce v $h[k-2n]$ v algoritmu (3.24) je to nejvýše

$$\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{K}{2} \right\rceil + 1$$

složek, má-li vstupní vektor N složek. Konstanta K je pevná, vzhledem k objemu dat lze tedy počet nenulových složek na další úrovni aproximativně odhadnout na $n/2$. Stejné výsledky platí pro waveletové složky d, Počet nenulových složek v nových vektorech se tedy bude takto exponenciálně snižovat a pro odhad počtu násobení a sčítání pak dostaneme na jednotlivých úrovních

$$2K\left(N + \frac{N}{2} + \frac{N}{4} + \frac{N}{8}\cdots\right) \leq 4\,K\,N = O(N)$$

Složitost Mallatova algoritmu je tedy lineární vzhledem k objemu dat, algortitmus je tedy z hlediska asymptotiky nejrychlejší možný. Pro rekonstrukční algoritmus je možné provést podobnou úvahu se stejným výsledkem.

4 Waveletová transformace a hladkost funkcí

Bodová a stejnoměrná regularita

Je známá souvislost, mezi hladkostí funkce a ubýváním její Fourierovy transformace. Jakkoliv je tato vlastnost matematicky užitečná, z hlediska analýzy signálu je často bezcenná, neboť pod pojmem *hladkost funkce* je zde myšlena její nejnižší hladkost přes celé $\mathbb{R}$, tato metoda tedy nelze použít k analýze regularity na daném omezeném intervalu nebo v konkrétním bodě.
Waveletová transformace v tomto ohledu může nabídnout více, neboť wavelety jsou časově lokalizované a pomocí translace a škálování umožňují 'zaměřit' na konkrétní analyzované míto. Lokalizace a charakterizace singularit singálu je přitom často užitečná, neboť se často jedná o místa zvláštního významu, například nespojitost intenzity světla v obrazu představuje hranu zobrazovaného předmětu a podobně.
Většinu tvrzení v této kapitole uvedeme bez důkazu, pouze s odkazem na příslušnou literaturu, neboť důkazy bývají často dlouhé, poněkud náročnější a vyžadují zavádění dalších pojmů a tvrzení. Nebude-li řečeno jinak, tak všechny wavelety v této kapitole uvažujeme reálné.

Lipschitzovská regularita Než se pustíme do konkrétních výsledků, je třeba stanovit, co přesně máme na mysli pod pojmem *regularita funkce*, tu je potřeba umět definovat jak bodově tak na intervalech. Jednou z možností, je popisovat regularitu nejvyšší možnou třídou $\mathbf{C}^n$, do které funkce patří. Lepší je však použít o něco jemnější metodu, která měří regularitu funkce pomocí tzv. *lipschitzovských exponentů* (někdy jsou nazývány také *hölderovské*) a která umožňuje rozlišit např. dvě funkce, které obě patří do $\mathbf{C}^n$, ale nepatří do $\mathbf{C}^{n+1}$ a přesto jejich regularita ve vhodném smyslu není stejná.

Definice 4.1.

- Řekneme, že funkce f splňuje v bodě ν liptchitzovskou podmínku regularity s exponentem $\alpha \in [0\,,\,+\infty)$ (zkráceně řekneme, že funkce je bodově α–lipschitzovská), jestliže existuje polynom p_ν stupně $\leq \alpha$ a konstanta K takové, že

$$|f(x) - p_\nu(x)| \leq K\,|x-\nu|^\alpha \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \tag{4.1}$$

- Řekneme, že funkce f je na intervalu $[a\,,\,b]$ *stejnoměrně* α–lipschitzovská, jestliže pro všechna $\nu \in [a\,,\,b]$ splňuje podmínku (4.1) pro K nezávislé na ν

- Bodovou resp. stejnoměrnou lipschitzovskou regularitou funkce f v bodě ν resp. na intervalu $[a\,,\,b]$ rozumíme *supremum* takových α, pro která je podmínka (4.1) splněna (resp. zároveň splněna podmínka stejnoměrnosti).

Je zřejmé, že je-li funkce v okolí bodu ν n–krát spojitě diferencovatelná, je nutně v bodě ν i α–lipschitzovská pro $\alpha = n$, neboť za polynom p_ν zvolíme Taylorův polynom v příslušném bodě a pro chybu $|f(x) - p_\nu(x)|$ existuje známý odhad. Toto tvrzení lze částečně i obrátit a platí, že je-li funkce v okolí bodu ν stejnoměrně α–lipschitzovská, je v tomto okolí třídy $\mathbf{C}^n$ pro $n = \lfloor \alpha \rfloor$. Charakterizace regularity pomocí tříd spojité deferencovatelnosti $\mathbf{C}^n$ je tedy lipschitzovskou regularitou vhodně rozšířena.
V bodě nespojitosti je omezená funkce 0–lipschitzovská, při lipschitzovské regularitě $0 < \alpha < 1$ není funkce regulární (diferencovatelná) a exponentem α lze měřit či charakterizovat míru této neregularity.

Momenty waveletu Jedním z častých využití waveletů je aproximace signálu (například komprese obrazů, startovním bodem a užitečným nástrojem v této teorii je již uvedená teorie MRA). Cílem ztrátové komprese je vyjádřit vstupní signál ve vhodné bázi tak, aby co nejvíce koeficientů bylo zanedbatelně malých, takové se pak skutečně zanedbají a tím se docílí výsledné komprese. Při aproximaci hladkých nebo po částech hladkých signálů je výhodné, aby použité wavelety byly ortogonální na polynomy do nějakého (co nejvyššího) stupně. Hladký signál lze totiž v okolí analyzovaného bodu přibližně aproximovat polynomem, skalární součin s takovým polynomem je pak nulový a zůstanou tak jen malé koeficienty související s chybou polynomiální aproximace, ty je často možné zcela zanedbat. Zabýváme-li se nyní lokalizací a charakteristikou singularit v signálu, vyžadujeme tuto vlastnost u waveletů ze stejného důvodu. Zaveďme proto následující definici.

Definice 4.2. Řekneme, že wavelet ψ má n nulových momentů, jestliže platí

$$\int_{\mathbb{R}} t^k \, \psi(t) \, \mathrm{d}t = 0 \quad \text{pro } 0 \leq k < n \tag{4.2}$$

Lze snadno ukázat, že má-li ψ n nulových momentů, má $\psi_{u,s}$ (viz. (2.3)) taktéž n nulových momentů.

Wavelet s n nulovými momenty je tedy kolmý na všechny polynomy stupně nejvýše $n-1$. Představme si, že máme funkci f, která je v nějakém analyzovaném okolí bodu ν α–lipschitzovská, k analýze její regularity použijeme wavelet ψ s $n > \alpha$ nulovými momenty. Pak je funkce v okolí bodu ν aproximována polynomem p_ν stupně nejvýše $n-1$, tedy

$$f(x) = p_\nu(x) + e_\nu(x) \quad \text{kde } |e_\nu(x)| \leq K \, |a - \nu|^\alpha$$

a pro waveletovou transformaci v tomto okolí platí

$$\mathrm{W}f(u,s) = \langle f \, , \, \psi_{u,s} \rangle = \langle p_\nu + e_\nu \, , \, \psi_{u,s} \rangle = \mathrm{W}e_\nu(u,s)$$

Waveletová transformace tedy závisí jen na chybě polynomiální aproximace, nulové momenty posloužily k odfiltrování aproximačního polynomu. Z rychlosti ubývání hodnoty $|\mathrm{W}e_\nu(u,s)|$ v $u = \nu$ pro $s \to 0_+$ lze změřit exponent α, což je náplní této kapitoly.
Ne+ž se pustíme do konkrétních výsledků, zaveďme ještě jeden pomocný pojem

Definice 4.3. Řekneme že wavelet ψ je rychle klesající, jestliže pro všechna $m \in \mathbb{N}$ existuje C_m tak, že platí

$$|\psi(t)| \leq \frac{C_m}{1 + |t|^m} \quad \forall \, t \in \mathbb{R} \tag{4.3}$$

Waveletová transformace a lipschitzovská regularita Nyní konečně zformulujme bez důkazu dvě důležité věty, které nutnými a postačujícími podmínkami charakterizují lipschitzovský exponent regularity funkce, stejnoměrné či bodové, na základě rychlosti poklesu waveletové transformace při nízkých škálách.

Věta 4.4 (Stejnoměrná regularita)**.** *Nechť $\psi \in \mathbf{C}^{\mathrm{n}}$ je wavelet s n nulovými momenty, který je (včetně svých n derivací) rychle klesající, tzn $\psi^{(k)}$ splňuje podmínku* (4.3) *pro všechna $0 \leq k < n$. Symbolem $\mathrm{W}f(u,s)$ značíme spojitou waveletovou transformaci počítanou s tímto waveletem. Pak platí:*

– *Nechť* $f \in \mathbf{L^2}(\mathbb{R})$ *je stejnoměrně* α*–lipschitzovská pro* $\alpha \leq n$ *na intervalu* $[a\,,\,b]$ *(ne nutně omezeném), pak existuje konstanta* A *taková, že*

$$|\mathrm{W}f(u,s)| \leq As^{\alpha+1/2} \quad \forall\, u \in [a\,,\,b] \;\; a \,\forall\, s \in \mathbb{R}^+ \tag{4.4}$$

– *Nechť je naopak* f *omezená a* $\mathrm{W}f(u,s)$ *splňuje* (4.4) *pro* $\alpha < n$*, kde* α *není celočíselné. Pak pro všechna* $\varepsilon > 0$ *je funkce* f *stejnoměrně* α*–lipschitzovská na intervalu* $[a+\varepsilon\,,\,b-\varepsilon]$*.*

Důkaz tohoto tvrzení je možné nalézt například v knize [2]. Vidíme, že čím hladší je analyzovaná funkce, tím větší počet nulových momentů musí mít použitý wavelet, aby bylo možné regularitu funkce správně určit. Fourierova transformace převádí α–lipschitzovskou funkci na funkci s poklesem alespoň $\omega^{-\alpha}$ v nekonečnu. Waveletová transformace se chová podobně ($\frac{1}{2}$ v exponentu je jaksi navíc vzhledem ke tvaru transformačního jádra), škála s zde představuje analogii převrácené frekvence ω^{-1}. Vztah (4.4) udává pokles amplitudy waveletové transformace v malých škálách (při vysokém zaměření na úzký lokalizovaný interval), pro veliká s není polynomiální odhad (4.4) omezující vzhledem ke tvaru waveletové transformace a Cauchy-Schwartzově nerovnosti. Výhody waveletové tranformace proti Fourierově jsou z tohoto tvrzení patrné, neboť waveletová transformace je schopna detekovat stejnoměrnou lipschitzovskou regularitu na libovolném omezeném či neomezeném intervalu, globální Fourierova transformace vždy zohledňuje celou analyzovanou funkci.
Přistupme k charakterizaci bodové regularity funkce, což je zcela mimo možnosti Fourierovy transformace.

Věta 4.5 (Bodová regularita, Jaffard)**.** *Nechť je opět* $\psi \in \mathbf{C^n}$ *wavelet s* n *nulovými momenty, který je rychle klesající i se svými* n *derivacemi. Pak platí:*

– *Nechť* $f \in \mathbf{L^2}(\mathbb{R})$ *je* α*–lipschitzovská pro* $\alpha \leq n$ *v bodě* ν*, pak existuje* A *takové, že*

$$|\mathrm{W}f(u,s)| \leq As^{\alpha+1/2}\left(1+\left|\frac{u-\nu}{s}\right|^{\alpha}\right) \quad \forall\, u \in \mathbb{R} \;\; a \,\forall\, s \in \mathbb{R}^+ \tag{4.5}$$

– *Nechť je naopak* $\alpha < n$*,* α *neneceločíselné a existuje* A *a* $\alpha' < \alpha$ *takové, že funkce* f *splňuje*

$$|\mathrm{W}f(u,s)| \leq As^{\alpha+1/2}\left(1+\left|\frac{u-\nu}{s}\right|^{\alpha'}\right) \quad \forall\, u \in \mathbb{R} \;\; a \,\forall\, s \in \mathbb{R}^+ \tag{4.6}$$

Pak f *je bodově* α*–lipschitzovská v bodě* ν*.*

Důkaz tohoto tvrzení je v knihách [2, 4]. Věta opět ve formě nutných a postačujících podmínek poskytuje návod, jakým způsobem lze bodovou regularitu funkce analyzovat. V další části ukážeme, jakým způsobem je možné snáze rozpoznat pokles amplitudy waveletové transformace, aniž by bylo nutné analyzovat celou polorovinu $u \in \mathbb{R}$ a $s \in \mathbb{R}^+$, která je uvažována v rovnici (4.6). Metoda je vhodná zejména k detekci singularit.

Maxima amplitudy waveletové transformace a detekce singularit

Zkoumání poklesu $|\mathrm{W}f(u,s)|$ v celé rovině $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ k lokalizaci singularit funkce je často zbytečně pracné. Namísto toho lze ukázat, že stačí nalézt jen maxima amplitudy $|\mathrm{W}f(u,s)|$ vzhledem k poloze u a tyto maxima sledovat k jemným škálám s. Představme

si to tak, že na nějaké škále s_0 uděláme řez waveletovou transformací $|\mathrm{W}f(u, s_0)|$ a ta bude tím pádem funkcí jediné proměnné u (polohy). Nalezneme maxima této funkce a takto pokračujeme dále pro menší škály. Provedeme-li tento proces (hypoteticky) pro všechna $s < s_0$, dostaneme soustavu maxim, jejichž polohy u jsou funkcí aktuální škály s. V mnoha případech tvoří $u(s)$ spojité křivky a tyto křivky pro $s \to 0_+$ konvergují k polohám singularit analyzované funkce a z jejich poklesu lze určit míru neregularity funkce v těchto bodech.

Waveletová transformace jako diferenciální operátor Uveďme nejprve pomocnou větu, která charakterizuje tvar waveletů s nulovými momenty a dává nový pohled na waveletovou transformaci. Tato věta bude užitečná v dalším popisu.

Věta 4.6. *Nechť ψ je rychle klesající wavelet (viz definice 4.3). Pak ψ má n nulových momentů právě když existuje rychle klesající funkce θ, taková, že ψ má tvar*

$$\psi(t) = (-1)^n \, \theta^{(n)}(t) \tag{4.7}$$

Dále, ψ má právě *n nulových momentů, právě když $\int_{\mathbb{R}} \theta(t) \, \mathrm{d}t \neq 0$. Jako důsledek* (4.7) *lze waveletovou transformaci funkce f přepsat do tvaru*

$$\mathrm{W}f(u, s) = s^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}u^n} (f * \overline{\theta}_s)(u) \tag{4.8}$$

kde

$$\overline{\theta}_s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \, \theta\left(\frac{-t}{s}\right) \tag{4.9}$$

Poznámka. Koeficient $(-1)^n$ je v rovnici (4.7) volně zvolen, ponecháváme ho kvůli kompatibilitě s (některou) literaturou. Jak je vidět z důkazu, rovnici (4.7) je možné napsat např. ve tvaru $\psi(t) = \theta^{(n)}(t)$, tak je také někdy uváděna.

Důkaz: Nechť ψ má n nulových momentů, dokažme, že ψ lze napsat ve tvaru (4.7). Protože ψ je rychle klesající, je nutně $\widehat{\psi} \in \mathbf{C}^\infty$, jak plyne z teorie Fourierovy transformace. Víme, že Fourierova transformace převádí derivace na násobení polynomem a naopak podle vzorců

$$\begin{aligned} \mathrm{FT}\left[(-i\,t)^k f(t)\right](\omega) &= \widehat{f}^{(k)}(\omega) \\ \mathrm{FT}\left[f^{(k)}(t)\right](\omega) &= (i\,\omega)^k \widehat{f}(\omega) \end{aligned}$$

Protože ψ má n nulových momentů, platí pro všechna $k < n$

$$0 = \int_{\mathbb{R}} t^k f(t) \, \mathrm{d}t = i^k \widehat{\psi}^{(k)}(0)$$

Neboli $\widehat{\psi}^{(k)}(0) = 0$ pro $k < n$. Fourierova transformace $\widehat{\psi}$ má tak v 0 n–násobný kořen a je tedy možné ji zapsat ve tvaru

$$\widehat{\psi}(\omega) = (-i\omega)^n \, \widehat{\theta}(\omega) \tag{4.10}$$

kde $\widehat{\theta}$ je omezená na okolí počátku. Inverzní Fourierova transformace poslední rovnice dává (4.7). Zbývá ukázat, že θ je rychle klesající. To stačí ukázat pro $n = 1$ neboť pro ostatní n to plyne ihned z matematické indukce (n–násobným opakováním téhož argumentu).

Mějme

$$\psi = \theta'$$

(ignorujme nyní kosmetické $(-1)^n$). Ukažme, že θ je rychle klesající v $-\infty$. Pro všechna $x < 0$ a pro všechna $m \geq 2$ platí

$$|\theta(x)| = \left| \int_{-\infty}^{x} \psi(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_{-\infty}^{x} |\psi(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_{-\infty}^{x} \frac{C_m}{1+|t|^m}\,\mathrm{d}t \leq \int_{-\infty}^{x} \frac{C_m}{|t|^m}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{C_m}{|x|^{m-1}\,(m-1)}$$

čímž jsme dokázali, že θ je rychle klesající v nekonečnu (absence $1+\cdots$ ve jmenovateli není samozřejmě v nekonečnu postatná). Stejným argumentem dostaneme, že θ je rychle klesající v $+\infty$. V okolí nuly ale není žádný problém, protože θ je nutně spojité (dokonce $\mathbf{C}^1$) a tedy na okolí počátku omezené, jistě bude existovat dostatečně vysoké C_m aby kladný klobouk $C_m/(1+|t|^m)$ byl v okolí nuly větší než θ.

Mějme naopak θ rychle klesající takové, že ψ splňuje (4.7). Fourierovou transformací rovnice (4.7) dostáváme (4.10). Protože $|\widehat{\theta}(\omega)| \leq \int_{\mathbb{R}} |\theta(t)|\,\mathrm{d}t \leq +\infty$ (θ je rychle klesající), je $\widehat{\theta}$ omezená a z rovnice (4.10) plyne, že pro $k < n$ je

$$\widehat{\psi}^{(k)}(0) = 0 \quad \forall\, k < n$$

Inverzní Fourierovou transformací dostáváme

$$\int_{\mathbb{R}} t^k\,\psi(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \forall\, k < n$$

což jsme chtěli ukázat.
Podívejme se nyní, za jakých okolností má ψ ve tvaru (4.7) více než n nulových momentů. K tomu je třeba, aby $\int_{\mathbb{R}} t^n\,\psi(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Fourierova transformace na tuto rovnici dává ekvivalentní rovnici

$$0 = \int_{\mathbb{R}} t^n\,\psi(t)\,\mathrm{d}t = i^n\,\widehat{\psi}^{(n)}(0)$$

Dosadíme za $\widehat{\psi}$ z rovnice (4.10) (n–tou derivaci $\widehat{\theta}$ je možno provést, $\widehat{\theta} \in \mathbf{C}^\infty$, protože θ je rychle klesající) a dostaneme další ekvivalentní rovnici

$$0 = \int_{\mathbb{R}} t^n\,\psi(t)\,\mathrm{d}t = n!\,\widehat{\theta}(0)$$

Integrál je tedy zřejmě nulový právě když $\widehat{\theta}(0) = \int_{\mathbb{R}} \theta(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Wavelet ψ má tak právě n nulových momentů právě když $\int_{\mathbb{R}} \theta(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$.
Jediné, co zbývá ukázat, je přepis waveletové transformace do tvaru (4.8). Víme (viz (2.6)), že waveletovou transformaci je možné napsat ve tvaru

$$\mathrm{W}f(u,s) = f * \overline{\psi}_s(u) \quad \text{kde} \quad \overline{\psi}_s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}}\psi\left(\frac{-t}{s}\right)$$

Dosazením za $\psi(t)$ z (4.7) dostaneme, že $\overline{\psi}_s(t) = s^n\,\overline{\theta}_s{}^{(n)}(t)$, záměnou konvoluce a derivace dostaneme

$$\mathrm{W}f(u,s) = f * s^n\,\overline{\theta}_s{}^{(n)}(u) = s^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}u^n}(f * \overline{\theta}_s)(u)$$

což je rovnice (4.8). □

Máme-li wavelet s jedním nulovým momentem, je $\psi = -\theta'$, a protože θ je dobře lokalizovaná, waveletová transformace ve tvaru (4.8) je pak jen obyčejná časová derivace původního signálu zhlazeného konvolučním jádrem $\overline{\theta}_s$, škála s udává, v jak velkém měřítku bude signál zhlazen. Waveletová transformace se tak chová jako diferenciální operátor, který pracuje s derivovanou funkcí s pohyblivým rozlišením daným přvrácenou hodnotou $1/s$. Při vyšším počtu nulových momentů poroste zřejmým způsobem řád derivace. Díky tomuto jednoduchému výsledku si lze takto waveletovou transformaci poměrně dobře představit.

Učiňme v souvislosti s poslední větou ještě jedno malé pozorování, které nám částečně objasní, kde se bere ono $s^{1/2}$ ve vzorcích (4.4), (4.5) a dalších.
Předpokládejme, že $\psi = (-1)^n\,\theta^{(n)}$ a $\int_{\mathbb{R}} \theta(t)\,\mathrm{d}t = K \neq 0$. Protože θ je rychle klesající, lze ukázat, že ve smyslu distribucí konverguje $\frac{1}{\sqrt{s}}\,\overline{\theta}_s$ k Diracově δ–funkci, přesněji

$$\lim_{s\to 0_+} \frac{1}{\sqrt{s}}\,\overline{\theta}_s = K\,\delta$$

neboli pro funkce f spojité a omezené platí

$$\lim_{s\to 0_+} \int_{\mathbb{R}} f(t)\frac{1}{\sqrt{s}}\overline{\theta}_s(t)\,\mathrm{d}t = K\,f(0)$$

Velmi hrubě, avšak názorně naznačme: nechť je θ vzhledem k rychlému poklesu nezanedbatelné jen v intervalu $[-C\,,\,C]$. Pak

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\frac{1}{\sqrt{s}}\overline{\theta}_s(t)\,\mathrm{d}t \approx \int_{-Cs}^{Cs} f(t)\frac{1}{\sqrt{s}}\overline{\theta}_s(t)\,\mathrm{d}t$$

Aplikací věty o střední hodnotě na pravou stranu můžeme napsat

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\frac{1}{\sqrt{s}}\overline{\theta}_s(t)\,\mathrm{d}t \approx f(\xi)\underbrace{\frac{1}{\sqrt{s}}\overline{\theta}_s(\xi)\,2\,Cs}_{\approx K,\ \text{viz dále}} \quad \text{kde}\ \ \xi \in [-Cs\,,\,Cs]$$

V této rovnici opět aplikací věty o střední hodnotě (ξ bude v tomto případě jiné, ale díky spojitosti θ a následné limitě $\xi \to 0$ to dále není důležité)

$$\frac{1}{\sqrt{s}}\overline{\theta}_s(\xi)\,2\,Cs = \int_{-Cs}^{Cs} \frac{1}{\sqrt{s}}\overline{\theta}_s(t)\,\mathrm{d}t \approx K \quad \forall\, s > 0$$

Zde je podstatné přenásobení $1/\sqrt{s}$ pro zachování $\mathbf{L^1}(\mathbb{R})$ normy $\overline{\theta}_s$ nezávislé na s. Kombinací předchozích dvou rovnic dostáváme celkově

$$\lim_{s\to 0_+} \int_{\mathbb{R}} f(t)\frac{1}{\sqrt{s}}\overline{\theta}_s(t)\,\mathrm{d}t \approx \lim_{s\to 0_+} f(\xi)K$$

Protože $\xi \in [-Cs\,,\,Cs]$ a f je spojitá, je $f(\xi) \to f(0)$ pro $s \to 0$, čímž dostáváme požadovaný výsledek.
Dokončeme pozorování, z rovnice (4.8) v poslední větě víme, že

$$\mathrm{W}f(u,s) = s^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}u^n}(f * \overline{\theta}_s)(u)$$

Máme-li f v okolí u dostatečně hladkou, můžeme psát

$$\lim_{s\to 0_+} \frac{\mathrm{W}f(u,s)}{s^{n+1/2}} = \lim_{s\to 0_+} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}u^n}(f * \underbrace{\frac{1}{\sqrt{s}}\,\overline{\theta}_s}_{\to K\,\delta})(u) = K\, f^{(n)}(u)$$

Tedy na malých škálách je

$$\mathrm{W}f(u,s) \sim f^{(n)}(u)\, s^{n+1/2}$$

Tímto dostáváme slíbený vztah mezi waveletovou transformací, kterou zde chápeme jako diferenciální operátor, a přímou derivací analyzované funkce. Alespoň nepatrně jsme tak poodhalili princip, na jakém fungují mnohem silnější a precizněji podané věty 4.4 a 4.5, které jsme však uvedli bez důkazů.

Maxima waveletové transformace Vraťme se zpět k původnímu tématu — sledování maxim waveletové transformace k charakterizaci regularity funkce. Představme si nespojitý, tedy 'schodovitý', signál, po zhlazení jádrem $\overline{\theta}_s$ a zderivování (které představuje aplikaci waveletové transformace s jedním nulovým momentem) dostaneme maxima této derivace (transformace) tam, kde byl původní signál nespojitý (přesněji v blízkosti těchto bodů, pro $s \to 0_+$ se sledováním maxim budeme blížit k původním bodům nespojitosti). Toto je základní myšlenka, jak lze sledování maxim waveletové transformace využít k lokalizaci singularit signálu. Při použití waveletu s vyšším počtem nulových momentů lze analogicky analyzovat signál s vyšší regularitou.
Vyslovme nyní důležitou větu, která říká, že *každou* neregularitu signálu je nutně možné nalézt sledováním křivek tvořených maximy waveletové transformace k nízkým škálám.

Věta 4.7 (Hwang, Mallat)**.** *Nechť $\psi \in \mathbf{C}^{\mathrm{n}}$ je wavelet s kompaktním nosičem tvaru $\psi = (-1)^n\,\theta^{(n)}$ kde $\int_{\mathbb{R}} \theta(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$ (tedy wavelet má právě n nulových momentů). Nechť je signál $f \in \mathbf{L^1}[a\,,\,b]$. Jestliže existuje $s_0 > 0$ takové, že pro všechna $s < s_0$ nemá $|\mathrm{W}f(u,s)|$ žádné lokální maximum vzhledem k u přes všechna $u \in [a\,,\,b]$, pak pro všechna $\varepsilon > 0$ je funkce f je stejnoměrně n–lipschitzovská na intervalu $[a+\varepsilon\,,\,b-\varepsilon]$.*

Větu uvedeme bez důkazu, ten je možné nalézt například v článku *S.Mallat, W.L.Hwang. Singularity detection and processing with wavelets, březen 1992.* Použijeme-li wavelet s jedním nulovým momentem, věta nám říká, že analyzovaná funkce může být nediferencovatelná (tedy méně něž 1–lipschitzovská) jedině v bodě ν, ke kterému existuje posloupnost bodů (u_k, s_k) taková, že $|\mathrm{W}f(u,s)|$ má vzhledem k u v těchto bodech lokální maximum a

$$\lim_{k\to+\infty} (u_k, s_k) = (\nu, 0)$$

Není jisté, zda tyto body budou ležet na jedné spojité křivce, kterou by tak stačilo sledovat, nebo že funkce je skutečně neregulární v místě, ke kterému křivka maxim pro $s \to 0_+$ konverguje, ale věta nám zaručuje, že nelze žádnou singularitu funkce 'minout' pokud budeme na waveletové tranformaci sledovat pouze její lokální maxima vzhledem k u a jejich šíření pro $s \to 0_+$.
Tento postup má bohužel své nevýhody. Začneme-li v nějakém s_0 nalezením maxim $|\mathrm{W}f(u,s)|$ a budeme sledovat jejich šíření k nízkým škálám, může se snadno stát, že některé z takto sledovaných křivek náhle 'skončí' a nepokračují k nízkým škálám. Maxima takto mohou tvořit v polorovině (u,s) jakési ostrůvky, které nemají s neregularitou funkce nic společného ale komplikují numerickou analýzu. Lze však ukázat, že tento případ nemůže nastat, pokud použitý wavelet je derivací Gaussiánu. Zformulujme to přesně v následující větě.

Věta 4.8 (Hummel, Poggio, Yuille)**.** *Nechť ψ je wavelet takový, že $\psi = (-1)^n \theta^{(n)}$ kde θ je Gaussián. Pak pro všechny $f \in \mathbf{L^2}(\mathbb{R})$ leží maxima $|\mathrm{W}f(u,s)|$ na spojitých křivkách, které jsou nepřerušené pro $s \to 0_+$.*

Důkaz: Tvrzení vyplyne z principu maxima pro rovnici vedení tepla. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že použitý Gaussián je normovaný ve tvaru

$$\theta(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(\frac{-t^2}{4}\right)$$

Pak $\theta_s = \frac{1}{\sqrt{s}}\,\theta(\frac{t}{s})$ má tvar

$$\theta_s(t) = \frac{1}{2\sqrt{s\,\pi}} \exp\left(\frac{-t^2}{4\,s^2}\right)$$

Ukažme nyní vztah mezi rovnicí vedení tepla a waveletovou transformací. Řešme rovnici

$$\frac{\partial g(u,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 g(u,\tau)}{\partial u^2}$$

s počáteční podmínkou $g(u,0) = g_0(u)$. Standardním řešením, tedy aplikací Fourierovy transformace na rovnici i počáteční podmínku a vyřešením obyčejné diferenciální rovnice, dostaneme pro řešení

$$\widehat{g}(\omega,\tau) = \widehat{g}_0(\omega) \exp(-\tau\omega^2)$$

Pro inverzní Fourierovu transformaci exponenciály na pravé straně platí

$$\mathrm{FT}^{-1}\left[\exp(-\tau\omega^2)\right](t) = \frac{1}{2\sqrt{\tau\,\pi}} \exp\left(\frac{-t^2}{4\tau}\right) = \tau^{-1/4}\,\theta_{\sqrt{\tau}}(t)$$

Inverzní Fourierovou transformací řešení $\widehat{g}$ tak dostáváme celkově

$$g(u,\tau) = \tau^{-1/4} g_0 * \theta_{\sqrt{\tau}}(u)$$

Vraťme se k waveletové transformaci, z věty 4.6 víme, že waveletová transformace má tvar diferenciálního operátoru, rovnici (4.8) můžeme přepsat na

$$\mathrm{W}f(u,s) = s^n f^{(n)} * \overline{\theta}_s$$

kde derivace $f^{(n)}$ chápeme ve smyslu distribucí. Protože v případě Gaussiánu je $\overline{\theta}_s \equiv \theta_s$, zvolíme-li $s = \sqrt{\tau}$ a $g_0 = f^{(n)}$ dostáváme z posledních dvou rovnic

$$\mathrm{W}f(u,s) = s^{n+1/2} g(u,s^2)$$

Waveletová transformace je tedy úměrná řešení rovnice vedení tepla s kvadratickým plynutím času a počáteční podmínkou $f^{(n)}$.
Nyní ukažme, proč jsou křivky směrem k nízkým škálám nutně spojité. Nechť zkoumaná křivka leží celá v rozmezí $u \in (a\,,\ b)$ a od škály $\sqrt{s_2}$ se šíří k nižším škálám, zajímá nás, zda může být někde přerušena. Uvažujeme rovnici vedení tepla na oblasti Ω definovanou intervaly $u \in (a\,,\ b)$ a $s \in (s_0\,,\ s_1)$ kde $0 < s_0 < s_1 < s_2$. Z principu maxima parabolické rovnice vedení tepla plyne, že globální maximum $|g(u,s)|$ se může nabývat jedině na prostorové hranici oblasti, tedy $u \in \{a,b\}$ nebo v počátečním čase, tedy $s = s_0$.

Maxima amplitudy $|\mathrm{W}f(u,s)|$ uvažujeme vždy vzhledem k u, tedy pro pevné s. Nechť je nyní křivka maxim přerušena (tedy nespojitá) v bodě $(u_1, \sqrt{s_1})$ kde $u_1 \in (a\,,\,b)$. Pak si lze snadno rozmyslet, že musí existovat dostatečně malé $\varepsilon > 0$ takové, že pro $u \in [u_1 - \varepsilon\,,\, u_1 + \varepsilon]$ a $s \in [s_1 - \varepsilon\,,\, s_1]$ má funkce $|g(u,s)|$ globální maximum v bodě (u_1, s_1). Omezením rovnice vedení tepla na příslušnou oblast tak dostáváme spor s principem maxima. Křivka maxim tedy nemůže být nespojitá pro žádné $\sqrt{s_1} > 0$ a šíří se nutně až k libovolně nízkým škálám. □

Věta ukazuje, proč je použití waveletů ve tvaru derivací Gaussiánu (jako je například Mexický klobouk) k detekci singularit výhodné. Také způsob nalezení maxim amplitudy waveletové transformace je užitečné rovnou přizpůsobit faktu, že tato maxima musí tvořit spojité křivky, tím se totiž eliminují falešná 'maxima' vzniklá jen v důsledku numerických chyb. Derivace Gaussiánu jsou z těchto důvodů často používané.

Měření regularity Dále je třeba vzít při hledání singularit v úvahu, že věta 4.7 dává jen nutnou podmínku existence singularity. Může se snadno stát, že nalezneme křivku maxim amplitudy waveletové transformace konvergující k $(u,s) = (\nu, 0)$, ačkoliv analyzovaná funkce v ν žádnou singularitu nemá. V každém bodě ν, ke kterému najdeme konvergující křivku, tak musíme podle provést analýzu regularity funkce pomocí věty 4.4, tedy vyhodnocením poklesu amplitudy waveletové transformace s klesající škálou. Představme si, že funkce f má v bodě $\nu \in (a\,,\,b)$ izolovanou singularitu a křivka maxim waveletové transformace k této singularitě míří jaksi 'přímo', konkrétně požadujme, aby od určitého s_0 blíže k nule byla pro $u \in (a\,,\,b)$ maxima amplitudy pouze v nějakém kuželu

$$|u - \nu| \leq K\, s \tag{4.11}$$

Omezíme se na konstatování, že tímto vyloučíme nežádoucí (leč regulární) chování funkce f v okolí singularity. Věta 4.4 nám říká, že funkce f je na okolí bodu ν stejnoměrně α–lipschitzovská, jestliže pro nějaké A splňuje amplituda waveletové transformace

$$|\mathrm{W}f(u,s)| \leq A\, s^{\alpha+1/2}$$

Tuto nerovnici musí splňovat speciálně maxima na analyzované křivce. Zlogaritmováním nerovnice dostaneme

$$\log|\mathrm{W}f(u,s)| \leq \log A + \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\log s$$

Lipschitzovskou regularitu funkce v bodě ν tak zjistíme z maximálního sklonu grafu funkce $\log|\mathrm{W}f(u,s)|$ v závislosti na $\log s$ po křivce maxima waveletové transformace směrem k nízkým škálám, tedy $\log s \to -\infty$. Takto změříme míru nalezené singularity a zároveň tak odhalíme 'falešné singularity', ke kterým míří křivky maxim waveletové transformace, ačkoliv je v nich analyzovaný signál regulární. Nutno zdůraznit, že tento postup je použitelný jen v případě 'rozumných' signálů, tedy takových, ve kterých analyzujeme jen izolované singularity a křivky maxim jsou od sebe 'dobře oddělené' ve smyslu kuželu (4.11). Pro funkce, které jsou například skoro všude singulární je nutné využít sofistikovanější motody, kterou zde však již nebudeme popisovat (jen poznamenáme, že nám opět pomůže waveletová transformace).

Zhlazené singularity Posledním tématem souvisejícím s detekcí singularit pomocí waveletové transformace, na které se krátce podíváme, je detekce 'hladkých singularit'.

V naměřeném signálu se mohou objevovat důležité prvky jako jsou téměř–ostré zlomy nebo skoro–nespojitosti, které jsou však nekonečně hladké. To může být způsobeno mimo jiné tím, že původní 'čistý' signál byl v těchto bodech skutečně singulární, avšak proces měření a analýzy jej svou nepřesností zhladil. Například při použití optických přístrojů získáme vlivem difrakce nekonečně hladké změny signálu tam, kde bychom si přáli mít ostré kontury. Tyto hladké singularity nám při použití dosud vyložených metod uniknou, neboť jsme se vždy zaměřovali jen na α–lipschitzovskost signálu, ale protože signál je nyní $\mathbf{C}^\infty$, bude úbytek amplitudy waveletové transformace závislý jen na použitém waveletu — na počtu jeho nulových momentů. Pojďme se podívat, jak si zde můžeme pomoci.
Rozdělme vstupní signál f na 'čistý' signál f_0 (který obsahuje měřené singularity) a měřením způsobené zhlazení, které simulujeme konvolucí s gaussovským jádrem g_σ s rozptylem σ^2. Máme tedy

$$f(t) = f_0 * g_\sigma(t)$$

Gaussián uvažujeme normovaný, tedy

$$g_\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-t^2}{2\sigma^2}\right)$$

Následující větou, kterou opět uvedeme bez důkazu, dáme do souvislosti úbytek waveletové transformace s α–lipschitzovskostí čistého signálu f_0 a mírou yhlazení vyjádřenou variancí σ^2 Gaussiánu g_σ. Důležité je, že použitý wavelet musí být opět derivací Gaussiánu.

Věta 4.9. *Nechť ψ je wavelet tvaru $\psi = (-1)^n \theta^{(n)}$, kde*

$$\theta(t) = K \exp\left(\frac{-t^2}{2\beta^2}\right)$$

tedy Gaussián. Pak jestliže $f = f_0 * g_\sigma$ a f_0 je stejnoměrně α–lipschitzovská na intervalu $[\nu - h\,,\ \nu + h]$ tak existuje konstanta A tak, že pro všechna $u \in [\nu - h\,,\ \nu + h]$ a všechna $s > 0$ je

$$|\mathrm{W}f(u,s)| \le A\, s^{\alpha+1/2} \left(1 + \frac{\sigma^2}{\beta^2 s^2}\right)^{-(n-\alpha)/2} \tag{4.12}$$

Tato věta je opět použitelná pro funkce f_0 s izolovanými singularitami. Podobně jako v předschozím případě použijeme k odhadu konstant α a σ úbytek waveletové transformace na křivce jejích maxim. Zlogaritmováním nerovnice (4.12) dostaneme

$$\log|\mathrm{W}f(u,s)| \le \log A + \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\log s - \frac{n-\alpha}{2}\log\left(1 + \frac{\sigma^2}{\beta^2 s^2}\right)$$

Pro numerický odhad parametrů α a σ budeme považovat tuto nerovnici za přibližnou rovnost a hledané parametry určíme regresní analýzou. Takto zjistíme pravděpodobnou regularitu čistého signálu a míru jeho zhlazení.

5 Víceškálová detekce hran v obrazu

Hrany objektů jsou po informační stránce jedním z nejdůležitějších prvků obrazu. Jejich nalezení je tak častým cílem obrazové analýzy. Z polohy hran lze určit například poloha a orientace daného zkoumaného objektu na obraze. Nasnímáme-li kamerou při nějakém fyzikálním experimentu pohyb objektu, lze pak zpracováním videosekvence určit rychlost a rotaci objektu, aniž by bylo při vlastním experimentu potřeba do pohybu objektu nějak zasahovat. Toho se využívá například při měření v aerodynamických tunelech, kdy jsou do proudícího vzduchu přimíchány malé lehké částečky, které jsou snímány kamerou, a z videozáznamu jejich pohybu je sestaven profil proudícího vzduchu. Znalost poloh hran může však sloužit také jako vstupní brána ke složitějšímu zpracování — například rozpoznání objektů a mnoho dalších konkrétních aplikací.
Podobně jako v případě hladkosti je i zde potřeba říci, co přesně máme na mysli pod pojmem 'hrana objektu'. Bývá často obtížné matematicky popsat pojmy z běžného života, jejichž význam každý snadno intuitivně chápe. Bod na hraně předmětu nejspíše definujeme jako místo nespojitosti jasu v obrazu. Toto však není vždy zcela vyhovující definice, například kostičkovanou košili považujeme jistě za jeden objekt, jehož okraje nás zajímají, ale podle výše uvedené definice se ohraničí každá kostička a okraje košile tak v záplavě mnoha jiných okrajů zcela zaniknou. Jak si zde pomoci? Problém není v samotné definici okraje, ale v tom, co přesně považujeme v obrazu za 'objekt' a co je pro nás jen 'výplň objektu', neboli vzor. Řešením je na celý obraz nahlížet s různým pozorovacím rozlišením. Při vysokém rozlišení dokážeme zaměřit na jednotlivé kostičky a ty pak budou tvořit to co nazveme 'objektem', při nižším rozlišením nám kostičky splynou v jednolitý vzor a rozpoznaným objektem se tak stane celá košile. Waveletová transformace je na toto pozorování při různých škálách dobře uzpůsobena. Ve větě 4.6 jsme viděli, že u waveletů s nulovými momenty změna škály představuje zhlazení vstupního signálu více či méně lokalizovaným konvolučním jádrem θ. Stejným způsobem budeme měnit rozlišení i nyní, volbou míry zhlazování dosáhneme toho, že v obraze zaniknou malé objekty (často vzorky skutečných objektů) a zbydou objekty takové velikosti, která nás zajímá.
V minulé kapitole bylo ukázáno, jakým způsobem je možné sledováním maxim waveletové transformace lokalizovat singularity v signálu. Nyní nám jde přesně o totéž, neboť nespojitosti nebo prudké změny jasu představují právě detekované hrany, je však třeba se přizpůsobit tomu, že signál je nyní dvourozměrný. Na rozdíl od minulé kapitoly však nebudeme hrany hledat při limitě $s \to 0$, ale při při pevně dané škále, neboť tím docílíme variabilního rozlišení, o kterém hovoří předchozí odstavec.
Namísto plně spojité waveletové transformace nyní použijeme tzv. dyadickou waveletovou transformaci, což je waveletová transformace s diskrétním škálováním po dyadických krocích $s = 2^{-j}$, ale spojitou translační proměnnou u. Taková transformace je vhodnější pro numerické výpočty.
Také v této kapitole pracujeme jen s reálnými wavelety.

Hrany v obrazu Nechť je jas obrazu popsán funkcí $f(x_1, x_2)$. Ačkoliv jsme naznačili, že za hranu budeme považovat nespojitost jasu, pro konkrétnější definici uvažujeme nyní funkci f diferencovatelnou a hrany popíšeme podle velikosti gradientu $\left|\vec{\nabla} f(x)\right|$. Nelze úplně říci, že za bodem hrany bude bod lokálního maxima $\left|\vec{\nabla} f(x)\right|$, neboť chceme, aby hrany tvořily souvislé křivky, nikoliv jednobodové útvary. Lokální maximum tak nesmíme chtít 'ze všech stran', ale jen 'kolmo na hranu'. Přesněji — řekneme, že bod

$x = (x_1, x_2)$ je bodem hrany, jestliže funkce

$$\lambda \longrightarrow \left|\vec{\nabla} f\left(x + \lambda \vec{\nabla} f(x)\right)\right| \tag{5.1}$$

nabývá pro $\lambda = 0$ lokálního maxima. Za hrany tedy považujeme inflexní body funkce f, jestliže ji zkoumáme v řezu ve směru jejího gradientu. V praxi je někdy nutné tuto definici doplnit ještě o podmínku požadující, aby hodnota $\left|\vec{\nabla} f\right|$ byla v bodě hrany vyšší než nějaká zvolená konstanta. Tím odstraníme 'hrany' vzniklé v místech, kde se intenzita mění jen velmi pomalu a žádná skutečná hrana předmětu tak pravděpodobně na obraze není.

Waveletový přístup s proměnlivým rozlišením V minulé části jsme ve větě 4.6 ukázali, že waveletová transformace představuje časovou derivaci původního signálu zhlazeného konvolučním jádrem, které zprostředkuje různé pozorovací rozlišení. Při velikém zhlazení vymizí z původní funkce (vysokofrekvenční) detaily a zůstanou jen pomalé dlouhotrvající přechody, při malém zhlazení lze zachovat libovolné detaily. Toto je přesně přístup, který nyní použijeme při detekci hran, abychom změnou rozlišení zahrnuli do analýzy různě veliké objekty a umožnili tak odlišení objektů a vzorů.
Jak již bylo řečeno, namísto spojité waveletové transformace použijeme nyní tzv. dyadickou waveletovou transformaci. Jedná se o spojitou waveletovou transformaci vzatou v diskrétních škálách $s = 2^{-j}$ ale s ponechanou spojitou translační proměnnou u. Jednodimenzionální dyadickou waveletovou transformaci tak můžeme zapsat

$$\mathrm{W}_2 f(u, j) = \langle f(t)\,,\, \psi_j(t-u)\rangle \quad \text{kde } \psi_j(t) = \sqrt{2^j}\,\psi\left(2^j\, t\right) \quad u \in \mathbb{R},\, j \in \mathbb{Z}$$

Stejně jako v kapitole 3 označuje diskrétní parametr j pozorovací rozlišení, tedy s rostoucím j zaměřujeme na menší a menší detaily analyzované funkce, zatímco s klesajícím j zkoumáme z analyzované funkce širší celky. Protože obrazový signál je dvoudimeznzionální a my potřebujeme analyzovat jeho parciální derivace v obou směrech, budeme počítat dyadické waveletové transformace dvě — $\mathrm{W}_2^{(1)} f$ a $\mathrm{W}_2^{(2)} f$ — a k jejich výpočtu použijeme dva (tzv. *orientované*) wavelety $\psi^{(1)}$ a $\psi^{(2)}$, z nichž každý 'čte' analyzovanou funkci v jednom směru.
Označíme-li opět

$$\psi_j^{(1)}(x_1, x_2) = 2^j\,\psi^{(1)}\left(2^j\, x_1,\, 2^j\, x_2\right)$$
$$\psi_j^{(2)}(x_1, x_2) = 2^j\,\psi^{(2)}\left(2^j\, x_1,\, 2^j\, x_2\right)$$

budou mít dyadické waveletové transformace funkce $f \in \mathbf{L^2}(\mathbb{R}^2)$ tvar

$$\mathrm{W}_2^{(1)} f(u, j) = \left\langle f\,,\, \psi_j^{(1)}(\cdot - u)\right\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2)\,\psi_j^{(1)}(x_1 - u_1, x_2 - u_2)\,\mathrm{d}(x_1, x_2) \tag{5.2a}$$

$$\mathrm{W}_2^{(2)} f(u, j) = \left\langle f\,,\, \psi_j^{(2)}(\cdot - u)\right\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2)\,\psi_j^{(2)}(x_1 - u_1, x_2 - u_2)\,\mathrm{d}(x_1, x_2) \tag{5.2b}$$

kde $j \in \mathbb{Z}$ a značí škálu $s = 2^{-j}$ a $u = (u_1, u_2)$ je spojitá translační proměnná.
Podle návodu ve větě 4.6 použijeme wavelety, které jsou derivací rychle klesající funkce θ, protože nyní analyzujeme dvourozměrný signál, bude se jednat o parciální derivace.

$$\psi^{(1)} = -\frac{\partial \theta}{\partial x_1}, \quad \psi^{(2)} = -\frac{\partial \theta}{\partial x_2} \tag{5.3}$$

Zavedeme-li analogicky s (4.9) (škála $s = 2^{-j}$)

$$\theta_j(x_1, x_2) = 2^j\, \theta\left(2^j\, x_1, 2^j\, x_2\right) \quad \text{a} \quad \overline{\theta}_j(x) = \theta_j(-x)$$

přepíšeme pak podle věty 4.6 již známým způsobem waveletovou transformaci jako diferenciální operátor, tedy

$$\mathrm{W}_2^{(k)} f(u, j) = 2^{-j} \frac{\partial}{\partial u_k} (f * \overline{\theta}_j)(u) \tag{5.4}$$

kde $k \in \{1, 2\}$ značí odpovídající wavelet z (5.3).
Polohu hran jsme definovali pomocí $\vec{\boldsymbol{\nabla}} f$. Kvůli odlišení objektů a vzorů podle velikosti, tedy analýzou obrazu při různém pozorovacím rozlišení, chceme zpracovávat nikoliv původní obraz f, ale obraz zhlazený více či méně lokalizovaným konvolučním jádrem θ. Namísto $\vec{\boldsymbol{\nabla}} f$ tak musíme zkoumat $\vec{\boldsymbol{\nabla}}(f * \theta)$.
Z rovnice (5.4) vidíme, že je

$$\begin{pmatrix} \mathrm{W}_2^{(1)} f(u, j) \\ \mathrm{W}_2^{(2)} f(u, j) \end{pmatrix} = 2^{-j}\, \vec{\boldsymbol{\nabla}} (f * \overline{\theta}_j)(u)$$

Vektor waveletových transformací

$$\vec{\mathbf{W}}_{\mathbf{2}}\, f(u, j) = \begin{pmatrix} \mathrm{W}_2^{(1)} f(u, j) \\ \mathrm{W}_2^{(2)} f(u, j) \end{pmatrix}$$

je tak přesně to, co k detekci hran na různých škálách potřebujeme, neboť $\vec{\mathbf{W}}_{\mathbf{2}}\, f$ je úměrný $\vec{\boldsymbol{\nabla}}(f * \theta)$. Analogicky s rovnicí (5.1) tak řekneme, že bod u je bodem hrany při rozlišení j, jestliže funkce

$$\lambda \;\longrightarrow\; \left| \vec{\mathbf{W}} f \left(u + \lambda\, \vec{\mathbf{W}}(u, j),\, j \right) \right| \tag{5.5}$$

nabývá lokálního maxima pro $\lambda = 0$.
Nyní si ukažme, jaký způsobem lze takto definované hrany efektivně nalézt.

Algoritmus rychlé detekce hran

Konstrukce waveletů Nejprve se podívejme, jakým způsobem zkostruovat wavelety vhodné k detekci hran a navíc takové, aby k výpočtu waveletové transformace (5.2) bylo možné použít nějaký rychlý algoritmus podobný Mallatovu z věty 3.8. Z tohoto důvodu zde využijeme poznatky o konstrukci waveletů z kapitoly 3 a i zde zkonstruujeme použitou škálovou funkci a wavelety pomocí diskrétních filtrů $h[n]$ a $g[n]$, protože ty jsou důležité v transformačním algoritmu. Aby bylo možné algoritmus prakticky realizovat, budeme navíc požadovat, aby tyto filtry měly jen konečný počet nenulových složek.
Potřebujeme sestavit takové wavelety $\psi^{(1,2)}$, které by splňovaly (5.3) pro zvolené θ. Z rovnice (3.15) ve větě 3.6 víme, že Fourierovu transformaci waveletu lze napsat pomocí filtru $g[n]$ a škálové funkce φ ve tvaru

$$\widehat{\psi}(\omega) = \widehat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right) \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{5.6}$$

Použijeme-li zhlazovací konvoluční jádro θ v separovaném tvaru

$$\theta(x_1, x_2) = 4\, \varphi(2\, x_1)\, \varphi(2\, x_2) \tag{5.7}$$

dostaneme ze vztahů (5.3) pro $\psi^{(1,2)}$

$$\widehat{\psi}^{(1)}(\omega_1,\omega_2) = (-i\,\omega_1)\,\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega_2}{2}\right) \tag{5.8a}$$

$$\widehat{\psi}^{(2)}(\omega_1,\omega_2) = (-i\,\omega_2)\,\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega_2}{2}\right) \tag{5.8b}$$

Analogie s rovnicí (5.6) je zřejmá, jednodimenzionální wavelety z kapitoly 3 rozšíříme tedy takovýmto separovaným způsobem, konkrétně

$$\psi^{(1)}(\omega_1,\omega_2) = \widehat{g}\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega_2}{2}\right)$$
$$\psi^{(2)}(\omega_1,\omega_2) = \widehat{g}\left(\frac{\omega_2}{2}\right)\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega_2}{2}\right)$$

Podobně jako v kapitole 3 i zde pro vhodnější zápis některých rovnic značíme symbolem $\widehat{g}$ Fourierovu transformaci posloupnosti $g[n]$ přenásobenou $1/2$, je třeba to mít na paměti.

Zbývá vyjádřit explicitně high–pass filtr $g[n]$ a najít vhodnou škálovou funkci φ. Porovnáním rovnic (5.6) a (5.8) vidíme, že ideálně je třeba zvolit takové $g[n]$ aby $\widehat{g}(\omega/2) = -i\,\omega$, inverzní Fourierova transformace funkce $\omega \to -4\,i\omega$ (jedno násobení $\times 2$ za $\omega_1/2$ a jedno viz předchozí odstavec; Fourierovu transformaci samozřejmě uvažujeme $\mathbf{l^2}(\mathbb{Z}) \leftrightarrow \mathbf{L^2}\,[-\pi\,,\,\pi]$), nemá bohužel konečný počet nenulových složek. Budeme se tak muset uchýlit k nějaké vhodné aproximaci. Zvolíme-li

$$g[n] = \begin{cases} \frac{-\sqrt{2}}{2} & \text{pro } n = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{pro } n = 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

bude pak (posloupnost $g[n]$ chápeme při konvoluci jako násobky Diracových δ–funkcí umístěných v diskrétních bodech $n = 1, 2, \ldots$; tečka značí proměnnou, přes kterou probíhá konvoluce)

$$\Big(\theta(\cdot, x_2) * g\Big)(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\theta(x_1 - 1, x_2) - \theta(x_1, x_2)\Big) \approx -\frac{\partial}{\partial x_1}\theta(x_1, x_2)$$

Takto definovaný filtr $g[n]$ představuje tedy diskrétní aproximaci derivace, výhodou je konečný a velmi malý počet nenulových složek, což značně urychlí chod algoritmu. Pro Fourierovu transformaci filtru $g[n]$ platí

$$\widehat{g}(\omega) = \frac{1}{2}\mathrm{FT}\,[g[n]]\,(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,(\exp(-i\omega) - 1) = \frac{-i}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\exp\left(\frac{-i\omega}{2}\right)$$

Dosazením této funkce do rovnic (5.8) dostaneme úplný popis použitých waveletů z dané škálové funkce φ. Zbývá nám tak již jen navrhnout tuto funkci.

Škálovou funkci φ popíšeme opět (stejně jako v kapitole 3) pomocí diskrétního low–pass filtru $h[n]$. Lze ukázat, že filtr $h[n]$ má konečný počet nenulových složek, právě když funkce φ má kompaktní nosič, musíme tedy nutně hledat jen mezi funkcemi s kompaktním nosičem. Jaké další vlastnosti škálové funkce požadujeme? Její hlavní úkol plyne z rovnice (5.7), bude tedy sloužit ke zhlazování obrazu při přechodu k nižším rozlišením. Dále poslouží k inicializaci algoritmu, neboť vstupní hodnoty $a_0[n_1, n_2]$ algoritmu přestavují aproximace 'skutečných' hodnot signálu $f(n_1, n_2)$ vzniklé hladkým zprůměrováním právě pomocí jádra daného škálovou funkcí, konkrétně

$$a_0[n_1, n_2] = \langle f(x_1, x_2\,,\,\varphi(x_1 - n_1)\varphi(x_2 - n_2)\rangle$$

Také v průběhu algoritmu budou analogicky definované hodnoty a_j představovat vstupní signál v různém rozlišení. Škálová funkce musí tedy dobře průměrovat, ať už v konvoluci nebo ve skalárním součinu. Kdybychom pro takovou funkci šli do obchodu, řekneme, že chceme něco jako gaussovský klobouk, ale s kompaktním nosičem. Takové funkce lze dobře sestrojit pomocí splinů. Provedeme-li n konvolucí obdélníkové funkce

$$b(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \in [-1\,,\,1] \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

dostaneme spline n-tého stupně, s kompaktním nosičem, regularitou danou stupněm n a vhodným tvarem. Zvolíme-li například $n = 2$, tedy

$$\varphi(t) = b * b * b(t)$$

dostaneme kvadratický spline. Protože pro Fourierovu transformaci funkce $b(t)$ platí

$$\widehat{b}(\omega) = \frac{2\sin(\omega)}{\omega}$$

je

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \frac{8\sin^3(\omega)}{\omega^3}$$

Vztah mezi funkcí φ a filtrem $h[n]$ udává tzv. škálová rovnice ve tvaru (3.5) nebo (3.6), kde víme, že $\varphi(0) = 1$, je tedy

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \widehat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right)\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{5.10}$$

kde $\widehat{h}(\omega)$ je opět Fourierova transformace $h[n]$ přenásobená $1/\sqrt{2}$. Pro $\widehat{h}(\omega)$ tedy dostáváme

$$\widehat{h}(\omega) = \frac{\widehat{\varphi}(2\omega)}{\widehat{\varphi}(\omega)} = \cos^3(\omega)$$

Inverzní Fourierovou transformací tak dostáváme pro filtr $h[n]$

$$h[n] = \begin{cases} \frac{3}{8}\sqrt{2} & \text{pro } n = -1, 1 \\ \frac{1}{8}\sqrt{2} & \text{pro } n = -3, 3 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Tedy opět málo nenulových složek. Tato škálová funkce je samozřejmě jen návrh a představuje jednu z mnoha možností, v každém případě je však pro zvolenou funkci φ nutné spočítat složky filtru $h[n]$.
Nakonec ještě zaveďme značení pro dilatace škálové funkce, již standardním způsobem definujeme

$$\varphi_j(t) = \sqrt{2^j}\,\varphi\left(2^j\,t\right) \quad \text{a} \quad \overline{\varphi}_j(t) = \varphi_j(-t)$$

Rychlá dyadická transformace a nalezení hran Nyní máme k dispozici vše potřebné k realizaci algoritmu. Algoritmus rychlé dyadické waveletové transformace je velmi podobný Mallatovu algoritmu rozkladu funkce do waveletové báze z kapitoly 3. Mějme funkci $f \in \mathbf{L^2}(\mathbb{R}^2)$, která představuje analyzovaný obraz. Ten je v praxi vždy zadán maticí diskrétních hodnot jasu (pixelů), funkci f tak známe jen v diskrétních hodnotách $f(n_1, n_2)$. Jako jsme v Mallatově algoritmu uvažovali vstupní signál v nějaké

aproximaci, tedy v podobě jeho projekce na některý z prostorů V_j, budeme i zde vstupní data potřebovat ve tvaru

$$a_0[n_1, n_2] = \langle f(x_1, x_2)\,,\ \varphi(x_1 - n_1)\varphi(x_2 - n_2)\rangle$$

Hodnoty $a_0[n]$ by tedy měly být zprůměrované skutečné hodnoty jasu v malém okolí polohy pixelu. V odstavci o inicializaci Mallatova algoritmu na straně 33 je blíže vysvětleno, proč můžeme předpokládat $f[n_1, n_2] \approx a_0[n_1, n_2]$ a za skutečná vstupní data vzít tak známé hodnoty $f[n_1, n_2]$. Pro hrubou představuje jen poznamenejme, že měřící zařízení (třeba CCD kamery), které nám poskytnou hodnoty $f[n_1, n_2]$ již ze své podstaty většinou podobná zprůměrování provádějí, postup tedy můžeme považovat za korektní, aniž bychom to blíže matematicky zdůvodňovali, jako je to na straně 33. Hodnoty $a_0[n]$ by tedy měly být zprůměrované skutečné hodnoty jasu v malém okolí polohy pixelu. V odstavci o inicializaci Mallatova algoritmu na straně 33 je blíže vysvětleno, proč můžeme předpokládat $f[n_1, n_2] \approx a_0[n_1, n_2]$ a za skutečná vstupní data vzít tak známé hodnoty $f[n_1, n_2]$. Pro hrubou představuje jen poznamenejme, že měřící zařízení (třeba CCD kamery), které nám poskytnou hodnoty $f[n_1, n_2]$ již ze své podstaty většinou podobná zprůměrování provádějí, postup tedy můžeme považovat za korektní, aniž bychom to blíže matematicky zdůvodňovali, jako je to na straně 33.
Označme tedy obecně pro $n = (n_1, n_2)$

$$a_j[n] = \langle f(x_1, x_2)\,,\ \varphi_j(x_1 - n_1)\varphi_j(x_2 - n_2)\rangle$$

hodnoty představující aproximaci obrazu při rozlišení j. Tyto hodnoty představují vstupní obraz zhlazený konvolučním jádrem θ z rovnice (5.7). Protože na začátku algoritmu představují hodnoty a_0 všechny známé pixely obrazu, je zřejmé, že rozlišení můžeme v průběhu algoritmu jedině zhoršovat a ptát se tak jen na hodnoty a_j pro $j < 0$.
Analogicky označme pro $n = (n_1, n_2)$

$$d_j^{(1)}[n] = \mathrm{W}_2^{(1)} f(n, j) \quad \text{a} \quad d_j^{(2)}[n] = \mathrm{W}_2^{(2)} f(n, j)$$

Výpočet těchto hodnot je cílem algoritmu rychlé dyadické waveletové transformace. Podobně jako v Mallatově algoritmu i zde jsou ústředním prvkem kaskádovité konvoluce s filtry $h[n]$ a $g[n]$, pro snazší zápis algoritmu si označme jejich dilatace

$$h_j[n] = \begin{cases} h[2^j\, n] & \text{pokud} \quad 2^j\, n \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$
$$\overline{h}_j[n] = h_j[-n]$$

a

$$g_j[n] = \begin{cases} g[2^j\, n] & \text{pokud} \quad 2^j\, n \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$
$$\overline{g}_j[n] = g_j[-n]$$

Lze snadno ověřit, že Fourierovy transformace těchto filtrů jsou

$$\widehat{h}_j(\omega) = \widehat{h}\left(\frac{\omega}{2^j}\right)$$
$$\widehat{\overline{h}}_j(\omega) = \widehat{h}^*\left(\frac{\omega}{2^j}\right)$$

Analogicky pro $\widehat{g}_j(\omega)$. Připomeňme, že v praxi mají posloupnosti $h[n]$ a $g[n]$ jen velmi malý počet nenulových složek.
Jako poslední označme dvoudimenzionální filtr v separovaném tvaru (tedy složený ze dvou jednodimenzionálních)

$$a \times b[n_1, n_2] = a[n_1]\, b[n_2]$$

Stejný způsob zápisu použijeme i pro škálovou funkci φ, kde diskrétní hodnoy n_i nahradí spojité x_i.
Předmětem algoritmu bude daný vstup $a_0[n]$ při rozlišení $j = 1$ rozložit kaskádovitě na horší a horší aproximace $a_j[n]$ pro $j < 0$ (vzniklé zhlazováním jádrem θ) plus doplňující waveletové koeficienty $d_j^{(1,2)}[n]$. Po předem daném počtu těchto kroků je výstupem algoritmu zbytková aproximace $a_J[n]$ a sada waveletových koeficientů $d_j^{(1,2)}[n]$ pro $J < j \leq 0$, kde konečné rozlišení $J < 0$ je dáno rozměrem obrazu (při veliké míře zhlazení jsou již všechny pixely obrazu stejné a nemá cenu dále pokračovat). Na jednotlivých úrovních jsou z waveletových koeficientů $d_j^{(1,2)}[n]$ hledána maxima dyadické waveletové transformace a z nich polohy hran v obraze. Jednotlivé úrovně j tak odpovídají různým pozorovacím rozlišením, při kterém v obraze hledáme hrany objektů, což je cíl této kapitoly.
Nyní již ve formě věty uveďme algoritmus rychlé dyadické waveletové transformace.

Věta 5.1. *Jsou-li $h[n]$ a $g[n]$ výše popsané filtry, pak pro aproximační koeficienty $a_j[n]$ a dyadické waveletové koeficienty $d_j^{(1)}[n]$, $d_j^{(2)}[n]$ platí*

$$a_{j-1}[n] \;=\; a_j * (\overline{h}_j \times \overline{h}_j)\,[n] \tag{5.11}$$

$$d_{j-1}^{(1)}[n] \;=\; a_j * (\overline{g}_j \times \delta)\,[n] \tag{5.12}$$

$$d_{j-1}^{(2)}[n] \;=\; a_j * (\delta \times \overline{g}_j)\,[n] \tag{5.13}$$

kde $j < 0$, $n = (n_1, n_2)$ a δ značí diskrétní Diracův filtr.

Důkaz:
Důkaz vztahu (5.11) Z definice a_j je

$$a_{j-1}[n] = \langle f(x_1, x_2)\,,\, \varphi_j(x_1 - n_1)\varphi_j(x_2 - n_2)\rangle = f * (\overline{\varphi}_{j-1} \times \overline{\varphi}_{j-1})\,(u)$$

Aplikací dvourozměrné analogie Whittakerovy formule (3.12) dostaneme pro aplikaci Fourierovy transformace ($\omega = (\omega_1, \omega_2),\ k = (k_1, k_2)$)

$$\widehat{a}_{j-1}(\omega) = \sum_{k_1,k_2 \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(\omega + 2\,k\pi)\, \widehat{\varphi}^*_{j-1}(\omega_1 + 2\,k_1\pi)\, \widehat{\varphi}^*_{j-1}(\omega_2 + 2\,k_2\pi)$$

Z definice φ_j platí pro její Fourierovu transformaci

$$\widehat{\varphi}_j(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right)$$

S použitím škálové rovnice (5.10) dostáváme

$$\widehat{\varphi}_{j-1}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2^{j-1}}}\, \widehat{h}\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right)$$

Tuto hodnotu dosadíme do vztahu pro $\widehat{a}_{j-1}(\omega)$ a s využitím 2π–periodicity $\widehat{h}(\omega)$ (víme že $j \leq 0$) dostaneme

$$\widehat{a}_{j-1}(\omega) = \sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(\omega + 2\,k\pi)\,\frac{1}{2^{j-1}}\widehat{h}^*\left(\frac{\omega_1 + 2\,k_1\pi}{2^j}\right)\widehat{\varphi}^*\left(\frac{\omega_1 + 2\,k_1\pi}{2^j}\right)$$
$$\widehat{h}^*\left(\frac{\omega_2 + 2\,k_2\pi}{2^j}\right)\widehat{\varphi}^*\left(\frac{\omega_2 + 2\,k_2\pi}{2^j}\right) =$$

$$= 2\,\widehat{h}^*\left(\frac{\omega_1}{2^j}\right)\widehat{h}^*\left(\frac{\omega_2}{2^j}\right)\underbrace{\sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(\omega + 2\,k\pi)\,\frac{1}{2^j}\widehat{\varphi}^*\left(\frac{\omega_1 + 2\,k_1\pi}{2^j}\right)\widehat{\varphi}^*\left(\frac{\omega_2 + 2\,k_2\pi}{2^j}\right)}_{=\widehat{a}_j(\omega),\text{ viz začátek důkazu}}$$

Tedy

$$\widehat{a}_{j-1}(\omega) = 2\,\widehat{h}^*\left(\frac{\omega_1}{2^j}\right)\widehat{h}^*\left(\frac{\omega_2}{2^j}\right)\widehat{a}_j(\omega)$$

Toto je Fourierova transformace dokazovaného tvrzení (5.11). (nesmíme nezapomenout na násobení $\sqrt{2}$ při přechodu $\sqrt{2}\,\widehat{h}(\omega) \to h[n]$)

Důkaz vztahu (5.12) V důkazu píšeme $d[n]$ namísto $d^{(1)}[n]$, stejně pro wavelety ψ a podobně. Opět rozepíšeme definici $d_{j-1}[n]$

$$d_{j-1}[n] = \langle f(x_1, x_2)\,,\ \psi_{j-1}(x_1 - n_1, x_2 - n_2)\rangle = f * \overline{\psi}_{j-1}(n)$$

Znovu aplikujeme Whittakerovu formuli (3.12) a dostaneme pro Fourierovu transformaci ($\omega = (\omega_1, \omega_2),\ k = (k_1, k_2)$)

$$\widehat{d}_{j-1}(\omega) = \sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(\omega + 2\,k\pi)\,\widehat{\psi}^*_{j-1}(\omega + 2\,k\pi)$$

Z definice ψ_j vidíme, že platí

$$\widehat{\psi}_j(\omega) = \frac{1}{2^j}\widehat{\psi}\left(\frac{\omega_1}{2^j},\ \frac{\omega_2}{2^j}\right)$$

Dosadíme-li do této rovnice za $\widehat{\psi}$ na pravé straně z rovnic (5.9), dostaneme

$$\widehat{\psi}_{j-1}(\omega) = \frac{1}{2^{j-1}}\,\widehat{g}\left(\frac{\omega_1}{2^j}\right)\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega_1}{2^j}\right)\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega_2}{2^j}\right)$$

Z této rovnice dosadíme do vztahu pro $\widehat{d}_{j-1}(\omega)$ a využijeme 2π–periodicity $\widehat{g}(\omega)$

$$\widehat{d}_{j-1}(\omega) = \sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(\omega + 2k\pi)\,\frac{1}{2^{j-1}}\widehat{g}^*\left(\frac{\omega_1 + 2k_1\pi}{2^j}\right)\widehat{\varphi}^*\left(\frac{\omega_1 + 2k_1\pi}{2^j}\right)\widehat{\varphi}^*\left(\frac{\omega_2 + 2k_2\pi}{2^j}\right) =$$
$$= 2\,\widehat{g}^*\left(\frac{\omega_1}{2^j}\right)\underbrace{\sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(\omega + 2\,k\pi)\,\frac{1}{2^j}\,\widehat{\varphi}^*\left(\frac{\omega_1 + 2\,k_1\pi}{2^j}\right)\widehat{\varphi}^*\left(\frac{\omega_2 + 2\,k_2\pi}{2^j}\right)}_{=\widehat{a}_j(\omega)} =$$
$$= 2\,\widehat{g}^*\left(\frac{\omega_1}{2^j}\right)\,\widehat{a}_j(\omega)$$

Dostáváme tak

$$\widehat{d}_{j-1}(\omega) = 2\,\widehat{g}^*\left(\frac{\omega_1}{2^j}\right)\,\widehat{a}_j(\omega)$$

což je Fourierova transformace dokazované rovnice (5.12). (Připomínáme opět, že $\widehat{g}(\omega)$ je polovina Fourierovy transformace posloupnosti $g[n]$)
Důkaz vztahu (5.13) je stejný. □

Tímto algoritmem snadno spočteme hodnoty waveletové transformace v diskrétních bodech $\mathrm{W}f(n, 2^{-j})$, $j \leq 0$. U konečných obrazů (jiné ani neexistují) jsou kovoluce přes celé $\mathbb{Z}$ nahrazeny cyklickými konvolucemi přes pixely obrazu, obraz je tak uvažován periodický.
V definici hrany (5.5) hledáme lokální maximum velikosti vektoru waveletové transformace $\left|\vec{\mathbf{W}}_{\mathbf{2}}\, f\right|$ v jednodimenzionálním okolí hranového bodu, kde směr tohoto okolí je totožný se směrem $\vec{\mathbf{W}}_{\mathbf{2}}\, f$ (tedy 'proti hraně'). Víme, že je

$$\left|\vec{\mathbf{W}}_{\mathbf{2}}\, f(n,j)\right|^2 \;=\; d_j^{(1)}[n]^2 + d_j^{(2)}[n]^2$$

$$\vec{\mathbf{W}}_{\mathbf{2}}\, f(n,j) \;=\; \left(d_j^{(1)}[n],\, d_j^{(2)}[n]\right)$$

Při daném rozlišení j budeme tedy hledat takové body $n = (n_1, n_2)$, kde je hodnota $\left|\vec{\mathbf{W}}_{\mathbf{2}}\, f(n,j)\right|^2$ větší než hodnota ve dvou sousedních bodech $n \pm \vec{\varepsilon}$, kde $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ je vektor se složkami $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ a jehož směr je co nejbližší směru vektoru $\vec{\mathbf{W}}_{\mathbf{2}}\, f(n,j)$, neboli $\vec{\varepsilon} \approx \lambda \vec{\mathbf{W}}_{\mathbf{2}}\, f(n,j)$. Tímto najdeme body, ve kterých gradient jasu nabývá lokálního maxima v jednodimenzionálním okolí přibližně ve směru gradientu, což jsou hranové body. Často je vhodné vyloučit z analýzy ty body, ve kterých není $\left|\vec{\mathbf{W}}_{\mathbf{2}}\, f(n,j)\right|$ větší než daná konstanta, tím se vyloučí hledání 'hran' v místech, kde se intenzita mění jen velmi pomalu a o žádnou hranu tak pravděpodobně nejde. Pro každou škálu je nakonec výsledkem postupu mapa pixelů (je jich stejný počet, jako má vstupní obraz), kde u každého je rozhodnuto, zda je či není hranovým bodem. Toto nejčastěji bývá znázorňováno černými křivkami na bílém pozadí.

6 Závěr

Jako primární cíl této bakalářské práce jsem chápal seznámit se s novým tématem, zjistit, jaký má potenciál v souvislosti s mým dalším studiem nebo profesním životem a najít nové možnosti dalšího vzdělání, které je částečně mimo rámec studijného plánu, ale vhodným způsobem ho doplňuje. Z tohoto hlediska považuji práci za úspěšnou, neboť waveletová teorie je z mého pohledu ideální kombinací hluboké teorie a velkých praktických možností, uplatnitelných mimo jiné ve fyzikální praxi, což je mé studijní zaměření. Námětů na další studium jsem objevil možná až příliš mnoho, neboť v této práci jsem se dotkl jen velmi základních výsledků, pro opravdu efektivní praktické využijí je potřeba hlubšího studia. Jako nejzajímavější směry bych uvedl použití waveletové transformace k počítačovému rozpoznání obrazu či videosekvencí (tzv. *computer vision*), dále pokračování teorie waveletových bází, jejichž zobecněné verze jsou velice efektivní k aproximacím a kompresi obrazů či videa, dále poskytují metody k odstranění šumu, které jsou velice účinné a přesto velmi citlivé k vlastnímu obrazu, výrazně tak překonávají některé běžně rozšířené metody, které lze s trochou nadsázky označit za hrubou sílu.

Ačkoliv je waveletová teorie stará několik desítek let, mnohé z těchto výsledků jsou velice čertsvé a některé matematické problémy z waveletové teorie jsou dosud otevřené, nabízí se zde tak prostor i pro velmi pokročilé studium.

Druhým cílem bylo pak vytvoření srozumitelného textu, kterých o waveletech v českém jazyce mnoho není a který by dalším zajemcům o waveletovou teorii usnadnil začátky. Zároveň jsem se pokusil uvést alespoň nějaký praktický výsledek s relativně podrobným návodem, abych čtenáře nezahltil množstvím teorie, která zdánlivě nikam nevede. Úspěšnost splnění tohoto úkolu musí samozřejmě zhodnotit čtenáři.

Literatura

[1] Brémaud, Pierre, *Mathematical Principles of Signal Processing*
Springer, 1. vydání, New York 2002

[2] Mallat, Stéphane, *A wavelet tour of signal processing*
Academic Press, 2. vydání, San Diego 1999

[3] Najzar, Karel, *Základy teorie waveletů*
Karolinum, 1. vydání, Praha 2004

[4] Siddiqi, Abul Hasan, *Applied Functional Analysis*
Marcel Dekker, 1. vydání, New York 2004