UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

MATEMATICKO – FYZIKÁLNÍ FAKULTA

JAN SOBOTKA
–
INSPIRACE PO STU LETECH

Disertační práce

Mgr. Tomáš Zuščák

2008

Školitel: Prof. RNDr. František Kuřina, CSc.

Prohlašuji, že jsem disertační práci vypracoval samostatně s využitím pramenů, které uvádím v seznamu literatury.

V Hradci Králové 10. června 2008

....

Tomáš Zuščák

Anotace

Inspirativnost díla Jana Sobotky pro učitele matematiky. Život a dílo Jana Sobotky, charakteristika jeho působení. Stav geometrického bádání v českých zemích a ve světě v 19. a na počátku 20. století. Rozbor vybraných prací Jana Sobotky. Apolloniova úloha a příbuzné úlohy – Apolloniova úloha v euklidovské rovině, na kulové ploše a v trojrozměrném euklidovském prostoru, izogonální sféra. Podnětnost Sobotkova díla ilustrovaná na několika úlohách. Význam kalkulů v geometrii.

Obsah

Předmluva

Považuji za potřebné zmínit se zde o problémech, s nimiž jsem se musel v průběhu přípravy práce vypořádat.

Jak koncipovat práci o Janu Sobotkovi, významné postavě české matematiky z přelomu 19. a 20. století? Jakmile jsem se seznámil s částí jeho díla, uvědomil jsem si obtížnost své pozice.

Práce neměla být zaměřena na detailní zpracování Sobotkových životních osudů. Poznal jsem Sobotku jako autora významné učebnice z deskriptivní geometrie a monumentálních přednášek z diferenciální geometrie. Studie obou těchto textů však již byly provedeny Zbyňkem Nádeníkem a Lenkou Čechovou a nebylo mým úkolem se jimi zabývat. Zbývalo tedy zhodnotit ostatní Sobotkovy vědecké práce publikované v časopisech. Vzhledem k tomu, že zejména těmito otázkami se zabýval v padesátých letech 20. století kolektiv 30 autorů pod vedením Františka Vyčichla, přičemž každou oblast hodnotili autoři, kteří v ní vědecky pracovali, byl tento úkol pro mne zcela nereálný. Nejsem matematik, který by měl přehled o všech oblastech matematiky, kterými se Sobotka zabýval, a na jeho výsledky nenavazuji. Snad by to ani nemělo smysl, protože se současná matematika zabývá jinými problémy, než které řešil Sobotka.

Jsem učitel matematiky. Po dlouhé etapě hledání jsem nalezl vnitřní motivaci k tomu, abych se zabýval působením matematika žijícího v létech 1862 až 1931. Došel jsem k rozhodnutí soustředit se na otázku: V čem může být dílo Jana Sobotky inspirativní pro učitele matematiky? Odpověď na ni je zpracována v předkládané práci. Abych se mohl otázkou vážně zabývat, musel jsem se seznámit se Sobotkovým životem a prací, porozumět některým jeho publikacím a snažit se postihnout, co je i dnes aktuální, neboť hlavní orientace Sobotkových studií se týkala konstruktivní stránky různých oblastí geometrie. Přitom ty z jeho prací, které jsem studoval, řeší problémy elementární geometrie. Ta se z dnešního hlediska jeví na počátku 20. století již jako disciplína řešící problémy sice zajímavé, ale přece jen dílčí a nepodstatné pro rozvoj matematiky. Elementární geometrie je již vyčerpanou oblastí matematiky.

Na okraj pro ilustraci připomínám problematičnost hodnocení vědeckých osobností minulosti příkladem Františka Kadeřávka, který vidí v Sobotkovi „geometra světového formátu“ ([36]). Při vší úctě a obdivu k Sobotkovu dílu se mi toto hodnocení jeví, vzhledem k světové matematice Sobotkovy doby, přece jen nerealistické.

V práci uvádím to, co považuji za nutné k pochopení mých hypotetických závěrů o inspiraci Sobotkou: pohled na jeho život a dílo, pohled na geometrii studované doby a rozbor vybraných Sobotkových prací. To, k jakým inspiracím mne Sobotkovo dílo dovedlo, ukazuji na příkladech kapitoly „Jan Sobotka jako zdroj inspirace“.

Výklad se snažím formulovat tak, aby byl srozumitelný absolventu univerzitního učitelského studia. Partie, které patrně rozsah tohoto studia překračují, stručně vykládám.

Úvod

„Dějinami se stává taková minulost, která zřetelně souvisí s přítomností a budoucností ... Nemáme jiná kritéria pro výběr fakt a jejich pořádání než ta, která se nám dnes jeví jako závažná ... Dějiny jsou přítomny nejenom v našich katedrálách, hradech a stále přestavovaných městech, nýbrž v nás samotných, v tom, jak myslíme, co považujeme za důležité a správné a co ne.“

(Dušan Třeštík, *Češi a dějiny v postmoderním očistci*, NLN, 2005)

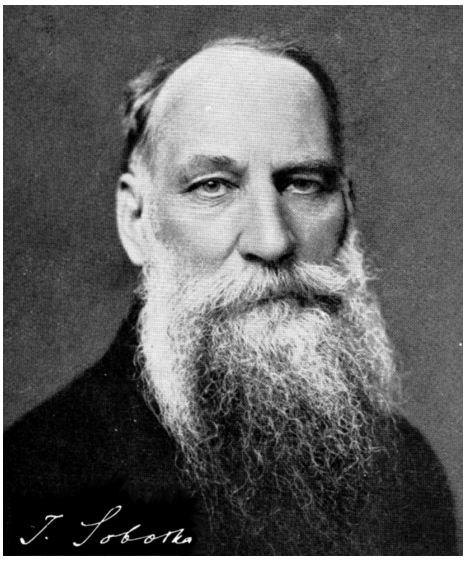
Proč se máme zabývat historií matematiky? Podle mého názoru existují minimálně následující tři důvody.

1. Geneze vzniku matematických pojmů, postupů a důkazů pomáhá hlubšímu pochopení matematiky.

2. Ontogeneze je do jisté míry analogií fylogeneze. Studium historie tak může pomoci koncipovat vhodné matematické kurikulum, může však přispívat i k porozumění procesům studentského vnímání matematiky.

3. Metody přístupu k řešení matematických problémů, které nalezly uplatnění v minulosti, mohou být inspirací pro práci jak matematika, tak i učitele matematiky.

V čem může být dílo úctyhodné postavy Jana Sobotky ještě po stu letech inspirativní?



Na tuto otázku se snažím svou prací odpovědět.

1. Život a dílo Jana Sobotky

1.1 Prameny

Všimněme si nejprve literatury, která se vztahuje k životu a dílu Jana Sobotky. U příležitosti jeho šedesátin v roce 1922 byly v Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky uveřejněny na počátku roku 1923 dva články [15], [16]. První z nich napsal F. Kadeřávek. Při četbě na mne působil sice poněkud pateticky, je však zajímavý tím, že se v něm objevuje několik informací, které v dalších pracích o Sobotkovi již nenalezneme (např. bližší informace o jeho sourozencích, naznačení jisté neshody mezi Sobotkou a Tilšerem). Nalezneme zde i seznam Sobotkových prací do roku 1922. Druhý článek (věnovaný Sobotkovým didaktickým názorům) napsal K. Vorovka. Jeho postřehy můžeme v různých obměnách, příp. dále doplněné, nalézt i v některých z dalších prací o Sobotkovi.

Asi nejobsažnější pojednání věnované Sobotkovi napsal B. Bydžovský ([17]). Vyšlo v roce 1932 asi rok po Sobotkově smrti nákladem České akademie věd a umění. Kniha je koncipována jako posmrtná vzpomínka „*kolegy a přítele zesnulého*“. Nalezneme zde kromě životopisných údajů a informací o jeho působení v různých organizacích a spolcích i obecnou charakteristiku Sobotkova díla z hlediska metodického a stručný rozbor obsahové stránky jeho prací. Bydžovský si stručně všímá i jeho názorů na vyučování matematiky na středních školách. Publikaci doplňuje úplný seznam Sobotkových prací. Bydžovský se výslovně zmiňuje[1], že v rámci posmrtné vzpomínky není možné provést podrobný rozbor prací Jana Sobotky.

V 50. letech minulého století působila pod vedením Františka Vyčichla skupina geometrů, která si dala za úkol prostudovat a zhodnotit dílo Jana Sobotky. Skupina vznikla podle [18] v roce 1952. S využitím seznamu Sobotkových prací uveřejněného v [17] byla tato pojednání rozdělena do čtyř oblastí. Studium prací v určité oblasti vedl vždy jeden pracovník: Karel Havlíček práce z projektivní geometrie, Alois Urban okruh prací z deskriptivní geometrie, Zdeněk Vančura práce z diferenciální geometrie a František Vyčichlo práce z dalších oblastí geometrie. Ústřední postavou celé skupiny byl František Vyčichlo, který podle [18] nebyl pouze iniciátor celé skupiny, ale

[1] Viz [17], str. 25.

„... věnoval tomuto úkolu mnoho práce a času. Vedl, radil, pomáhal a získával další spolupracovníky z řad geometrů na Českém vysokém učení technickém a Karlově univerzitě v Praze ... a dosáhl zařazení tohoto úkolu jako fakultního úkolu na fakultě inženýrského stavitelství ČVUT,“ ([18], str. II).

Na vlastním studiu se podílelo 30 lidí[2]. Referáty o jednotlivých pracích a jejich recenze byly (s výjimkou deskriptivně geometrických prací) diskutovány v letech 1954 až 1956 na geometrických seminářích ČVUT vedených F. Vyčichlem. Referáty o pracích z oblasti deskriptivní geometrie zazněly na samostatném semináři, který vedl A. Urban. V průběhu roku 1957 byly jednotlivé referáty rozmnoženy. F. Vyčichlo měl vypracovat na základě závěrečných hodnotících zpráv vedoucích jednotlivých oblastí úvod k těmto referátům. Vzhledem k nečekanému úmrtí F. Vyčichla napsal Z. Vančura úvod k referátům, který je doplněn závěrečnými hodnotícími zprávami vedoucích jednotlivých oblastí (F. Vyčichla nahradil Bořivoj Kepr).

Rozmnožené kopie referátů spolu s úvodem byly rozeslány v roce 1958 na československá matematická pracoviště. Historii vzniku tohoto materiálu jsem věnoval větší pozornost, protože s odstupem 50 let od vzniku se stal tento materiál již obtížně dostupným a některé informace můžeme nalézt pouze v něm. Teprve nedávno se mi podařilo získat kopie výsledků práce této skupiny, kterou pořídil J. Bečvář z originálů, které byly nedávno náhodou objeveny v knihovně přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity v Brně. Co se týče náplně jednotlivých referátů, jedná se o jedno či dvoustránková (zcela výjimečně vícestránková) shrnutí obsahu jednotlivých prací, která však neobsahují žádné další rozbory, případně hodnocení.

V roce 1962 při příležitosti výročí sta let od narození Jana Sobotky byly v některých matematických časopisech uveřejněny další články jemu věnované. V Pokrocích matematiky, fyziky a informatiky nalezneme přepis slavnostní řeči, kterou pronesl Alois Urban v Řepníkách u Vysokého Mýta dne 2. září 1962 při odhalení Sobotkovy pamětní desky ([19]). V Časopise pro pěstování matematiky byl uveřejněn článek [20] A. Urbana a Z. Vančury. Konečně v časopise Matematika ve škole můžeme nalézt další článek A. Urbana [21]. Ač mají všechny články stejného autora, příp. spoluautora, nejsou totožné. Ovšem nalezneme v nich i mnoho společného. Co se týče životopisných dat, jsou zde převážně informace, které

[2] Kromě již zmíněných F. Vyčichla, K. Havlíčka, A. Urbana a Z. Vančury i tito pracovníci: J. Adam, I. Benešová, B. Budinský, K. Drábek, L. Drs, S. Gabriel, L. Granát, F. Harant, V. Havel, I. Hlaváček, S. Horák, V. Jalůvka, B. Kepr, K. Komínek, V. Kopecká, Z. Mašek, V. Matějková, J. Novák, L. Pachta, J. Pavlíček, J. Stehno, J. Šmahel, J. Štěpánek, L. Vaňatová, V. Vilhelm, M. Zelenka.

můžeme nalézt již u Bydžovského. Práce vesměs také odkazují na aktivity skupiny F. Vyčichla, jejímiž členy byli i tito autoři. V každém z těchto článků můžeme kromě stručného přiblížení Sobotkových prací nalézt i stručné hodnocení jejich obsahu a užitých metod. Jsou v nich i části věnované Sobotkovým didaktickým názorům, jedná se o informace, které můžeme najít již v článku K. Vorovky, případně nekrologu B. Bydžovského.

Od těchto tří článků se odlišuje článek [22] J. Kotyka uveřejněný také v roce 1962 v Rozhledech matematicko-fyzikálních. Tento článek je koncipován jako vzpomínka žáka na svého učitele. V článku cituje některé Sobotkovy výroky „*z jeho přednášek, cvičení i besed s posluchači.*“ V současnosti mohou působit již poněkud úsměvně závěrečné poznámky, poplatné době svého vzniku.

Podle internetové stránky věnované Janu Sobotkovi[3] mají existovat další tři práce o Sobotkovi[4], které se mi však nepodařilo sehnat. Jako zdroj dalších informací vhodných pro porozumění stavu geometrického bádání v Čechách v době působení Jana Sobotky (případně v době jemu těsně předcházející) může posloužit i práce Jaroslava Folty „*Česká geometrická škola*“ ([23]).

1.2 Život Jana Sobotky

Jan Sobotka se narodil 2. září 1862 v Řepníkách u Vysokého Mýta v rodině krejčovského mistra Josefa Sobotky a jeho manželky Františky. Měl devět sourozenců, dospělosti se však dožili pouze dva bratři Josef a Antonín a dvě sestry Františka a Barbora. Starší Josef se chtěl nejprve věnovat učitelství, posléze však studoval lékařskou fakultu a jako lékař i pracoval. Mladší Antonín se stal advokátem a působil i jako poslanec.

Středoškolské vzdělání nabyl Sobotka s podporou státního stipendia i svého staršího bratra na německé reálce v Praze III, na Kampě. V letech 1881 až 1886 studoval matematiku a deskriptivní geometrii na Karlově univerzitě a Českém vysokém učení technickém. Mezi jeho učitele patřili např. bratři Eduard[5] a Emil[6] Weyrové, František Josef Studnička[7],

[3] http://www.math.muni.cz/math/biografie/jan_sobotka.html

[4] Jmenovitě: Klapka, J., *Jan Sobotka*, Naše věda, 13 (1932), str. 34; Košťál, R., *Vznik a vývoj pobočky JČMF v Brně*, Praha, 1968; Hrůza, B., *Jan Sobotka*, Události na VUT v Brně, 9 (1999), č. 3, str. 21.

[5] Eduard Weyr (1852 – 1903) – významný český matematik. Studoval na pražské technice i univerzitě. Roku 1873 získal titul doktora filozofie na univerzitě v Göttingen. Od roku 1875 působil na české technice v Praze, od roku 1876 jako mimořádný profesor. Roku 1881 jmenován řádným profesorem matematiky na pražské technice. Od roku 1891 suplující profesor na pražské univerzitě.

František Tilšer[8] a Bedřich Procházka[9]. Sobotka úspěšně nabyl učitelské způsobilosti pro vyučování matematiky a deskriptivní geometrie pro české střední školy, které si později doplnil i o možnost učit na německých školách.

V letech 1886 až 1891 působil jako asistent deskriptivní geometrie na české technice v Praze u F. Tilšera, kde měl na starosti nejen cvičení, ale příležitostně zastupoval Tilšera i v přednáškách. Podle [20] měl na Sobotkovu vědeckou činnost silný vliv pobyt v Curychu v roce 1891, kde rok studoval u profesora na zdejší technice Wilhelma Fiedlera[10]. Po návratu zpět do Prahy působil jako suplent deskriptivní geometrie na Českém vysokém učení technickém, kde zastupoval opět F. Tilšera. Podle F. Kadeřávka

> *„nebyla to práce snadná. Profesor Tilšr přednášíval téměř celý rok o své oblíbené organické geometrii formy[11], látce po výtce filozofické, a teprve na konci školního roku dostával se k výkladům o vlastních problémech deskriptivní geometrie. Podobný postup žádal i od svých zástupců. Sobotka použil pro své výklady jako vodítka přednášky vydané podle stenogramu pořízeného v přednáškách Tilšrových posluchačem Nigrinem. Byly to litografované přednášky vydané tajně proti vůli profesora Tilšra. Tím však bezděčně uvalil na sebe hněv Tilšrův a proto raději opustil po roce pražskou techniku,*“ ([15], str. 2).

V roce 1893 odjel Sobotka na další zahraniční studijní pobyt. Tentokrát pobyl jeden rok u R. Sturma, profesora na univerzitě ve Vratislavi. Po návratu do Prahy nemohl sehnat místo

---

6 Emil Weyr (1848 – 1894) – významný český matematik. Roku 1868 absolvoval techniku v Praze. Od r. 1871 mimořádný profesor matematiky na pražské technice. Roku 1875 byl jmenován řádným profesorem vídeňské univerzity.

7 František Josef Studnička (1836 – 1903) – český matematik. Roku 1861 absolvoval filozofickou fakultu vídeňské univerzity. V letech 1864 až 1871 působil na pražské technice. Roku 1871 byl jmenován řádným profesorem matematiky na pražské univerzitě.

8 František Tilšer (1825 – 1913) – český matematik. Původně studoval práva a filozofii. Později odešel k vojsku. R. 1855 jmenován profesorem deskriptivní geometrie na vojensko-inženýrské akademii v Loukách u Znojma. Od roku 1864 přednáší na pražské technice. Jeho předchůdce R. Skuherský začal přednášet česky a tím přispěl k tomu, že byla pražská technika od školního roku 1863/64 rozdělena na českou a německou část. Po smrti Skuherského (1863) byla vytvořena dvě místa profesora deskriptivní geometrie samostatně pro českou a německou část. Právě Tilšer byl jmenován profesorem na české části. V roce 1869 dochází k faktickému rozdělení české a německé techniky v Praze.

9 Bedřich Procházka (1855 – 1934) – český matematik. Roku 1876 absolvoval techniku v Praze. Stal se učitelem na reálkách, přitom v letech 1879 až 1883 (tj. i v době Sobotkova studia) suploval Tilšrovy přednášky na technice v Praze. Roku 1908 se stal profesorem na strojní a elektrotechnické fakultě ČVUT v Praze.

10 Wilhelm Fiedler (1832 – 1912) – německý matematik. Vystudoval univerzitu v Lipsku, učil na průmyslových školách ve Freibergu (od r. 1852) a Saské Kamenici (od r. 1853). V roce 1864 jmenován profesorem deskriptivní geometrie na pražské technice (její německé části). Snaží se zde zavést nepovinné přednášky i z projektivní geometrie. Jeho přednášky na německé části navštěvují i budoucí význační čeští matematici (např. bratři Weyrové). Již v roce 1867 odchází na polytechniku do Curychu.

11 *„Po r. 1875 vzbudila jistou pozornost* [Tilšrova] *„ikonognosie“, jeho slovy „organická geometrie formy“, ..., v níž zpřesnil geometrickou nomenklaturu i symboliku natolik, aby hlouběji a organicky odpovídala nejen pojmům prostorových tvarů, ale také operacím s nimi,*“ ([23], pozn. 84, str. 70).

nejen na žádné vysoké, ale ani na střední škole. Odjel proto roku 1894 do Vídně, kde se stal suplentem na jedné z místních reálek. Do roku 1896 již Sobotka publikoval řadu původních vědeckých prací. Jediné pojednání v češtině napsal roku 1885 ještě během svých studií v Praze. Práce byla uveřejněna v Časopise pro pěstování matematiky a fysiky v roce 1887. Dalších třináct, které byly publikovány v letech 1892 až 1896, zveřejnil výhradně v němčině. Jistým oceněním jeho činnosti bylo jmenování asistentem pro deskriptivní geometrii na vídeňské technice. Konečně 4. února 1897 byl jmenován na téže vysoké škole mimořádným profesorem deskriptivní a projektivní geometrie a grafického počítání.

Sobotkův návrat do českých zemí umožnilo založení nové vysoké školy, české techniky v Brně, roku 1899. Zde byl 19. září 1899 jmenován prvním řádným profesorem deskriptivní geometrie. Zanedlouho sehrály příznivé okolnosti svoji roli v Sobotkově životě podruhé. V roce 1903 byl jediným řádným profesorem matematiky na Karlově univerzitě v Praze F. J. Studnička. V té době se uvažovalo o vytvoření druhého profesorského místa, které by bylo vytvořeno pro potřeby geometrie a obsazeno Eduardem Weyrem[12]. Když však roku 1903 zemřeli jak Ed. Weyr, tak profesor Studnička, otevřela se Sobotkovi možnost působit na pražské univerzitě. Na druhé místo řádného profesora matematiky byl povolán další představitel mladší generace Karel Petr. Jan Sobotka byl 12. března 1904 jmenován řádným profesorem matematiky na filozofické fakultě Karlovy univerzity v Praze.

Většina prací[13] věnovaných Sobotkovi vyzdvihuje právě moment Sobotkova příchodu na pražskou univerzitu a jeho zdejší dlouholeté působení. Všimněme si nejprve toho, jaký měla změna pracoviště vliv na Sobotku osobně. Až do té doby působil na technických školách (ať již na vídeňské reálce nebo technických vysokých školách v Praze, Brně a ve Vídni). To představovalo pro Sobotku jistá omezení, jak uvádí Bydžovský v souvislosti s jeho působením na brněnské technice:

> *„... technika nebyla pravým místem pro plné rozvinutí jeho schopností a jeho činnosti ... úzký obor deskriptivní geometrie byl jen malou částí širokého pole vědeckého, do něhož se rozbíhal s usilovnou chutí ... také jeho založení jako učitele nehověl dosti vyučovací způsob techniky, vázaný studijními předpisy, jak je vyžaduje na technice praktická potřeba; konečně ani nebyla technika svým*

[12] Ke konci roku 1902 bylo Weyrovi sděleno, že má být 1. října 1903 jmenován řádným profesorem české univerzity. Před svým jmenováním však 23. července 1903 předčasně zemřel.

[13] [15], str. 3 – 4; [17], str. 6 – 12; [19], str. 356; [20], str. 383 – 383, [21], str. 624.

praktickým rázem vhodným místem pro získávání žáků a následovníků v teoretickém oboru, v němž S. působil,“ ([17], str. 6 – 7).

Mnohem obšírněji je v uvažovaných pracích diskutován význam Sobotkova jmenování pro situaci ve vyučování geometrie na české univerzitě v Praze. S příchodem Jana Sobotky nabývá tato výuka nové úrovně. Až do té doby mohl jediný řádný profesor F. J. Studnička věnovat geometrii (a to pouze zcela elementární) jen velmi omezenou část svých přednášek. Od roku 1891 se situace mírně zlepšila, když Eduard Weyr začal jako suplující profesor s výukou tří hodiny přednášek z geometrie, které však nebyly doplněny seminářem. Sobotka přišel na pražskou univerzitu ve chvíli, kdy vrcholilo úsilí o změnu tohoto stavu, a působil od počátku jako řádný profesor, který se mohl věnovat pouze geometrii. Došlo tak zákonitě k posílení a rozvoji výuky geometrie na této škole.

„*Přednášky a cvičení, které prof. Sobotka konal, ... týkaly se téměř všech oborů geometrie: byly to t. zv. základy geometrie, elementární geometrie, elementární geometrie projektivní v rouše syntetickém i analytickém, obšírný kurz geometrie diferenciální, speciální přednášky o algebraických plochách, o přímkové geometrii, o geometrických příbuznostech atd. Od roku 1912 konal pak pravidelné přednášky a cvičení z deskriptivní geometrie,*“ ([17], str. 11).

Přitom jeho působení na posluchače nebylo odkázáno pouze na přednášky, ale i na semináře a diskuze po jejich skončení, které podle Bydžovského probíhaly v jeho pracovně. Tak se Sobotkovi podařilo výrazně ovlivnit

„*... nastupující generace geometrů, kteří pak převážně jako středoškolští profesoři zase sami přispěli k dobré úrovni geometrie a zvláště deskriptivní geometrie na našich středních školách. Stal se tak pokračovatelem, nositelem a spolutvůrcem české geometrické tradice,*“ ([19], str. 356).

V době Sobotkova působení došlo také k významné změně vnějších podmínek pro výuku matematiky na filozofické fakultě Karlovy univerzity, kdy v roce 1911 získal matematický ústav nové prostory na Karlově[14]. Sobotka se aktivně podílel na vybudování zázemí pro tento ústav. O jeho osobnosti cosi vypovídá skutečnost, že těžce nesl jisté problémy (např. s rozdělením místností, zařizováním, organizací administrativy), které ze stěhování vyplývaly.

[14] Do té doby byly prostory pro výuku značně stísněné. Nejprve se nalézaly v Klementinu, později byly využívány i pronajaté byty. Ke změně situace došlo právě na podzim roku 1911.

Později v roce 1920 zažil i další organizační přerod, kdy došlo rozdělením filozofické fakulty ke vzniku přírodovědecké fakulty, na níž pak Sobotka působil.

Během svého působení na Karlově univerzitě zastával Sobotka i některé významné funkce. Ve školním roce 1906/07 byl děkanem a v roce 1907/08 proděkanem filozofické fakulty. V letech 1921 až 1924 zastupoval přírodovědeckou fakultu v akademickém senátu. Na Karlově univerzitě Sobotka působil až do své smrti 10. května 1931, kdy podlehl tuberkulóze.

1.3 Další činnost Jana Sobotky

Od začátku svých studií (roku 1881) byl Jan Sobotka členem Jednoty československých matematiků a fysiků. Velmi brzy (roku 1886) se stal členem jejího výboru, ve kterém působil nejprve jako účetní a pak (do roku 1891) jako zapisovatel. V době jeho zahraničních studijních cest a působení ve Vídni (1891 až 1899) nemohla být jeho aktivita v Jednotě zákonitě tak intenzivní jako dosud. Po příchodu do Brna se výrazně podílel na snahách Jednoty o posílení vědeckého života v tomto městě. Po návratu do Prahy je roku 1906 zvolen čestným členem Jednoty a od roku 1908 je opět členem jejího výboru (od roku 1910 dokonce jako její doživotní stálý tajemník). Tyto údaje jasně vypovídají o pozici a významu, který Sobotka v tehdejším českém matematickém prostředí měl. Přitom nepochybně i Sobotka za svého dalšího působení v Jednotě přispěl k jejímu posílení a růstu. Mimo to v Časopise pro pěstování matematiky a fysiky vydávaném Jednotou vydal Sobotka v rozpětí let 1887 až 1930 čtrnáct vědeckých a sedm životopisných prací.

Dalšími vědeckými spolky, ve kterých se Sobotka angažoval, byly Královská česká Společnost nauk a Česká akademie věd a umění. Sobotka byl zvolen mimořádným členem Královské české Společnosti nauk roku 1900 a řádným členem pak v roce 1907. Do Věstníku Společnosti přispěl v letech 1893 až 1929 dvaceti jednou prací. Stal se také postupně dopisujícím (roku 1900), mimořádným (roku 1903) a konečně řádným (roku 1908) členem České akademie věd a umění. V Rozpravách II. třídy České akademie věd a umění publikoval v letech 1902 až 1930 celkem padesát čtyři původní vědecké práce. Nadto v Bulletin international této akademie uveřejnil v letech 1903 až 1920 překlady dvaceti pěti svých prací do němčiny a v letech 1923 až 1930 překlady osmnácti svých článků do francouzštiny. Stal se také dopisujícím členem Jihoslovanské Akademie věd v Záhřebu.

Sobotka byl i členem zkušební komise pro učitelství na středních školách. V této souvislosti můžeme připomenout jeho názory dotýkající se vyučování matematiky na středních a vysokých školách. Většina prací věnovaných Sobotkovi[15] připomíná jeho snahu, aby byla výuka matematiky vždy doplněna i cvičeními z aplikované matematiky, a to jak na univerzitách, tak na středních školách. Pro nedostatek času nebyl tento návrh na českých školách realizován. Dostalo se mu však mezinárodní publicity, když byl roku 1912 přednesen profesorem Dintzlem z Vídně na mezinárodním sjezdu matematiků v Cambridgi. Níže uvedený doslovný přepis z článku K. Vorovky je stále inspirativní i v současné době.

> „*Sobotkovi jde především o to, aby matematické vědění bylo žáky dokonale apercipováno a zůstalo jejich trvalým a užitečným majetkem pro celý život. Dřívější strohý formalismus tohoto cíle se úplně míjel. Sobotka, jsa ve svém myšlení pravým matematikem, jest dalek toho, aby podceňoval neobyčejný formálně-výchovný význam matematiky, její přesné a přísné metody i neúprosné myšlenkové kázně. S druhé strany je však příliš dobrým psychologem, příliš zkušeným učitelem, než aby chtěl metodu matematickou vštěpovati mladým duším pomocí pouhých formalismů a mechanického prohánění symbolů po papíře. A proto žádá pro matematické vyučování konkrétnost, praksi, aplikaci, věcný podklad. Proti formalismu, který dříve převládal ve vyučování, Sobotka jest rozhodným přívržencem realismu. Právě toto pochopení pro realitu v nejširším slova smyslu způsobilo – a to je další charakteristikou jeho názorů, – že nikdy nevěřil v nějakou jedinou spásnou cestu didaktiky a byl vždy přesvědčen, že škola má zůstati stále v nejužším styku se životem, jehož potřeby se od generace ke generaci mění,*“ ([16], str. 10).

1.4 Práce Jana Sobotky

1.4.1 Úvod

Dílo Jana Sobotky bychom mohli rozdělit do tří oblastí. Do prvního okruhu můžeme zahrnout Sobotkovy učebnice. První z nich, „*Deskriptivní geometrie promítání paralelního*“

[15] Viz [16], str. 9 – 10; [17], str. 30 – 31; [19], str. 358; [21], str. 625; [22], str. 43.

(644 stran), byla vydána Jednotou českých matematiků a fyziků v roce 1906 jako 10. svazek jejího sborníku. Slovy F. Kadeřávka

„*jest to první vzorné, naprosto vědecké a systematické kompendium deskriptivní geometrie v jazyce českém vůbec,*“ ([15], str. 4).

Na toto hodnocení z roku 1923 navazuje A. Urban, který referoval o této učebnici v rámci výše zmíněné skupiny okolo F. Vyčichla.

„*Ani nyní, po dalších téměř 35 letech, neztrácí tato základní česká učebnice deskriptivní geometrie na svém významu, i když na některých místech by potřebovala doplnit zejména po stránce formálně vyjadřovací. Je stále živá a dnešní čtenář v ní najde nejen řadu velmi potřebných konstrukcí užitečných v běžné praxi geometra, ale i dobře vypracovaný methodický výklad nejzákladnějších zobrazovacích metod založených na rovnoběžném promítání,*“ ([18], str. 249).

„*Jestli ještě dnes neztratila na významu, pak to lze přičíst velmi dobré celkové koncepci a ovšem i neobyčejné důkladnosti, s níž byla zpracována. Ačkoliv se v ní zpracovávají celkem elementární partie, autor se neomezil jen na vlastní osobité zpracování látky, při němž uvedl ovšem mnoho nových podrobností, ale vsunul četné úplně nové samostatně zpracované odstavce, ve kterých ukázal, jak mistrně ovládal konstruktivní řešení drobných, ale potřebných problémů deskriptivní geometrie,*“ ([18], str. 251).

Nákladem Jednoty byly vydány i tři díly jeho litografovaných přednášek z diferenciální geometrie. První svazek věnovaný rovinným křivkám vyšel roku 1909 v rozsahu 543 stran. Druhý díl z roku 1914 na 490 stranách pojednává o prostorových křivkách a plochách. Třetí část byla uveřejněna rovněž roku 1914 a na 586 stranách se věnuje parametrickému vyjádření ploch a přímkovým útvarům. Jedná se o vůbec první dílo, které by v českém jazyce pojednávalo v takovém rozsahu a šířce o diferenciální geometrii, vše doplněno velkým množstvím příkladů. B. Budinský v rámci skupiny okolo F. Vyčichla referoval o učebnici takto:

„*Uvážíme-li, že prof. Sobotka pracoval převážně v synthetické geometrii, je samozřejmé, že v celé knize převládá geometrické hledisko. I když se při výkladu pracuje formálně většinou s prostředky matematické analysy, jsou tyto úvahy často zakončeny nějakou geometrickou interpretací, nebo jsou pouze východiskem* *dalších úvah synthetických. Metoda, které je při výkladu použito, je v podstatě klasická methoda Gaussova – není tedy použito ani vektorů ani tenzorů,*" ([18], str. 252).

„*Všimněme si však i dalších dvou předností těchto litografovaných přednášek ... Můžeme říci, že tato kniha je psána na tehdejší dobu s maximální přesností a i s dnešního hlediska by nebylo možno jí mnoho podstatného vytknout ... Konečně je třeba znovu zdůraznit, že celá učebnice jsou litografované přednášky. Liší se tedy samozřejmě způsobem výkladu a uspořádáním i výběrem látky od běžné matematické knihy ... z hlediska posluchače, kterému je hlavně určena, mají takto sepsané přednášky velkou řadu předností, z nichž za největší nutno považovat velkou srozumitelnost výkladu,*" ([18], str. 255 – 256).

Protože obě učebnice byly v nedávné době studovány Z. Nádeníkem a L. Čechovou, nepokouším se o žádné vlastní hodnocení nebo hlubší výklad. Omezil jsem se pouze na citace ze starších prací.

Do druhé oblasti bych zařadil vědecké práce, které Sobotka uveřejnil v letech 1887 až 1930 v různých vědeckých časopisech. Těchto článků je celkem 146, z toho 103 práce jsou původní a 43 práce jsou překlady některých jeho vědeckých článků uveřejněných v češtině do němčiny nebo francouzštiny. V příloze 1 je uveden jejich seznam. Více se jim budeme věnovat v následující podkapitole.

Třetí oblastí jsou různé životopisné články uveřejněné v Časopise pro pěstování matematiky a fyziky[16] a Almanachu České akademie věd a umění[17].

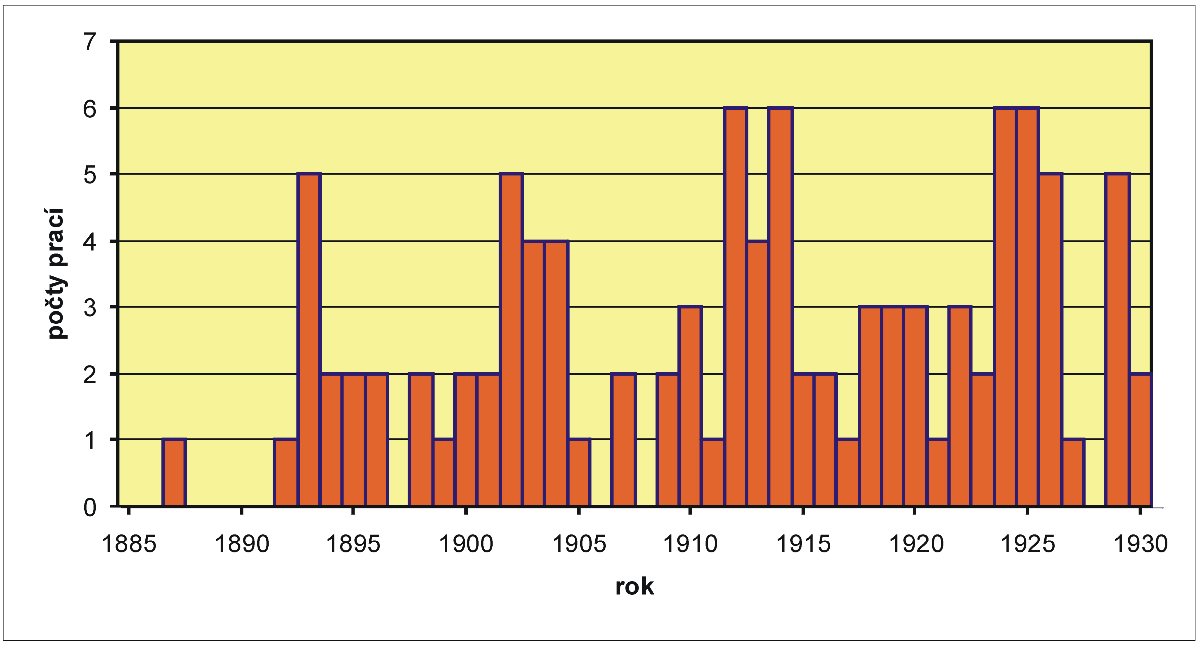
1.4.2 Původní vědecké práce

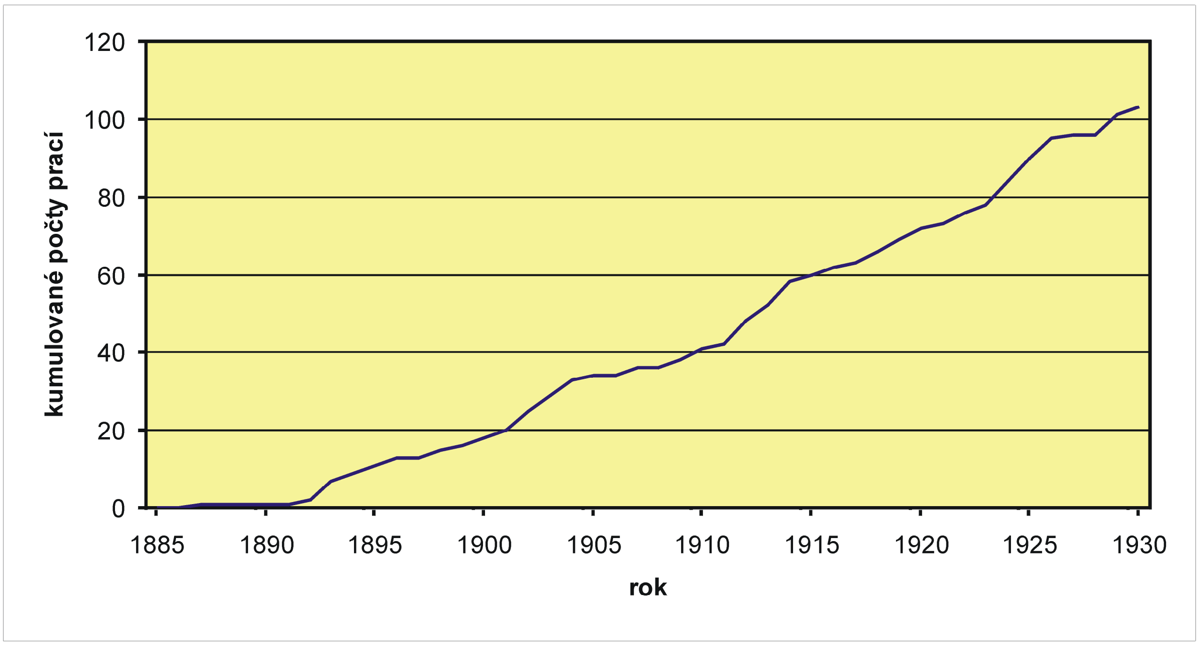
Již při letmém pohledu na výčet Sobotkových vědeckých prací vidíme, že byl nesmírně plodným autorem. Zaměřil se sice výhradně na geometrii, ale v ní se věnoval řadě oblastí (např. deskriptivní geometrii, geometrii kuželoseček a kvadrik, diferenciální geometrii,

---

[16] *O životě a činnosti Eduarda Weyra. III. O Weyrově činnosti v geometrii*, ČPMF, 34 (1905), *Antonín Sucharda*, ČPMF, 37 (1908), *O životě a činnosti Karla Pelze*, ČPMF, 39 (1910), *Václav Řehořovský*, ČPMF, 42 (1919), *Vzpomínky na Františka Koláčka*, ČPMF, 44 (1915), *Vincenc Jarolímek*, ČPMF, 45 (1916), *Posmrtná vzpomínka na Vincence Jarolímka*, ČPMF, 51 (1922), *Vzpomínka na Antonína V. Šourka*, ČPMF, 56 (1927).
[17] *Karel ryt. Kořistka*, Alm. ČAVU, 1907, *Antonín Sucharda*, Alm. ČAVU, 1908, *Alois Strnad*, Alm. ČAVU, 1912, *Václav K. Řehořovský*, Alm. ČAVU, 1913, *Vincenc Jarolímek*, Alm. ČAVU, 1922, *Josef Silvestr Vaněček*, Alm. ČAVU, 1922.

elementární geometrii, projektivní geometrii, přímkové geometrii, grafickým metodám řešení algebraických a diferenciálních rovnic, aj.). V prvním grafu uvádím počty původních statí (tj. bez překladů některých z nich) v jednotlivých letech, ve druhém jsou tyto počty kumulovány.





Cílem této práce není poskytnout hlubší rozbor těchto děl. Zaměřil jsem se více pouze na úzkou oblast prací z elementární geometrie věnovaných Apolloniově úloze. Přesto jsem se snažil alespoň v hrubých rysech seznámit i s ostatními Sobotkovými články. Vedla mě k tomu skutečnost, že již pouhé shrnutí jejich obsahu, letmý pohled na způsoby, jakými hledal problémy pro svoji vědeckou činnost, či obecné nastínění metod, kterými je řešil, může být inspirativní. Na druhou stranu pro mne tyto podněty z děl Jana Sobotky vyvstaly mnohem jasněji až při bližším studiu některých jeho prací, tak jak jsem uvedl výše. Teprve na základě své vlastní učitelské praxe jsem si uvědomil význam, podnětnost a životaschopnost Sobotkových myšlenek a přístupu k matematice.

Autoři publikací o Sobotkovi, kteří se věnují i charakteristice jeho vědeckého díla, rozdělili jeho práce do několika oblastí a ty pak dále studují. Tento způsob je v případě tak rozsáhlého studijního materiálu jediný možný. Při zveřejnění výsledků je hlavní důraz na souhrnném vymezení obsahu prací v příslušné oblasti (viz [17], [20], v menším rozsahu [19], [21]). I skupina okolo Františka Vyčichla šla podobnou cestou. Ta sice zveřejnila referáty o jednotlivých Sobotkových pracích, ale i ona je doplnila o stručné charakteristiky dílčích oblastí (viz [18]), které významně ovlivnily části článků [19], [20], [21].

Významně mi pomohlo rozdělení Sobotkových prací, které provedl Z. Nádeník. Ten práce rozdělil do těchto skupin:

Oblast		Počty	
		původních prací	cizojazyčných vydání
1.	deskriptivní geometrie	27	7
2a.	kvadratické útvary – kuželosečky	22	13
2b	kvadratické útvary – kvadriky	12	4
3a.	diferenciální geometrie křivek	7	3
3b	diferenciální geometrie ploch	6	1
4.	elementární geometrie	15	11
5.	projektivní geometrie[18]	3	1
6.	přímková geometrie[19]	3	2
7.	algebraická geometrie	1	0
8.	grafické metody	4	0
9.	práce, u nichž nešlo oblast určit	3	1

Po prostudování referátů [18] jsem se pouze v šesti případech rozhodl, že práci přiřadím spíše k jiné skupině. Došel jsem k následujícímu členění okruhů, do nichž jsem zařadil konkrétní Sobotkovy články: A. Deskriptivní geometrie, B. Kvadratické útvary, C. Diferenciální geometrie, D. Elementární geometrie, E. Ostatní práce. Zvýšenou pozornost jsem věnoval oblastem A. až D., menší skupině E., ve které je i několik prací, které se

[18] S oblastí souvisí i řada prací z 1. a 2. skupiny.
[19] S oblastí souvisí i několik prací z 1. a 2. skupiny.

dotýkají oblastí, s nimiž jsem se dosud nesetkal. Výsledný souhrnný pohled na Sobotkovy původní vědecké práce uvádím v příloze 2.

1.5 Charakteristika působení Jana Sobotky

Jádrem této kapitoly je část 1.5.3, v níž si všimneme zejména těchto otázek:

A. Sobotkovo vědecké působení.

B. Jedinečnost a osobitost tvorby Jana Sobotky.

C. Sobotkův význam pro českou, případně světovou matematiku.

Odpovědi na tyto otázky jsou ovlivněny pracemi, o kterých píšu v kapitole 1.1, studiem některých Sobotkových děl a studiem stavu geometrického bádání v českých zemích a ve světě.

Při hlubším poznávání vybraných Sobotkových prací, jsem si položil ještě další otázku, která je pro celou moji práci klíčová. Jsou Sobotkovy práce podnětné a zajímavé i pro toho, kdo je čte s odstupem téměř sta let? Z tohoto zorného úhlu doplním ve třetí části práce charakteristiku Sobotkova působení několika osobními názory.

1.5.1 Geometrie v 19. a na počátku 20. století ve světě

Předtím, než se budeme věnovat vlastní charakteristice Sobotkova působení, považuji za důležité všimnout si, v jakém postavení byly Sobotkou zkoumané problémy k tendencím, které můžeme ve vývoji geometrického bádaní jeho doby považovat za nejvýznamnější. Proto jim budu věnovat tuto podkapitolu. Nejen vzhledem k obrovské obsáhlosti celé problematiky, ale i vlastnímu zaměření této práce se vyhnu systematičtějšímu výkladu vývoje geometrie ve 2. polovině 19. a na počátku 20. století. Uvedu tak pouze to, co osobně považuji za podstatné. Na prvním místě můžeme připomenout obnovení zájmu o geometrii na samém konci 18. a zejména v počátku 19. století, přesněji řečeno o tzv. ryzí geometrii [20] postavenou na syntetických metodách. Ta se začala vyhraňovat vůči geometrii založené na analytických

[20] Pojem „ryzí geometrie“ používal např. B. Bydžovský v [17] a myslel jí zejména syntetickou projektivní geometrii, deskriptivní geometrii a elementární geometrii. M. Kline v [29] užívá pojmu „pure geometry“ opět v obdobném smyslu jako protipól ke geometrii postavené na algebře a analýze.

metodách, které jí dominovaly více než sto let[21]. Svou roli tu kromě osobních preferencí jednotlivých představitelů tohoto proudu sehrály i mnohem hlubší ohledy.

Podle Klinea ([29], str. 835 – 836) M. Chasles[22] tvrdil, že analytický přístup pomocí svých formálních postupů přehlíží všechny ty malé kroky, které kontinuálně činí ryzí geometrie. Jeho rychlé a pronikavé kroky neodhalují smysl toho, čeho je jím dosaženo. Souvislost mezi výchozím bodem a konečným výsledkem není jasná. Přitom se ptá, zda je postačující při „filozofickém a základním studiu vědy“ vědět, že něco je pravda, jestliže nevíme, proč tomu tak je a jaké místo by tato pravda měla zaujímat v posloupnosti pravd, jichž je součástí. Oproti tomu podle něj ryze geometrické metody umožňují jednoduché a intuitivně zřejmé důkazy a závěry.

Kline uvádí i druhý zásadní argument mající svůj původ u Descartesa. Geometrie byla považována za pravdu o prostoru a reálném světě, oproti tomu analýza a algebra byly chápány spíše jako souhrny metod a výsledků než vlastní pravdy. Důvodem byly zejména i jejich neúplné a ne zcela jasně a logicky vybudované základy. I když se v průběhu 19. století tento náhled postupně vytrácel, měl pro některé geometry analytický důkaz pouze charakter výsledku, který je spíš podnětný, než že by akceptovali jeho průkaznou hodnotu. Zejména v první polovině 19. století můžeme být svědky nepřátelství mezi některými zastánci syntetických a analytických metod[23].

Podle Klinea bylo obnovení zájmu o syntetickou geometrii důsledkem činnosti jednoho muže – Gasparda Monge[24]. Jeho vliv se projevil snahou o znovuoživení ryzí geometrie u jeho žáků (např. J. V. Poncelet, L. Carnot, Ch. Brianchon). Ti se obrátili zejména k právě se rodící projektivní geometrii, kterou můžeme považovat za jednu z dominantních oblastí geometrického bádaní celé první i části druhé poloviny 19. století. Dalšími výraznými osobnostmi syntetické projektivní geometrie byli již zmiňovaní Jacob Steiner a Michel Chasles, dále německý geometr Karl Georg Christian von Staudt (1798 – 1867). Ve stejné

---

[21] I když i v tomto období najdeme matematiky, kteří preferovali syntetickou geometrii (např. Maclaurin)
[22] M. Chasles (1793 – 1880) – významný francouzský geometr, mj. autor historické studie „*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*“.
[23] „*The rivalry between analysts and geometers grew so bitter that Steiner, who was a pure geometer, threatened to quit writing for Crelle's Journal für Mathematik if Crelle continued to publish the analytical papers of Plücker,*“ ([29], str. 836). Rivalita mezi analytiky a geometry se stala tak zahořklou, že Steiner, který byl ryzím geometrem, vyhrožoval, že přestane psát pro Crelleho J. f. M., pokud bude Crelle pokračovat v publikování Plückerových analytických prací.
[24] „*Monge himself did not intend to do more than bring geometry back into the fold of mathematics as suggestive approach to and an interpretation of analytic results. He sought only to stress both modes of thought,*“ ([29], str. 836). Monge neměl v úmyslu udělat víc, než vrátit geometrii zpět do „ohrady“ matematiky jako podnětný přístup k matematice a jako interpretaci analytických výsledků. Šlo mu pouze o to, vyzdvihnout oba způsoby uvažování.

době se rozvíjela i algebraická projektivní geometrie reprezentovaná zejména profesorem matematiky a fyziky na univerzitě v Bonnu Juliusem Plückerem (1801 – 1868). Plücker se neomezil pouze na kuželosečky, ale užil projektivních pojmů i při studiu rovinných křivek *n*-tého stupně i útvarů v trojrozměrném prostoru.

S Mongem je spjat i rozvoj další z geometrických disciplín – deskriptivní geometrie. Protože se právě tato oblast začala výrazně rozvíjet v českém prostředí od 50. let 19. století, všimneme si této stránky v samostatné podkapitole věnované tzv. české geometrické škole. V souvislosti s elementární geometrií Kline tvrdí:

„*These results, perheps minor in significance, nevertheless exhibit new themes and the almost inexhaustible richness of this old subject. Actually hundreds of new theorems were produced,*[25]“ ([29], str. 837).

Právě vliv tzv. ryzí geometrie představované řadou jeho učitelů i dalších geometrů jeho doby musíme považovat v případě Sobotky za jeden z významných faktorů pro utváření jeho díla. Současně si však musíme uvědomit, že tato oblast se nacházela v jeho době již za vrcholem. Jak uvidíme dále, rozvíjely se v jeho době již jiné oblasti geometrie. Výstižně tuto skutečnost vyjádřil Bydžovský:

„*Počátky Sobotkovy vědecké činnosti – léta osmdesátá a devadesátá minulého století – spadají do doby, kdy ryzí geometrie byla v květu, ať tím myslíme projektivní geometrii v syntetickém provedení, ať geometrii deskriptivní s metodami od projektivní částečně odchylnými, ať geometrii elementární. Vynikající matematikové, Fiedler, R. Sturm, Reye, Schroeter, Mannheim, u nás Pelz a oba Weyrové, abych jmenoval jen nejvýznačnější, udržovali tuto krásnou, třeba poměrně jednostranou disciplínu na značné výši a geometrové vycházející z jejich školy šířili zájem o ni v širších kruzích odborníků. Nebyla také ještě příliš vzdálena doba, kdy se věřilo, že v nejkrásnější složce ryzí geometrie, v geometrii projektivní byla nalezena královská cesta matematiky, třeba že tato víra již tehdy nepanovala. Také bystrý pozorovatel mohl již tehdy znamenati, že vlastní vrchol tato nauka již překročila, alespoň v tom směru, v němž tehdy se vyvíjela, neboť přestaly doby velkých objevů, tato nauka se již nerozvíjela, nýbrž jen prohlubovala a práce v ní se tříštila na množství drobnějších, více nebo méně speciálních problémů; nastal rozkvět geometrické problematiky ... Zvláště některé*

[25] Tyto výsledky, možná druhořadé co do významu, nicméně představují nová témata a téměř nevyčerpatelné bohatství tohoto starého předmětu. Ve skutečnosti vznikly stovky nových vět.

problémy těšily se mimořádné oblibě, ... byly to problémy klasické a mladí geometrové pokládali za povinnost nebo věc cti, přispěti k jejich řešení svou hřivnou," ([17], str. 18 – 20).

Další z oblastí, která se v 19. století intenzivně rozvíjela, byla diferenciální geometrie. Jak píše J. Folta,

„*... po publikaci Gaussových Disquisitiones generales circa superficies curvas (1828) se* [diferenciální geometrie] *stala předmětem zájmu především německých a francouzských geometrů. V českých zemích se v tomto směru objevilo pouze použití diferenciálně geometrické metody při zkoumání některých geometrických problému. Teprve Sobotkova ..., Hostinského ... a Hlavatého ... učebnice shrnují výsledky, jež v této oblasti vytvořili již v 19. století Gauss, Darboux či Riemann,*" ([23], str. 43).

Jednou ze základních otázek geometrie, která byla řešena již od dob geometrie antického Řecka, je její vztah k reálnému světu. Je obecně známým faktem, že jedním z důvodů odmítnutí neeuklidovské geometrie v první polovině 19. století bylo právě staletími posilované přesvědčení, že euklidovská geometrie je tou nejvhodnější idealizací fyzického světa. Osobně proto považuji za jeden z nejvýznamnějších proudů geometrie ten, který v 20. století umožnil zodpovědět právě tyto otázky. Mimo vlastní přijetí neeuklidovských geometrií jako matematických teorií v 60. letech 19. století, je zde zásadní přínos Bernharda Riemanna[26] (1826 – 1866). Kromě samotného matematického obsahu (teorie diferenciálních forem) považuji za klíčovou skutečnost, že si Riemann položil otázku, čím si vlastně můžeme být jisti ohledně fyzikálního prostoru. Snažil se přitom ukázat, že axiomy euklidovské geometrie jsou spíše než zjevnými pravdami pouhými zkušenostmi. Připustil možnost, že se vlastnosti prostoru mohou bod od bodu měnit. Přitom jsme si jisti tím, jaké jsou, pouze v blízkém okolí jistého bodu.

Kromě Riemanna oblast diferenciální geometrie *n*-rozměrných prostorů dále rozvíjeli jeho následovníci Eugenio Beltrami (1835 – 1900), Elwin Bruno Christofel (1829 – 1900) a Rudolph Lipschitz (1832 – 1903). Na ně pak na konci 19. a počátkem 20. století navázali Greogorio Ricci-Curbastro (1853-1925) a jeho žák Tullio Levi-Civita (1873 – 1941) zavedením pojmu tenzoru a tenzorovou analýzou. Právě jejich teorie tvořila matematický základ pro Einsteinovu obecnou teorii relativity. Postupné přijetí této teorie podpořené

[26] Zejména jeho habilitační přednáška v Göttingen z roku 1854 (publikovaná 1868) „*Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*" (O hypotézách, které leží v základech geometrie).

astronomickými měřeními a následné důsledky pro studium vlastností vesmíru v rámci kosmologie ukázaly, že i neeuklidovské geometrie mohou být vhodnými idealizacemi reálného světa. Vznikly i různé kosmologické modely vesmíru. Odpověď na to, který z modelů je nejvhodnější, však od geometrie převzala fyzika.

Další z výrazných idejí, jež se zrodila v 19. století, je ta, již zformuloval Felix Klein (1849 – 1925) roku 1872 ve své přednášce na univerzitě v Erlangenu: pohled na geometrii z hlediska transformací. Podle B. Bydžovského je zásluhou J. Sobotky, že přinesl Kleinovo pojetí geometrie na pražskou univerzitu (s odstupem více než třiceti let). Podle Kleina ke každé geometrii můžeme přiřadit jistou grupu transformací (např. kolineací, afinit nebo shodností) tak, že vlastnosti studované v rámci této geometrie (projektivní, afinní nebo euklidovské) jsou invarianty v rámci uvažované grupy transformací[27]. Obráceně studiem jisté geometrie můžeme chápat hledání invariantů příslušné grupy transformací. Pro takovýto přístup ke geometrii se vžilo označení Erlangenský program. Uvážíme-li jistou podgrupu některé grupy transformací, je příslušná geometrie specializací jisté geometrie spjaté s původní grupou (např. euklidovská geometrie je specializací afinní geometrie, která je sama specializací geometrie projektivní). Přitom se podařilo ukázat, že i neeuklidovské geometrie vyhovují těmto požadavkům. Svou význačnou roli přitom sehrály různé modely těchto geometrií.

Podle J. Folty měli čeští geometři kontakty na matematiky, kteří byli význačnými propagátory myšlenek neeuklidovské geometrie. Přesto

> *„... jediným výsledkem ... bylo, že přestaly pokusy o důkaz postulátu o rovnoběžkách, které se mezi matematiky působícími v českých zemích objevovaly vlastně až do počátku 70. let. V prostředí „české geometrické školy" však myšlenkově náročná problematika neeuklidovských geometrií neupoutala zájem zdejších geometrů ... Prvá referativní práce o výsledcích neeuklidovské geometrie se v ...* [ČPMF] *objevuje teprve až v roce 1896, kdy Eduard Weyr při zprávě o oslavách stého výročí narození N. I. Lobačevského v Kazani podává i stručný nástin Lobačevského výsledku. Způsob, jakým ... referuje o hyperbolické geometrii, naznačuje, že předpokládal jistou informaci naší matematické veřejnosti o některých oblastech této geometrie .... Teprve v r. 1903 se však objevuje ... prvá obsáhlá parafráze výsledků Lobačevského a Bolyaiovy geometrie*

[27] Tento přístup můžeme nalézt např. již u Ponceleta, který považoval za klíčový úkol projektivní geometrie hledání takových vlastností geometrických útvarů, které jsou společné všem řezům libovolného průmětu útvaru.

v článcích Viléma J. Haunera v České mysli. Na tyto stati navazuje kratší Haunerův článek z r. 1908, věnovaný základním myšlenkám Riemannovy geometrie. Přes filozoficky zaměřené články Dittrichovy [z let 1911 až 1913] *objevuje se vlastně prvá učebnice neeuklidovské geometrie teprve v r. 1926* [28]*,*" ([23], str. 46).

Z dalších význačných milníků ve vývoji geometrie Sobotkovy doby bych vyzdvihl následující: rozvoj algebraické geometrie, řešení otázek základů geometrie, zformování topologie jako samostatné matematické disciplíny. Přitom nesmíme přehlédnout ani celkové úsilí o budování základů matematiky jako celku, axiomatizaci teorie množin, snahu o axiomatickou výstavbu různých matematických disciplín, rozvoj matematické logiky a abstraktní algebry.

Rozmach algebraické geometrie souvisel s postupným rozšířením algebraických metod v projektivní geometrii. Původně termín algebraická geometrie označoval vlastně celý proud v geometrii, který založili Descartes a Fermat, spočívající v užití algebraických metod v této oblasti – kterou my často označujeme též geometrie analytická. V druhé polovině 19. století nabývá označení algebraická geometrie nového významu. Pod vlivem rozvoje algebraické projektivní geometrie začíná od 40. let 19. století studium forem n-tého stupně m proměnných[29]. Podobně jako syntetická projektivní geometrie zkoumala vlastnosti, které se nemění v kolineacích, se algebraická geometrie (vlastně i v souladu s Erlangenským programem) začíná zabývat těmi vlastnostmi forem, které se nemění v jisté transformaci[30]. Přitom se neomezila pouze na lineární transformace, ale zejména na biracionální transformace[31]. O dalším vývoje píše Kline:

„*Though the nature of the birational transformation was clear, the development of the subject of algebraic geometry as the study of invariants under such transformation was, at least in the nineteenth century, unsatisfactory. Several approaches were used; the results were disconnected and fragmentary; most*

[28] Myšlena patrně Hlavatého publikace [41].

[29] Např. forma 2. stupně 3 proměnných má tvar: $f(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1^2 + a_2x_1x_2 + a_3x_1x_3 + a_4x_2^2 + a_5x_2x_3 + a_6x_3^2$. Souvislost s rovnicí kuželosečky v homogenní soustavě souřadnic je zřejmá.

[30] V algebraické geometrii tyto vlastnosti představují jisté funkce koeficientů formy, resp. více forem (invarianty, resp. simultánní invarianty), případně koeficientů a proměnných formy, resp. více forem (kovarianty, resp. simultánní kovarianty), pro které se funkční hodnoty pro původní a transformovanou formu až na konstantu neliší.

[31] Víme, že v případě kolineace mají transformační vztahy tvar $x'_j = F_j(x_1, ..., x_m)$, $j = 1,..., m$, kde F_j jsou homogenní lineární funkce, o biracionální transformaci mluvíme, pokud jsou F_j homogenní racionální funkce. Příkladem biracionální transformace je např. sférická inverze.

proofs were incomplete; and very few major theorems were obtained. The variety of approaches has resulted in marked differences in the languages used. The goals of the subject were also vague. Though invariance under birational transformations has been the leading theme, the subject covers the search for properties of curves, surfaces, and higher-dimensional structures. In view of these factors there are not many central results[32]," ([29], str. 934).

Algebraická geometrie zaznamenala od konce 60. let 19. století ohlas i u matematiků v českých zemích. Později se výrazně projevila např. u Bydžovského (viz jeho učebnice „*Úvod do algebraické geometrie*" (1948))

Také si všimněme ve stručnosti otázky budování základů geometrie. Již v souvislosti s Erlangenským programem jsme uvedli, že neexistuje jediná geometrie. V souvislosti s přijetím neeuklidovských geometrií přestala být geometrie (do té doby pouze euklidovská) chápána jako pravda o fyzickém světě, ale jako lidský výtvor, který nemusí být nutně idealizací reálného prostoru. Dalším impulsem byl nepochybně rozvoj projektivní geometrie a následná snaha budovat ji nezávisle na metrických vztazích – můžeme tak mluvit o metrické a projektivní geometrii. Odtud plynulo porozumění, že projektivní geometrii můžeme chápat jako nadřazenou metrické, jednou z reakcí byla snaha budovat metrické pojmy na základě projektivních. Jiný přístup spočíval v budování metrické geometrie nezávisle na projektivní.

Odtud plyne zájem o vlastní základy geometrií, o jejich axiomatickou výstavbu. První výrazné kroky v tomto směru učinil roku 1882 Moritz Pasch (1843 – 1930), který usiloval o axiomatickou výstavbu projektivní geometrie. Řešil otázky základních nedefinovaných pojmů i toho, že jediná tvrzení o nich, která můžeme využít v důkazech, jsou ta, která jsou obsažena v axiomech nebo jsou z nich vyvozena. S tím jde ruku v ruce snaha minimalizovat počet těchto nedefinovaných pojmů a všechny ostatní budovat na jejich základě. Na utváření základů projektivní geometrie se podílela řada matematiků, jmenujme např. Giuseppea Peana (1858 – 1932) a zejména Johna W. Younga (1879 – 1932) a Oswalda Veblena (1880 – 1960), kteří v knize „*Projective geometry*" (2 díly, 1910, 1918) vybudovali projektivní geometrii na

---

[32] Ačkoliv byla povaha biracionálních transformací jasná, byl rozvoj předmětu algebraické geometrie jako studia invariantů takových transformací (přinejmenším v 19. století) neuspokojivý. Byly použity různé přístupy, výsledky byly nesouvislé a roztříštěné, mnoho důkazů bylo neúplných a bylo získáno velmi málo zásadních vět. Množství přístupů se zřetelně projevilo v rozdílech v používaných [matematických] jazycích. Také cíle předmětu byly nejasné. Ačkoliv studium invariantů biracionálních transformací bylo vůdčím tématem, předmět pokrývá hledání vlastností křivek, ploch a struktur vyšších dimenzí. Z hlediska těchto faktorů není zde mnoho ústředních výsledků.

striktně axiomatických základech a její specializací i geometrii euklidovskou a některé geometrie neeuklidovské.

Ohledně axiomatické výstavby euklidovské geometrie nezávislé na geometrii projektivní uvedeme italského matematika Giuseppea Veronesea (1854 – 1917), který ve svých „*Fondamenti di geometria*" (1891) jako základní pojmy užil přímku, úsečku a shodnost. Problémem se zabýval i G. Peano v „*Sui fondamenti della geometria*" (1894) (základními pojmy jsou bod, úsečka, pohyb). Nezávisle na nich předložil vlastní systém axiomů vůdčí matematik 20. století David Hilbert (1862 – 1943) v „*Grundlagen der Geometrie*" (1899), který s každým dalším vydáním knihy axiomatiku soustavně revidoval. Konečná podoba je v současné době používaná a dostatečně známá.

1.5.2 Geometrie druhé poloviny 19. a počátku 20. století v českých zemích

J. Folta předložil v práci „*Česká geometrická škola*" (1982) ([23]) kromě odpovědí na obecnější otázky problematiky vědeckých škol, příp. regionálních matematických škol, též ucelený obraz fenoménu, pro který se vžilo označení česká geometrická škola. V dalším textu se načrtnu v souladu s [23] ty aspekty a momenty z jejího vývoje, které považuji za podstatné pro pochopení prostředí, ve kterém Sobotka jako geometr vyrůstal a působil.

Termínem česká geometrická škola rozumíme zvýšení zájmu o oblast geometrie v české matematice 2. poloviny 19. století. Všimněme si nejprve příčin jejího vzniku. Roku 1806 vznikla pražská polytechnika. Pouze pozvolna se v průběhu první poloviny 19. století podařilo naplňovat prvotní záměr F. J. Gerstnera, který přispěl ke vzniku školy:

> „*... vytvořit v pražské technice školu „na povznesení průmyslu vědeckým vyučováním", to znamená na základě širokého přírodovědeckého základu jako předpokladu vlastního technického studia,*" ([23], str. 9).

Kromě toho, že původní záměry byly redukovány již při samotném vzniku, sehrála významnou roli i nízká úroveň vzdělání, se kterou na školu přicházeli její studenti. Proto se do její výuky neprosadila po celou první polovinu 19. století vyšší matematika. K změně stavu přispěl rozvoj reálných škol, tak např. přímo při pražské technice vznikla taková škola roku 1833, i když o její vznik se usilovalo již od roku 1811. Výrazné změně stavu pomohla školská reforma z roku 1849, jejímž jedním z cílů bylo i zlepšení úrovně přípravy uchazečů o studium na technických školách. Mezi lety 1850 a 1860 došlo k podstatnému rozšíření sítě reálných škol. Současně bylo zájmem technických vysokých škol, aby byly předměty, jež měly přípravný charakter, zařazovány již do výuky reálných škol a aby tak na techniky přicházeli již kvalitně připravení studenti. Jedním z takových předmětů byla i deskriptivní geometrie, která nás bude v souvislosti s českou geometrickou školou dále zajímat.

Pomiňme nyní důvody, jež vedly k postupnému zařazení deskriptivní geometrie do výuky na pražské polytechnice[33]. Zmíníme pouze zavedení pravidelných přednášek z této disciplíny na ní od 40. let 19. století, vznik katedry deskriptivní geometrie roku 1850 a jmenování Rudolfa Skuherského[34] profesorem deskriptivní geometrie na pražské technice roku 1852. Od roku 1852 začala být vyučována deskriptivní geometrie v Čechách i na reálkách[35]. S růstem počtu těchto škol a přenesením výuky základů deskriptivní geometrie na ně souvisela i potřeba učitelů, kteří by byli příslušně vzdělaní a aprobovaní. Vzhledem k již zmiňovanému zájmu technických vysokých škol na úrovni výuky na reálkách je pochopitelné, že pražská technika

> „*… žádala r. 1864, aby se jí dostalo možnosti zasahovat do úrovně vzdělání učitelů reálek zřízením zkušební komise rovněž v Praze. Komise byla pak v roce 1867 zřízena ... a zároveň (1868) s podobnou komisí polytechniky ve Štýrském Hradci požadovala, aby absolvovaní technici měli možnost ucházet se o učitelství na reálných školách i pro obory matematika, fyzika a chemie, tedy pro obory, na něž měla do té doby výhradní aprobační právo univerzita,*“ ([23], str. 31).

Pražská polytechnika se tak stala nejen školou, která připravovala odborníky pro technickou praxi, ale i místem odkud přicházeli na české reálky i učitelé deskriptivní geometrie. Podle [23] (str. 31) byly v té době na reálkách v českých zemích učitelé „*téměř výhradně se rekrutující z řad posluchačů pražské polytechniky*“. Je přirozené, že řada z nich se o tento obor (příp. i další oblasti geometrie) hlouběji zajímala i po skončení svých studií. Protože vysoké školy (techniky a univerzity) skýtaly jen omezené množství pracovních příležitostí těm, kteří se chtěli věnovat nadále vědecké činnosti v této oblasti, představovala

---

[33] Viz [23], str. 27 – 28.

[34] R. Skuherský (1828 – 1863) – studoval na pražské a vídeňské polytechnice, v letech 1851 – 52 byl asistentem J. Höniga – profesora deskriptivní geometrie na vídeňské polytechnice. Od listopadu 1852 působil jako profesor deskriptivní geometrie na pražské polytechnice.

[35] „*V roce 1859 může již Skuherský říci, „že vědecký pokrok a výkonnost studujících v popisném měřičství zlepšuje se rok od roku, poněvadž také příprava, kterou ve jmenovaném předmětě z reálných škol si přinášejí, očividně se zlepšuje, takže není třeba ztráceti mnoho času výkladem základů této nauky jako v letech dřívějších, ale jest možno rychleji postupovati a také více látky probrati,*“ “ ([23], str. 29).

pro ně právě místa středoškolských učitelů možnost být finančně zajištěn a věnovat se dále této disciplíně.

V prostředí českých zemí, kde byla na rozdíl od např. německých států, Itálie nebo Francie v té době jediná univerzita, tak představovalo technické školství (ať již středoškolské, nebo vysokoškolské) velmi významnou institucionální základnu pro rozvoj matematického bádání. J. Folta v práci [23] uvádí, že z matematiků, kteří jsou uvedeni v knize L. Nového „*Dějiny exaktních věd v českých zemích do konce 19. století*“, jich studovalo na české technice v Praze 52, na ostatních technikách v Čechách 4, na pražské univerzitě 20 a mimo české země 24. Vidíme z toho, jak silný vliv měla pražská polytechnika i ti, kteří na ni vyučovali (jak si ukážeme později), na formování matematiků v českých zemích. Technické školství přirozeně preferovalo jisté oblasti v matematice – deskriptivní geometrii a příbuzné obory. Došlo tak k orientaci na geometrické disciplíny. Tato situace nastolila stav, v kterém můžeme hledat příčiny zrodu české geometrické školy[36].

V dalším textu si všimněme toho, jak se vyvíjela problematika studována jejími představiteli. Ač škola vznikla na institucionální bázi a potřebách technického školství, v průběhu svého vývoje čerpala podněty i z oblastí geometrie (zejména algebraické), které nebyly bezprostředně spjaty s těmito typy škol. V souvislosti s činností tří osobností, profesorů deskriptivní geometrie na pražské polytechnice R. Skuherského, F. Tilšera a W. Fiedlera, hovoří J. Folta o tzv. první fázi české geometrické školy. Na ně od 70. let navázaly další generace geometrů, kteří přispěli k rozvoji české geometrické školy.

V souvislosti s R. Skuherským považuji za důležité zmínit dvě věci. První z nich charakterizuje následující citace.

> „*Nejoriginálnější je ... příspěvek ... věnovaný specifické, názorné zobrazovací metodě v pravoúhlé projekci, ekvivalentní v té době ještě neznámé kolmé axonometrii ... Podstata Skuherského metody je ve zpracování ... grafického algoritmu, který umožňuje v této názorné zobrazovací metodě konstruktivně řešit základní geometrické úlohy věnované metrickým a projektivním problémům. V tomto ohledu se Skuherského metoda odlišuje od metody izometrické projekce*

[36] Podle [23], str. 17 – 21 dochází koncem 60. let 19. století k zřetelnému zlomu ve vývoji matematiky v českých zemích. Dochází k výraznému nárůstu každoročních přírůstků v počtu publikovaných prací z matematiky, přitom téměř 60% z nich představují práce z geometrie. Tento trend je víceméně stabilní až do konce 19. století, přitom v zahraničí podíl geometrických prací klesá. O tom, jak byl tento zlom výrazný, vypovídá i to, že již v 70. letech 19. století je pražské prostředí vnímáno i v okolních zemích jako místo, kde se úspěšně rozvíjí geometrie. Někteří z představitelů české geometrické školy přitom byli zváni, aby působili na vysokých školách v těchto zemích (např. Emil Weyr, J. S. Vaněček, K. Zahradník, A. Puchta, K. Pelz, A. V. Šourek).

Williama Farishe z roku 1820, od Moellingerovy ... projekce z r. 1840 a koneckonců rovněž od Weisbachových axometrických projekcí ... Tyto metody, které vytvářejí proud vedoucí k pravoúhlé axonometrii, jsou ve Skuherského době stále chápány jen jako prostředky na vytvoření názorného obrazu určitého předmětu a postrádají jakékoliv možnosti další konstrukce v rysu," ([23], str. 34).

Tuto metodu, přes její ohlas v českém prostředí i v zahraničí, postupem času vytlačila pravoúhlá axonometrie. Můžeme však říci, že Skuherského zájem o názorné zobrazovací metody a především o další konstrukce v nich založil jistý trend, který můžeme vysledovat i v pracích dalších generací českých geometrů. Jmenujme například Karla Pelze, který se zabýval pravoúhlou axonometrií, Pohlkeho větou jako základem kosoúhlé axonometrie nebo některými konstrukcemi v kosoúhlé axonometrii při speciální poloze průmětny. Problematice kosoúhlé axonometrie se věnoval i Sobotka, přitom se odkazoval právě na Pelzovy výsledky.

Druhým počinem Skuherského, který považuji za důležité zmínit, je jeho návrh, aby byly od školního roku 1861 – 62 některé přednášky (mj. i z deskriptivní geometrie), které byly dosud na pražské polytechnice pouze v němčině, přednášeny i česky. Sám oddělil české a německé přednášky v tomto školním roce a přispěl tak k rozdělení pražské polytechniky na českou a německou část od školního roku 1863 – 64. Následně došlo roku 1869 ke skutečnému oddělení české a německé polytechniky v Praze. Podobně i pražská univerzita byla později rozdělena na dvě části. Projevem tohoto procesu bylo mimo jiné to, že řada českých geometrů byla následně částečně vázána na formování geometrie v českém jazyce (např. utváření terminologie, vznik českých učebnic). V této souvislosti připomínám, že pojem česká geometrická škola není myšlen ve smyslu příslušnosti k národu, ale spíše k území. V českých zemích působila řada význačných geometrů německé národnosti nebo působících při německých vysokých školách (např. již zmiňovaný W. Fiedler, K. Küpper, S. Kantor). Proto se někdy užívá termínu pražská geometrická škola, který vystihuje důležitý vliv pražských vysokých škol na rozvoj geometrického bádání v českých zemích. K tomu můžeme říci, že

„*zatímco česká polytechnika vlivem Tilšera a zpočátku i Šolína vychovávala spíše vyhraněnější syntetické geometry, tato vyhraněnost chyběla absolventům německé polytechniky,*" ([23], str. 42).

Přitom vliv české univerzity nabývá na významu spíše až v samém závěru 19. století v souvislosti se změnami ve výuce matematiky, které na ní proběhly a jichž byl následně Sobotka přímým účastníkem.

Druhý představitel první fáze české geometrické školy F. Tilšer[37] vnesl do deskriptivní geometrie pěstované v Čechách další výrazné téma – osvětlení ploch. Této problematice se dále věnovali např. Č. Jarolímek, K. Pelz, B. Procházka a také i Jan Sobotka. Konečně relativně krátké působení W. Fiedlera na pražské polytechnice v letech 1864 až 1867 zanechalo v české geometrické škole výrazné stopy. Fiedler byl již v době svého pražského působení výrazně ovlivněn projektivní geometrií rozvíjenou v Německu a ve Francii. Uvědomoval si též, že

> „*... novější analytická geometrie a algebra* [tvoří] *jednu stránku a deskriptivní geometrie s novější ryzí geometrií* [tj. syntetickou projektivní geometrií] *druhou stránku téže ideje,*“ ([23], str. 33).

Jím rozvíjené prolínání syntetických a analytických metod je výrazným příspěvkem, kterým obohatil české geometrické prostředí. S ohledem na práce Jana Sobotky je důležité, že i on tento přístup uplatňoval. Fiedler také prosazoval, aby byly na pražské polytechnice zavedeny samostatné přednášky z projektivní geometrie, k čemuž záhy skutečně došlo (např. od roku 1870 je na české technice přednáší J. Šolín). Problémy projektivní geometrie se také uplatnily jako předmět bádání geometrů české geometrické školy. Na rozdíl od Německa (viz např. spory Steinera a Plückera) tato oblast „*není metodicky vyhraněna (synteticky nebo analyticky)*“, ([23], str. 40).

Mezi nejvýraznější představitele následující generace patřili bratři Emil a Eduard Weyrové. Jejich přispěním pronikl do českých zemí mimo jiné zájem o algebraickou geometrii. Seligmann Kantor studoval biracionální transformace. Emil Weyr a pod jeho vlivem i další geometři začali studovat involuce vyšších řadů. Rozvíjí se studium křivek vyššího stupně (třetího až šestého).

Mezi geometry české geometrické školy najdeme řadu těch, kteří se věnovali spíše syntetické geometrii. Zkoumali zejména speciální vlastnosti geometrických útvarů. Došlo k rozvoji konstruktivní teorie křivek a ploch. Mezi výrazné představitele tohoto proudu patřili B. Procházka, V. Jarolímek, bratři Vaněčkové, M. Pelíšek, A. Sucharda, F. Machovec, K. Pelz. Mezi zástupce tohoto směru je řazen i Jan Sobotka.

---

[37] Tilšerovo působení v českých zemích není narozdíl od R. Skuherského (předčasně zemřel roku 1863) a W. Fiedlera (roku 1867 odešel na techniku do Curychu) vázáno pouze na 60. léta. Během jeho dlouhodobého působení na české polytechnice v Praze se stala jeho asistenty řada významných českých geometrů (Šolín, Hoza, Beránek, Švácha, Strnad, Kolařík, Sucharda, Procházka, Monin, Sobotka).

Počátkem 20. století začíná v českých zemích intenzivnější rozvoj i negeometrických oblastí matematiky. V této souvislosti vyzdvihuje J. Folta přínos Karla Petra v Praze a Matyáše Lercha v Brně. Vlivy české geometrické školy se uplatňují i ve 20. století, podle J. Folty však

> „*… začínají ... způsobovat v některých aspektech již nikoliv rozvoj, ale spíše stagnaci geometrického bádání. Dostávají ...* [svá] *vyjádření v kompendiích, učebnicích či specificky pojatých monografiích, ale nepomáhají rozvíjet nové badatelské směry,*“ ([23], str. 45).

V souvislosti s dozníváním české geometrické školy zmiňuje například dvoudílnou učebnici deskriptivní geometrie F. Kadeřávka, J. Kounovského a J. Klímy nebo dílo B. Bydžovského jako představitele analytického proudu. Tak se působení české geometrické školy, které bylo v 19. století pro rozvoj geometrického bádání u nás přínosné, stává ve 20. století podle hodnocení [23] spíše přítěží a tradicí, která spoutává myšlení a brání rozvoji. Jistou roli sehrálo již v 19. století to, že si česká geometrická škola osvojila jistá oblíbená témata, zcela však opomíjela určité oblasti geometrie, které byly v zahraničí předmětem intenzivního studia (viz podkapitola 1.5.1), a změnu přinesly až pozdější generace. Výsledků, které by měly význam i v kontextu rozvoje matematiky ve světě, tak podle J. Folty dosáhli až těsně před druhou světovou válkou v oblasti topologie Eduard Čech a jeho žáci.

Na závěr této podkapitoly uvedu souhrnné hodnocení významu české geometrické školy tak, jak je nalezneme v [23].

> „*Českou geometrickou školu lze považovat za matematickou školu s převážně teritoriálním významem. Jejím vlivem se na jistou dobu vyhraňuje určitým způsobem profil matematického bádání v oblasti působení pražských vysokých škol. Zpočátku působí na tomto teritoriu progresívně, později se začínají projevovat regresívní prvky její jednostrannosti a posléze i vědecké neprvořadosti. Přesto je zde dosaženo některých významných výsledků, na něž světová matematika navázala, zejména v díle Emila Weyra, Seligmanna Kantora a Karla Pelze,*“ ([23], str. 49).

1.5.3 Působení Jana Sobotky

A. Sobotkovo vědecké zaměření

Z deskriptivně-geometrických prací jsou ceněny jeho práce věnované kosoúhlé axonometrii, kde jím dosažené původní výsledky přecházejí do českých učebnic deskriptivní geometrie. Za významná jsou považována jeho pojednání o oskulačních hyperboloidech přímkových ploch, jejichž výsledek zaznamenal ohlas i v zahraniční literatuře o konstruktivní geometrii jako tzv. Šolínova-Sobotkova konstrukce. B. Bydžovský také vyzdvihl ([17], str. 27) jeho zobecnění cyklografické projekce. Poznamenal též ([17], str. 26), že Sobotkovo jméno je citováno na mnoha místech v publikaci G. Lorii „*Storia della Geometrie descriptiva*“ (1921) hlavně v souvislosti s axonometrií, ale i diferenciální geometrií šroubových ploch. Konečně je významné místo přisuzováno i jeho učebnici „*Deskriptivní geometrie promítání parallelního*“.

Již jsme uvedli, že diferenciální geometrie stála zpočátku stranou zájmu geometrů v českých zemích. Jan Sobotka patří mezi první z nich, kteří se této disciplíně začali intenzivněji věnovat. Projevuje se to v jeho soustavném zájmu o konstrukce středů křivosti rovinných křivek a rovinných řezů ploch, za významné jsou považovány zejména ty práce, v nichž řešil otázky vyšších křivostí ploch. Zájem o konstrukci středů křivosti (i křivostí vyšších řádů) se projevoval i v případě kuželoseček.

Tím se dostáváme ke geometrii kvadratických útvarů. V souvislosti s ní je připomínáno, že se Sobotka zajímal jak o projektivní, tak metrické problémy. B. Bydžovský také napsal, že

> „*bylo právě tributem doby, že celá řada prací ... se týkala kuželoseček a jejích soustav jakož i ploch kvadratických,*“ ([17], str. 26 – 27).

Z elementárně-geometrických pojednání jsou připomínána ta, která věnoval Apolloniově úloze a příbuzným problémům. Stejně jako o dalších pojednáních z elementární geometrie je možné o pracích z ostatních oborů geometrie říci, že zde dosažené výsledky nejsou příliš vyzdvihovány. Např. v [18] se o nich mluví v tom smyslu, že některé jsou sice velmi zajímavé, ale již hodně specializované.

Souhrnně můžeme říci, že Sobotkovy práce jsou bohaté na nové výsledky. Některé z nich lze patrně považovat za velmi podstatné. Avšak i pohled na ty ostatní nám pomůže odkrýt druhou významnou stránku Sobotkova působení, totiž jeho jedinečnost a osobitost. Této otázce se budeme věnovat později.

Sobotkovo dílo patrně ovlivnil rozkvět tzv. ryzí geometrie v 19. století, ke kterému došlo zejména vlivem francouzských a německých geometrů. Na něj od poloviny 19. století reagovala první generace českých geometrů v růstu zájmu o deskriptivní geometrii jako o samostatně rozvíjenou oblast geometrie, k tomu se od 60. let 19. století přidal i zájem o projektivní geometrii. Konečně se v dalších generacích u řady českých geometrů projevila působením české polytechniky v Praze výrazná orientace na syntetickou geometrii (ať již deskriptivní, projektivní nebo elementární) a konstruktivní řešení problémů.

Tento vliv, který je u Sobotky zcela zřetelný, ve svém díle výrazně a originálně přetvářel, jak si ukážeme dále. Kromě tohoto „obecného naladění“ části české geometrické školy utvářely Sobotkovo zaměření také problémy, které někteří z geometrů této školy řešili. Jako příklady můžeme uvést otázky názorných zobrazovacích metod (R. Skuherský, K. Pelz), osvětlení ploch (F. Tilšer, Č. Jarolímek, K. Pelz, B. Procházka), dotyky přímkových hyperboloidů (J. Šolín, Ed. Weyr) a konstrukce normál rovinných křivek. Častým užitím Steinerovy paraboly, příp. její prostorové analogie, může připomínat již zmiňovaného K. Pelze.

Nesmíme opomenout ani význam W. Fiedlera jako Sobotkova učitele. Již jsme upozornili, že jím uplatňované účelné užití syntetické, algebraické i analytické metody můžeme nalézt i v pracích Jana Sobotky. Nejsem však schopen říci, zda je tato skutečnost důsledkem Fiedlerova vlivu, upozorňuji na ni spíše jako na jistou paralelu mezi Sobotkou a Fiedlerem. V některých pracích se setkáme i s podněty, které Sobotka čerpal od svého dalšího učitele R. Sturma.

Samostatnou oblast vlivů představují práce mnoha dalších geometrů (i zahraničních), ze kterých Sobotka tak často čerpal podněty pro vlastní vědeckou činnost. V této souvislosti můžeme upozornit na A. Mannheima (1831 – 1906). Tato osobnost francouzské geometrie byla v českých zemích poměrně dobře známá v souvislosti s ohlasem, který u jistého okruhu představitelů české geometrické školy (bratři Vaněčkové, Ed. Weyr, B. Procházka) zaznamenala kinematická geometrie (např. J. S. Vaněček roku 1880 zpracoval a česky publikoval Mannheimovy přednášky z tohoto oboru).

V souvislosti s tím, že Sobotka začal jako jeden z prvních českých geometrů soustavněji pracovat v diferenciální geometrii, je patrně zajímavá i otázka, co jej nasměrovalo právě sem. Tuto otázku nejsem bohužel schopen zodpovědět.

B. Jedinečnost a osobitost tvorby Jana Sobotky

V této části nebudu hodnotit jedinečnost jeho výsledků, ani jeho osobnostní rysy. Půjde mi spíše o popsání jedinečnosti a osobitosti metod, které volil při své vědecké práci, jak se odrážejí v jeho pojednáních. Nebudu zde popisovat metody, které uplatnil ve svých jednotlivých pracích. Pro ilustraci to ukáži na vybrané skupině Sobotkových článku ve druhé části práce. Zajímavé mi přijde ukázat jedinečnost a osobitost jeho díla, pokud se na ně díváme jako na celek. Přitom slova „jedinečnost a osobitost" nevnímám ve smyslu odlišnosti od druhých. Tato slova chápu jako vyjádření snahy popsat charakteristické rysy jeho díla po stránce metodické[38].

Takovou charakteristiku naznačil B. Bydžovský ve své posmrtné vzpomínce na Jana Sobotku ([17], str. 20 – 24). Bydžovského závěry jsem shledal výstižnými na základě studia Sobotkových prací a to z deseti aspektů:

1. Náměty tvorby
2. Šíře rozhledu
3. Hloubka prací
4. Zobecňování výsledků
5. Konstrukce
6. Kalkul
7. Drobnokresba
8. Tvůrčí fantazie
9. Umění

[38] Podobný přístup nalezneme např. v psychologii osobnosti jako jedné z psychologických disciplín. V ní pojem „osobnost" nevyjadřuje to, že by se jednalo o někoho výjimečného, ale souhrn vlastností. Přitom nejde primárně o srovnávání osobností dvou a více lidí mezi sebou, ale o osobnostní charakteristiku konkrétního člověka, která jej činí jedinečným.

10. Talent

Náměty tvorby: Jan Sobotka často vyšel z problému, který před ním zformuloval a řešil někdo jiný. Již to je jistým charakteristickým rysem, avšak jeho jedinečnost se projevila v tom, jak ho uchopil a dále rozpracoval. Přitom je důležité právě ono „vyšel“ – výsledky nebo zvolené postupy jsou totiž u něho nové. S tím souvisí i „návraty“ – někdy se totiž Sobotka k výsledkům svých předchůdců vrací, avšak jiným způsobem.

Šíře rozhledu: Sobotkovy práce zasahují do řady oblastí geometrie, to je jedním z projevů jeho širokého rozhledu po různých geometrických disciplínách. Avšak i když zařadíme jeho práce do příslušných oblastí, uvidíme v řadě případů, jak se v jediné práci prolínají přístupy jednotlivých oblastí geometrie (např. projektivní s metrickým, syntetický s analytickým nebo algebraickým, atd.). Někdy se k témuž problému vrátil ve více pracích z různých úhlů pohledu. Konečně ukazuje souvislost právě řešeného problému s jiným, nebo i nalezeného řešení s již známými řešeními.

Hloubka prací: Přejatý problém Sobotka často dále prohluboval, ani v průběhu samotného řešení se nespokojil vždy s jediným postupem. Důsledkem jsou buď obecněji platné výsledky, nebo častěji výrazně jednodušší řešení, než jakými jsou ta jeho dřívější vlastní nebo jeho předchůdců. Projevuje se též snahou po maximálním prozkoumání a vytěžení toho, co zvolený problém nabízí.

Zobecnění výsledků: Druhým ze způsobů, kterým se Sobotka stavěl k řešení problémů je zobecňování výsledků. Tento přístup se projevil již v jeho první práci [**S1**] a nalezneme ho i v řadě dalších pojednání [39] až vlastně do poslední práce [**S147**], ve které zobecnil cyklografickou a stereografickou projekci. Např. B. Bydžovský píše:

> „*Přitom nutno hned zdůrazniti, že zevšeobecňování Sobotkou prováděné není ve většině případů nijak triviální nebo samozřejmé. Úlohy elementární geometrie ... přímo svádějí k takovému snadnému ... zobecňování, jež záleží v tom, že metrické útvary, o něž tu běží, se projektivně zobecňují. Tento způsob jistě plodný – jemuž na př. děkujeme za slavnou větu Pascalovu – který byl kdysi objevem, stal se časem triviálním. Zobecňování prováděné Sobotkou většinou není tohoto jednoduchého druhu, nýbrž bývá značně složitějšího rázu, takže vzbuzuje často*

[39] Můžeme si toho všimnout např. u řady prací z elementární geometrie (některé extremální úlohy, Apolloniova a příbuzné úlohy, Feuerbachova věta, aj.), u problému normál v souvislosti s Joachimsthalovou větou, ale i v řadě dalších případů (zobecnění Steinerovy paraboly).

podiv, jak ... [Sobotka] *dovede spojovati věci na první pohled velmi odlehlé. Rovněž časté je zevšeobecňování v tom smyslu, že problém řešený v nějakém prostoru přenáší do prostoru vyššího; znalec ví, že takové zevšeobecňování zpravidla není ani snadné, ani samozřejmé,*“ ([17], str. 22 – 23).

B. Bydžovský chápe Sobotkou uplatněné zobecňování i v tomto smyslu:

„... jsou autoři, kteří si zvolí problém hodně obecný a v průběhu jeho řešení jsou nuceni obtížemi, jež vznikají z přílišné obecnosti, postupně jej specialisovati. Postup Sobotkův je právě opačný: vyjde od problému speciálního a pak jakoby se stále rozbíhal do větší šíře a nakonec obsáhne svým studiem široké pole, na němž je původní speciální problém jen jedním klasem bohaté úrody,“ ([17], str. 23).

Konstrukce: Vlastní těžiště Sobotkova díla leží v syntetické geometrii a i tehdy, pokud se obrací k jiným oblastem geometrie, je v drtivé většině případů cílem jeho snažení konstrukce. Samozřejmě najdeme zde práce, které ač svým charakterem spadají právě do syntetické geometrie (např. [**S1**]), nepředstavují žádnou konstrukci. Jedná se však spíše o výjimky. Je spíše pravidlem, že pokud Sobotka odvodil nějakou větu nebo vztah, snažil se ukázat jeho využití v řešení nějakého konstruktivního problému. Přitom mu jde o konstrukci co nejjednodušší.

Kalkul: V souvislosti s předchozím bodem je na místě podtrhnout skutečnost, že velmi často a v různých oblastech využíval analytických a algebraických metod, které s oblibou využil k odvození zajímavého konstruktivního řešení. V souvislosti s tím připomínám úvahy P. Vopěnky o roli kalkulů ve vývoji matematiky, které budu citovat v úvodu třetí části a též v podkapitole 3.2.3. Tyto metody však Sobotkovi neslouží výhradně za účelem odvození nějaké konstrukce, používá jich např. i pro analytické odvození jistých vět, které již byly dokázána synteticky (např. Feuerbachova věta). Paradoxně nalezneme v jeho pracích i syntetické důkazy tvrzení, u kterých je ten analytický výrazně jednodušší (např. práce [**S140**]).

Drobnokresba: B. Bydžovský nazývá Sobotku pro jeho celoživotní zanícení pro drobné problémy, které však propracovává do drobných detailů a všech důsledků, „mistrem geometrické miniatury“. Uvědomíme si to i v jeho snaze neustále hledat ta nejjednodušší konstruktivní řešení.

Tvůrčí fantazie: Ta se projevuje v řadě výše zmíněných rysů Sobotkova díla. To, jak se mu dařilo propojit různé oblasti geometrie, prohlubovat a zobecňovat problémy, nalézat elegantní a jednoduchá řešení ať již ryze syntetickou nebo početní cestou, vyžadovalo značnou míru představivosti, schopnosti vidět daleko dopředu.

Umění: B. Bydžovský napsal, že ze Sobotkových „*rukou nevycházely věty velké obecné platnosti, za to však celá spousta krásných drobných výsledků,*“ ([17], str. 24). Pro řadu z nich by se tak více než přívlastku podstatné, hodila slova jako zajímavé nebo krásné. Uvědomil jsem si to například při studiu práce [**S48**], ve které (jak ukáži v kapitole 2.4) algebraickou cestou ukázal obdobu výsledku, jehož důsledkem jsou klasická řešení Apolloniovy úlohy založená na ose podobnosti. Oslovilo mne jednak to, že je možné tato řešení dokázat i analyticky (resp. algebraicky), jednak to, že tento postup je velice elegantní a také krásný. Právě v takové chvíli si můžeme uvědomit, že matematika nesouvisí pouze s rozumem, ale má i svou estetickou stránku, kterou můžeme také vnímat; to nazývám Sobotkovým uměním. Jistě by se daly najít i jiné příklady nejen v jeho dalších pojednáních, ale i v pracích dalších matematiků.

Talent: Na základě studia Sobotkova díla jsem nabyl přesvědčení, že Jan Sobotka byl mimořádně talentovaný tvůrčí matematik, který svou píli a rozhledem zasáhl do mnoha oblastí geometrie. Domnívám se, že některé Sobotkovy postupy jsou důkazem jeho výrazného talentu k tvůrčímu matematickému uvažování. Tyto specifické způsoby myšlení se nedají naučit, ani předat.

C. Sobotkův význam pro českou, případně světovou matematiku

Tato otázka je obtížná. V jistém smyslu můžeme význam jakéhokoliv matematika poměřovat tím, jak podstatné byly jeho výsledky. Zde nám může být vodítkem ta část této podkapitoly, kde jsme vyzdvihli některé z jeho prací pro ohlas, který zaznamenaly v českém nebo i světovém prostředí. Přitom jsme viděli, že některé výsledky pronikly i do učebnic. Měřítkem však může být i to, zda na jeho výsledky navázali další geometři. Jsem přesvědčen, že pro českou matematiku je důležité, že se jako jeden z prvních začal soustavněji zabývat diferenciální geometrií.

Jeho význam můžeme posuzovat i s ohledem na jeho další působení. Vzhledem k jeho činnosti na univerzitě, v Jednotě českých matematiků a fyziků, v dalších vědeckých spolcích i ve zkušební komisi pro učitele matematiky ho musíme považovat za výraznou osobnost matematického života v Čechách, která měla velký vliv na další generace českých matematiků. Přitom nesmíme opomenout jeho přínos pro rozvoj výuky geometrie na české univerzitě v Praze. V tomto kontextu můžeme pouze diskutovat o tom, co je důležitější, zda to, že jeho vědecká práce nalezla nebo nenalezla další pokračovatele, nebo to, že pomohl vychovat kvalitní učitele a usiloval o rozvoj výuky matematiky v českých zemích.

S ohledem na to, co jsme uvedli v celé této kapitole, můžeme Jana Sobotku považovat za výraznou osobnost českého matematického života, jejíž význam byl zejména lokálního charakteru. Do hlavních proudů světové matematiky zasáhl patrně podstatně méně, i když některé výsledky z několika speciálních oblastí geometrie (axonometrie, oskulační hyperboloidy přímkových ploch) zaznamenaly ohlas i v zahraničí. Příčiny toho, že jeho význam v zahraničí nebyl takový jako na českém území, můžeme spatřovat též v tradici české geometrické školy, která určovala zaměření práce zdejších geometrů. Viděli jsme, že geometrické disciplíny, které vyzdvihovala, byly již na ústupu zájmu světové matematiky, která začala řešit jiná témata.

Dalším z možných aspektů jeho významu je i to, zda jeho dílo je podnětné i s odstupem téměř sta let. Ve třetí části práce ukáži, v čem je Sobotkovo dílo inspirativní pro mne.

2. Sobotkovy práce věnované Apolloniově úloze a úlohám příbuzným

Sobotka se problematice Apolloniovy úlohy a příbuzných problémů věnoval ve čtyřech pracích uveřejněných v průběhu roku 1912. K problematice se vrátil v jedné stati z roku 1929. V této části se budeme věnovat pouze těm z roku 1912. V následujících kapitolách se zaměřím na přiblížení jejich obsahu. Rozhodl jsem se, že by měl být výklad srozumitelný absolventovi učitelství matematiky pro střední školy na českých vysokých školách. Protože i mezi nimi panují jisté rozdíly, vyšel jsem ze studijního programu tohoto oboru na pedagogické fakultě Univerzity Hradec Králové. Sobotka využívá poznatky z různých oborů geometrie, které nevysvětluje. Aby byl výklad srozumitelný a ucelený, přistoupil jsem k tomu, že musím předem objasnit ty z nich, se kterými se absolvent výše uvedeného studia pravděpodobně nesetkal.

V předchozí kapitole jsem uvedl jisté charakteristické rysy Sobotkových prací. Pojednání zpracovaná v této části můžeme považovat za jejich vhodnou ilustraci. Lze říci, že se zde projevují v jisté míře všechny uvedené rysy. Proto je tento výklad záměrně velmi podrobný. Kromě toho, že mým cílem bylo objasnit právě způsob, kterým Sobotka přistupuje k zvolenému problému, uvažuje o něm, dále ho rozvíjí a nalézá jeho řešení, chci vyložit i samotné výsledky.

Studované čtyři práce tvoří přirozený celek, ve kterém na sebe pojednání vzájemně navazují. Subjektivně považuji za jisté vyvrcholení práci [**S48**], ve které jsou výsledky statí [**S49**] a [**S46**] doplněny o další zajímavé souvislosti. Současně jsou zde dále zjednodušeny konstrukce uvedené v článcích [**S49**] a [**S46**]. Protože některé charakteristické rysy Sobotkovy vědecké činnosti vyniknou zejména, pokud vnímáme tyto čtyři práce jako celek, všímám si podrobně každé z nich. Práce [**S144**] z roku 1929 navazuje především užitou metodou na ty z roku 1912, nepovažuji však za důležité věnovat se detailně i jí. K tomu, abych ilustroval příznačné znaky Sobotkova díla, je série pojednání z roku 1912 postačující. Přitom není nezbytně nutné přiblížit ty z nových výsledků, kterých dosáhl v [**S144**].

2.1 Apolloniova úloha

2.1.1 Úvod

Obecnou Apolloniovou úlohou rozumíme následující úlohu: sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají daných tří kružnic. Krása problému spočívá mimo jiné v jednoduchosti zadání, které vybízí k řešení. Těch vzniklo v historii opravdu mnoho. Apolloniovou úlohou se zabývala řada význačných matematiků novověku. Jmenujme např. Vièta, Fermata, Newtona, Eulera, Plückera, Caseye. Sobotkovo řešení výše zmíněné úlohy nalezneme v článku „*O některých relacích metrických a jejich užití k analytickému řešení problému Apollonického*“ (Časopis pro pěstování matematiky a fyziky XLI, 1912, str. 487 – 500). Pro úplnost uvádím, že toto řešení je odlišné od toho, které je jako Sobotkovo řešení vyloženo v [2]. To je speciálním důsledkem obecnějších úvah o problému koule dotýkající se čtyř daných koulí (viz podkapitola 2.4.5).

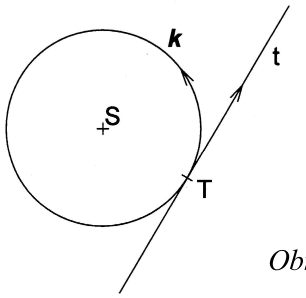
Výklad Sobotkova řešení, který uvádím níže, se liší od původně Sobotkou uveřejněného v části, která se zabývá odvozením Caseyovy věty. Ve svém odvození vycházím z věty Ptolemaiovy. Rozhodl jsem se tak proto, aby více vynikla v dalších kapitolách příbuznost řešení rovinného problému a obdobné úlohy na kulové ploše, resp. v trojrozměrném prostoru. Výklad řešení v podobě, jakou uveřejnil Sobotka, je možné nalézt v [3].

2.1.2 Pomocné pojmy a poznatky

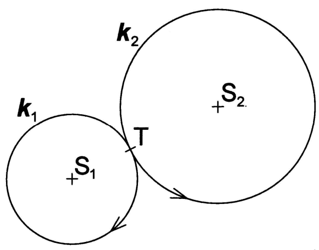
A. Cykly

Přiblížíme pojem cyklu. Pomůžeme si při tom názornou představou. Chceme-li narýsovat kružnici, můžeme kružítkem otáčet buď ve směru, nebo proti směru hodinových ručiček. Tato jednoduchá představa nás vede k myšlence, abychom libovolné kružnici přisoudili jeden ze dvou možných smyslů otáčení (kladný pro pohyb proti směru hodinových ručiček, záporný pro smysl opačný). Vznikne tak tzv. orientovaná kružnice (cyklus). Je zřejmé, že orientace kružnice nebyla z dnešního hlediska zavedena korektně. Touto mechanistickou představou si budeme pomáhat i v následujících odstavcích, ve kterých budeme pojmy pouze přibližovat, ne je zavádět. Velkou roli přitom sehrávají obrázky. Tento přístup (podobný nalezneme např. v [2]) považuji za postačující pro účely této práce, přesto v závěrečné poznámce uvádím korektní zavedení pojmu cyklus.

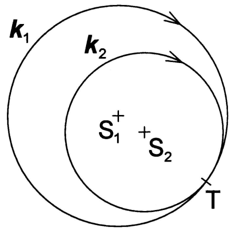
Poloměr orientované kružnice bude reálné číslo, které je v absolutní hodnotě rovno poloměru původní kružnice a je kladné pro kladnou orientaci cyklu a naopak. V dalších úvahách budeme označovat cyklus o středu $\boldsymbol{S}$ a poloměru r $\underline{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{S}, r)$ (resp. $\underline{\boldsymbol{k}}$), neorientovanou kružnici pak $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{S}, r)$ (resp. $\boldsymbol{k}$).



Obr. 2.1.1



Obr. 2.1.2a



Obr. 2.1.2b

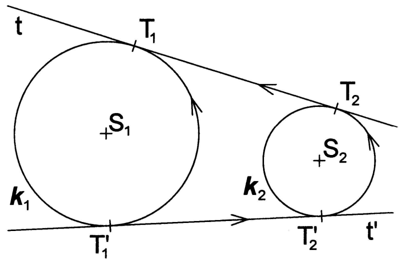
V libovolném bodě cyklu můžeme sestrojit orientovanou tečnu. Její orientace je určena orientací cyklu (viz obr. 2.1.1). Dva cykly se dotýkají tak, že musí být shodná i orientace jejich společné tečny v bodě dotyku. Dva cykly stejného smyslu mohou proto mít pouze vnitřní dotyk (viz obr. 2.1.2b), cykly různého smyslu pouze vnější (viz obr. 2.1.2b). Vše může být názornější, představíme-li si cykly jako otáčející se soukolí nějakého stroje.

Máme-li dány dva cykly $\underline{\boldsymbol{k}}_1(\boldsymbol{S}_1, r_1)$, $\underline{\boldsymbol{k}}_2(\boldsymbol{S}_2, r_2)$, které se dotýkají, platí pro vzdálenost jejich středů jednoduchý vztah:

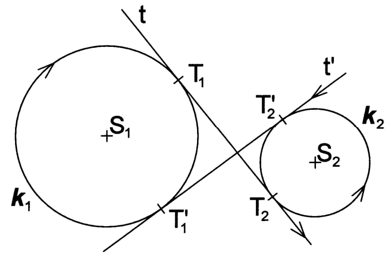
$$|\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2| = |r_1 - r_2| \qquad (2.1.1)$$

Dva cykly $\underline{\boldsymbol{k}}_1(\boldsymbol{S}_1, r_1)$ a $\underline{\boldsymbol{k}}_2(\boldsymbol{S}_2, r_2)$, kdy jeden leží vně druhého, mají právě dvě společné orientované tečny. Mají-li cykly stejný smysl, jedná se o dvojici vnějších tečen (viz obr. 2.1.3a), mají-li opačný smysl, jsou to tečny vnitřní (viz 2.1.3b). I zde si pomůžeme názornou představou dvou otáčejících se kol spojených řemenem. Označíme-li $\boldsymbol{T}_1$, $\boldsymbol{T}_2$ body dotyku jedné z tečen a obou cyklů, platí nezávisle na orientaci cyklů:

$$|\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2|^2 = |\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2|^2 - (r_1 - r_2)^2 \qquad (2.1.2)$$

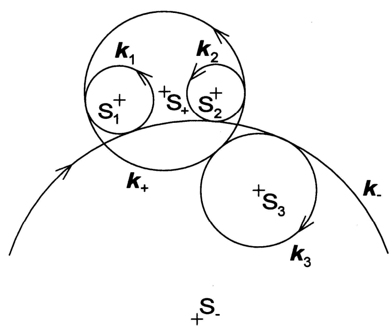


Obr. 2.1.3a



Obr. 2.1.3b

Ukažme, jak je možné cyklů použít ke stanovení maximálního počtu řešení obecné Apolloniovy úlohy. Předpokládejme, že každá z daných kružnic leží vně zbývajících. Označme cykly jimi určené $\underline{\boldsymbol{k}}_1$, $\underline{\boldsymbol{k}}_2$, $\underline{\boldsymbol{k}}_3$. Nechť cyklus $\underline{\boldsymbol{k}}_1$ je orientován kladně. Symbolicky naznačme možné orientace daných cyklů: + + +, + + –, + – +, + – –. Při určité volbě smyslů existují právě dvě řešení – cyklus s kladným a záporným smyslem. Výše uvedené poznatky o dotycích dvojice cyklů použijeme při úvaze o druhu dotyků řešení a zadaných kružnic. Např. pro volbu + + – platí (viz obr. 2.1.4): jestliže bude mít hledaný cyklus $\underline{\boldsymbol{k}}_+$ kladný smysl, musí mít s $\underline{\boldsymbol{k}}_1$ (kladně orientovaná) vnitřní, s $\underline{\boldsymbol{k}}_2$ (kladně orientovaná) vnitřní a s $\underline{\boldsymbol{k}}_3$ (záporně orientovaná) vnější dotyk. U záporně orientovaného řešení $\underline{\boldsymbol{k}}_-$ by tomu bylo právě naopak. Obdobnou úvahu je možné provést i pro další tři uváděné orientace cyklů $\underline{\boldsymbol{k}}_1$, $\underline{\boldsymbol{k}}_2$, $\underline{\boldsymbol{k}}_3$. Jak snadno nahlédneme, získáme celkem osm různých řešení obecné Apolloniovy úlohy. Pokud bychom zvolili zápornou orientaci prvního cyklu, žádná nová řešení již nenalezneme.



Obr. 2.1.4

Poznámka:

Orientovanou kružnici můžeme zavést následujícím způsobem, ve kterém si však musíme pomoci stereometrickými úvahami. Uvažujme v rovině ρ libovolnou kružnici $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{S}, r)$ s nenulovým poloměrem. Rovina ρ určuje v trojrozměrném prostoru dva disjunktní otevřené poloprostory, označíme je Π^+ a Π^-. Kružnici $\boldsymbol{k}$ můžeme přiřadit právě dva různé body, které leží na kolmici vedené k rovině ρ bodem $\boldsymbol{S}$ ve vzdálenosti r od tohoto bodu. Ten z nich, který náleží poloprostoru Π^+ (resp. Π^-), označíme symbolem $\boldsymbol{P}^+$ (resp. $\boldsymbol{P}^-$). Řekneme, že jsme kružnici $\boldsymbol{k}$ orientovali kladně (resp. záporně), jestliže této kružnici přiřadíme bod $\boldsymbol{P}^+$ (resp. $\boldsymbol{P}^-$). Orientovanou kružnicí (též cyklem) $\underline{\boldsymbol{k}}$ se středem $\boldsymbol{S}$ a poloměrem r (kde r je reálné nenulové číslo) rozumí kružnici $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{S}, |r|)$, kterou jsme v případě kladného (resp. záporného) r orientovali kladně (resp. záporně).

Bod $\boldsymbol{P}^+$ (resp. $\boldsymbol{P}^-$) určuje společně s cyklem $\underline{\boldsymbol{k}}$ kuželovou plochu, kterou nazveme řídící kuželová plocha cyklu $\underline{\boldsymbol{k}}$. Tečnou cyklu $\underline{\boldsymbol{k}}$ rozumíme průsečnici tečné roviny řídící kuželové plochy orientované kružnice $\underline{\boldsymbol{k}}$ a roviny $\boldsymbol{\rho}$. Řekneme, že se dva cykly dotýkají v bodě $\boldsymbol{T}$, jestliže mají v tomto bodě společnou tečnu. Zjevně se dva cykly dotýkají, právě když se dotýkají jejich řídící kuželové plochy. Společnou tečnou dvou orientovaných kružnic je průsečnice roviny $\boldsymbol{\rho}$ a roviny, která se dotýká řídících kuželových ploch obou cyklů. Takto zavedené pojmy jsou zjevně v souladu s výše uvedenými představami.

O cyklech můžeme nalézt více též např. v [4].

B. Chordála a potenční střed

Pro další výklad předpokládám znalost pojmů mocnosti bodu ke kružnici, chordály dvou kružnic a potenčního středu. Mocnost bodu $\boldsymbol{X}$ ke kružnici $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{S}, r)$ je rovna číslu $m = |\boldsymbol{SX}| - r^2$. Nechť je kružnice $\boldsymbol{k}$ dána ve zvolené kartézské soustavě souřadnic rovnicí $(x-m)^2 + (y-n)^2 - r^2 = 0$, kde souřadnice středu $\boldsymbol{S}$ jsou $[m, n]$. Označíme $K(x, y)$ výraz na levé straně této rovnice. V dalším textu budeme často ztotožňovat kružnici $\boldsymbol{k}$ a její rovnici $K(x, y) = 0$, stručně též $K = 0$. Mocnost bodu $\boldsymbol{X}[x_0, y_0]$ ke kružnici $K(x, y) = 0$ určíme snadno:

$$m = |\boldsymbol{SX}|^2 - r^2 = (x_0 - m)^2 + (y_0 - n)^2 - r^2 = K(x_0, y_0) \qquad (2.1.3)$$

Nechť jsou dány dvě kružnice: $\boldsymbol{k}_1$ ($K_1 = 0$) a $\boldsymbol{k}_2$ ($K_2 = 0$). Pak bod $\boldsymbol{X}[x_0, y_0]$ je bodem chordály $\boldsymbol{c}$ těchto dvou kružnic právě tehdy, když $K_1(x_0, y_0) = K_2(x_0, y_0)$. Získáváme tak rovnici chordály:

$$\boldsymbol{c}: K_1(x, y) - K_2(x, y) = 0 \text{ (stručně } K_1 - K_2 = 0) \qquad (2.1.4)$$

Jestliže mají kružnice $\boldsymbol{k}_1$ a $\boldsymbol{k}_2$ dva společné body $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$, chordála těchto kružnic je totožná s přímkou $\boldsymbol{AB}$. Předpokládám, že je též známá konstrukce chordály dvou kružnic využívající pomocné kružnice, jakož i konstrukce potenčního středu tří kružnic.

C. Ptolemaiova věta

Studium Sobotkových prací o řešení Apolloniovy úlohy předpokládá znalost Ptolemaiovy věty nejen v její klasické formulaci, ale i ve vyjádření užívajícím determinanty. Tato podoba pak umožní přenesení řešení Apolloniova problému z roviny i na kulovou plochu a do trojrozměrného prostoru. Připomeňme Ptolemaiovu větu v tradičním znění:

Věta 2.1.1: *V každém tětivovém čtyřúhelníku je součin délek úhlopříček roven součtu součinů délek protilehlých stran.*

Pro objasnění Sobotkova řešení využijeme následující větu:

Věta 2.1.2: *Mějme dány v rovině 4 body* $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$, $\boldsymbol{A}_4$ *ležící na kružnici. Označme* d_{ij} *vzdálenost bodů* $\boldsymbol{A}_i$ *a* $\boldsymbol{A}_j$. *Pak pro vzájemné vzdálenosti daných čtyř bodů platí:*

$$\begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 \\ d_{12}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ d_{13}^2 & d_{23}^2 & 0 & d_{34}^2 \\ d_{14}^2 & d_{24}^2 & d_{34}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ptolemaiovou větou se budeme více zabývat ve třetí části v kapitole 3.2, kde uvedeme i odvození věty 2.1.2, které umožňuje zformulovat analogii této věty pro trojrozměrný i obecně n-rozměrný euklidovský prostor.

Zde si ukažme, že výše uvedené tvrzení věty 2.1.2 užívající determinantu vyjadřuje skutečně Ptolemaiovu větu tak, jak je běžně formulována (tj. větu 2.1.1).

$$\begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 \\ d_{12}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ d_{13}^2 & d_{23}^2 & 0 & d_{34}^2 \\ d_{14}^2 & d_{24}^2 & d_{34}^2 & 0 \end{vmatrix} = d_{12}^4 d_{34}^4 + d_{13}^4 d_{24}^4 + d_{14}^4 d_{23}^4 - 2d_{12}^2 d_{13}^2 d_{24}^2 d_{34}^2 - 2d_{12}^2 d_{14}^2 d_{23}^2 d_{34}^2 - 2d_{13}^2 d_{14}^2 d_{23}^2 d_{24}^2 = 0.$$

Označme $d_{12}d_{34} = a,\ d_{13}d_{24} = b,\ d_{14}d_{23} = c$ a proveďme následující úpravu výše uvedeného výrazu:

$$\begin{aligned} & a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 = a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - 4b^2c^2 = \\ & = (a^2 - b^2 - c^2) - (2bc)^2 = (a^2 - b^2 - c^2 - 2bc)(a^2 - b^2 - c^2 + 2bc) = \left[a^2 - (b+c)^2\right] \cdot \left[a^2 - (b-c)^2\right] = \\ & = (a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c) \end{aligned}$$

Proto platí:

$$(d_{12}d_{34}+d_{13}d_{24}+d_{14}d_{23})(d_{12}d_{34}-d_{13}d_{24}-d_{14}d_{23})(d_{12}d_{34}+d_{13}d_{24}-d_{14}d_{23})$$
$$(d_{12}d_{34}-d_{13}d_{24}+d_{14}d_{23})=0$$

Pro čtyři různé body je první činitel v součinu vždy různý od nuly. Předpokládejme, že je roven nule druhý činitel, tj. $d_{13}d_{24}+d_{14}d_{23}=d_{12}d_{34}$. Vidíme, že je tímto vztahem vyjádřena Ptolemaiova věta pro případ, že v tětivovém čtyřúhelníku určeném danými body jako jeho vrcholy jsou úhlopříčkami úsečky $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2$ a $\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4$. Ostatní dva činitele, jsou-li rovny nule, vyjadřují Ptolemaiovu větu v tětivovém čtyřúhelníku určeném opět danými body, v němž jsou úhlopříčkami buď úsečky $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_4$ a $\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3$, nebo úsečky $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_3$ a $\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_4$. Uvážíme-li možná uspořádání čtyř různých bodů na kružnici, vidíme, že pro každou z nich nastane právě jeden z těchto tří případů. Proto můžeme říci, že věta 2.1.2 je zobecněním Ptolemaiovy věty v klasickém znění.

D. Dělící poměr a dvojpoměr

Připomeňme, že dělícím poměrem bodu ***C*** přímky ***AB*** vzhledem k bodům ***A*** a ***B*** (v tomto pořadí), kde $\boldsymbol{C} \neq \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C} \neq \boldsymbol{B}$, rozumíme číslo λ, pro které platí: $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}} = \lambda \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{BC}}$. Tento dělící poměr obvykle značíme (***ABC***). Pro čtyři různé body ***A***, ***B***, ***C***, ***D*** na přímce rozumíme dvojpoměrem bodů ***A***, ***B***, ***C***, ***D*** číslo (***ABC***)/(***ABD***). Označíme ho (***ABCD***). Dělící poměr můžeme definovat i pro nevlastní bod $\boldsymbol{U}^\infty$ přímky ***AB***. Položíme $(\boldsymbol{ABU}^\infty) = 1$. Potom je zřejmě dvojpoměr $(\boldsymbol{ABCU}^\infty)$ roven dělícímu poměru (***ABC***). Nedefinujeme dělící poměr pro případ, že by bod ***A*** nebo ***B*** byl nevlastní. Přesto můžeme definovat dvojpoměr i v případě, že je nevlastní libovolný z uvažovaných čtyř (různých) bodů (viz např. [9]).

Množinu všech přímek procházejících bodem ***P*** nazveme svazek přímek se středem ***P***, budeme ho označovat symbolem *s*(***P***). Pro přímky v jednom svazku můžeme definovat dvojpoměr. Dříve než tak učiníme, vyslovíme následující větu, kterou uvedeme bez důkazu (důkaz viz např. [35], str. 31 – 32).

Věta 2.1.3: *Nechť jsou dány čtyři různé přímky* ***a****,* ***b****,* ***c****,* ***d*** *svazku o středu* ***S****. Nechť jsou dány další dvě různé přímky* ***p*** *a* ***p’*** *neprocházející bodem* ***S****. Označme po řadě průsečíky (i nevlastní) přímek* ***a****,* ***b****,* ***c****,* ***d*** *s přímkou* ***p*** *(resp.* ***p’****)* ***A****,* ***B****,* ***C****,* ***D*** *(resp.* ***A’****,* ***B’****,* ***C’****,* ***D’****). Pak platí:*

(***ABCD***) = (***A’B’C’D’***).

Věta 2.1.3 nás opravňuje k tomu, abychom dvojpoměr přímek $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ (v uvedeném pořadí) procházejících bodem $\boldsymbol{S}$ definovali jako dvojpoměr bodů $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ (v uvedeném pořadí), ve kterých po řadě přímky $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ protínají libovolně zvolenou přímku $\boldsymbol{p}$ neprocházející bodem $\boldsymbol{S}$. Dvojpoměr přímek $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ (v uvedeném pořadí) označíme symbolem $(\boldsymbol{abcd})$.

V kapitolách 2.2 a 2.3 se setkáme i s dvojpoměrem čtyř rovin incidentních s jedinou přímkou. Můžeme postupovat obdobně jako v případě svazku přímek. Označíme symbolem $\boldsymbol{o}$ průsečnici uvažovaných rovin, které označíme α, β, γ, δ. Nejprve bychom ukázali, že se rovnají dvojpoměry čtveřic bodů $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ a $\boldsymbol{A'}$, $\boldsymbol{B'}$, $\boldsymbol{C'}$, $\boldsymbol{D'}$, ve kterých přímky $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{p'}$ mimoběžné s přímkou $\boldsymbol{o}$ protínají roviny α, β, γ, δ. Potom můžeme dvojpoměr rovin α, β, γ, δ (v uvedeném pořadí) incidentních s přímkou $\boldsymbol{o}$ definovat jako dvojpoměr bodů $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ (v uvedeném pořadí), ve kterých po řadě roviny α, β, γ, δ protínají libovolně zvolenou přímku $\boldsymbol{p}$ mimoběžnou s přímkou $\boldsymbol{o}$. Dvojpoměr rovin α, β, γ, δ (v uvedeném pořadí) označíme symbolem $(\alpha\beta\gamma\delta)$. Platí též, že dvojpoměr přímek, v nichž libovolná rovina různoběžná s každou z rovin α, β, γ, δ i s jejich průsečnicí protíná tyto roviny (v daném pořadí), je nezávislý na volbě této roviny.

Tuto část zakončíme úvahou o velikosti orientovaného úhlu přímek ve svazku. Tento pojem Sobotka využívá, a přestože je nám intuitivně srozumitelný, není zavedení tohoto pojmu úplně jednoduché. V následujících řádcích naznačím, jak bych přistupoval k definici tohoto pojmu. Jistě rozumíme pojmu orientovaného úhlu a jeho velikosti. Řekněme, že úhel orientujeme tak, že zvolíme jedno z jeho ramen za počáteční a druhé za koncové rameno. Orientovaný úhel s počátečním ramenem $\boldsymbol{VX}$ a koncovým ramenem $\boldsymbol{VY}$ příslušný k úhlu $\boldsymbol{XVY}$ označíme symbolem $\boldsymbol{X\hat{V}Y}$. Snadno zavedeme velikost orientovaného úhlu dvou polopřímek $\boldsymbol{VA}$ a $\boldsymbol{VB}$ (v tomto pořadí), jako velikost konvexního orientovaného úhlu $\boldsymbol{A\hat{V}B}$.

Uvažujme nyní svazek přímek se středem $\boldsymbol{S}$. Z přímek svazku vybereme jednu přímku, označme ji $\boldsymbol{p}$, dále zvolíme bod $\boldsymbol{P}$ ležící na $\boldsymbol{p}$ a různý od bodu $\boldsymbol{S}$. Konečně zvolíme jednu z otevřených polorovin s hraniční přímkou $\boldsymbol{p}$ – označíme ji π^+. Jak můžeme definovat velikost orientovaného úhlu libovolných dvou přímek $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ svazku $s(\boldsymbol{S})$? Pokud je přímka $\boldsymbol{a}$ různá od přímky $\boldsymbol{p}$, vybereme na ní libovolně bod $\boldsymbol{A}$ ležící v otevřené polorovině π^+. Pokud $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{p}$, volíme za bod $\boldsymbol{A}$ bod $\boldsymbol{P}$. Obdobně postupujeme i s přímkou $\boldsymbol{b}$, na které zvolíme bod $\boldsymbol{B}$. Pak velikost orientovaného úhlu přímek $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ svazku $s(\boldsymbol{S})$ definujeme jako velikost orientovaného úhlu polopřímek $\boldsymbol{SA}$ a $\boldsymbol{SB}$. Velikost orientovaného úhlu sevřeného přímkami $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ (v tomto pořadí) označíme symbolem $\overrightarrow{\boldsymbol{ab}}$.

Je zřejmé, že takto určená velikost je závislá na volbě přímky $\boldsymbol{p}$, bodu $\boldsymbol{P}$ i poloroviny $\boldsymbol{\pi}^+$. Přesto, pokud budeme v dalším textu hovořit o velikosti orientovaného úhlu dvou přímek, nebudeme tuto skutečnost nijak zdůrazňovat, nebudeme ani výslovně uvádět, že nejprve zvolíme příslušnou přímku $\boldsymbol{p}$, bod $\boldsymbol{P}$ a polorovinu $\boldsymbol{\pi}^+$.

Věta 2.1.4: *Pro libovolné čtyři různé přímky* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ *svazku* $s(\boldsymbol{P})$ *je dvojpoměr* $(\boldsymbol{abcd})$ *přímek* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ *číslo, pro které platí:*

$$(\boldsymbol{abcd}) = \frac{\sin \overrightarrow{\boldsymbol{ac}} \cdot \sin \overrightarrow{\boldsymbol{bd}}}{\sin \overrightarrow{\boldsymbol{bc}} \cdot \sin \overrightarrow{\boldsymbol{ad}}}.$$

Větu nebudeme dokazovat (důkaz viz např. [35], str. 31 – 32).

2.1.3 Přípravné úvahy. Věta Caseyova

Uvažujme cykly $\underline{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{S}, r)$, $\underline{\boldsymbol{k}}_1(\boldsymbol{S}_1, r_1), \ldots, \underline{\boldsymbol{k}}_4(\boldsymbol{S}_4, r_4)$ takové, že se cykly $\underline{\boldsymbol{k}}_1, \ldots, \underline{\boldsymbol{k}}_4$ dotýkají cyklu $\underline{\boldsymbol{k}}$. Předpokládejme $r > 0$. Označme dále $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_4$ polopřímky $\boldsymbol{SS}_1, \ldots, \boldsymbol{SS}_4$. Označme $\overrightarrow{\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j}$ velikost orientovaného úhlu sevřeného polopřímkami $\boldsymbol{a}_i$ a $\boldsymbol{a}_j$ (v uvedeném pořadí), $i, j = 1, \ldots, 4$. Označme $\boldsymbol{X}_i$ bod dotyku cyklu $\underline{\boldsymbol{k}}_i$ a cyklu $\underline{\boldsymbol{k}}$, $i = 1, \ldots, 4$. Pro vzdálenost d_{ij} bodů $\boldsymbol{X}_i$ a $\boldsymbol{X}_j$ platí:

$$d_{ij} = 2r \sin \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j}}{2}, \quad i, j = 1, \ldots, 4.$$

Pro body $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_4$ platí tvrzení věty 2.1.2:

$$\begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 \\ d_{12}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ d_{13}^2 & d_{23}^2 & 0 & d_{34}^2 \\ d_{14}^2 & d_{24}^2 & d_{34}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Po dosazení výše uvedeného vztahu do tohoto determinantu získáme rovnost:

$$\begin{vmatrix} 0 & \sin^2\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2}}{2} & \sin^2\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_3}}{2} & \sin^2\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_4}}{2} \\ \sin^2\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2}}{2} & 0 & \sin^2\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3}}{2} & \sin^2\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_4}}{2} \\ \sin^2\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_3}}{2} & \sin^2\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3}}{2} & 0 & \sin^2\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}_4}}{2} \\ \sin^2\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_4}}{2} & \sin^2\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_4}}{2} & \sin^2\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}_4}}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.1.5)$$

Pro vzdálenost s_{ij} středů $\boldsymbol{S}_i$, $\boldsymbol{S}_j$ cyklů $\underline{\boldsymbol{k}}_i$, $\underline{\boldsymbol{k}}_j$ ($i, j = 1, \ldots, 4$) platí podle kosinové věty:

$$s_{ij}^2 = |\boldsymbol{SS}_i|^2 + |\boldsymbol{SS}_j|^2 - 2|\boldsymbol{SS}_i| \cdot |\boldsymbol{SS}_j| \cos\overrightarrow{\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j}.$$

Uvážíme-li souvislost orientace cyklů s uvedenými podmínkami o dotycích[40], získáme:

$$s_{ij}^2 = (r - r_i)^2 + (r - r_j)^2 - 2(r - r_i)(r - r_j)\cos\overrightarrow{\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j},$$

$$s_{ij}^2 = [(r - r_i) - (r - r_j)]^2 + 2(r - r_i)(r - r_j)(1 - \cos\overrightarrow{\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j}),$$

$$s_{ij}^2 = (r_i - r_j)^2 + 4(r - r_i)(r - r_j)\sin^2\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j}}{2}.$$

Uvažujme dále délku úseků společných tečen cyklů $\underline{\boldsymbol{k}}_1, \ldots, \underline{\boldsymbol{k}}_4$ (viz (2.1.2)):

$$t_{ij}^2 = |T_iT_j|^2 = s_{ij}^2 - (r_i - r_j)^2 = 4(r - r_i)(r - r_j)\sin^2\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j}}{2}.$$

Násobíme-li i-tý řádek, resp. j-tý sloupec, determinantu v (2.1.5) $2(r - r_i)$, resp. $2(r - r_j)$, získáme:

$$\begin{vmatrix} 0 & t_{12}^2 & t_{13}^2 & t_{14}^2 \\ t_{12}^2 & 0 & t_{23}^2 & t_{24}^2 \\ t_{13}^2 & t_{23}^2 & 0 & t_{34}^2 \\ t_{14}^2 & t_{24}^2 & t_{34}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.1.6)$$

Úpravou determinantu odvodíme vztah vyjadřující tzv. Caseyovu[41] větu:

$$t_{12}t_{34} \pm t_{23}t_{14} \pm t_{13}t_{24} = 0. \qquad (2.1.7)$$

Je třeba zdůraznit, že při odvození tohoto vztahu bylo nezbytné použití cyklů. Proto t_{ij} označuje buď délku úseku vnější tečny kružnic $\boldsymbol{k}_i$ a $\boldsymbol{k}_j$ (při souhlasné orientaci příslušných cyklů), nebo délku úseku vnitřní tečny kružnic $\boldsymbol{k}_i$ a $\boldsymbol{k}_j$ (při nesouhlasné orientaci příslušných cyklů). Jednoduchou úvahou zjistíme, že souhlasně jsou orientovány takové dva cykly, které leží buď oba vně, nebo oba uvnitř cyklu $\underline{\boldsymbol{k}}$. V případě, že taková společná tečna neexistuje, je

[40] V případě vnějšího dotyku cyklu $\underline{\boldsymbol{k}}$ a cyklu $\underline{\boldsymbol{k}}_i$ je poloměr r_i záporný, v případě vnitřního dotyku je poloměr r_i kladný.
[41] John Casey (květen 1820 – 3. 1. 1891) – irský matematik.

hodnota t_{ij}^2 určená podle výše uvedeného vztahu záporná, i v takovém případě platí vztah (2.1.6).

2.1.4 Analytické řešení Apolloniovy úlohy

Nechť cykly $\underline{\boldsymbol{k}}_1$, $\underline{\boldsymbol{k}}_2$, $\underline{\boldsymbol{k}}_3$ jsou dány rovnicemi $K_1(x, y) = 0$, $K_2(x, y) = 0$, $K_3(x, y) = 0$ ($K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 = 0$). Nechť se cyklus $\underline{\boldsymbol{k}}_4$ redukuje v bod $\boldsymbol{S}_4$. Ten podle původního předpokladu leží na cyklu $\underline{\boldsymbol{k}}$, jinak však může být jeho poloha libovolná. Proto nechť bod $\boldsymbol{S}_4[x, y]$ je libovolným bodem cyklu $\underline{\boldsymbol{k}}$. Délka úseku společné tečny např. t_{14} se redukuje na délku úseku tečny vedené z bodu $\boldsymbol{S}_4$ na $\underline{\boldsymbol{k}}_1$. Potom ovšem $t_{14} = \sqrt{m_1}$ [42], kde m_1 je mocnost bodu $\boldsymbol{S}_4$ ke kružnici $\boldsymbol{k}_1$. Podle vztahu (2.1.3): $t_{14} = \sqrt{K_1(x, y)}$. Dosazením tohoto vztahu do (2.1.7) získáme:

$$t_{12}\sqrt{K_3(x, y)} \pm t_{23}\sqrt{K_1(x, y)} \pm t_{13}\sqrt{K_2(x, y)} = 0.$$

Tuto rovnici můžeme zapsat stručně ve tvaru:

$$t_{12}\sqrt{K_3} \pm t_{23}\sqrt{K_1} \pm t_{13}\sqrt{K_2} = 0. \tag{2.1.8}$$

Po umocnění obdržíme též rovnici:

$$t_{23}^4K_1^2 + t_{13}^4K_2^2 + t_{12}^4K_3^2 - 2t_{13}^2t_{23}^2K_1K_2 - 2t_{12}^2t_{13}^2K_2K_3 - 2t_{23}^2t_{12}^2K_1K_3 = 0. \tag{2.1.9}$$

Tato rovnice není závislá na volbě znamének jako rovnice (2.1.8). Navíc platí i v případě, že některá z hodnot t_{ij}^2 nebo K_i je záporná. Musí ji splňovat každý bod náležející cyklu $\underline{\boldsymbol{k}}$. Bez důkazu uvedeme, že rovnice (2.1.8) a (2.1.9) jsou rovnicemi páru kružnic, které jsou řešením Apolloniovy úlohy určené kružnicemi $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 = 0$ při jisté volbě orientace cyklů $\underline{\boldsymbol{k}}_1$, $\underline{\boldsymbol{k}}_2$, $\underline{\boldsymbol{k}}_3$. Pro volbu jejich orientace existují čtyři možnosti, každá z nich určí jinou kombinaci délek t_{12}, t_{23}, t_{13}. Získáme tak celkem čtyři různé rovnice tvaru (2.1.8), resp. (2.1.9). Tyto rovnice nejsou snadno řešitelné, jedná se o rovnice 4. stupně o dvou neznámých. Pro analytické řešení Apolloniovy úlohy nejsou tedy příliš výhodné, neboť existují řešení jistě jednodušší a schůdnější (jedno z nich je uvedeno např. v [3]). V další části si ukážeme, že tyto vztahy vedou k zajímavým výsledkům, které umožní celou úlohu vyřešit konstruktivně. Zde

[42] Jestliže je bod $\boldsymbol{S}_4$ vnitřním bodem kružnice $\boldsymbol{k}_1$, je mocnost m_1 záporné číslo. Snadno se přesvědčíme, že i v tomto případě mocnost určíme pomocí vztahu (2.1.3). Ovšemže pak neexistuje tečna z bodu $\boldsymbol{S}_4$ ke kružnici $\boldsymbol{k}_1$. Přesto je možné definovat veličinu t_{14} uvedeným vztahem, jedna se však o imaginární číslo. V literatuře se v takovém případě můžeme setkat i s pojmem imaginární tečna.

se projevuje rys charakteristický pro Sobotku, snaha dovést řešení nalezené např. cestou analytické geometrie až ke vhodné, pokud možno co nejjednodušší, konstrukci.

2.1.5 Analytické odvození konstruktivního řešení Apolloniovy úlohy

Uvažujme některá z konstruktivních řešení Apolloniovy úlohy (viz např. [2]). Podíváme-li se na řešení Gergonnovo, Gaultierovo či Fouchéovo, uvědomíme si, že druhé a třetí řešení jsou zjednodušením prvního, na které navázaly. Řešení vyžadují zavedení cyklů a umožňují nalezení vždy dvojice řešení při zvolené orientaci daných orientovaných kružnic (podobně jako Sobotkovo řešení). Společná jim je snaha nalézt body dotyku hledaných cyklů a daných tří cyklů. V případě Gergonnova řešení nalezneme přímky spojující body dotyku hledaných dvou cyklů vždy s jedním z daných cyklů. Jedním z Gergonnových výsledků je i skutečnost, že tyto tři přímky procházejí potenčním středem daných tří cyklů. Uvidíme, že Sobotka ve svém řešení nalezl rovnice těchto tří přímek – tím navazuje na Gergonnovy výsledky. Způsob, jakým tyty přímky sestrojil, je ovšem jiný než u Gergonna.

Uvažujme dvojici řešení $\underline{\boldsymbol{k}}$, $\underline{\boldsymbol{k}}'$ odpovídající určité zvolené orientaci cyklů $\underline{\boldsymbol{k}}_1$, $\underline{\boldsymbol{k}}_2$, $\underline{\boldsymbol{k}}_3$. Označme $\boldsymbol{U}_i$, $\boldsymbol{V}_i$ body dotyku cyklů $\underline{\boldsymbol{k}}$, $\underline{\boldsymbol{k}}'$ s cyklem $\underline{\boldsymbol{k}}_i$. Souřadnice bodů $\boldsymbol{U}_i$, $\boldsymbol{V}_i$ vyhovují rovnici $K_i(x, y) = 0$. Současně však vyhovují i rovnici (2.1.9). Pro souřadnice bodů $\boldsymbol{U}_1$, $\boldsymbol{V}_1$ platí $K_1 = 0$ a rovnice (2.1.9) přechází v rovnici:

$$t_{13}^4 K_2^2 + t_{12}^4 K_3^2 - 2t_{12}^2 t_{13}^2 K_2 K_3 = 0,$$

která je ekvivalentní rovnici:

$$t_{13}^2 K_2 - t_{12}^2 K_3 = 0. \qquad (2.1.10)$$

Není těžké ukázat, že pokud $t_{13}^2 \neq t_{12}^2$, jedná se o rovnici jisté kružnice. Označme ji $\boldsymbol{k}_{23}$. Upravme rovnici (2.1.10) do tvaru:

$$\frac{t_{13}^2 K_2 - t_{12}^2 K_3}{t_{13}^2 - t_{12}^2} = 0. \qquad (2.1.11)$$

Rovnice (2.1.11) je samozřejmě opět rovnicí kružnice $\boldsymbol{k}_{23}$, koeficienty u x^2 a y^2 jsou rovny jedné. Body U_1, V_1 jsou průsečíky kružnic $\boldsymbol{k}_1$ a $\boldsymbol{k}_{23}$. Přímka $\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{V}_1$ je chordálou těchto kružnic a její rovnice je podle (2.1.4):

$\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{V}_1$: $K_1 - \dfrac{t_{13}^2 K_2 - t_{12}^2 K_3}{t_{13}^2 - t_{12}^2} = 0$.

Pokud tuto rovnici dále upravíme, získáme:

$\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{V}_1$: $t_{13}^2(K_1 - K_2) - t_{12}^2(K_1 - K_3) = 0$,

nebo též:

$$\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{V}_1:\ \frac{K_1 - K_2}{t_{12}^2} - \frac{K_1 - K_3}{t_{13}^2} = 0. \qquad (2.1.12)$$

Pokud $t_{13}^2 = t_{12}^2$ je rovnice (2.1.10) rovnicí přímky. Jedná se o rovnici přímky $\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{V}_1$. Po úpravě můžeme psát:

$\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{V}_1$: $K_2 - K_3 = 0$, též $(K_1 - K_2) - (K_1 - K_3) = 0$.

Tuto rovnici vydělíme $t_{13}^2 = t_{12}^2$, proto platí:

$$\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{V}_1:\ \frac{K_1 - K_2}{t_{12}^2} - \frac{K_1 - K_3}{t_{13}^2} = 0.$$

Tato rovnice je totožná s rovnicí (2.1.12).

Označme $\boldsymbol{P}$ potenční střed tří daných kružnic. Bod $\boldsymbol{P}$ leží na chordále kružnic $\boldsymbol{k}_1$ a $\boldsymbol{k}_2$ s rovnicí $K_1 - K_2 = 0$, i na chordále kružnic $\boldsymbol{k}_1$ a $\boldsymbol{k}_3$ s rovnicí $K_1 - K_3 = 0$. Proto souřadnice bodu $\boldsymbol{P}$ vyhovují i rovnici (2.1.12). Z toho plyne důležitý poznatek.

Spojnice bodů $\boldsymbol{U}_1$, $\boldsymbol{V}_1$ prochází potenčním středem daných kružnic $\boldsymbol{P}$. Pro dvojice bodů $\boldsymbol{U}_2$, $\boldsymbol{V}_2$ a $\boldsymbol{U}_3$, $\boldsymbol{V}_3$ platí totéž a rovnice jejich spojnice je obdobou rovnice (2.1.12):

$$\boldsymbol{U}_2\boldsymbol{V}_2:\ \frac{K_2 - K_3}{t_{23}^2} - \frac{K_1 - K_2}{t_{12}^2} = 0,$$

$$\boldsymbol{U}_3\boldsymbol{V}_3:\ \frac{K_1 - K_3}{t_{13}^2} - \frac{K_2 - K_3}{t_{23}^2} = 0.$$

Vidíme, že jsme analyticky dokázali skutečnost, která je základem Gergonnova řešení. Může nás též zaujmout jednoduchost a elegance vyjádření rovnic přímek $\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{V}_1$, $\boldsymbol{U}_2\boldsymbol{V}_2$ a $\boldsymbol{U}_3\boldsymbol{V}_3$.

Uvažujme nyní v souladu se Sobotkou rovnice $K_i = 0$ cyklu $\underline{\boldsymbol{k}}_i$ ve tvaru:

$x^2 + y^2 - 2\alpha_i x - 2\beta_i y + p_i = 0$.

Jestliže umístíme počátek kartézské soustavy souřadnic do bodu $\boldsymbol{P}$, je jeho mocnost ke kružnici $\boldsymbol{k}_i$ rovna $K_i(0, 0) = p_i$. Z definice bodu $\boldsymbol{P}$ plyne $p_1 = p_2 = p_3 = p$. Napišme rovnici přímky $\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{l}_1$ užitím vztahu (2.1.12):

$$\boldsymbol{l}_1\text{: } \frac{(\alpha_1-\alpha_2)x+(\beta_1-\beta_2)y}{t_{12}^2}-\frac{(\alpha_1-\alpha_3)x+(\beta_1-\beta_3)y}{t_{13}^2}=0\,.$$

Dále vyjádříme rovnice chordál $\boldsymbol{p}_{12}$ (kružnic $\boldsymbol{k}_1$ a $\boldsymbol{k}_2$), $\boldsymbol{p}_{13}$ a $\boldsymbol{p}_{23}$ pomocí vztahu (2.1.4):

$\boldsymbol{p}_{12}$: $(\alpha_1-\alpha_2)x+(\beta_1-\beta_2)y=0,$

$\boldsymbol{p}_{13}$: $(\alpha_1-\alpha_3)x+(\beta_1-\beta_3)y=0,$

$\boldsymbol{p}_{23}$: $(\alpha_2-\alpha_3)x+(\beta_2-\beta_3)y=0.$

Ztotožníme přímku $\boldsymbol{p}_{23}$ s osou $\boldsymbol{x}$, proto $\alpha_2=\alpha_3$. Označme orientované úhly $\overrightarrow{\boldsymbol{p}_{23}\boldsymbol{l}_1}=\alpha$, $\overrightarrow{\boldsymbol{p}_{23}\boldsymbol{p}_{12}}=\beta$, $\overrightarrow{\boldsymbol{p}_{23}\boldsymbol{p}_{13}}=\gamma$. Potom platí:

$$\tan\alpha=-\frac{\dfrac{\alpha_1-\alpha_2}{t_{12}^2}-\dfrac{\alpha_1-\alpha_2}{t_{13}^2}}{\dfrac{\beta_1-\beta_2}{t_{12}^2}-\dfrac{\beta_1-\beta_3}{t_{13}^2}},\quad \tan\beta=-\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\beta_1-\beta_2},\quad \tan\gamma=-\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\beta_1-\beta_3}.$$

Ukazuje se vhodnější použít funkci kotangens:

$$\cot\alpha=-\frac{\dfrac{\beta_1-\beta_2}{\alpha_1-\alpha_2}t_{13}^2-\dfrac{\beta_1-\beta_3}{\alpha_1-\alpha_2}t_{12}^2}{t_{13}^2-t_{12}^2}=\frac{t_{13}^2\cot\beta-t_{12}^2\cot\gamma}{t_{13}^2-t_{12}^2}.$$

Postupnou úpravou tohoto vztahu získáme:

$$t_{13}^2(\cot\alpha-\cot\beta)=t_{12}^2(\cot\alpha-\cot\gamma),$$

$$t_{13}^2\frac{\cos\alpha\sin\beta-\cos\beta\sin\alpha}{\sin\alpha\sin\beta}=t_{12}^2\frac{\cos\alpha\sin\gamma-\cos\gamma\sin\alpha}{\sin\alpha\sin\gamma},$$

$$t_{13}^2\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta}=t_{12}^2\frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\sin\gamma}. \qquad (2.1.13)$$

Vrátíme-li se k původnímu označení, platí:

$$\beta-\alpha=\overrightarrow{\boldsymbol{p}_{23}\boldsymbol{p}_{12}}-\overrightarrow{\boldsymbol{p}_{23}\boldsymbol{l}_1}=\overrightarrow{\boldsymbol{l}_1\boldsymbol{p}_{12}},$$

$$\gamma - \alpha = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_{23}\boldsymbol{p}_{13}} - \overrightarrow{\boldsymbol{p}_{23}\boldsymbol{l}_1} = \overrightarrow{\boldsymbol{l}_1\boldsymbol{p}_{13}}\,.$$

Poté můžeme vztah (2.1.13) psát ve tvaru:

$$t_{13}^2\,\frac{\sin\overrightarrow{\boldsymbol{l}_1\boldsymbol{p}_{12}}}{\sin\overrightarrow{\boldsymbol{p}_{23}\boldsymbol{p}_{12}}} = t_{12}^2\,\frac{\sin\overrightarrow{\boldsymbol{l}_1\boldsymbol{p}_{13}}}{\sin\overrightarrow{\boldsymbol{p}_{23}\boldsymbol{p}_{13}}}\,.$$

Po úpravě získáme vztah:

$$\frac{\sin\overrightarrow{\boldsymbol{p}_{12}\boldsymbol{l}_1}\,\sin\overrightarrow{\boldsymbol{p}_{13}\boldsymbol{p}_{23}}}{\sin\overrightarrow{\boldsymbol{p}_{13}\boldsymbol{l}_1}\,\sin\overrightarrow{\boldsymbol{p}_{12}\boldsymbol{p}_{23}}} = \frac{t_{12}^2}{t_{13}^2}\,. \tag{2.1.14}$$

Levá strana vztahu (2.1.14) je podle věty 2.1.4 dvojpoměr přímek $\boldsymbol{p}_{12}$, $\boldsymbol{p}_{13}$, $\boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{p}_{23}$. Analogicky můžeme určit i relace pro přímky $\boldsymbol{l}_2 = \boldsymbol{U}_2\boldsymbol{V}_2$ a $\boldsymbol{l}_3 = \boldsymbol{U}_3\boldsymbol{V}_3$.

$$\left.\begin{aligned}
(\boldsymbol{p}_{12}\boldsymbol{p}_{13}\boldsymbol{l}_1\boldsymbol{p}_{23}) &= \frac{t_{12}^2}{t_{13}^2}\\
(\boldsymbol{p}_{23}\boldsymbol{p}_{12}\boldsymbol{l}_2\boldsymbol{p}_{13}) &= \frac{t_{23}^2}{t_{12}^2}\\
(\boldsymbol{p}_{13}\boldsymbol{p}_{23}\boldsymbol{l}_3\boldsymbol{p}_{12}) &= \frac{t_{13}^2}{t_{23}^2}
\end{aligned}\right\} \tag{2.1.15}$$

2.1.6 Konstruktivní řešení Apolloniovy úlohy

Tyto vztahy již umožňují sestrojit přímky $\boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{l}_2$, $\boldsymbol{l}_3$. Vedeme-li libovolnou rovnoběžku $\boldsymbol{q}$ s přímkou $\boldsymbol{p}_{23}$, protnou ji přímky $\boldsymbol{p}_{12}$, $\boldsymbol{p}_{13}$, $\boldsymbol{l}_1$ po řadě v bodech $\boldsymbol{Q}_{12}$, $\boldsymbol{Q}_{13}$, $\boldsymbol{Q}_1$. Přímky $\boldsymbol{p}_{23}$ a $\boldsymbol{q}$ mají společný nevlastní bod $\boldsymbol{U}^\infty$. Pak platí podle definice dvojpoměru čtyř přímek (viz podkapitola 2.1.2 část D):

$$(\boldsymbol{Q}_{12}\boldsymbol{Q}_{23}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{U}^\infty) = \frac{t_{12}^2}{t_{13}^2}\,,$$

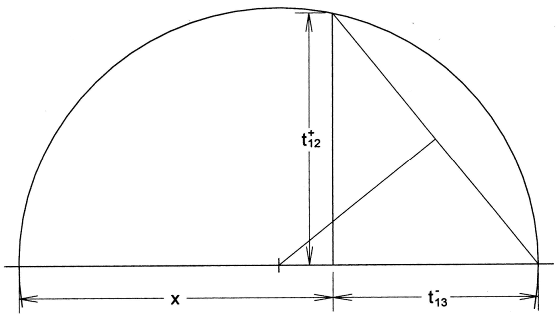
neboli

$$(\boldsymbol{Q}_{12}\boldsymbol{Q}_{23}\boldsymbol{Q}_1) = \frac{t_{12}^2}{t_{13}^2}\,. \tag{2.1.16}$$

Při konstrukci přímky $\boldsymbol{l}_1$ stačí sestrojit na přímce $\boldsymbol{q}$ bod $\boldsymbol{Q}_1$, určený dělícím poměrem tak, jak ukazuje (2.1.16). Je-li tento dělící poměr kladný (resp. záporný), leží bod $\boldsymbol{Q}_1$ vně (resp.

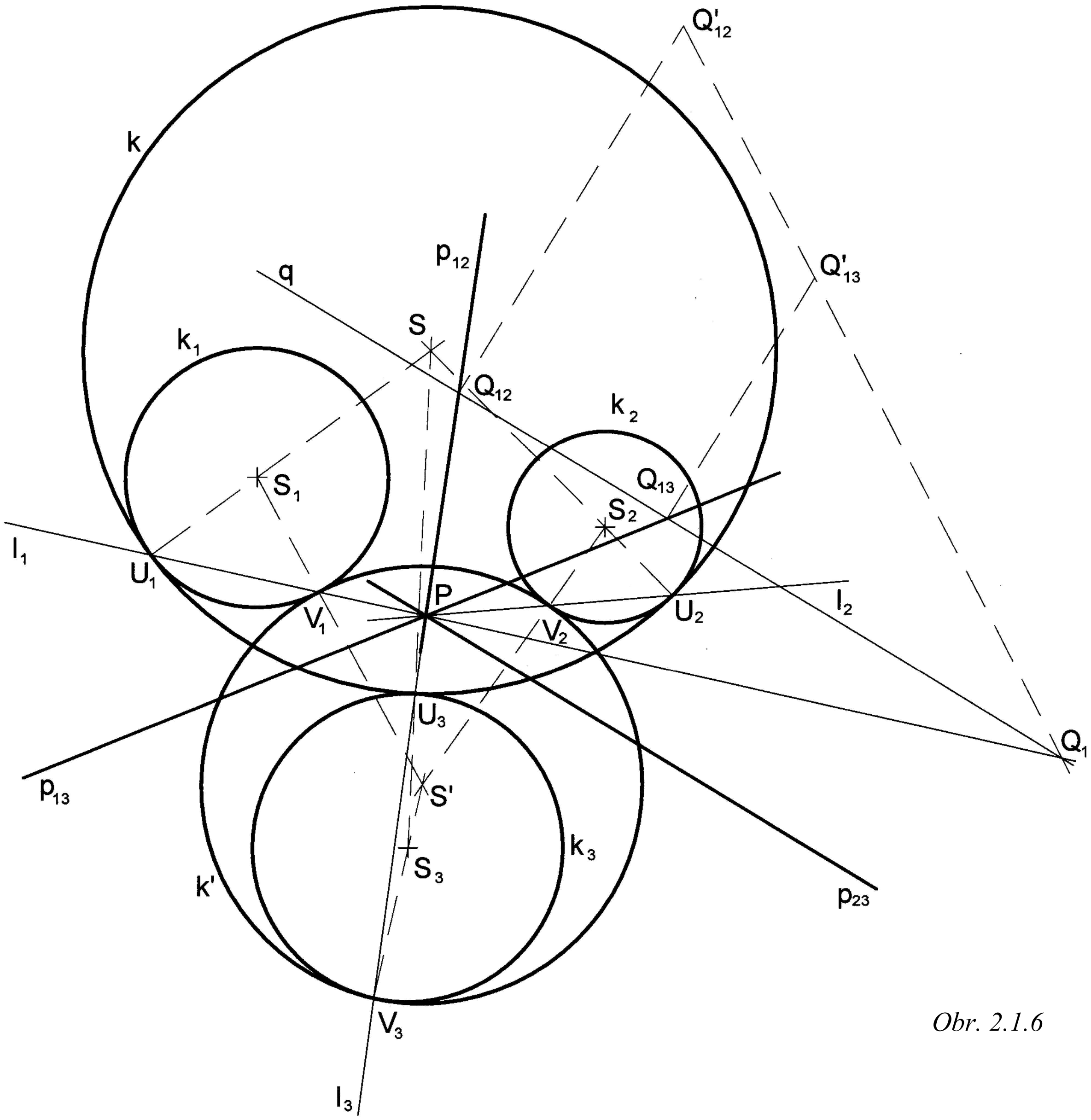
uvnitř) úsečky $\boldsymbol{Q}_{12}\boldsymbol{Q}_{13}$. V bodech $\boldsymbol{Q}_{12}$ a $\boldsymbol{Q}_{13}$ vztyčíme kolmice a v případě kladného (resp. záporného) dělícího poměru (2.1.16) na nich sestrojíme ve stejné (resp. opačné) polorovině určené přímkou $\boldsymbol{q}$ body $\boldsymbol{Q}'_{12}$ a $\boldsymbol{Q}'_{13}$ tak, aby $|\mathbf{Q}_{12}\mathbf{Q}'_{12}| : |\mathbf{Q}_{13}\mathbf{Q}'_{13}| = |t_{12}^2 : t_{13}^2|$. Přímka $\boldsymbol{Q}'_{12}\boldsymbol{Q}'_{13}$ protne přímku $\boldsymbol{q}$ v bodě $\boldsymbol{Q}_1$. Hledaná přímka $\boldsymbol{l}_1$ je spojnicí bodu $\boldsymbol{Q}_1$ a potenčního středu $\boldsymbol{P}$. Průsečíky přímky $\boldsymbol{l}_1$ s kružnicí $\boldsymbol{k}_1$ jsou body dotyku hledané dvojice cyklů $\underline{\boldsymbol{k}}$, $\underline{\boldsymbol{k}}'$ a cyklu $\underline{\boldsymbol{k}}_1$.

Obdobně sestrojíme přímky $\boldsymbol{l}_2$ a $\boldsymbol{l}_3$ a body $\boldsymbol{U}_2$, $\boldsymbol{V}_2$ a $\boldsymbol{U}_3$, $\boldsymbol{V}_3$. Není již obtížné sestrojit cyklus $\underline{\boldsymbol{k}}$ procházející body $\boldsymbol{U}_1$, $\boldsymbol{U}_2$, $\boldsymbol{U}_3$ a $\underline{\boldsymbol{k}}'$ procházející body $\boldsymbol{V}_1$, $\boldsymbol{V}_2$, $\boldsymbol{V}_3$. Další řešení získáme jinou volbou smyslu cyklů $\underline{\boldsymbol{k}}_1$, $\underline{\boldsymbol{k}}_2$, $\underline{\boldsymbol{k}}_3$, což povede k jiné hodnotě alespoň jednoho s čísel $t_{12}^2, t_{13}^2, t_{23}^2$, jak již bylo uvedeno výše.



Obr. 2.1.5

Na obr. 2.1.6 je sestrojena jedna dvojice řešení příslušející orientaci cyklů $\underline{\boldsymbol{k}}_1$, $\underline{\boldsymbol{k}}_2$, $\underline{\boldsymbol{k}}_3$: + + –. Při řešení bylo potřeba sestrojit (např. užitím vztahu (2.1.2)) délku úseku vnější tečny t_{12}^+ kružnic $\boldsymbol{k}_1$ a $\boldsymbol{k}_2$, dále délku úseku vnitřní tečny t_{13}^- kružnic $\boldsymbol{k}_1$ a $\boldsymbol{k}_3$ a konečně délku úseku vnitřní tečny t_{23}^- kružnic $\boldsymbol{k}_2$ a $\boldsymbol{k}_3$. Při konstrukci bodu $\boldsymbol{Q}_1$ sestrojujeme dvojici úseček tak, aby jejich délky byly v poměru $t_{12}^2 : t_{13}^2$. Obr. 2.1.5 ukazuje využití Euklidovy věty o výšce k sestrojení takových úseček. Zřejmě platí $x = \dfrac{t_{12}^{+\,2}}{t_{13}^-} = \dfrac{t_{12}^{+\,2}}{t_{13}^{-\,2}} t_{13}^-$, neboli $x : t_{13}^- = t_{12}^{+\,2} : t_{13}^{-\,2}$. Na obr. 2.1.6 nejsou již provedeny obdobné konstrukce bodů $\boldsymbol{Q}_2$ a $\boldsymbol{Q}_3$. Pouze jsou narýsovány přímky $\boldsymbol{l}_2$ a $\boldsymbol{l}_3$. Jestliže známe body dotyku hledaného cyklu, zcela jednoduše sestrojíme i jeho střed.



Obr. 2.1.6

2.1.7 Další konstruktivní řešení Apolloniovy úlohy

Sobotka se nespokojil s odvozením tohoto řešení, ale hledal i další konstrukce, které by výše uvedenou mohly nahradit. Ukažme si, jak lze takové konstruktivní řešení nalézt. Vrátíme se v našich úvahách k dvojpoměrům (2.1.15). Zaměříme se na první z nich. K chordálám $\boldsymbol{p}_{12}$, $\boldsymbol{p}_{13}$, $\boldsymbol{p}_{23}$ a hledané spojnici bodů dotyku $\boldsymbol{l}_1$ vedeme středem $\boldsymbol{S}_1$ cyklu $\underline{\boldsymbol{k}}_1$ kolmice. Kolmice k chordále dvou kružnic vedená středem jedné z nich je zřejmě spojnice středů těch kružnic. Proto je uvažovanou kolmicí k přímce $\boldsymbol{p}_{12}$ (resp. $\boldsymbol{p}_{13}$) středná $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2$ (resp. $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_3$). Označíme ji $\boldsymbol{s}_{12}$ (resp. $\boldsymbol{s}_{13}$). Kolmice vedená bodem $\boldsymbol{S}_1$ k přímce $\boldsymbol{p}_{23}$ je rovnoběžka se střednou $\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3$ procházející bodem $\boldsymbol{S}_1$, označíme ji symbolem $\boldsymbol{f}$. Uvažovanou kolmici na $\boldsymbol{l}_1$ označíme $\boldsymbol{g}_1$. Protože odchylka dvou přímek je totožná s odchylkou libovolných dvou kolmic k těmto přímkám, platí:

$$(\boldsymbol{s}_{12}\boldsymbol{s}_{13}\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{f}) = (\boldsymbol{p}_{12}\boldsymbol{p}_{13}\boldsymbol{l}_1\boldsymbol{p}_{23}) = \frac{t_{12}^2}{t_{13}^2}.$$

Označíme-li $\boldsymbol{U}^\infty$ nevlastní bod přímky $\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3$ a $\boldsymbol{G}_1$ její průsečík s přímkou $\boldsymbol{g}_1$, platí podle věty 2.1.3:

$$(\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{U}^\infty) = \frac{t_{12}^2}{t_{13}^2}.$$

Obdobnou úvahu můžeme provést pro bod $\boldsymbol{G}_2$ (resp. $\boldsymbol{G}_3$) na kolmici ke spojnici bodů dotyku $\boldsymbol{l}_2$ (resp. $\boldsymbol{l}_3$) bodem $\boldsymbol{S}_2$ (resp. $\boldsymbol{S}_3$). Pak získáme:

$$(\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{G}_1) = \frac{t_{12}^2}{t_{13}^2},\ (\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{G}_2) = \frac{t_{23}^2}{t_{12}^2},\ (\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{G}_3) = \frac{t_{13}^2}{t_{23}^2}. \qquad (2.1.17)$$

Protože $(\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{G}_1)\,(\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{G}_2)\,(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{G}_3) = 1$, můžeme pomocí Menelaovy věty dokázat, že body $\boldsymbol{G}_1$, $\boldsymbol{G}_2$, $\boldsymbol{G}_3$ leží na jediné přímce. Je zřejmé, že pokud sestrojíme bod $\boldsymbol{G}_1$ na přímce $\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3$, můžeme též sestrojit přímku $\boldsymbol{g}_1$ (tj. spojnici $\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{S}_1$) a následně i $\boldsymbol{l}_1$ jako kolmici na $\boldsymbol{g}_1$ potenčním středem $\boldsymbol{P}$ kružnic $\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$, $\boldsymbol{k}_3$. Bod $\boldsymbol{G}_1$ bychom mohli nalézt podobně, jako jsme v předchozí podkapitole sestrojili bod $\boldsymbol{Q}_1$ na přímce $\boldsymbol{Q}_{12}\,\boldsymbol{Q}_{13}$. Stačilo by vynést z bodů $\boldsymbol{S}_2$ a $\boldsymbol{S}_3$ rovnoběžné úsečky o velikosti úměrné t_{12}^2 a t_{13}^2 a dále postupovat podobně jako výše. Při konstrukci bodu $\boldsymbol{G}_3$ bychom však v bodě $\boldsymbol{S}_2$ vynášeli úsečku o velikosti úměrné t_{23}^2, tj. obecně o jiné velikosti než při konstrukci bodu $\boldsymbol{G}_1$. Proto Sobotka konstrukci ještě dále zjednodušuje. Uvažujme bod $\boldsymbol{R}_1$ (resp. $\boldsymbol{R}_2$, resp. $\boldsymbol{R}_3$) souměrně sdružený s bodem $\boldsymbol{G}_1$ (resp. $\boldsymbol{G}_2$, resp. $\boldsymbol{G}_3$) podle středu úsečky $\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3$ (resp. $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_3$, resp. $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2$). Protože je dělící poměr $(\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{R}_1)$ roven převrácené hodnotě dělícího poměru $(\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{G}_1)$ (obdobně i pro $\boldsymbol{R}_2$ a $\boldsymbol{R}_3$), platí:

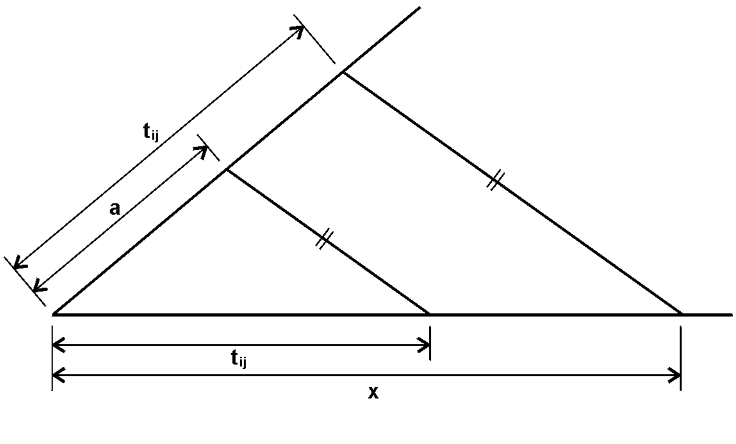
$$(\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{R}_1) = \frac{t_{13}^2}{t_{12}^2},\ (\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{R}_2) = \frac{t_{12}^2}{t_{23}^2},\ (\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{R}_3) = \frac{t_{23}^2}{t_{13}^2}.$$

Je vidět, že při konstrukci bodu $\boldsymbol{R}_1$ i $\boldsymbol{R}_3$ využijeme v bodě $\boldsymbol{S}_2$ jedinou úsečku o velikosti úměrné t_{13}^2. Obdobně to platí i pro body $\boldsymbol{S}_1$ a $\boldsymbol{S}_3$. Sestrojíme-li pomocí výše uvedených dělících poměrů body $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$, $\boldsymbol{R}_3$, nalezneme i body $\boldsymbol{G}_1$, $\boldsymbol{G}_2$, $\boldsymbol{G}_3$. Pomocí nich již snadno nalezneme přímky $\boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{l}_2$, $\boldsymbol{l}_3$. Konstrukci, kterou jsme právě odvodili, popisuje Sobotka takto:

„Vedeme středy $\boldsymbol{S}_1$*,* $\boldsymbol{S}_2$*,* $\boldsymbol{S}_3$ *daných kružnic rovnoběžné úsečky, které i se zřetelem na znamení jsou úměrny hodnotám* $t_{23}^2, t_{13}^2, t_{12}^2$*, čímž obdržíme trojúhelník* $\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{H}_3$ *k trojúhelníku* $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3$ *perspektivný*[43]*; osa perspektivity nechť seče strany* $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2$*,* $\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3$*,* $\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{S}_1$ *v bodech* $\boldsymbol{R}_3$*,* $\boldsymbol{R}_1$*,* $\boldsymbol{R}_2$*; učiníme-li i co do smyslu* $\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{G}_1 = \boldsymbol{R}_1\boldsymbol{S}_3$*,* $\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{G}_2 = \boldsymbol{R}_2\boldsymbol{S}_1$*,* $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{G}_3 = \boldsymbol{R}_3\boldsymbol{S}_2$*, budou body* $\boldsymbol{G}_1$*,* $\boldsymbol{G}_2$*,* $\boldsymbol{G}_3$ *ležeti na přímce a kolmice ze středu potenčního* $\boldsymbol{O}$ *daných kružnic na přímky* $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{G}_1$*,* $\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{G}_2$*,* $\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{G}_3$ *jsou přímky* $\boldsymbol{L}_1$*,* $\boldsymbol{L}_2$*,* $\boldsymbol{L}_3$*, protínající dané kružnice v bodech dotyku s hledanými kružnicemi Apollonickými.*"

Poznatek, že body $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$, $\boldsymbol{R}_3$ (resp. body $\boldsymbol{G}_1$, $\boldsymbol{G}_2$, $\boldsymbol{G}_3$) leží v jedné přímce, je užitečný při vlastním provedení konstrukce. Umožňuje jednoduché nalezení třetího z bodů, pokud byly sestrojeny již další dva. Hodí se též pro případ, že jeden ze tří uvažovaných bodů se nachází mimo nákresnu.

Zbývá pouze zodpovědět otázku, kterou Sobotka neřeší. Jak můžeme nalézt velikosti úseček $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{H}_2$, $\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{H}_3$, jejichž velikosti jsou úměrné hodnotám $t_{23}^2, t_{13}^2, t_{12}^2$? Velikost t_{ij} můžeme sestrojit pomocí Pythagorovy věty díky vztahu $t_{ij}^2 = s_{ij}^2 - (r_i - r_j)^2$, kde musíme zohlednit orientaci cyklů $\underline{\boldsymbol{k}}_i$, $\underline{\boldsymbol{k}}_j$. V případě, že t_{ij}^2 je záporné číslo, sestrojíme úsečku odpovídající $\sqrt{-t_{ij}^2}$. Úsečku, jejíž velikost je úměrná t_{ij}^2, nalezneme pomocí redukčního úhlu (viz obr. 2.1.7).



obr. 2.1.7

---

[43] O trojúhelnících $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3$ a $\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{H}_3$ řekneme, že jsou perspektivní, jestliže přímky $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{H}_2$, $\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{H}_3$ procházejí jedním společným bodem (vlastním i nevlastním). V našem případě jsou přímky $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{H}_2$, $\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{H}_3$ rovnoběžné, tj. mají společný nevlastní bod. Pro perspektivní trojúhelníky platí tzv. Desarguesova věta. Pomocí ní ukážeme, že průsečíky tří dvojic přímek $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2$ a $\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H}_2$, $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_3$ a $\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H}_3$, $\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3$ a $\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{H}_3$ leží v jedné přímce. Tuto přímku nazveme osa perspektivity perspektivních trojúhelníků $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3$ a $\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{H}_3$.

Délka a pomocné úsečky nemusí být nutně jednotková, je však stejná při všech třech pomocných konstrukcích. Je zřejmé, že $x = \frac{t_{ij}^2}{a}$. V případě záporné hodnoty t_{ij}^2, postupujeme stejně s úsečkou velikosti $\sqrt{-t_{ij}^2}$. To, že je t_{ij}^2 záporné číslo, vezmeme do úvahy při konstrukci příslušného bodu $\boldsymbol{H}_k$, což Sobotka vyjádřil slovy: „*vedeme středy* $\boldsymbol{S}_1$*,* $\boldsymbol{S}_2$*,* $\boldsymbol{S}_3$ *daných kružnic rovnoběžné úsečky, které i se zřetelem na znamení jsou úměrny hodnotám* $t_{23}^2, t_{13}^2, t_{12}^2$," tj. záporné hodnoty vynášíme v opačném směru, než hodnoty kladné.

Výše citované Sobotkovo konstruktivní řešení Apolloniovy úlohy bylo možné odvodit i jednodušeji. Tuto skutečnost si Sobotka uvědomil a uvedl k tomu ve svém článku kratší poznámku. Zde jeho úvahu více rozvedu. V podkapitole 2.1.5 jsme odvodili pro případ, že $t_{12}^2 \neq t_{13}^2$, rovnici kružnice $\boldsymbol{k}_{23}$, na které ležely body dotyku $\boldsymbol{U}_1$, $\boldsymbol{V}_1$ hledaných cyklů $\underline{\boldsymbol{k}}$, $\underline{\boldsymbol{k}}$**'** a daného cyklu $\underline{\boldsymbol{k}}_1$. Ukázali jsme též, že přímka $\boldsymbol{l}_1 = \boldsymbol{U}_1\boldsymbol{V}_1$ je chordálou kružnic $\boldsymbol{k}_{23}$ a $\boldsymbol{k}_1$. Konečně jsme zjistili, že přímka $\boldsymbol{l}_1$ prochází potenčním středem kružnic $\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$, $\boldsymbol{k}_3$. K určení přímky $\boldsymbol{l}_1$ jako chordály kružnic $\boldsymbol{k}_{23}$ a $\boldsymbol{k}_1$ stačí proto znát středy těchto kružnic. Rovnici kružnice $\boldsymbol{k}_{23}$ má tvar (viz (2.1.11):

$$\frac{t_{13}^2 K_2 - t_{12}^2 K_3}{t_{13}^2 - t_{12}^2} = 0.$$

Není nijak obtížné ukázat, že střed této kružnice je bod, pro který v libovolné lineární soustavě souřadnic platí:

$$\boldsymbol{S}_{23} = \frac{t_{13}^2 \boldsymbol{S}_2 - t_{12}^2 \boldsymbol{S}_3}{t_{13}^2 - t_{12}^2}.$$

Odtud po jednoduché úpravě získáme:

$$\boldsymbol{S}_{23} - \boldsymbol{S}_2 = \frac{t_{12}^2}{t_{13}^2}(\boldsymbol{S}_{23} - \boldsymbol{S}_3), \text{neboli}\, \overrightarrow{\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_{23}} = \frac{t_{12}^2}{t_{13}^2}\overrightarrow{\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{S}_{23}}.$$

Proto platí:

$$(\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{S}_{23}) = \frac{t_{12}^2}{t_{13}^2}.$$

Porovnáme-li tento výsledek se vztahem (2.1.17), vidíme, že bod $\boldsymbol{G}_1$ je středem kružnice $\boldsymbol{k}_{23}$. Víme, že přímka $\boldsymbol{l}_1$ je jako chordála kružnic $\boldsymbol{k}_{23}$ a $\boldsymbol{k}_1$ kolmá na spojnici středů těchto kružnic. Protože přímka $\boldsymbol{l}_1$ prochází potenčním středem $\boldsymbol{P}$, je přímka $\boldsymbol{l}_1$ kolmice z bodu $\boldsymbol{P}$ na přímku $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{G}_1$.

Zatím jsme předpokládali, že $t_{12}^2 \neq t_{13}^2$. Nechť nyní $t_{12}^2 = t_{13}^2$. Pak má podle (2.1.10) uvažovaný útvar $\boldsymbol{k}_{23}$, na němž leží body $\boldsymbol{U}_1$, $\boldsymbol{V}_1$, rovnici tvaru $K_2 - K_3 = 0$. Jedná se zjevně o chordálu $\boldsymbol{p}_{23}$ kružnic $\boldsymbol{k}_2$ a $\boldsymbol{k}_3$. Hledaná přímka $\boldsymbol{l}_1$ je tak chordála $\boldsymbol{p}_{23}$. I v tomto případě výše citovaná Sobotkova konstrukce platí. Protože $(\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{G}_1) = 1$, je bod $\boldsymbol{G}_1$ nevlastní bod přímky $\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3$. Přímka $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{G}_1$ je tak rovnoběžka s přímkou $\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3$ vedená bodem $\boldsymbol{S}_1$. Kolmice $\boldsymbol{l}_1$ z potenčního středu $\boldsymbol{P}$ na přímku $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{G}_1$ (a tedy i na přímku $\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3$) je chordála $\boldsymbol{p}_{23}$ kružnic $\boldsymbol{k}_2$, $\boldsymbol{k}_3$.

2.2 Apolloniova úloha na kulové ploše

2.2.1 Úvod

V předchozí kapitole jsme ukázali, jak Sobotka přistoupil k řešení jedné z klasických geometrických úloh. V dalších pracích ideu svého řešení přenesl do jiných prostorů, případně řešil úlohu příbuznou – máme nalézt kulovou plochu, která dané čtyři sféry protíná pod daným úhlem. V této kapitole se zaměříme na řešení Apolloniovy úlohy na kulové ploše. Formulace problému je nasnadě: na kulové ploše jsou dány tři kružnice, máme nalézt kružnici ležící na této ploše, která se daných tří kružnic dotýká.

Uvedenou problematikou se Sobotka zabýval v práci „*K analytickému řešení problému Apollonického na kouli*“ (Rozpravy II. tř. České akademie věd a umění XXI, 1912, číslo 7). V následujícím textu vyložím Sobotkovo řešení. Cíle výkladu jsou dva: přiblížit faktický obsah řešení a také ukázat jeho souvislost a ideovou spřízněnost s řešením Apolloniovy úlohy uvedeným v kapitole 2.1.

2.2.2 Pomocné pojmy a poznatky

Pro porozumění dalšímu textu jsou potřeba některé poznatky ze sférické geometrie a trigonometrie. Většina z nich je zcela triviální. Uvádím je zde z důvodu, že sférická geometrie není běžnou součástí výuky geometrie na školách, jejichž absolventovi by měla být předložená práce srozumitelná. Při zavedení nezbytných pojmů a odvození jejich vlastností jsem vycházel z [7][44]. Definice většiny pojmů jsem převzal bez výraznější změny (např. hlavní kružnice, hlavní oblouk a jeho velikost, polosféra, sférický trojúhelník), některé jsem mírně upravil (např. velikost úhlu polorovin, velikost úhlu dvou hlavních oblouků). Do práce jsem zařadil obsáhlejší část, která se týká kružnic na kulové ploše, kde jsem použil vlastních formulací. Narozdíl od rovinného případu Sobotka explicitně nemluví o orientované kružnici. Ukazuje se ale, že je vhodné ji zavést a využívat. Mnohé formulace jsou pak jednodušší. Proto zde uvádím i část, ve které přibližuji pojem orientované kružnice na sféře. I zde uvádím především vlastní myšlenky.

Všechny naše úvahy se týkají trojrozměrného euklidovského prostoru. Budeme též uvažovat, že velikosti úhlu jsou uvedeny v obloukové míře. Nejprve definujme velikost úhlu dvou polorovin $\boldsymbol{\rho}^+$, $\boldsymbol{\sigma}^+$ se společnou hraniční přímkou $\boldsymbol{p}$. Uvažujme libovolnou rovinu $\boldsymbol{\tau}$ kolmou na přímku $\boldsymbol{p}$. Velikost úhlu polorovin $\boldsymbol{\rho}^+$, $\boldsymbol{\sigma}^+$ definujeme jako velikost úhlu, jehož rameny jsou průsečnice polorovin $\boldsymbol{\rho}^+$, $\boldsymbol{\sigma}^+$ s rovinou $\boldsymbol{\tau}$. Je zřejmé, že takto definovaná velikost úhlu je vždy nezáporná a menší nebo rovna π.

A. Hlavní kružnice, hlavní oblouk

Uvažujme v trojrozměrném euklidovském prostoru kulovou plochu (sféru) $\boldsymbol{\kappa}$ se středem $\boldsymbol{O}$ a o poloměru R. Hlavní kružnicí na sféře $\boldsymbol{\kappa}$ nazveme kružnici, která je průnikem této sféry a roviny procházející středem $\boldsymbol{O}$ sféry $\boldsymbol{\kappa}$.

Uvažujme dále dva různé body $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ na sféře $\boldsymbol{\kappa}$, jejichž spojnice neprochází středem $\boldsymbol{O}$ sféry $\boldsymbol{\kappa}$. Pak body $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ prochází právě jedna hlavní kružnice na sféře $\boldsymbol{\kappa}$, označme ji $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$. Tvrzení je zřejmé, pokud si uvědomíme, že hledaná hlavní kružnice leží nutně v rovině $\boldsymbol{ABO}$. Body $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ rozdělují kružnici na dva oblouky. Ten z nich, který je průnikem konvexního úhlu

[44] Odlišný výklad založený na pojmech klín a trojhran nalezneme v [8].

$\boldsymbol{AOB}$ a sféry $\boldsymbol{\kappa}$, nazýváme hlavní oblouk na sféře $\boldsymbol{\kappa}$ mezi body $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$. Značíme jej $\overset{\wedge}{\boldsymbol{AB}}$. Body $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ nazýváme krajní body oblouku $\overset{\wedge}{\boldsymbol{AB}}$.

Délkou hlavního oblouku $\overset{\wedge}{\boldsymbol{AB}}$ na $\boldsymbol{\kappa}$ nazveme číslo $d(\overset{\wedge}{\boldsymbol{AB}}) = R\varphi$, kde φ je velikost úhlu $\boldsymbol{AOB}$, R je poloměr sféry $\boldsymbol{\kappa}$. Délku hlavního oblouku $\overset{\wedge}{\boldsymbol{AB}}$ budeme též nazývat sférická vzdálenost bodů $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$.

Nechť jsou dány dva hlavní oblouky $\overset{\wedge}{\boldsymbol{AB}}$, $\overset{\wedge}{\boldsymbol{AC}}$. Označme $\boldsymbol{\rho}^+$ polorovinu s hraniční přímkou $\boldsymbol{AO}$ obsahující bod $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{\sigma}^+$ polorovinu s hraniční přímkou $\boldsymbol{AO}$ obsahující bod $\boldsymbol{C}$. Velikostí úhlu hlavních oblouků $\overset{\wedge}{\boldsymbol{AB}}$, $\overset{\wedge}{\boldsymbol{AC}}$ nazveme velikost úhlu polorovin $\boldsymbol{\rho}^+$ a $\boldsymbol{\sigma}^+$.

B. Sférický trojúhelník

Díváme-li se na kulovou plochu jako na samostatný prostor, můžeme uvažovat o analogiích mezi některými rovinnými útvary a útvary na kulové ploše. Pak je analogií přímky v rovině hlavní kružnice na sféře, analogii úsečky $\boldsymbol{AB}$ v rovině a její velikosti spatřujeme v hlavním oblouku mezi body $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ na sféře a jeho délce. Podobně můžeme nalézt geometrické útvary na kulové ploše analogické k rovinným útvarům, jako jsou např. polorovina nebo trojúhelník.

Uvažujme na sféře $\boldsymbol{\kappa}$ hlavní kružnici $\boldsymbol{k}$ ležící v rovině $\boldsymbol{\rho}$. Průniky sféry $\boldsymbol{\kappa}$ s uzavřenými poloprostory s hraniční rovinou $\boldsymbol{\rho}$ nazveme uzavřenými polosférami sféry $\boldsymbol{\kappa}$ s hranicí $\boldsymbol{k}$. Jestliže jsou dány tři různé body $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ na sféře $\boldsymbol{\kappa}$, které neleží na téže hlavní kružnici na sféře $\boldsymbol{\kappa}$, označíme symbolem $\boldsymbol{\kappa}^+(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; \boldsymbol{C})$ tu uzavřenou polosféru s hraniční kružnicí $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ obsahující bod $\boldsymbol{C}$.

Nechť jsou dány tři různé body $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ na sféře $\boldsymbol{\kappa}$, které neleží na téže hlavní kružnici na sféře $\boldsymbol{\kappa}$. Sférickým trojúhelníkem $\boldsymbol{ABC}$ na sféře $\boldsymbol{\kappa}$ nazveme množinu, která je průnikem tří polosfér $\boldsymbol{\kappa}^+(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; \boldsymbol{C})$, $\boldsymbol{\kappa}^+(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}; \boldsymbol{B})$, $\boldsymbol{\kappa}^+(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}; \boldsymbol{A})$. Sférický trojúhelník $\boldsymbol{ABC}$ budeme označovat $\Delta\boldsymbol{ABC}$.

Body $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ nazýváme vrcholy $\Delta \boldsymbol{ABC}$. Hlavní oblouky $\overset{\wedge}{\boldsymbol{AB}}$, $\overset{\wedge}{\boldsymbol{AC}}$, $\overset{\wedge}{\boldsymbol{BC}}$ nazýváme strany $\Delta \boldsymbol{ABC}$. Stranu $\overset{\wedge}{\boldsymbol{AB}}$ i její délku $d(\overset{\wedge}{\boldsymbol{AB}})$ budeme označovat symbolem c, obdobně stranu $\overset{\wedge}{\boldsymbol{AC}}$ i její délku symbolem b a stranu $\overset{\wedge}{\boldsymbol{BC}}$ i její délku symbolem a. Velikosti úhlu hlavních oblouků $\overset{\wedge}{\boldsymbol{AB}}$ a $\overset{\wedge}{\boldsymbol{AC}}$, $\overset{\wedge}{\boldsymbol{AB}}$ a $\overset{\wedge}{\boldsymbol{BC}}$, $\overset{\wedge}{\boldsymbol{AC}}$ a $\overset{\wedge}{\boldsymbol{BC}}$ nazýváme velikosti úhlů $\Delta \boldsymbol{ABC}$ při vrcholu $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ (v tomto pořadí). Symbolem α (příp. β, příp. γ) budeme označovat velikost úhlu při vrcholu $\boldsymbol{A}$ (příp. $\boldsymbol{B}$, příp. $\boldsymbol{C}$).

Strany takto definovaného sférického trojúhelníka jsou vždy hlavními oblouky na sféře $\boldsymbol{\kappa}$, v literatuře se takový trojúhelník nazývá též Eulerův sférický trojúhelník. Pojem sférického trojúhelníku můžeme zobecnit tak, že jeho strany tvoří (ne nutně hlavní) oblouky hlavních kružnic na sféře $\boldsymbol{\kappa}$. Takovýto obecný sférický trojúhelník je v literatuře nazýván též Möbiův sférický trojúhelník. V této práci se setkáme pouze s Eulerovými sférickými trojúhelníky.

C. Sférická věta kosinová

Pro studium Sobotkovy práce stáčí znát kosinovou větu pro stranu sférického trojúhelníku. Nebudu se proto zabývat dalšími (byť elementárními) větami (např. kosinovou větou pro úhel, větou sinovou). V dalších úvahách předpokládejme sféru $\boldsymbol{\kappa}$ o středu $\boldsymbol{O}$ a jednotkovém poloměru. Potom je například velikost strany c sférického trojúhelníku $\boldsymbol{ABC}$ rovna velikosti úhlu $\boldsymbol{AOB}$.

Věta 2.2.1: *V libovolném sférickém trojúhelníku platí:*

$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha$.

Důkaz:

Důkaz provedeme analyticky. Využijeme při něm následujícího vzorce:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}). \qquad (2.2.1)$$

O jeho správnosti se snadno přesvědčíme, vyjádříme-li obě strany rovnosti pomocí souřadnic vektorů $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$.

Označme vektor $\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}$ symbolem $\vec{a}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{OB}} \equiv \vec{b}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{OC}} \equiv \vec{c}$. Tyto vektory jsou zřejmě jednotkové. Dále označíme symbolem $\vec{n}_{AB}$ normálový vektor roviny, v níž leží hlavní kružnice $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$, obdobně pro $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C})$ a $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$. Potom zřejmě $\vec{n}_{AB} = \vec{b} \times \vec{a}$, $\vec{n}_{AC} = \vec{c} \times \vec{a}$. Volba pořadí vektorů v těchto součinech zaručuje, že odchylka těchto normálových vektorů je rovna α. Proto můžeme psát:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{n}_{AB} \cdot \vec{n}_{AC}}{|\vec{n}_{AB}|\,|\vec{n}_{AC}|} = \frac{(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot (\vec{c} \times \vec{a})}{|\vec{b} \times \vec{a}|\,|\vec{c} \times \vec{a}|}. \tag{2.2.2}$$

Pomocí známých vlastností vektorového a skalárního součinu snadno ukážeme, že platí:

$$\sin c = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = |\vec{a} \times \vec{b}|, \ \cos c = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \vec{a} \cdot \vec{b}, \text{ též } \sin b = |\vec{a} \times \vec{c}|, \ \cos b = \vec{a} \cdot \vec{c}, \ \cos a = \vec{b} \cdot \vec{c}.$$

Použijeme tyto vztahy společně se vzorcem (2.2.1) k úpravě vztahu (2.2.2), získáme:

$$\cos\alpha = \frac{(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot (\vec{c} \times \vec{a})}{|\vec{b} \times \vec{a}|\,|\vec{c} \times \vec{a}|} = \frac{(\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \cdot \vec{a}) - (\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{a} \cdot \vec{c})}{|\vec{b} \times \vec{a}|\,|\vec{c} \times \vec{a}|} = \frac{\cos a \cdot 1 - \cos c \cdot \cos b}{\sin c \cdot \sin b}.$$

Z tohoto vztahu již tvrzení věty bezprostředně plyne.

D. Kružnice na sféře

Dosud jsme uvažovali pouze hlavní kružnice na sféře $\boldsymbol{\kappa}$ o středu $\boldsymbol{O}$. Definovali jsme ji jako průnik sféry $\boldsymbol{\kappa}$ a některé roviny $\boldsymbol{\rho}$ procházející středem $\boldsymbol{O}$ sféry $\boldsymbol{\kappa}$. Průsečík sféry $\boldsymbol{\kappa}$ a kolmice sestrojené k rovině $\boldsymbol{\rho}$ ve středu $\boldsymbol{O}$ této sféry nazýváme pól příslušné hlavní kružnice. Hlavní kružnice má dva póly. Libovolná hlavní kružnice je určena svým pólem.

Uvažujme nyní rovinu $\boldsymbol{\sigma}$, která neprochází středem $\boldsymbol{O}$ dané sféry $\boldsymbol{\kappa}$ a která s ní má neprázdný průnik. V případě, že rovina $\boldsymbol{\sigma}$ není tečnou rovinou sféry $\boldsymbol{\kappa}$, ukážeme, že průnikem roviny $\boldsymbol{\sigma}$ a sféry $\boldsymbol{\kappa}$ je kružnice.

Středem $\boldsymbol{O}$ sféry $\boldsymbol{\kappa}$ vedeme přímku $\boldsymbol{s}$ kolmou k rovině $\boldsymbol{\sigma}$. Označme $\boldsymbol{K}$ průsečík přímky $\boldsymbol{s}$ a roviny $\boldsymbol{\sigma}$. Označme $\boldsymbol{S}$ průsečík polopřímky $\boldsymbol{OK}$ a sféry $\boldsymbol{\kappa}$. Zvolme libovolný bod $\boldsymbol{X}$, který náleží do průniku sféry $\boldsymbol{\kappa}$ a roviny $\boldsymbol{\sigma}$. Zřejmě je trojúhelník $\boldsymbol{OKX}$ pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu $\boldsymbol{X}$. Odtud vyplývá: $|\boldsymbol{KX}|^2 = |\boldsymbol{OX}|^2 - |\boldsymbol{OK}|^2 = 1 - |\boldsymbol{OK}|^2 = \text{konst.}$

Vidíme, že vzdálenost bodu ***X*** od bodu ***K*** je nezávislá na volbě bodu ***X***. Proto je průnikem roviny $\boldsymbol{\sigma}$ a sféry $\boldsymbol{\kappa}$ kružnice o středu ***K*** ležící v této rovině. Označme ji ***k***. Bod ***K*** budeme nazývat obyčejným středem kružnice ***k***, její poloměr obyčejný poloměr kružnice ***k***. Můžeme též ukázat, že na volbě bodu ***X*** je nezávislá i velikost úhlu ***XOS***. Tuto velikost nazveme sférický poloměr kružnice ***k*** na kulové ploše $\boldsymbol{\kappa}$. Bod ***S*** nazýváme sférický střed kružnice ***k***. Na hlavní kružnici můžeme také nazírat jako na kružnici se sférickým středem ve svém pólu a sférickým poloměrem $\pi/2$. Bod ***A*** na sféře $\boldsymbol{\kappa}$ můžeme chápat jako kružnici se sférickým středem ***A*** a nulovým sférickým poloměrem.

Obdobně jako v rovině můžeme řešit otázku vzájemné polohy dvou kružnic na sféře $\boldsymbol{\kappa}$. Omezme se pouze na konstatování, že případy, které známe z planimetrie, mohou nastat i zde. Pro naše další úvahy bude užitečné všimnout si blíže dotyku dvou kružnic na sféře $\boldsymbol{\kappa}$. Pokud je jedna z kružnic hlavní, hovoříme o ní jako o tečně druhé kružnice. Uvažujme nyní kružnici ***k*** na sféře $\boldsymbol{\kappa}$, která není hlavní. Sestrojme kružnici ***k’*** souměrně sdruženou s kružnicí ***k*** podle středu ***O*** sféry $\boldsymbol{\kappa}$. Je evidentní, že kružnice ***k’*** leží také na sféře $\boldsymbol{\kappa}$. Bez důkazu uveďme, že libovolná tečna kružnice ***k*** je současně tečnou kružnice ***k’***. Z libovolného bodu ležícího uvnitř oblasti ohraničené kružnicí ***k***, příp. ***k’***, na sféře $\boldsymbol{\kappa}$ není možné vést tečnu ke kružnici ***k***. Libovolným bodem kružnic ***k*** a ***k’*** lze vést právě jednu tečnu, body ležícími na sféře $\boldsymbol{\kappa}$ vně kružnic ***k*** i ***k’*** můžeme vést právě dvě různé tečny.

Všimněme si ještě, jak můžeme nalézt tečnu kružnice ***k*** na sféře $\boldsymbol{\kappa}$ bodem ***A*** na této sféře. Uvažujme ještě, že bod ***K*** je obyčejným středem a bod ***S*** sférickým středem kružnice ***k***. Vytvoříme kuželovou plochu s řídící kružnicí ***k*** vrcholem ve středu ***O*** sféry $\boldsymbol{\kappa}$. Sestrojíme rovinu $\boldsymbol{\tau}$, která prochází bodem ***A*** a dotýká se kuželové plochy. Taková rovina zjevně prochází bodem ***O*** a má s kružnicí ***k*** jediný společný bod, označíme ho symbolem ***T***. Rovina $\boldsymbol{\tau}$ tak určuje na sféře $\boldsymbol{\kappa}$ hlavní kružnici ***t***, která má s kružnicí ***k*** společný jediný bod – bod ***T***.

Označíme symbolem ***p*** průsečnici roviny $\boldsymbol{\tau}$ a roviny $\boldsymbol{\rho}$, v níž leží kružnice ***k***. Přímka ***p*** musí procházet bodem ***T*** dotyku kružnice ***k*** a hlavní kružnice ***t***. Pokud by měla přímka ***p*** s některou z nich společný další bod ***U***, ležel by bod ***U*** na sféře $\boldsymbol{\kappa}$ a současně i v rovině druhé z kružnic. Proto by bod ***U*** byl současně bodem i druhé kružnice. Kružnice ***k*** a hlavní kružnice ***t*** by pak měly společné právě dva různé body ***T***, ***U***, což je spor. Přímka ***p*** má tak s kružnicí ***k*** i hlavní kružnicí ***t*** společný jediný bod. Proto je přímka ***p*** tečnou kružnice ***k*** (resp. hlavní kružnice ***t***) v rovině $\boldsymbol{\rho}$ (resp. v rovině $\boldsymbol{\tau}$). Přímka ***p*** je proto kolmá na přímky ***OK*** i ***OT***. Rovina ***OKT*** je tak kolmá k přímce ***p***, která leží v rovině $\boldsymbol{\tau}$. Roviny ***OKT*** a $\boldsymbol{\tau}$ jsou tudíž na sebe kolmé.

Je zřejmé, že rovina $\boldsymbol{OKT}$ určuje hlavní kružnici procházející body $\boldsymbol{T}$ a $\boldsymbol{S}$. Hlavní oblouk $\widehat{\boldsymbol{TS}}$ svírá s libovolným (nenulovým) hlavním obloukem na hlavní kružnici $\boldsymbol{t}$ úhel o velikosti $\pi/2$. Poznamenejme ještě, že provedená úvaha o nalezení tečny pomocí jisté kuželové plochy zdůvodňuje tvrzení, která jsme uvedli výše v souvislosti s kružnicí $\boldsymbol{k}$ a s ní souměrně sdruženou kružnicí $\boldsymbol{k'}$.

Uvažujme nyní dvě kružnice $\boldsymbol{k}_1$ a $\boldsymbol{k}_2$, z nichž žádná není hlavní, které se dotýkají. Bodem dotyku proložíme tečnu. Pokud obě kružnice leží v téže polosféře s hraniční kružnicí tvořenou touto tečnou, hovoříme o vnitřním dotyku kružnic $\boldsymbol{k}_1$ a $\boldsymbol{k}_2$. V opačném případě mluvíme o vnějším dotyku kružnic $\boldsymbol{k}_1$ a $\boldsymbol{k}_2$. Podobně jako v rovině můžeme i na sféře řešit otázky existence či neexistence společné tečny, příp. společných tečen, dvou různých kružnic. Sestrojme kružnici $\boldsymbol{k}'_2$ souměrně sdruženou s kružnici $\boldsymbol{k}_2$ podle středu $\boldsymbol{O}$ sféry $\boldsymbol{\kappa}$. Je zřejmé, že společná tečna kružnic $\boldsymbol{k}_1$ a $\boldsymbol{k}_2$ je současně společnou tečnou kružnic $\boldsymbol{k}_1$ a $\boldsymbol{k}'_2$. Proto mohou nastat tyto možnosti:

1. Kružnice $\boldsymbol{k}_1$ leží vně kružnice $\boldsymbol{k}_2$ i vně kružnice $\boldsymbol{k}'_2$ – existují čtyři různé společné tečny kružnic $\boldsymbol{k}_1$ a $\boldsymbol{k}_2$.

2. Kružnice $\boldsymbol{k}_1$ leží vně kružnice $\boldsymbol{k}_2$ a dotýká se vně kružnice $\boldsymbol{k}'_2$ – existují tři různé společné tečny kružnic $\boldsymbol{k}_1$ a $\boldsymbol{k}_2$.

3. Kružnice $\boldsymbol{k}_1$ leží vně kružnice $\boldsymbol{k}_2$ a má s kružnicí $\boldsymbol{k}'_2$ společné právě dva různé body – existují dvě různé společné tečny kružnic $\boldsymbol{k}_1$ a $\boldsymbol{k}_2$.

4. Kružnice $\boldsymbol{k}_1$ leží vně kružnice $\boldsymbol{k}_2$ a má vnitřní dotyk s $\boldsymbol{k}'_2$ – existují jediná společná tečna kružnic $\boldsymbol{k}_1$ a $\boldsymbol{k}_2$.

5. Kružnice $\boldsymbol{k}_1$ leží vně kružnice $\boldsymbol{k}_2$ a jedna z kružnic $\boldsymbol{k}_1$ a $\boldsymbol{k}'_2$ leží uvnitř druhé – neexistuje žádná společná tečna kružnic $\boldsymbol{k}_1$ a $\boldsymbol{k}_2$.

6. Kružnice $\boldsymbol{k}_1$ leží vně kružnice $\boldsymbol{k}_2$ a kružnice $\boldsymbol{k}_1$ a $\boldsymbol{k}'_2$ splývají – každá tečna kružnice $\boldsymbol{k}_1$ je současně tečnou kružnice $\boldsymbol{k}_2$.

7. Kružnice $\boldsymbol{k}_1$ se dotýká vně kružnice $\boldsymbol{k}_2$ a leží vně kružnice $\boldsymbol{k}'_2$ – existují tři různé společné tečny kružnic $\boldsymbol{k}_1$ a $\boldsymbol{k}_2$.

8. Kružnice $\boldsymbol{k}_1$ se dotýká vně kružnice $\boldsymbol{k}_2$ a dotýká se kružnice $\boldsymbol{k}'_2$ – existují dvě různé společné tečny kružnic $\boldsymbol{k}_1$ a $\boldsymbol{k}_2$.

9. Kružnice $\boldsymbol{k}_1$ se dotýká vně kružnice $\boldsymbol{k}_2$ a má s kružnicí $\boldsymbol{k}_2'$ společné právě dva různé body – existuje jediná společná tečna kružnic $\boldsymbol{k}_1$ a $\boldsymbol{k}_2$.

10. Kružnice $\boldsymbol{k}_1$ má s kružnicí $\boldsymbol{k}_2$ společné právě dva různé body a leží vně kružnice $\boldsymbol{k}_2'$ – existují dvě různé společné tečny kružnic $\boldsymbol{k}_1$ a $\boldsymbol{k}_2$.

11. Kružnice $\boldsymbol{k}_1$ má s kružnicí $\boldsymbol{k}_2$ společné právě dva různé body a dotýká se kružnice $\boldsymbol{k}_2'$ – existuje jediná společná tečna kružnic $\boldsymbol{k}_1$ a $\boldsymbol{k}_2$.

12. Kružnice $\boldsymbol{k}_1$ má s kružnicí $\boldsymbol{k}_2$ i s kružnicí $\boldsymbol{k}_2'$ společné právě dva různé body – neexistuje žádná společná tečna kružnic $\boldsymbol{k}_1$ a $\boldsymbol{k}_2$.

13. Kružnice $\boldsymbol{k}_1$ má vnitřní dotyk s kružnicí $\boldsymbol{k}_2$ – existuje jediná společná kružnic $\boldsymbol{k}_1$ a $\boldsymbol{k}_2$.

14. Jedna z kružnic $\boldsymbol{k}_1$ a $\boldsymbol{k}_2$ leží uvnitř druhé - neexistuje žádná společná tečna kružnic $\boldsymbol{k}_1$ a $\boldsymbol{k}_2$.

Vidíme, že spektrum možností, které mohou nastat v případě hledání tečny z bodu ke kružnici, příp. společných tečen dvou kružnic, na sféře, je mnohem bohatší než v rovinném případě. Podrobněji jsem se touto otázkou zabýval z toho důvodu, že se nabízí využití ve výuce geometrie na střední, případně vysoké škole. Bylo by zajímavé předložit ji studentům jako problémovou úlohu. Své místo by taková úloha mohla mít i v matematické olympiádě.

E. Orientovaná kružnice na sféře

Viděli jsme, že v případě Apolloniovy úlohy v rovině bylo vhodné zavést pojem cyklu. I v případě kružnic na sféře je možné orientovat je jedním ze dvou možných způsobů a hovořit tak o orientované kružnici. Budeme uvažovat pouze kružnice, jež nejsou hlavní. Pod sdělením, že jsme kružnici přiřadili jistou orientaci, si můžeme představit skutečnost, že jsme jí přisoudili určitý „smysl otáčení“. Obdobnou představou jsme si pomohli i v případě zavedení cyklu. Pokračujme v našich představách dále: virtuálně položíme pravou ruku do roviny, v níž leží orientovaná kružnice tak, že její palec bude ukazovat ve směru od středu kulové plochy k jejímu středu (obyčejnému i sférickému). Pokud bude palec se zbylými prsty svírat pravý úhel, budou prsty určovat smysl orientace, který budeme považovat za kladný (pravotočivý). Opačný smysl orientace bude záporný (levotočivý). Takto však není orientace zavedena korektně z dnešního hlediska, uvedená představa je však pro potřeby dalšího výkladu postačující.

Pokud bude kružnice orientována kladně, přiřadíme ji (kladný) sférický poloměr rovný sférickému poloměru původní, neorientované kružnice. Pokud bude kružnice orientována záporně, přiřadíme ji (záporný) sférický poloměr rovný mínus jedna násobku poloměru neorientované kružnice. Orientovanou kružnici na sféře jsme samozřejmě mohli zavést přímo tak, že bychom kladně (resp. záporně) orientovanou kružnici definovali jako kružnici s kladným (resp. záporným) sférickým poloměrem. V našich úvahách budeme označovat orientovanou kružnici na sféře $\boldsymbol{\kappa}$ o sférickém středu $\boldsymbol{S}$ a sférickém poloměru r $\underline{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{S}, r)$ (resp. $\underline{\boldsymbol{k}}$), neorientovanou kružnici pak $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{S}, r)$ (resp. $\boldsymbol{k}$). Pokud bychom nazírali na orientovanou kružnici jako na izolovaný objekt, neměla by pro nás její orientace velký význam. Ten získá ve chvíli, kdy ji začneme studovat ve vztahu k další orientované kružnici, příp. dalším orientovaným kružnicím.

Podívejme se nyní jak spolu souvisí orientované kružnice a kružnice hlavní. Uvažujme, že jsou dány dvě různé kružnice $\boldsymbol{k}_1$ a $\boldsymbol{k}_2$ na sféře $\boldsymbol{\kappa}$, které se dotýkají nějaké hlavní kružnice $\boldsymbol{k}$ na sféře $\boldsymbol{\kappa}$. Mohou se jí dotýkat v jediném, ale i dvou různých bodech. V případě, že kružnice $\boldsymbol{k}_1$ a $\boldsymbol{k}_2$ leží v téže polosféře (resp. v různých polosférách) s hraniční kružnicí $\boldsymbol{k}$, řekneme, že se jimi určené orientované kružnice dotýkají hlavní kružnice $\boldsymbol{k}$, právě když mají souhlasnou (resp. nesouhlasnou) orientaci. Řekneme, že se dvě orientované kružnice na sféře dotýkají v bodě $\boldsymbol{T}$, jestliže se dotýkají téže hlavní kružnice v bodě $\boldsymbol{T}$.

Jinak řečeno: dvě dotýkající se orientované kružnice na sféře $\boldsymbol{\kappa}$, které jsou orientovány souhlasně, mají vnitřní dotyk. V případě, že jsou orientovány nesouhlasně, se dotýkají vně. Pro společné tečny dvou orientovaných kružnic platí: jsou-li (resp. nejsou-li) kružnice orientovány souhlasně, leží (resp. neleží) v téže polosféře s hraniční kružnicí rovnou jejich společné tečně. Docházíme tak k podobným závěrům jako u cyklů v rovině.

V dalším textu bude naším cílem nalézt k daným třem kružnicím na sféře $\boldsymbol{\kappa}$ kružnici na této sféře, která se jich dotýká. Pokud přiřadíme těmto kružnicím orientaci, nalezneme vždy nejvýše dvě orientované kružnice, které se jich dotýkají. Na tomto místě bychom mohli provést úvahy, které by byly obdobné těm, které jsme provedli v podkapitole 2.1.2 na konci části A., neučiníme však tak. Závěr se dá předjímat, pro celkem čtyři různé způsoby jak dané kružnice orientovat, když např. první je orientována kladně, nalezneme vždy nejvýše dvě různá řešení. Apolloniova úloha na sféře má tak nejvýše osm různých řešení.

F. Vzdálenost bodu a roviny

Ze středoškolské analytické geometrie je známý vzorec pro určení vzdálenosti bodu v trojrozměrném prostoru od roviny zadané obecnou rovnicí. Tento vztah bývá odvozen pro kartézskou soustavu souřadnic. Odvodíme zde tvrzení platné v libovolné lineární soustavě souřadnic.

Nechť je ve zvolené lineární soustavě souřadnic rovina ρ určena svojí obecnou rovnicí ve tvaru $ax + by + cz + d = 0$. Nechť vektor $\vec{n}$ o souřadnicích (m, n, o) je normálovým vektorem roviny ρ. V kartézské soustavě souřadnic je velice jednoduché vyjádřit tento vektor pomocí koeficientů obecné rovnice roviny. V nekartézské lineární soustavě souřadnic se jedná o mnohem obtížnější úkol. Ukáže se však, že pro odvození výsledku, který postačuje pro porozumění dalšímu textu, není toto vyjádření nezbytně nutné. Nechť je dán bod $\boldsymbol{A}$ o souřadnicích $[x', y', z']$. Bodem $\boldsymbol{A}$ vedeme k rovině ρ přímku $\boldsymbol{a}$ kolmou k rovině ρ. Její parametrická rovnice je tvaru: $x = x' + t{\cdot}m$, $y = y' + t{\cdot}n$, $z = z' + t{\cdot}o$.

Určíme průsečík $\boldsymbol{A'}$ přímky $\boldsymbol{a}$ s rovinou ρ. Známým způsobem nalezneme hodnotu t' parametru t v rovnici přímky $\boldsymbol{a}$, která určuje bod $\boldsymbol{A'}$:

$$t' = -\frac{ax' + by' + cz' + d}{am + bn + co}.$$

Pak $\boldsymbol{A'} = \boldsymbol{A} + t'\cdot\vec{n}$, vzdálenost bodu $\boldsymbol{A}$ od roviny ρ určíme jako velikost vektoru $\overrightarrow{AA'}$, tj. vektoru $t'\cdot\vec{n}$. Proto platí:

$$|A\rho| = \left| -\frac{ax' + by' + cz' + d}{am + bn + co}\vec{n} \right| = |ax' + by' + cz' + d| \cdot \frac{|\vec{n}|}{|am + bn + co|} = f \cdot |ax' + by' + cz' + d|,$$

kde f je jistá konstanta.

Tvrzení 2.2.2: *Nechť je ve zvolené lineární soustavě souřadnic rovina ρ určena svojí obecnou rovnicí ve tvaru $ax + by + cz + d = 0$. Nechť je dán bod* $\boldsymbol{A}$ *o souřadnicích $[x', y', z']$. Pak je vzdálenost bodu* $\boldsymbol{A}$ *od roviny ρ přímo úměrná hodnotě veličiny $|ax' + by' + cz' + d|$.*

Na závěr bez důkazu uveďme, že v případě, že dva body leží v téže polorovině (resp. opačných polorovinách) s hraniční rovinou ρ, mají čísla, která spočítáme dosazením jejich souřadnic do výrazu $ax + by + cz + d$, stejné (resp. opačné) znaménko.

G. Několik pojmů z projektivní geometrie

Nepředpokládám, že by soustavný kurz projektivní geometrie byl běžnou součástí učitelského studia na českých univerzitách. Avšak pojmy, které postačují pro porozumění dalšímu textu, jsou obvykle vykládány v rámci analytické geometrie kuželoseček a kvadrik. Ta je obvykle na těchto školách vyučována. Předpokládám proto znalost pojmů pólu, polární nadroviny a dalších, uvedených v následujícím výkladu. Uvedu též jeden dílčí poznatek, který dále využijeme. Ten však není většinou součástí výše uvedeného kurzu geometrie. Zde se pouze spokojíme s jeho zformulováním a nebudeme ho dokazovat.

Uvažujme nyní kulovou plochu $\boldsymbol{\kappa}$ o středu $\boldsymbol{O}$ a poloměru R. Kulová plocha $\boldsymbol{\kappa}$ je kvadrikou v trojrozměrném euklidovském prostoru $\mathbf{E}_3$ (komplexně a projektivně rozšířeném). Víme, co vyjadřuje sdělení, že body $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ jsou polárně sdružené (též konjugované) vzhledem ke sféře $\boldsymbol{\kappa}$. Protože je libovolná sféra regulární kvadrikou, je možné ke každému bodu $\boldsymbol{P}$ (vlastnímu i nevlastnímu) prostoru $\mathbf{E}_3$ nalézt rovinu $\boldsymbol{\pi}$ bodů, které jsou s bodem $\boldsymbol{P}$ polárně sdružené, tj. polární rovinu bodu $\boldsymbol{P}$ vzhledem ke sféře $\boldsymbol{\kappa}$. V případě sféry je (podobně jako u kružnice v rovině) polární rovina $\boldsymbol{\pi}$ bodu $\boldsymbol{P}$ různého od středu $\boldsymbol{O}$ (vzhledem ke sféře $\boldsymbol{\kappa}$) vždy kolmá na přímku $\boldsymbol{OP}$. Pokud je navíc bod $\boldsymbol{P}$ vnějším bodem sféry $\boldsymbol{\kappa}$, rovina $\boldsymbol{\pi}$ protíná sféru $\boldsymbol{\kappa}$ v bodech dotyku tečen vedených ke sféře $\boldsymbol{\kappa}$ bodem $\boldsymbol{P}$. V dalším textu budeme uvažovat pouze případ, kdy polární rovina bodu $\boldsymbol{P}$ určuje na sféře $\boldsymbol{\kappa}$ nějakou kružnici, tj. bod $\boldsymbol{P}$ bude vnějším bodem sféry $\boldsymbol{\kappa}$. Pak jeho polární rovinu sestrojíme[45] tak, že bodem $\boldsymbol{P}$ a bodem $\boldsymbol{O}$ proložíme rovinu kolmou k průmětně, tu sklopíme a nalezneme bod dotyku $\boldsymbol{T}$ tečny vedené v této rovině bodem $\boldsymbol{P}$ ke sféře $\boldsymbol{\kappa}$. Polární rovinu bodu $\boldsymbol{P}$ nalezneme tak, že bodem $\boldsymbol{T}$ proložíme rovinu kolmou k přímce $\boldsymbol{OP}$. Polární rovinou středu $\boldsymbol{O}$ je množina všech nevlastních bodů prostoru $\mathbf{E}_3$, tzv. nevlastní rovina prostoru $\mathbf{E}_3$.

Obráceně je možné ke každé rovině $\boldsymbol{\pi}$ nalézt takový bod $\boldsymbol{P}$, že rovina $\boldsymbol{\pi}$ je polární rovinou bodu $\boldsymbol{P}$ vzhledem ke sféře $\boldsymbol{\kappa}$. Bod $\boldsymbol{P}$ je pólem roviny $\boldsymbol{\pi}$ vzhledem ke sféře $\boldsymbol{\kappa}$. V dalším textu nás opět bude zajímat pouze případ, kdy rovina $\boldsymbol{\pi}$ určuje na sféře $\boldsymbol{\kappa}$ nějakou kružnici $\boldsymbol{k}$ o obyčejném středu $\boldsymbol{K}$ a sférickém středu $\boldsymbol{S}$. V případě, že $\boldsymbol{k}$ je hlavní kružnice sféry $\boldsymbol{\kappa}$, je pólem roviny $\boldsymbol{\pi}$ nevlastní bod přímky kolmé na $\boldsymbol{\pi}$[46]. V opačném případě je pól $\boldsymbol{P}$ roviny $\boldsymbol{\pi}$ vlastní bod

[45] Předpokládejme, že úlohu řešíme konstruktivně v Mongeově nebo kotovaném promítání.
[46] V tomto případě musíme rozlišit pojem pól hlavní kružnice, který jsme zavedli výše, a pól roviny hlavní kružnice. Oba body leží na kolmici $\boldsymbol{o}$ k rovině hlavní kružnice středem $\boldsymbol{O}$ sféry $\boldsymbol{\kappa}$. Pól hlavní kružnice je

ležící na přímce $\boldsymbol{OK}$, který leží v tečné rovině sféry $\boldsymbol{\kappa}$ v libovolném bodě kružnice $\boldsymbol{k}$. Pokud bychom chtěli v takovém případě bod $\boldsymbol{P}$ sestrojit, použijeme konstrukci podobnou té, kterou jsme uvedli v předchozím odstavci.

Předpokládám znalost následujícího tvrzení. Jestliže je bod $\boldsymbol{A}$ polárně sdružený s každým z m bodů $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$, …, $\boldsymbol{B}_m$, je bod $\boldsymbol{A}$ polárně sdružený i s každým bodem podprostoru $\{\boldsymbol{B}_1\}\vee\{\boldsymbol{B}_2\}\vee\ldots\vee\{\boldsymbol{B}_m\}$, tj. nejmenšího podprostoru, který obsahuje body $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$, …, $\boldsymbol{B}_m$. Uvažujme nyní dva různé body $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ prostoru $\mathbf{E}_3$. Jejich polární roviny $\boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{\beta}$ vzhledem ke sféře $\boldsymbol{\kappa}$ se nutně protínají v přímce (vlastní nebo nevlastní), označíme ji $\boldsymbol{p}$. Pak je ovšem každý bod přímky $\boldsymbol{p}$ polárně sdružený s bodem $\boldsymbol{A}$ i s bodem $\boldsymbol{B}$. Podle výše uvedeného tvrzení je každý bod přímky $\boldsymbol{p}$ polárně sdružený s každým bodem přímky $\boldsymbol{AB}$. Proto je polární rovina libovolného bodu přímky $\boldsymbol{AB}$ vzhledem ke sféře $\boldsymbol{\kappa}$ incidentní s průsečnicí polárních rovin bodů $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ vzhledem ke sféře $\boldsymbol{\kappa}$. Jinak řečeno: množina polárních rovin všech bodů jisté přímky tvoří svazek rovin, resp. množina pólů všech rovin jistého svazku utváří přímku.

Tuto část zakončíme větou, kterou uvedeme bez důkazu a která svým charakterem spadá do projektivní geometrie kvadrik[47].

Věta 2.2.3a: *Nechť je dána regulární kvadrika* $\boldsymbol{Q}$ *a čtyři různé body* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$, *které leží na jedné přímce. Pak polární roviny* $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\delta}$ *(v tomto pořadí) bodů* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ *(v tomto pořadí) vzhledem ke kvadrice* $\boldsymbol{Q}$ *incidují s jedinou přímkou a platí* $(\boldsymbol{ABCD}) = (\boldsymbol{\alpha\beta\gamma\delta})$.

Věta 2.2.3b: *Nechť je dána regulární kvadrika* $\boldsymbol{Q}$ *a čtyři různé roviny* $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\delta}$, *které se protínají v jedné přímce. Pak póly* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ *(v tomto pořadí) rovin* $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\delta}$ *(v tomto pořadí) leží na jedné přímce a platí* $(\boldsymbol{ABCD}) = (\boldsymbol{\alpha\beta\gamma\delta})$.

---

průsečíkem přímky $\boldsymbol{o}$ a sféry $\boldsymbol{\kappa}$. Pól roviny, ve které hlavní kružnice leží, je nevlastním bodem přímky $\boldsymbol{o}$. Oba pojmy budeme v dalším textu využívat.

[47] Například v Havlíčkově učebnici projektivní geometrie (viz [9] str. 109) nalezneme obdobné věty pro rovinný případ. Cituji věty 26,5a a 26,5b: „*Probíhá-li bod přímou řadu bodovou, vytváří jeho polára svazek přímek, který je s danou přímou řadou bodovou projektivní. (Rozumí se, že v této projektivnosti každému bodu dané přímé řady bodové odpovídá jeho polára.)*“, „*Probíhá-li přímka svazek přímek, vytváří její pól přímou řadu bodovou, která je s daným svazkem přímek projektivní*“. Jestliže jsou přímá řada bodová (tj. množina bodů utvářející jistou přímku) a svazek přímek projektivní, existuje vzájemně jednoznačné zobrazení přímé řady bodové na svazek přímek, které zachovává dělící poměr. Proto leží-li čtyři různé body $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ na přímce, prochází jejich poláry $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ jedním bodem a platí $(\boldsymbol{ABCD}) = (\boldsymbol{abcd})$. Důkaz obdobného tvrzení v trojrozměrném prostoru, by tak zásadně přesahoval zaměření této práce.

2.2.3 Přípravné úvahy

Uvažujme na dané sféře $\boldsymbol{\kappa}$ se středem $\boldsymbol{O}$ a jednotkovým poloměrem kladně orientovanou kružnici $\underline{\boldsymbol{k}}$ o sférickém středu $\boldsymbol{S}$, obyčejném středu $\boldsymbol{K}$ a sférickém poloměru r. Uvažujme dále hlavní kružnici $\boldsymbol{m}$, jejímž pólem je bod $\boldsymbol{S}$. Orientovaná kružnice $\underline{\boldsymbol{k}}$ a hlavní kružnice $\boldsymbol{m}$ tak leží v rovnoběžných rovinách. Uvažujme další dvě libovolné orientované kružnice $\underline{\boldsymbol{k}}_1$, $\underline{\boldsymbol{k}}_2$ o sférických středech $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{S}_2$ a sférických poloměrech r_1, r_2, které se orientované kružnice $\underline{\boldsymbol{k}}$ dotýkají v bodech $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$. Body $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{S}_1$ vedeme hlavní kružnici $\boldsymbol{s}_1$, která zjevně prochází bodem $\boldsymbol{A}_1$. Označme $\boldsymbol{M}_1$ ten z průsečíků hlavních kružnic $\boldsymbol{m}$ a $\boldsymbol{s}_1$, pro nějž je velikost úhlu $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{O}\boldsymbol{A}_1$, kterou označíme α, menší než $\pi/2$. Pak je zřejmě sférický poloměr orientované kružnice $\underline{\boldsymbol{k}}$ roven $\pi/2 - \alpha$. Body $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{S}_2$, vedeme hlavní kružnici $\boldsymbol{s}_2$, podobně jako výše bod $\boldsymbol{M}_1$ na ni určíme průsečík $\boldsymbol{M}_2$ s hlavní kružnicí $\boldsymbol{m}$. Platí $|\angle\, \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{O}\boldsymbol{A}_1| = |\angle\, \boldsymbol{M}_2\boldsymbol{O}\boldsymbol{A}_2|$. Roviny hlavích kružnic $\boldsymbol{s}_1$ a $\boldsymbol{s}_2$ svírají úhel, který označíme φ_{12}. Zjevně také $|\angle\, \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{O}\boldsymbol{M}_2| = |\angle\, \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{K}\boldsymbol{A}_2| = \varphi_{12}$.

Všimněme si nyní Eulerova sférického trojúhelníku $\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2$. Velikost úhlu při vrcholu $\boldsymbol{S}$ je φ_{12}. Sférická vzdálenost bodů $\boldsymbol{S}$, S_1 je rovna $r - r_1$ (zde uvažujeme, že sférický poloměr r_1 může být kladné nebo záporné číslo v závislosti na tom, zda je dotyk $\underline{\boldsymbol{k}}$ a $\underline{\boldsymbol{k}}_1$ vnitřní nebo vnější). Podobný výsledek získáme pro sférickou vzdálenost bodů $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{S}_2$. Pomocí sférické kosinové věty (věta 2.2.1) určíme sférickou vzdálenost středů $\boldsymbol{S}_1$ a $\boldsymbol{S}_2$, kterou označíme symbolem d_{12}:

$$\cos d_{12} = \cos(r - r_1)\cos(r - r_2) + \sin(r - r_1)\sin(r - r_2)\cos\varphi_{12},$$

$$\cos d_{12} = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha - r_1)\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha - r_2) + \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha - r_1)\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha - r_2)\cos\varphi_{12},$$

$$\cos d_{12} = \sin(r_1 + \alpha)\sin(r_2 + \alpha) + \cos(r_1 + \alpha)\cos(r_2 + \alpha)\cos\varphi_{12},$$

$$1 - 2\sin^2\frac{d_{12}}{2} = \sin(r_1 + \alpha)\sin(r_2 + \alpha) + \cos(r_1 + \alpha)\cos(r_2 + \alpha) - 2\cos(r_1 + \alpha)\cos(r_2 + \alpha)\sin^2\frac{\varphi_{12}}{2},$$

$$1 - 2\sin^2\frac{d_{12}}{2} = \cos(r_1 - r_2) - 2\cos(r_1 + \alpha)\cos(r_2 + \alpha)\sin^2\frac{\varphi_{12}}{2},$$

$$1 - 2\sin^2\frac{d_{12}}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{r_1 - r_2}{2} - 2\cos(r_1 + \alpha)\cos(r_2 + \alpha)\sin^2\frac{\varphi_{12}}{2}.$$

Odtud vyplývá:

$$\sin^2\frac{d_{12}}{2} - \sin^2\frac{r_1 - r_2}{2} = \cos(r_1 + \alpha)\cos(r_2 + \alpha)\sin^2\frac{\varphi_{12}}{2}. \tag{2.2.3}$$

Sestrojme společnou tečnu $\boldsymbol{k}_{12}$ orientovaných kružnic $\underline{\boldsymbol{k}}_1$ a $\underline{\boldsymbol{k}}_2$, její bod dotyku s $\underline{\boldsymbol{k}}_1$ (resp. $\underline{\boldsymbol{k}}_2$) označíme N_1 (resp. N_2). Označme symbolem t_{12} sférickou vzdálenost bodů N_1, N_2 a symbolem n_{12} jejich (obyčejnou) vzdálenost. Označme $\boldsymbol{S}_{12}$ pól hlavní kružnice $\boldsymbol{k}_{12}$. V případě kladné (resp. záporné) orientace cyklu $\underline{\boldsymbol{k}}_1$ volíme ten ze dvou pólů, který leží (resp. neleží) v téže polosféře s hraniční kružnicí $\boldsymbol{k}_{12}$ jako orientovaná kružnice $\underline{\boldsymbol{k}}_1$. Je zřejmě zaručeno, že zvolený pól $\boldsymbol{S}_{12}$ bude totožný s tím, který bychom volili, pokud bychom uvažovali orientaci kružnice $\underline{\boldsymbol{k}}_2$ namísto orientace kružnice $\underline{\boldsymbol{k}}_1$. Uvažujme libovolnou rovinu $\boldsymbol{\tau}$ procházející středem $\boldsymbol{O}$ sféry $\boldsymbol{\kappa}$ kolmou k rovině hlavní kružnice $\boldsymbol{k}_{12}$. Tato rovina musí obsahovat kolmici na rovinu hlavní kružnice $\boldsymbol{k}_{12}$ bodem $\boldsymbol{O}$, a proto prochází rovina $\boldsymbol{\tau}$ vždy pólem $\boldsymbol{S}_{12}$. Nyní je již zřejmé, že hlavní kružnice vedená body $\boldsymbol{S}_1$, N_1 (resp. $\boldsymbol{S}_2$, N_2) prochází pólem $\boldsymbol{S}_{12}$ hlavní kružnice $\boldsymbol{k}_{12}$. Odtud můžeme určit sférickou vzdálenost bodů $\boldsymbol{S}_1$ a $\boldsymbol{S}_{12}$ (resp. $\boldsymbol{S}_2$ a $\boldsymbol{S}_{12}$), která je rovna $\pi/2 - r_1$ (resp. $\pi/2 - r_2$). V závislosti na orientaci kružnice $\underline{\boldsymbol{k}}_1$ (resp. $\underline{\boldsymbol{k}}_2$) je tato vzdálenost buď menší (pro kladnou orientaci), nebo větší (pro zápornou orientaci) než $\pi/2$. Uvažujme Eulerův sférický trojúhelník $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_{12}$. Protože jsou roviny hlavních kružnic $\boldsymbol{o}_1(\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_{12})$ a $\boldsymbol{o}_2(\boldsymbol{S}_2, \boldsymbol{S}_{12})$ kolmé na rovinu hlavní kružnice $\boldsymbol{k}_{12}$, je velikost úhlu rovin hlavních kružnic $\boldsymbol{o}_1$ a $\boldsymbol{o}_2$ (a tím i velikost úhlu při $\boldsymbol{S}_{12}$ ve sférickém trojúhelníku $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_{12}$) rovna velikosti úhlu $N_1\boldsymbol{O}N_2$, tj. t_{12}. Pro sférickou vzdálenost d_{12} bodů $\boldsymbol{S}_1$ a $\boldsymbol{S}_2$ podle sférické kosinové věty (věta 2.2.1) platí:

$$\cos d_{12} = \cos(\frac{\pi}{2} - r_1)\cos(\frac{\pi}{2} - r_2) + \sin(\frac{\pi}{2} - r_1)\sin(\frac{\pi}{2} - r_2)\cos t_{12},$$

$$1 - 2\sin^2\frac{d_{12}}{2} = \sin r_1 \sin r_2 + \cos r_1 \cos r_2 - 2\cos r_1 \cos r_2 \sin^2\frac{t_{12}}{2},$$

$$1 - 2\sin^2\frac{d_{12}}{2} = \cos(r_1 - r_2) - 2\cos r_1 \cos r_2 \sin^2\frac{t_{12}}{2},$$

$$1 - 2\sin^2\frac{d_{12}}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{r_1 - r_2}{2} - 2\cos r_1 \cos r_2 \sin^2\frac{t_{12}}{2}.$$

Odtud získáme vztah:

$$\sin^2\frac{d_{12}}{2} - \sin^2\frac{r_1 - r_2}{2} = \cos r_1 \cos r_2 \sin^2\frac{t_{12}}{2}. \qquad (2.2.4)$$

Můžeme tak určit sférickou vzdálenost bodů dotyku společné tečny dvou orientovaných kružnic na sféře $\boldsymbol{\kappa}$. Protože jsou kosiny sférických poloměrů r_1 a r_2 vždy kladné, v případě, že taková společná tečna existuje, je výraz na pravé straně rovnosti (2.2.4) nezáporný. Můžeme však definovat sférickou vzdálenost bodů dotyku společné tečny dvou orientovaných kružnic na sféře $\boldsymbol{\kappa}$ i v případě, že tečna není reálná, jako komplexní číslo t_{12}, pro něž platí:

$$\sin^2\frac{t_{12}}{2}=\frac{\sin^2\frac{d_{12}}{2}-\sin^2\frac{r_1-r_2}{2}}{\cos r_1\cos r_2}. \qquad (2.2.5)$$

Ze vztahů (2.2.3) a (2.2.4) plyne:

$$\sin^2\frac{\varphi_{12}}{2}=\frac{\cos r_1\cos r_2}{\cos(r_1+\alpha)\cos(r_2+\alpha)}\sin^2\frac{t_{12}}{2}. \qquad (2.2.6)$$

Uvažujme nyní na sféře $\boldsymbol{\kappa}$ s jednotkovým poloměrem čtyři orientované kružnice $\underline{\boldsymbol{k}}_1, \dots, \underline{\boldsymbol{k}}_4$, které se dotýkají kladně orientované kružnice $\underline{\boldsymbol{k}}$ v bodech $\boldsymbol{A}_1, \dots, \boldsymbol{A}_4$. Označíme $\boldsymbol{S}_i$ sférický střed, r_i sférický poloměr orientované kružnice $\underline{\boldsymbol{k}}_i$, kde $i = 1, \dots, 4$. Označíme $\boldsymbol{S}$ sférický střed, $\boldsymbol{K}$ obyčejný střed a $\pi/2 - \alpha$ sférický poloměr orientované kružnice $\underline{\boldsymbol{k}}$. Dále označíme symbolem a_{ij} (obyčejnou) vzdálenost bodů $\boldsymbol{A}_i$, $\boldsymbol{A}_j$ a symbolem φ_{ij} velikost úhlu $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{K}\boldsymbol{A}_j$, kde $i, j = 1, \dots, 4$. Sférickou vzdálenost sférických středů orientovaných kružnic $\underline{\boldsymbol{k}}_i$, $\underline{\boldsymbol{k}}_j$ označíme d_{ij}, sférickou vzdálenost bodů dotyku (i v případě, že nejsou reálné) jejich společné tečny označíme t_{ij}, (obyčejnou) vzdálenost těchto bodů dotyku označíme n_{ij}, kde $i, j = 1, \dots, 4$.

Zřejmě platí vztahy analogické ke vztahům (2.2.3) až (2.2.6):

$$\sin^2\frac{d_{ij}}{2}-\sin^2\frac{r_i-r_j}{2}=\cos(r_i+\alpha)\cos(r_j+\alpha)\sin^2\frac{\varphi_{ij}}{2},\quad i,j=1,\dots,4, \qquad (2.2.3^*)$$

$$\sin^2\frac{d_{ij}}{2}-\sin^2\frac{r_i-r_j}{2}=\cos r_i\cos r_j\sin^2\frac{t_{ij}}{2},\quad i,j=1,\dots,4, \qquad (2.2.4^*)$$

$$\sin^2\frac{t_{ij}}{2}=\frac{\sin^2\frac{d_{ij}}{2}-\sin^2\frac{r_i-r_j}{2}}{\cos r_i\cos r_j},\quad i,j=1,\dots,4, \qquad (2.2.5^*)$$

$$\sin^2\frac{\varphi_{ij}}{2}=\frac{\cos r_i\cos r_j}{\cos(r_i+\alpha)\cos(r_j+\alpha)}\sin^2\frac{t_{ij}}{2},\quad i,j=1,\dots,4. \qquad (2.2.6^*)$$

Pro body $\boldsymbol{A}_1, \dots, \boldsymbol{A}_4$ platí Ptolemaiova věta (věta 2.1.2), proto můžeme psát:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12}^2 & a_{13}^2 & a_{14}^2 \\ a_{12}^2 & 0 & a_{23}^2 & a_{24}^2 \\ a_{13}^2 & a_{23}^2 & 0 & a_{34}^2 \\ a_{14}^2 & a_{24}^2 & a_{34}^2 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Uvědomíme-li si, že $a_{ij}^2 = 4R^2 \sin^2 \frac{\varphi_{ij}}{2} = 4\sin^2 \frac{\varphi_{ij}}{2}$, a vydělíme-li každý řádek determinantu čtyřmi, získáme:

$$\begin{vmatrix} 0 & \sin^2 \frac{\varphi_{12}}{2} & \sin^2 \frac{\varphi_{13}}{2} & \sin^2 \frac{\varphi_{14}}{2} \\ \sin^2 \frac{\varphi_{12}}{2} & 0 & \sin^2 \frac{\varphi_{23}}{2} & \sin^2 \frac{\varphi_{24}}{2} \\ \sin^2 \frac{\varphi_{13}}{2} & \sin^2 \frac{\varphi_{23}}{2} & 0 & \sin^2 \frac{\varphi_{34}}{2} \\ \sin^2 \frac{\varphi_{14}}{2} & \sin^2 \frac{\varphi_{24}}{2} & \sin^2 \frac{\varphi_{34}}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Využijeme-li vztah (2.2.6[*]) a vytkneme-li z i-tého řádku (resp. j-tého sloupce) výše uvedeného determinantu člen $\frac{\cos r_i}{\cos(r_i + \alpha)}$ (resp. $\frac{\cos r_j}{\cos(r_j + \alpha)}$), obdržíme:

$$\begin{vmatrix} 0 & \sin^2 \frac{t_{12}}{2} & \sin^2 \frac{t_{13}}{2} & \sin^2 \frac{t_{14}}{2} \\ \sin^2 \frac{t_{12}}{2} & 0 & \sin^2 \frac{t_{23}}{2} & \sin^2 \frac{t_{24}}{2} \\ \sin^2 \frac{t_{13}}{2} & \sin^2 \frac{t_{23}}{2} & 0 & \sin^2 \frac{t_{34}}{2} \\ \sin^2 \frac{t_{14}}{2} & \sin^2 \frac{t_{24}}{2} & \sin^2 \frac{t_{34}}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.2.7}$$

Na rozdíl od předchozích dvou determinantů mohou být některé z prvků determinantu ve vztahu (2.2.7) záporné. Uvážíme-li, že $n_{ij}^2 = 4R^2 \sin^2 \frac{t_{ij}}{2} = 4\sin^2 \frac{t_{ij}}{2}$, platí:

$$\begin{vmatrix} 0 & n_{12}^2 & n_{13}^2 & n_{14}^2 \\ n_{12}^2 & 0 & n_{23}^2 & n_{24}^2 \\ n_{13}^2 & n_{23}^2 & 0 & n_{34}^2 \\ n_{14}^2 & n_{24}^2 & n_{34}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.2.8}$$

Vidíme, že vztah (2.2.8) pro vzdálenosti bodů dotyku společných tečen čtyř orientovaných kružnic dotýkajících se páté orientované kružnice na sféře $\boldsymbol{\kappa}$ s jednotkovým poloměrem je identický se vztahem (2.1.6), který charakterizuje obdobné vzdálenosti v rovině[48]. Nejen v tom můžeme spatřovat blízkost Sobotkova řešení Apolloniovy úlohy na sféře a v rovině. Vidíme, že úvahy, které byly obsahem podkapitol 2.1.3 a 2.2.3, mají mnoho společného. V obou případech se snažíme užitím trigonometrie (rovinné nebo sférické)

[48] Dá se též užitím podobnosti dokázat, že vztah (2.2.8) platí i na sféře s libovolným poloměrem.

vyjádřit vzdálenosti n_{ij} bodů dotyku společné tečny dvojic orientovaných kružnic $\underline{\boldsymbol{k}}_i$, $\underline{\boldsymbol{k}}_j$, které se dotýkají další orientované kružnice $\underline{\boldsymbol{k}}$, pomocí vzdálenosti bodů dotyku $\boldsymbol{A}_i$ a $\boldsymbol{A}_j$ orientovaných kružnic $\underline{\boldsymbol{k}}_i$, $\underline{\boldsymbol{k}}$ a $\underline{\boldsymbol{k}}_j$, $\underline{\boldsymbol{k}}$. V obou případech využijeme platnosti Ptolemaiovy věty ve tvaru vyjádřeném větou 2.1.2 pro body $\boldsymbol{A}_1$, …, $\boldsymbol{A}_4$. Úpravami jsme nakonec dospěli k vztahu (2.1.6), případně (2.2.8). I další postup bude připomínat úvahy, které nalezneme v podkapitole 2.1.4.

2.2.4 Analytické řešení Apolloniovy úlohy na sféře

Výchozí myšlenka celého postupu je stejná jako v rovinném případě. Nechť se jedna z kružnic uvažovaných v předchozí podkapitole (např. $\underline{\boldsymbol{k}}_4$) redukuje na bod, který označíme $\boldsymbol{P}$. Využitím vztahů (2.2.7) a (2.2.8), kam vhodně dosadíme za $\sin^2\frac{t_{i4}}{2}$, příp. n_{i4}, získáme vtah, který musí splňovat libovolný bod na orientované kružnici, která se dotýká daných tří orientovaných kružnic. Získáme tak analyticky rovnice příslušného řešení Apolloniovy úlohy na sféře. Volbou orientace daných kružnic nalezneme všechna případná řešení této úlohy.

V podkapitole 2.1.4 jsme využívali toho, že dané kružnice jsou určeny svými rovnicemi. V případě Apolloniovy úlohy na kulové ploše nadále uvažujme, že tato sféra (označme ji opět $\boldsymbol{\kappa}$) má jednotkový poloměr. Libovolná kružnice na ní ležící je jednoznačně určena rovnicí roviny, ve které leží. Nechť jsou roviny $\boldsymbol{\rho}_1$, $\boldsymbol{\rho}_2$, $\boldsymbol{\rho}_3$, v nichž leží dané orientované kružnice $\underline{\boldsymbol{k}}_1$, $\underline{\boldsymbol{k}}_2$, $\underline{\boldsymbol{k}}_3$, dány ve zvolené lineární (ne nutně kartézské) soustavě souřadnic svými obecnými rovnicemi:

$\boldsymbol{\rho}_i$: $R_i(x, y, z) = a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0$, $i = 1, 2, 3$.

V dalším textu budeme tyto rovnice psát ve zkráceném tvaru $R_i = 0$, často budeme o rovině ρ_i hovořit jako o rovině $R_i = 0$.

V podkapitole 2.1.4 se vzdálenost t_{i4} redukovala na délku úseku tečny vedené z bodu $\boldsymbol{S}_4$, ve který se redukoval cyklus $\underline{\boldsymbol{k}}_4$, k cyklu $\underline{\boldsymbol{k}}_i$. Tato délka se dala snadno vyjádřit pomocí mocnosti bodu $\boldsymbol{S}_4$ vzhledem ke kružnici $\boldsymbol{k}_4$. I v případě kulové plochy budeme sférickou vzdálenost t_{i4} chápat jako sférickou vzdálenost bodu $\boldsymbol{P}$ a bodu dotyku $\boldsymbol{N}_i$ tečny $\boldsymbol{k}_{i4}$ vedené z bodu $\boldsymbol{P}$ k orientované kružnici $\underline{\boldsymbol{k}}_i$. Označíme ji symbolem t_i. Vzdálenost (obyčejnou) bodů $\boldsymbol{P}$,

$\boldsymbol{N}_i$ označíme n_i. Pokusíme se nyní nalézt vhodné vyjádření pro $\sin^2\frac{t_i}{2}$, které poté dosadíme do vztahu (2.2.7).

Předpokládejme, že bod $\boldsymbol{P}$ neleží na orientované kružnici $\underline{\boldsymbol{k}}_i$. Uvažujme bod $\boldsymbol{G}_i$, v němž přímka $\boldsymbol{OP}$ protíná rovinu $R_i = 0$, tento bod je jistě různý od $\boldsymbol{P}$. Bod $\boldsymbol{G}_i$ je vnějším bodem úsečky $\boldsymbol{OP}$ právě tehdy, když bod $\boldsymbol{P}$ leží na sféře $\boldsymbol{\kappa}$ vně orientované kružnice $\underline{\boldsymbol{k}}_i$. Vypočítáme dělící poměr bodu $\boldsymbol{G}_i$ vzhledem k bodům $\boldsymbol{O}$ a $\boldsymbol{P}$. Pro body vně orientované kružnice $\underline{\boldsymbol{k}}_i$ je tento dělící poměr vždy kladný.

Předpokládejme nejprve, že existuje reálná tečna k orientované kružnici $\underline{\boldsymbol{k}}_i$ bodem $\boldsymbol{P}$. Tečna $\boldsymbol{k}_{i4}$ leží v rovině τ_i, která prochází bodem $\boldsymbol{P}$ a dotýká se rotační kuželové plochy s vrcholem ve středu $\boldsymbol{O}$ sféry $\boldsymbol{\kappa}$ určené kružnicí $\boldsymbol{k}_i$. Bod $\boldsymbol{G}_i$ je jistě bodem roviny τ_i. Průsečnice rovin $R_i = 0$ a τ_i obsahuje jediný bod sféry $\boldsymbol{\kappa}$ – bod $\boldsymbol{N}_i$. Tato průsečnice je pak tečnou jak kružnice $\boldsymbol{k}_i$, tak hlavní kružnice $\boldsymbol{k}_{i4}$.

Přímka $\boldsymbol{N}_i\boldsymbol{G}_i$ je výše uvažovanou průsečnicí rovin $R_i = 0$ a τ_i. Z uvedeného vyplývá, že trojúhelník $\boldsymbol{ON}_i\boldsymbol{G}_i$ je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu $\boldsymbol{N}_i$. Musíme uvážit, že bod $\boldsymbol{G}_i$ leží buď na polopřímce $\boldsymbol{OP}$, nebo na polopřímce opačné. V dalším textu uvážíme obě možnosti současně. V závorkách uvedeme vždy výsledek platný tehdy, když bod $\boldsymbol{G}_i$ leží na polopřímce opačné k polopřímce $\boldsymbol{OP}$. Velikost úhlu $\boldsymbol{N}_i\boldsymbol{OG}_i$ je rovna t_i (resp. $\pi - t_i$). Proto platí:

$$|\boldsymbol{OG}_i| = \frac{R}{\cos t_i} = \frac{1}{\cos t_i}, \quad (\text{resp.} |\boldsymbol{OG}_i| = \frac{R}{\cos(\pi - t_i)} = -\frac{1}{\cos t_i}).$$

Trojúhelník $\boldsymbol{OPN}_i$ je rovnoramenný se základnou $\boldsymbol{PN}_i$. Velikost úhlu $\boldsymbol{ON}_i\boldsymbol{P}$ je pak $\pi/2 - t_i/2$ a velikost úhlu $\boldsymbol{PN}_i\boldsymbol{G}_i$ je $t_i/2$ (resp. $\pi - t_i/2$). Velikost úhlu $\boldsymbol{N}_i\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{P}$ je $\pi/2 - t_i$ (resp. $t_i - \pi/2$). Užijeme sinovou větu na trojúhelník $\boldsymbol{PN}_i\boldsymbol{G}_i$, pak můžeme psát:

$$\frac{|\boldsymbol{PG}_i|}{\sin\frac{t_i}{2}} = \frac{n_i}{\sin(\frac{\pi}{2} - t_i)}, \quad (\text{resp.} \frac{|\boldsymbol{PG}_i|}{\sin(\pi - \frac{t_i}{2})} = \frac{n_i}{\sin(t_i - \frac{\pi}{2})}, \text{ tj.} \frac{|\boldsymbol{PG}_i|}{\sin\frac{t_i}{2}} = \frac{n_i}{-\sin(\frac{\pi}{2} - t_i)}).$$

Jestliže uvážíme, že $n_i = 2R\sin t_i/2 = 2\sin t_i/2$, získáme odtud:

$$|\boldsymbol{PG}_i| = \frac{n_i \sin\frac{t_i}{2}}{\cos t_i} = \frac{2\sin^2\frac{t_i}{2}}{\cos t_i}, \quad (\text{resp.} |\boldsymbol{PG}_i| = \frac{n_i \sin\frac{t_i}{2}}{-\cos t_i} = \frac{2\sin^2\frac{t_i}{2}}{-\cos t_i}).$$

Uvažovaný dělící poměr je potom v obou případech ve tvaru:

$$(\boldsymbol{OPG}_i) = \frac{|\boldsymbol{OG}_i|}{|\boldsymbol{PG}_i|} = \frac{1}{2\sin^2\frac{t_i}{2}}.$$

Skutečnost, že je tento dělící poměr kladný, plyne z následující úvahy. Jestliže tečna z bodu $\boldsymbol{P}$ k orientované kružnici $\underline{\boldsymbol{k}}_i$ existuje, musí být bod $\boldsymbol{P}$ vnějším bodem této kružnice, proto bod $\boldsymbol{G}_i$ musí být vnějším bodem úsečky $\boldsymbol{OP}$. Dělící poměr $(\boldsymbol{OPG}_i)$ je tak kladný. Vidíme, že možné vyjádření pro $\sin^2\frac{t_i}{2}$ je následující:

$$\sin^2\frac{t_i}{2} = \frac{1}{2(\boldsymbol{OPG}_i)}. \tag{2.2.9}$$

Dosud jsme předpokládali, že tečna $\boldsymbol{k}_{i4}$ z bodu $\boldsymbol{P}$ ke kružnici $\boldsymbol{k}_i$ existuje. Naznačíme, jak Sobotka řešil obecný případ. Nejprve se zabýval sférickou vzdáleností t_{ij} bodů dotyku společné tečny dvou orientovaných kružnic $\underline{\boldsymbol{k}}_i$ a $\underline{\boldsymbol{k}}_j$. Vztahem (2.2.5*) definuje t_{ij} i pro případ, že společná tečna neexistuje. My jsme tak učinili v předchozí podkapitole. Bod $\boldsymbol{P}$ chápeme jako kružnici $\boldsymbol{k}_4$ s poloměrem $r_4 = 0$. Můžeme tak po dosazení do vztahu (2.2.5*) psát:

$$\sin^2\frac{t_i}{2} = \frac{\sin^2\frac{d_i}{2} - \sin^2\frac{r_i}{2}}{\cos r_i},$$

kde d_i označuje sférickou vzdálenost bodu $\boldsymbol{P}$ a sférického středu $\boldsymbol{S}_i$ orientované kružnice $\underline{\boldsymbol{k}}_i$. Tak můžeme určit t_i i v případě, že tečna z bodu $\boldsymbol{P}$ ke kružnici $\boldsymbol{k}_i$ neexistuje ($\sin^2 t_i/2$ je záporné číslo). Úpravou tohoto vztahu získáme:

$$\sin^2\frac{t_i}{2} = \frac{\cos r_i - \cos d_i}{2\cos r_i}. \tag{2.2.10}$$

Označíme $\boldsymbol{P}_i$ patu kolmice vedené z bodu $\boldsymbol{P}$ k přímce $\boldsymbol{OK}_i$ (připomínám, že symbolem $\boldsymbol{K}_i$ jsme označili obyčejný střed orientované kružnice $\boldsymbol{k}_i$). Platí:

$|\boldsymbol{OK}_i| = R\cos r_i = \cos r_i$, $|\boldsymbol{OP}_i| = R\,|\cos d_i| = |\cos d_i|$.

Tuto skutečnost můžeme zapsat též ve tvaru:

$\overrightarrow{\boldsymbol{OK}_i} = \cos r_i \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{OS}_i}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{OP}_i} = \cos d_i \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{OS}_i}$, odtud $\overrightarrow{\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{K}_i} = \overrightarrow{\boldsymbol{OK}_i} - \overrightarrow{\boldsymbol{OP}_i} = (\cos r_i - \cos d_i)\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{OS}_i}$.

Jestliže si uvědomíme, že se dělící poměry ($\boldsymbol{OPG}_i$) a ($\boldsymbol{OP}_i\boldsymbol{K}_i$) rovnají, můžeme pomocí vztahu (2.2.10) a známé definice dělícího poměru odvodit, že platí:

$$\sin^2\frac{t_i}{2} = \frac{1}{2(\boldsymbol{OPG}_i)}.$$

Dělící poměr ($\boldsymbol{OP}_i\boldsymbol{K}_i$) (a tedy i ($\boldsymbol{OPG}_i$)) je v absolutní hodnotě roven poměru velikostí úseček $\boldsymbol{OK}_i$ a $\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{K}_i$, tj. poměru vzdáleností bodů $\boldsymbol{O}$ a $\boldsymbol{P}_i$ (ale též i bodu $\boldsymbol{O}$ a $\boldsymbol{P}$) od roviny $R_i = 0$. Ve zvolené lineární soustavě souřadnic nechť má bod $\boldsymbol{P}$ souřadnice $[x, y, z]$, bod $\boldsymbol{O}$ souřadnice $[x_0, y_0, z_0]$. Podle tvrzení 2.2.2 platí:

$$|(\boldsymbol{OPG}_i)| = \frac{|a_i x_0 + b_i y_0 + c_i z_0 + d_i|}{|a_i x + b_i y + c_i z + d_i|} = \left|\frac{R_i(x_0, y_0, z_0)}{R_i(x, y, z)}\right|.$$

Protože v případě, že body $\boldsymbol{O}$ a $\boldsymbol{P}$ leží (resp. neleží) v téže polorovině s hraniční rovinou $R_i = 0$, má čitatel i jmenovatel posledně uvedeného zlomku stejné (resp. opačné) znaménko a současně je tento dělící poměr kladný (resp. záporný), platí:

$$(\boldsymbol{OPG}_i) = \frac{R_i(x_0, y_0, z_0)}{R_i(x, y, z)}. \tag{2.2.11}$$

$R_i(x, y, z)$ zapíšeme zjednodušeně R_i, $R_i(x_0, y_0, z_0)$ je konstanta, kterou označíme R_i^0. Pak dosazením do vztahu (2.2.9) získáme hledané vyjádření hodnoty $\sin^2\frac{t_i}{2}$:

$$\sin^2\frac{t_i}{2} = \frac{R_i}{2R_i^0}. \tag{2.2.12}$$

Dosud jsme uvažovali takový bod $\boldsymbol{P}$, který neleží na orientované kružnici $\underline{\boldsymbol{k}}_i$. Pokud na ní leží, jedná se zřejmě o bod dotyku orientovaných kružnic $\underline{\boldsymbol{k}}_i$ a $\underline{\boldsymbol{k}}$. Proto je hodnota $\sin^2\frac{t_i}{2}$ rovna nule. Avšak bod $\boldsymbol{P}$ je současně bodem roviny $R_i = 0$, tudíž zlomek na pravé straně vztahu (2.2.12) je též rovný nule. Vztah (2.2.12) můžeme tedy použít i pro tento případ.

Nyní upravíme rovnost (2.2.7) tak, aby charakterizovala vztah pro sférickou vzdálenost bodů na orientované kružnici $\underline{\boldsymbol{k}}$, která se dotýká daných tří orientovaných kružnic $\underline{\boldsymbol{k}}_1$, $\underline{\boldsymbol{k}}_2$, $\underline{\boldsymbol{k}}_3$, od těchto orientovaných kružnic. Pod sférickou vzdáleností bodu od kružnice rozumíme sférickou vzdálenost tohoto bodu a bodu dotyku tečny vedené bodem ke kružnici. Můžeme tak psát:

$$\begin{vmatrix} 0 & \sin^2\frac{t_{12}}{2} & \sin^2\frac{t_{13}}{2} & \sin^2\frac{t_1}{2} \\ \sin^2\frac{t_{12}}{2} & 0 & \sin^2\frac{t_{23}}{2} & \sin^2\frac{t_2}{2} \\ \sin^2\frac{t_{13}}{2} & \sin^2\frac{t_{23}}{2} & 0 & \sin^2\frac{t_3}{2} \\ \sin^2\frac{t_1}{2} & \sin^2\frac{t_2}{2} & \sin^2\frac{t_3}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Do této rovnosti dosadíme vztah (2.2.12) a získáme rovnici, kterou musí splňovat souřadnice libovolného bodu na orientovaných kružnicích dotýkajících se daných tří orientovaných kružnic. Současně vynásobíme poslední řádek a sloupec číslem 2, hodnota determinantu zůstane nulová. Proto platí:

$$\begin{vmatrix} 0 & \sin^2\frac{t_{12}}{2} & \sin^2\frac{t_{13}}{2} & \frac{R_1}{R_1^0} \\ \sin^2\frac{t_{12}}{2} & 0 & \sin^2\frac{t_{23}}{2} & \frac{R_2}{R_2^0} \\ \sin^2\frac{t_{13}}{2} & \sin^2\frac{t_{23}}{2} & 0 & \frac{R_3}{R_3^0} \\ \frac{R_1}{R_1^0} & \frac{R_2}{R_2^0} & \frac{R_3}{R_3^0} & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.2.13)$$

Tento determinant vyčíslíme a následně ho dále upravíme. Získáme následující rovnici:

$$\sin^4\frac{t_{23}}{2}\left(\frac{R_1}{R_1^0}\right)^2 + \sin^4\frac{t_{13}}{2}\left(\frac{R_2}{R_2^0}\right)^2 + \sin^4\frac{t_{12}}{2}\left(\frac{R_3}{R_3^0}\right)^2 - 2\sin^2\frac{t_{12}}{2}\sin^2\frac{t_{13}}{2}\frac{R_2}{R_2^0}\frac{R_3}{R_3^0} -$$

$$-2\sin^2\frac{t_{12}}{2}\sin^2\frac{t_{23}}{2}\frac{R_1}{R_1^0}\frac{R_3}{R_3^0} - 2\sin^2\frac{t_{13}}{2}\sin^2\frac{t_{23}}{2}\frac{R_1}{R_1^0}\frac{R_2}{R_2^0} = 0. \qquad (2.2.14)$$

Ta přejde do tvaru:

$$\sin\frac{t_{23}}{2}\sqrt{\frac{R_1}{R_1^0}} \pm \sin\frac{t_{13}}{2}\sqrt{\frac{R_2}{R_2^0}} \pm \sin\frac{t_{12}}{2}\sqrt{\frac{R_3}{R_3^0}} = 0. \qquad (2.2.15)$$

Porovnáme-li tyto dva vztahy se vztahy (2.1.8) a (2.1.9), jasně si uvědomíme blízkost Sobotkova přístupu k řešení Apolloniovy úlohy na sféře s rovinným případem. Veličinu t_{ij}, která v rovinném případě označovala délku úseku společné tečny daných cyklů $\underline{\boldsymbol{k}}_i$, $\underline{\boldsymbol{k}}_j$, na sféře nahrazuje obdobná veličina $\sin^2\frac{t_{ij}}{2}$ související se sférickou vzdáleností bodů dotyku společné tečny orientovaných kružnic $\underline{\boldsymbol{k}}_i$, $\underline{\boldsymbol{k}}_j$. Tyto veličiny v obou případech charakterizují zadané prvky úlohy. Roli veličiny $\sqrt{K_i}$, která v rovině souvisí s mocností libovolného bodu vzhledem ke kružnici $K_i = 0$ (a tím i s délkou úseku tečny z tohoto bodu ke kružnici $K_i = 0$), na kulové ploše přebírá veličina $\sqrt{\frac{R_i}{R_i^0}}$ určující sférickou vzdálenost libovolného bodu na sféře $\boldsymbol{\kappa}$ a bodu dotyku tečny vedené na sféře $\boldsymbol{\kappa}$ tímto bodem ke kružnici, která je průnikem sféry $\boldsymbol{\kappa}$ a roviny $R_i = 0$. Můžeme si všimnout, že v rovinném případě bylo užití $\sqrt{K_i}$ nasnadě. Při hledání vhodného ekvivalentu pro případ kulové plochy byla práce nesporně náročnější. Nabízelo se nám více možných vyjádření veličiny $\sin^2 \frac{t_i}{2}$. Nakonec jsme se rozhodli pro to, které je myšlenkově blízké tomu užitému v rovinném případě. Veličiny $\sqrt{K_i}, \sqrt{\frac{R_i}{R_i^0}}$ mají společné to, že souvisejí v pokud možno nejjednodušší formě s rovnicemi určujícími zadané útvary – v rovině s kružnicí $K_i = 0$, na sféře s rovinou $R_i = 0$.

Rovnice (2.2.14) je nepochybně druhého stupně[49], je jí tak určena některá kvadrika v trojrozměrném euklidovském prostoru. Tato kvadrika protíná kulovou plochu $\boldsymbol{\kappa}$ nejvýše ve dvou kružnicích, které jsou řešením Apolloniovy úlohy na kulové ploše $\boldsymbol{\kappa}$. Další řešení můžeme získat jinou volbou orientace. Ukážeme, jak získaný výsledek umožňuje nalézt konstruktivní řešení Apolloniovy úlohy na kulové ploše.

2.2.5 Analytické odvození konstruktivního řešení Apolloniovy úlohy na sféře

V podkapitole (2.1.5) jsme vhodnou volbou soustavy souřadnic dospěli k tomu, že se nám podařilo určit polohu přímky $\boldsymbol{U_i V_i}$[50] ve svazku přímek procházejících potenčním středem daných kružnic. K tomu jsme užili dvojpoměru, resp. dělícího poměru. Podobný postup zvolíme i zde. Paradoxně bude analytické odvození konstruktivního řešení Apolloniovy úlohy na sféře jednodušší než v rovině.

Uvažujme dvojici řešení $\underline{\boldsymbol{k}}$, $\underline{\boldsymbol{k}}'$ odpovídající určité zvolené orientaci cyklů $\underline{\boldsymbol{k}}_1$, $\underline{\boldsymbol{k}}_2$, $\underline{\boldsymbol{k}}_3$. Označme $\boldsymbol{U_i}$, $\boldsymbol{V_i}$ body dotyku cyklů $\underline{\boldsymbol{k}}$, $\underline{\boldsymbol{k}}'$ s cyklem $\underline{\boldsymbol{k}}_i$. Symbolem $\boldsymbol{l_i}$ označíme přímku $\boldsymbol{U_i V_i}$.

[49] Rovnice (2.1.9) charakterizující řešení Apolloniovy úlohy v rovině byla 4. stupně.
[50] $\boldsymbol{U_i V_i}$ je spojnice bodů dotyku daného cyklu $\underline{\boldsymbol{k}}_i$ s příslušnou dvojicí cyklů, dotýkajících se všech tří daných cyklů.

Body $\boldsymbol{U}_1$, $\boldsymbol{V}_1$ leží v rovině $R_1 = 0$. Nalezneme je tak, že položíme v rovnici (2.2.14) veličinu R_1 rovnou nule. Potom platí:

$$\sin^4 \frac{t_{13}}{2} \left(\frac{R_2}{R_2^0} \right)^2 + \sin^4 \frac{t_{12}}{2} \left(\frac{R_3}{R_3^0} \right)^2 - 2 \sin^2 \frac{t_{12}}{2} \sin^2 \frac{t_{13}}{2} \frac{R_2}{R_2^0} \frac{R_3}{R_3^0} = 0 ,$$

nebo též

$$\left(\sin^2 \frac{t_{12}}{2} \frac{R_3}{R_3^0} - \sin^2 \frac{t_{13}}{2} \frac{R_2}{R_2^0} \right)^2 = 0 .$$

Odtud získáme:

$$\frac{R_2}{R_2^0} : \frac{R_3}{R_3^0} = \sin^2 \frac{t_{12}}{2} : \sin^2 \frac{t_{13}}{2}$$

Pokud uvážíme (2.2.11), platí také ($\boldsymbol{P}$ označuje jeden z bodů $\boldsymbol{U}_1$, $\boldsymbol{V}_1$):

$$(\boldsymbol{OPG}_3) : (\boldsymbol{OPG}_2) = \sin^2 \frac{t_{12}}{2} : \sin^2 \frac{t_{13}}{2} ,$$

odtud vyplývá:

$$(\boldsymbol{G}_2 \boldsymbol{G}_3 \boldsymbol{PO}) = (\boldsymbol{POG}_2 \boldsymbol{G}_3) = (\boldsymbol{OPG}_3 \boldsymbol{G}_2) = \frac{\sin^2 \frac{t_{12}}{2}}{\sin^2 \frac{t_{13}}{2}} . \qquad (2.2.16)$$

Označíme symbolem $\boldsymbol{r}_{ij}$ průsečnici rovin $R_i = 0$ a $R_j = 0$. Uvažujme ve svazku rovin procházejících přímkou $\boldsymbol{r}_{23}$ ty roviny, které incidují s body určujícími dvojpoměr (2.2.16). Bodem $\boldsymbol{G}_2$ (resp. $\boldsymbol{G}_3$) prochází rovina $R_2 = 0$, tj. $\boldsymbol{\rho}_2$ (resp. $R_3 = 0$, tj. $\boldsymbol{\rho}_3$). Rovinu procházející bodem $\boldsymbol{P}$ (resp. $\boldsymbol{O}$) označíme $\boldsymbol{\pi}$ (resp. $\boldsymbol{\omega}$). Pak zjevně platí:

$$(\boldsymbol{\rho}_2 \boldsymbol{\rho}_3 \boldsymbol{\pi\omega}) = \frac{\sin^2 \frac{t_{12}}{2}}{\sin^2 \frac{t_{13}}{2}} . \qquad (2.2.17)$$

Dále uvážíme průsečnice rovin $\boldsymbol{\rho}_2$, $\boldsymbol{\rho}_3$, $\boldsymbol{\pi}$, $\boldsymbol{\omega}$ s rovinou $R_1 = 0$, tj. $\boldsymbol{\rho}_1$. Jedná se po řadě o přímky $\boldsymbol{r}_{12}$, $\boldsymbol{r}_{13}$, $\boldsymbol{l}_1$ a přímku, kterou označíme $\boldsymbol{o}_1$. Potom pro uvedené přímky musí platit:

$$(\boldsymbol{r}_{12}\boldsymbol{r}_{13}\boldsymbol{l}_1\boldsymbol{o}_1) = \frac{\sin^2 \frac{t_{12}}{2}}{\sin^2 \frac{t_{13}}{2}}. \tag{2.2.18}$$

Všechny čtyři přímky procházejí průsečíkem daných tří rovin $R_1 = 0$, $R_2 = 0$, $R_3 = 0$. Dvojpoměrem (2.2.18) je již přímka $\boldsymbol{l}_1$ v rovině $R_1 = 0$ určena. Mohli bychom ji sestrojit obdobně, jako jsme v podkapitole 2.1.6 sestrojili pomocí dvojpoměru (2.1.15) přímku $\boldsymbol{l}_1$ ve svazku přímek procházejících potenčním středem daných kružnic. Stejně můžeme postupovat i v případě přímek $\boldsymbol{l}_2$ a $\boldsymbol{l}_3$.

Zbývá zodpovědět otázku, kterou Sobotka neřešil. Jak sestrojit úsečky, jejichž velikost by byla určitým násobkem hodnoty $\sin^2 \frac{t_{ij}}{2}$? V následujících řádcích odvodíme hledanou konstrukci pro případ, že $\sin^2 \frac{t_{ij}}{2}$ je číslo nezáporné. Pokud je $\sin^2 \frac{t_{ij}}{2} \leq 0$, stačí nalézt úsečku, jejíž velikost je násobkem $\left|\sin^2 \frac{t_{ij}}{2}\right|$. Zápornou hodnotu uvážíme až při hledání přímky $\boldsymbol{l}_1$, kdy ovlivní hodnotu dvojpoměru (2.2.18).

Orientované kružnice $\underline{\boldsymbol{k}}_i$, $\underline{\boldsymbol{k}}_j$ jsou dány, proto známe jejich sférické poloměry r_i, r_j včetně znaménka a sférickou vzdálenost d_{ij} jejich sférických středů. Využijeme vztahu (2.2.5*), tj.:

$$\sin^2 \frac{t_{ij}}{2} = \frac{\sin^2 \frac{d_{ij}}{2} - \sin^2 \frac{r_i - r_j}{2}}{\cos r_i \cos r_j}.$$

Po jednoduché úpravě získáme:

$$\sin^2 \frac{t_{ij}}{2} = \frac{\cos(r_i - r_j) - \cos d_{ij}}{\cos r_i \cos r_j}.$$

Sestrojíme kružnici $\boldsymbol{l}$ se středem $\boldsymbol{S}$ a libovolným poloměrem r. Sestrojíme na ní body $\boldsymbol{S}_i$ a $\boldsymbol{S}_j$ tak, aby velikost úhlu $\boldsymbol{S}_i\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}_j$ byla d_{ij}. Sestrojíme patu kolmice $\boldsymbol{Y}$ vedené bodem $\boldsymbol{S}_j$ k přímce $\boldsymbol{O}\boldsymbol{S}_i$. Na kružnici $\boldsymbol{l}$ sestrojíme bod $\boldsymbol{Z}$ tak, aby velikost úhlu $\boldsymbol{S}_i\boldsymbol{S}\boldsymbol{Z}$ byla rovna $|r_i - r_j|$. Sestrojíme patu kolmice $\boldsymbol{X}$ vedené bodem $\boldsymbol{Z}$ k přímce $\boldsymbol{O}\boldsymbol{S}_i$. Velikost úsečky $\boldsymbol{X}\boldsymbol{Z}$ označíme v. Vrátíme-li se k výše uvedenému vztahu, jistě platí:

$$r \cdot \sin^2 \frac{t_{ij}}{2} = \frac{r \cdot \cos(r_i - r_j) - r \cdot \cos d_{ij}}{\cos r_i \cos r_j} = \frac{v}{\cos r_i \cos r_j}.$$

Pomocí pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnou délky v a k ní přilehlým úhlem o velikosti $|r_i|$ snadno určíme úsečku délky $v/\cos r_i$ jako přeponu tohoto trojúhelníku. Obdobně můžeme nalézt i úsečku délky $(v/\cos r_i)/\cos r_j$, tj. úsečku, jež je r-násobkem hodnoty $\sin^2 \frac{t_{ij}}{2}$.

2.2.6 Další konstruktivní řešení Apolloniovy úlohy na sféře

Podobně jako v případě Apolloniovy úlohy v rovině se i zde Sobotka snažil nalézt jednodušší řešení. Využijeme při něm poznatků o pólu a polární rovině (viz podkapitola 2.2.2 část G). Označíme $\boldsymbol{E}_i$ pól roviny $R_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, vzhledem ke sféře $\boldsymbol{\kappa}$, $\boldsymbol{H}_1$ pól roviny $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{O}_1$ pól roviny $\boldsymbol{\omega}$ vzhledem ke sféře $\boldsymbol{\kappa}$ (kde označení rovin má stejný význam jako v podkapitole 2.2.5). Protože rovina $\boldsymbol{\omega}$ prochází středem $\boldsymbol{O}$ sféry $\boldsymbol{\kappa}$, je její pól nevlastní bod. Podle věty 2.2.3b leží body $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{E}_3$, $\boldsymbol{H}_1$ a $\boldsymbol{O}_1$ v jedné přímce a pro jejich dvojpoměr platí vzhledem k (2.2.17):

$$(\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_3\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{O}_1) = (\boldsymbol{\rho}_2\boldsymbol{\rho}_3\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\omega}) = \frac{\sin^2 \frac{t_{12}}{2}}{\sin^2 \frac{t_{13}}{2}}.$$

Protože je bod $\boldsymbol{O}_1$ nevlastním bodem přímky $\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_3$, můžeme psát také:

$$(\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_3\boldsymbol{H}_1) = \frac{\sin^2 \frac{t_{12}}{2}}{\sin^2 \frac{t_{13}}{2}}. \qquad (2.2.19)$$

Již umíme nalézt úsečky s velikostí úměrnou veličině $\sin^2 \frac{t_{ij}}{2}$. Pokud sestrojíme póly $\boldsymbol{E}_2$ a $\boldsymbol{E}_3$ rovin v nichž leží dané orientované kružnice $\underline{\boldsymbol{k}}_2$ a $\underline{\boldsymbol{k}}_3$ vzhledem ke sféře $\boldsymbol{\kappa}$, můžeme na přímce $\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_3$ pomocí vztahu (2.2.19) sestrojit bod $\boldsymbol{H}_1$. Víme, že rovina $\boldsymbol{\pi}$ je polární rovinou bodu $\boldsymbol{H}_1$, je tudíž kolmá na přímku $\boldsymbol{OH}_1$. V rovině $\boldsymbol{\pi}$ leží spojnice $\boldsymbol{l}_1$ hledaných bodů dotyku $\boldsymbol{U}_1$, $\boldsymbol{V}_1$. Přitom v rovině $\boldsymbol{\pi}$ leží i průsečnice $\boldsymbol{r}_{23}$ rovin $R_2 = 0$, $R_3 = 0$ a tedy i průsečík $\boldsymbol{R}$ všech tří rovin $R_i = 0$, $i = 1, 2, 3$. Proto rovina vedená bodem $\boldsymbol{R}$ kolmo k přímce $\boldsymbol{OH}_1$ protíná rovinu $R_1 = 0$ v hledané přímce $\boldsymbol{l}_1$. Obdobně můžeme nalézt bod $\boldsymbol{H}_2$ na přímce $\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_3$ (resp. $\boldsymbol{H}_3$ na přímce $\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_2$) pomocí vtahů:

$$(\boldsymbol{E}_3\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{H}_2) = \frac{\sin^2\frac{t_{23}}{2}}{\sin^2\frac{t_{12}}{2}},$$

$$(\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{H}_3) = \frac{\sin^2\frac{t_{13}}{2}}{\sin^2\frac{t_{23}}{2}}.$$

Známe-li body $\boldsymbol{H}_2$ a $\boldsymbol{H}_3$ již snadno nalezneme hledané přímky $\boldsymbol{l}_2$ a $\boldsymbol{l}_3$. Podle Menelaovy věty leží navíc body $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{H}_2$, $\boldsymbol{H}_3$ v jedné přímce.

Uvedená konstrukce je nesporně jednodušší než ta, kterou jsme naznačili v podkapitole 2.2.5. Přesto se ji Sobotka snažil ještě zjednodušit. Obdobně jako v rovinném případě (viz úvahy v podkapitole 2.1.7) zavedl body souměrně sdružené s body $\boldsymbol{H}_k$ podle středu příslušné úsečky $\boldsymbol{E}_i\boldsymbol{E}_j$. Své řešení formuluje těmito slovy:

„Póly $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{E}_3$ *rovin, v nichž dané kružnice leží, vedeme tři rovnoběžné úsečky, které i co do smyslu jsou v poměru veličin* $n_{23}^2, n_{31}^2, n_{12}^2$; *koncové body těchto úseček stanoví trojúhelník perspektivný k trojúhelníku* $\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_3$; *seče-li osa perspektivity strany* $\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_3$, $\boldsymbol{E}_3\boldsymbol{E}_1$ *v bodech* $\boldsymbol{G}_3$, $\boldsymbol{G}_1$, $\boldsymbol{G}_2$ *a sestrojíme-li na stranách těch body* $\boldsymbol{H}_3$, $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{H}_2$ *tak, aby* $\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{E}_l = \boldsymbol{E}_k\boldsymbol{H}_i$ *obdržíme tři body na přímce* $\boldsymbol{h}$; *pak přímka* $\boldsymbol{l}_i$ *v rovině* R_i *kolmo ku* $\boldsymbol{OH}_i$ *vedená seče kružnici* k_i *v hledaných bodech dotyku kružnic Apollonických.*"

Přihlédneme-li k úvahám, které jsme provedli pro rovinný případ v podkapitole 2.1.7, je zřejmé, že tato konstrukce bezprostředně plyne z konstruktivního řešení odvozeného v předcházejících odstavcích. Musíme přitom uvážit, že $n_{ij}^2 = 4R^2\sin^2\frac{t_{ij}}{2} = 4\sin^2\frac{t_{ij}}{2}$, tj. veličiny $n_{23}^2, n_{31}^2, n_{12}^2$ jsou ve stejném poměru jako veličiny $\sin^2\frac{t_{23}}{2}, \sin^2\frac{t_{31}}{2}, \sin^2\frac{t_{12}}{2}$.

Jak při výkladu úvah, které nás dovedli k samotnému konstruktivnímu řešení Apolloniovy úlohy na kulové ploše, tak při zdůvodnění vlastní konstrukce jsem se snažil neustále zdůrazňovat podobnost s rovinným případem. V závěru této kapitoly si ještě ukážeme další souvislosti řešení Apolloniovy úlohy v rovině a na sféře.

Viděli jsme, že přímky $\boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{l}_2$, $\boldsymbol{l}_3$ procházejí průsečíkem rovin, v nichž leží dané kružnice. Podobnou vlastnost měl v rovinném případě potenční střed daných kružnic. Porovnáme-li vztahy (2.1.15) a (2.2.18), mohlo by nás též napadnout, že průsečnice rovin v nichž leží dané kružnice na sféře, mají podobný význam jako chordály zadaných kružnic v rovinném případě. V případě kulové plochy jsou pro řešení klíčové póly rovin $R_i = 0$. Pokud bychom postupně zmenšovali „zakřivení“ kulové plochy, přibližovaly by se tyto póly postupně ke sférickým středům zadaných kružnic. A skutečně v rovinném případě jsou východiskem konstrukce středy zadaných kružnic. Další postup, při kterém na přímkách určených póly daných rovin v případě sféry (resp. středy daných kružnic v případě roviny) hledáme jisté body $\boldsymbol{H}_i$ (resp. $\boldsymbol{G}_i$) pomocí jistých dělících poměrů, je v obou případech takřka identický. Při řešení Apolloniovy úlohy na kulové ploše nakonec určíme přímku $\boldsymbol{l}_i$ kolmou na $\boldsymbol{OH}_i$, která prochází průsečíkem daných rovin. Při řešení Apolloniovy úlohy v rovině určíme přímku $\boldsymbol{l}_i$ kolmou na $\boldsymbol{S}_i\boldsymbol{G}_i$ procházející potenčním středem daných kružnic. Vidíme, že řešení obou úloh mají celou řadu styčných míst.

2.3 Analogie Apolloniovy úlohy v trojrozměrném prostoru

2.3.1 Úvod

Analogií Apolloniovy úlohy v trojrozměrném euklidovském prostoru $\mathbf{E}_3$ (dále Apolloniovou úlohou v prostoru) budeme rozumět úlohu, kdy máme ke čtyřem daným kulovým plochám sestrojit všechny kulové plochy, které se každé z nich dotýkají. Podle [10] tuto úlohu zformuloval a vyřešil Pierre de Fermat. V této kapitole se zaměříme na řešení uvedeného problému, které předložil Sobotka v práci „*Analytické úvahy o koulích dotýkajících se daných čtyř koulí*“ (Rozpravy II. tř. České akademie věd a umění XXI, 1912, číslo 9).

V dalším výkladu uvidíme, že Sobotkův přístup k problému je podobný tomu, který uplatnil i v pracích [1] a [6] (viz kapitoly 2.1 a 2.2). Můžeme si všimnout, že Sobotkovo řešení Apolloniovy úlohy v prostoru má mnoho společného s jeho řešením Apolloniovy úlohy v rovině. Zároveň se však Sobotka v trojrozměrném případě musel vyrovnat s jistými obtížemi ve chvíli, kdy se pokoušel nalezené analytické řešení interpretovat tak, aby odvodil i řešení konstruktivní. Využíval při tom poznatků, které již výrazným způsobem přesahují geometrické znalosti absolventa školy, pro nějž by měla být předkládaná práce srozumitelná. Proto v další podkapitole vyložím pouze to nejnutnější k porozumění Sobotkovým úvahám a při vlastním výkladu Sobotkova řešení upustím od snahy vyložit vše, co práce [11] obsahuje.

Přitom se budu též odkazovat na Sobotkovo řešení rovinného případu. Ukážu jak na místa, která vykazují značnou podobnost, tak na místa, která nutila Sobotku hledat zcela nové přístupy.

2.3.2 Pomocné pojmy a poznatky

A. Analogie Ptolemaiovy věty pro pět bodů na kulové ploše

Již jsme si všimli, že základem Sobotkova řešení Apolloniovy úlohy v rovině i na sféře byla věta 2.1.2. Připomeňme na tomto místě její znění. Mějme dány v rovině 4 body $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$, $\boldsymbol{A}_4$ ležící na kružnici. Označme d_{ij} vzdálenost bodů $\boldsymbol{A}_i$ a $\boldsymbol{A}_j$. Pak pro vzájemné vzdálenosti daných čtyř bodů platí:

$$\begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 \\ d_{12}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ d_{13}^2 & d_{23}^2 & 0 & d_{34}^2 \\ d_{14}^2 & d_{24}^2 & d_{34}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ve třetí části v kapitole 3.2 ukážeme, že je možné odvodit následující větu.

Věta 2.3.1: *Mějme v trojrozměrném prostoru dáno 5 bodů $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$, $\boldsymbol{A}_4$, $\boldsymbol{A}_5$ ležících na kulové ploše. Označme d_{ij} vzdálenost bodů $\boldsymbol{A}_i$ a $\boldsymbol{A}_j$. Pak pro vzájemné vzdálenosti daných pěti bodů platí:*

$$\begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 & d_{15}^2 \\ d_{12}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 & d_{25}^2 \\ d_{13}^2 & d_{23}^2 & 0 & d_{34}^2 & d_{35}^2 \\ d_{14}^2 & d_{24}^2 & d_{34}^2 & 0 & d_{45}^2 \\ d_{15}^2 & d_{25}^2 & d_{35}^2 & d_{45}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Tento vztah bude východiskem našeho výkladu řešení Apolloniovy úlohy v trojrozměrném prostoru. Využijeme také rozvoj determinantu (označme ho **D**), který je obsažený v tvrzení věty 2.3.1. Označíme d_{ij}^2 symbolem δ_{ij}. Potom platí:

$$-\frac{\mathbf{D}}{2}=\delta_{12}^2\delta_{34}\delta_{35}\delta_{45}+\delta_{13}^2\delta_{24}\delta_{25}\delta_{45}+\delta_{14}^2\delta_{23}\delta_{25}\delta_{35}+\delta_{15}^2\delta_{23}\delta_{24}\delta_{34}+\delta_{23}^2\delta_{14}\delta_{15}\delta_{45}+\delta_{24}^2\delta_{13}\delta_{15}\delta_{35}+$$
$$+\delta_{25}^2\delta_{13}\delta_{14}\delta_{34}+\delta_{34}^2\delta_{12}\delta_{15}\delta_{25}+\delta_{35}^2\delta_{12}\delta_{14}\delta_{24}+\delta_{45}^2\delta_{12}\delta_{13}\delta_{23}-\delta_{12}\delta_{13}\delta_{24}\delta_{35}\delta_{45}-\delta_{12}\delta_{13}\delta_{25}\delta_{34}\delta_{45}-$$
$$-\delta_{12}\delta_{14}\delta_{23}\delta_{35}\delta_{45}-\delta_{12}\delta_{14}\delta_{25}\delta_{34}\delta_{35}-\delta_{12}\delta_{15}\delta_{23}\delta_{34}\delta_{45}-\delta_{12}\delta_{15}\delta_{24}\delta_{34}\delta_{35}-\delta_{13}\delta_{14}\delta_{23}\delta_{25}\delta_{45}-$$
$$-\delta_{13}\delta_{14}\delta_{24}\delta_{25}\delta_{35}-\delta_{13}\delta_{15}\delta_{23}\delta_{24}\delta_{45}-\delta_{13}\delta_{15}\delta_{24}\delta_{25}\delta_{34}-\delta_{14}\delta_{15}\delta_{23}\delta_{24}\delta_{35}-\delta_{14}\delta_{15}\delta_{23}\delta_{25}\delta_{34}$$

Tento vztah můžeme dále upravit na tvar:

$$\begin{aligned}-\frac{\mathbf{D}}{2}=\;&\delta_{23}\delta_{24}\delta_{34}\delta_{15}^2+\delta_{13}\delta_{14}\delta_{34}\delta_{25}^2+\delta_{12}\delta_{14}\delta_{24}\delta_{35}^2+\delta_{12}\delta_{13}\delta_{23}\delta_{45}^2-\\&-\delta_{34}(-\delta_{12}\delta_{34}+\delta_{13}\delta_{24}+\delta_{14}\delta_{23})\delta_{15}\delta_{25}-\\&-\delta_{24}(\delta_{12}\delta_{34}-\delta_{13}\delta_{24}+\delta_{14}\delta_{23})\delta_{15}\delta_{35}-\\&-\delta_{23}(\delta_{12}\delta_{34}+\delta_{13}\delta_{24}-\delta_{14}\delta_{23})\delta_{15}\delta_{45}-\\&-\delta_{14}(\delta_{12}\delta_{34}+\delta_{13}\delta_{24}-\delta_{14}\delta_{23})\delta_{25}\delta_{35}-\\&-\delta_{13}(\delta_{12}\delta_{34}-\delta_{13}\delta_{24}+\delta_{14}\delta_{23})\delta_{25}\delta_{45}-\\&-\delta_{12}(-\delta_{12}\delta_{34}+\delta_{13}\delta_{24}+\delta_{14}\delta_{23})\delta_{35}\delta_{45}\end{aligned}\qquad(2.3.1)$$

B. Kulová plocha. Mocnost bodu ke kulové ploše

Nechť má bod $\boldsymbol{S}$ v kartézské soustavě souřadnice $[a, b, c]$. Pak má rovnice kulové plochy $\boldsymbol{\kappa}$ o středu $\boldsymbol{S}$ a poloměru r tvar:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2=0. \qquad (2.3.2)$$

V našich dalších úvahách budeme pracovat s lineární soustavou souřadnic, která nemusí být nutně kartézská. Nechť je tato lineární soustava souřadnic určena repérem $\mathbf{R}=\langle \boldsymbol{P}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\rangle$, kde uvažované souřadnicové vektory jsou jednotkové. Kosinus odchylky vektorů $\vec{x}$ a $\vec{y}$ označíme symbolem cos(xy). Podobně označíme kosinus odchylky zbylých dvou dvojic souřadnicových vektorů cos(xz) a cos(yz). Nechť má vektor $\vec{u}$ v bázi $\mathbf{B}=\langle \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\rangle$ souřadnice (u, v, w). Pak pro jeho velikost platí:

$$\begin{aligned}|\vec{u}|&=\vec{u}\cdot\vec{u}=(u\vec{x}+v\vec{y}+w\vec{z})\cdot(u\vec{x}+v\vec{y}+w\vec{z})=\\&=u^2\vec{x}\cdot\vec{x}+v^2\vec{y}\cdot\vec{y}+w^2\vec{z}\cdot\vec{z}+2uv\,\vec{x}\cdot\vec{y}+2uw\,\vec{x}\cdot\vec{y}+2vw\,\vec{y}\cdot\vec{z}.\end{aligned}$$

Protože jsou vektory $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ jednotkové, platí: $\vec{x}\cdot\vec{x}=1, \vec{x}\cdot\vec{y}=\cos(xy)$, atd. Odtud vyplývá:

$$|\vec{u}|=u^2+v^2+w^2+2uv\cos(xy)+2uw\cos(xz)+2vw\cos(yz). \qquad (2.3.3).$$

Pomocí vztahu (2.3.3) snadno ukážeme, že ve zvolené lineární soustavě souřadnic má rovnice sféry $\boldsymbol{\kappa}$ o středu $\boldsymbol{S}[a, b, c]$ a poloměru r tvar:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 + 2(x-a)(y-b)\cos(xy) +$$
$$+ 2(x-a)(z-c)\cos(xz) + 2(y-b)(z-c)\cos(yz) - r^2 = 0 \qquad (2.3.4)$$

Označíme-li výraz na pravé straně rovnice (2.3.4) symbolem $K(x, y, z)$ (stručně též K), budeme obvykle rovnici sféry $\boldsymbol{\kappa}$ psát ve tvaru $K(x, y, z) = 0$, stručně též $K = 0$. V dalším textu budeme též ztotožňovat sféru $\boldsymbol{\kappa}$ s její rovnicí. Místo „sféra $\boldsymbol{\kappa}$“ budeme často psát „sféra $K = 0$“.

Sobotka ve své práci užívá jiné vyjádření výrazu $K(x, y, z)$, než jsme uvedli výše. Vzhledem k (2.3.4) platí:

$$K(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy\cos(xy) + 2xz\cos(xz) + 2yz\cos(yz) -$$
$$- 2x[a + b\cos(xy) + c\cos(xz)] - 2y[b + a\cos(xy) + c\cos(yz)] - 2z[c + a\cos(xz) + b\cos(yz)] +$$
$$+ a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos(xy) + 2ac\cos(xz) + 2bc\cos(yz) - r^2.$$

Uvažujme funkci φ tří reálných proměnných danou předpisem:

$$\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy\cos(xy) + 2xz\cos(xz) + 2yz\cos(yz).$$

Pak platí též:

$$K(x, y, z) = \varphi(x, y, z) - x\frac{\partial\varphi}{\partial x}(a, b, c) - y\frac{\partial\varphi}{\partial y}(a, b, c) - z\frac{\partial\varphi}{\partial z}(a, b, c) + \varphi(a, b, c) - r^2.$$

Sobotka označuje uvažované hodnoty parciálních derivací takto:

$$\varphi'_a = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(a, b, c),\ \varphi'_b = \frac{\partial\varphi}{\partial y}(a, b, c),\ \varphi'_c = \frac{\partial\varphi}{\partial z}(a, b, c).$$

Pak platí:

$$K(x, y, z) = \varphi(x, y, z) - x\varphi'_a - y\varphi'_b - z\varphi'_c + \varphi(a, b, c) - r^2. \qquad (2.3.5)$$

Při studiu Sobotkovy práce se ukazuje, že je užitečné nalézt vhodnou geometrickou interpretaci pro parciální derivaci funkce φ. Uvažujme libovolný bod $\boldsymbol{A}$, který má ve výše uvažované lineární soustavě souřadnice $[x, y, z]$. Na ose $\boldsymbol{x}$ nalezneme takový bod $\boldsymbol{A}_x$ o souřadnicích $[x', 0, 0]$, že přímka $\boldsymbol{AA}_x$ je kolmá na osu $\boldsymbol{x}$. Bod $\boldsymbol{A}_x$ nazveme pravoúhlý průmět bodu $\boldsymbol{A}$ do osy $\boldsymbol{x}$. Obdobně můžeme definovat i průměty $\boldsymbol{A}_y$ a $\boldsymbol{A}_z$ bodu $\boldsymbol{A}$ do os $\boldsymbol{y}$ a $\boldsymbol{z}$. Vektor

$\overrightarrow{A_x A}$ má souřadnice ($x - x'$, y, z), vektor $\vec{x}$ o souřadnicích (1, 0, 0) je směrový vektor osy $\boldsymbol{x}$. Skalární součin vektorů $\overrightarrow{A_x A}$ a $\vec{x}$ je roven nule. Pak platí:

$$0 = [(x - x')\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}] \cdot \vec{x} = x - x' + y\cos(xy) + z\cos(xz)\,.$$

Protože jsou vektory $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ jednotkové je absolutní hodnota x' rovná vzdálenosti bodu $\boldsymbol{A}_x$ od počátku soustavy souřadnic $\boldsymbol{P}$. Pak:

$$|\boldsymbol{PA}_x| = |x + y\cos(xy) + z\cos(yz)| = \frac{1}{2}\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y, z)\right|.$$

Pak zjevně platí následující věta.

Věta 2.3.2: *Nechť je dán bod* ***A*** *o souřadnicích* [x, y, z]. *Pak absolutní hodnota parciální derivace funkce* $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy\cos(xy) + 2xz\cos(xz) + 2yz\cos(yz)$ *podle proměnné x (resp. y, resp. z) v* (x, y, z) *je rovna dvojnásobku vzdálenosti pravoúhlého průmětu bodu* ***A*** *do osy* ***x*** *(resp.* ***y****, resp.* ***z****). Je-li tato parciální derivace kladná (resp. záporná) leží průmět bodu* ***A*** *do příslušné osy v její kladné (resp. záporné) části.*

Absolutní hodnota veličina φ'_a (resp. φ'_b, resp. φ'_c) objevující se v rovnici kulové plochy je proto rovna dvojnásobku vzdálenosti pravoúhlého průmětu středu této plochy do osy $\boldsymbol{x}$ (resp. $\boldsymbol{y}$, resp. $\boldsymbol{z}$) od počátku soustavy souřadnic.

Uvažujme nyní libovolný bod $\boldsymbol{X}$ ležící vně kulové plochy $\boldsymbol{\kappa}$ o středu $\boldsymbol{S}$ a poloměru r. Vedeme-li bodem $\boldsymbol{X}$ libovolnou tečnu ke kulové ploše $\boldsymbol{\kappa}$ s bodem dotyku $\boldsymbol{T}$, pak pro vzdálenost t bodů $\boldsymbol{X}$ a $\boldsymbol{T}$ platí:

$$t^2 = |\boldsymbol{XS}|^2 - r^2.$$

Má-li kulová plocha $\boldsymbol{\kappa}$ rovnici tvaru $K(x, y, z) = 0$ a bod $\boldsymbol{X}$ má souřadnice [x, y, z], pak zjevně platí:

$$t^2 = K(x, y, z). \tag{2.3.6}$$

Veličinu t budeme nazývat délka úseku tečny vedené z bodu $\boldsymbol{X}$ ke kulové ploše $\boldsymbol{\kappa}$. Pomocí vztahu (2.3.6) je možné definovat délku úseku tečny i pro body $\boldsymbol{X}$ ležící uvnitř kulové plochy $\boldsymbol{\kappa}$ jako komplexní číslo t pro něž platí (2.3.6). Vztah (2.3.6) ovšem platí i v případě, že uvažovaný bod $\boldsymbol{X}$ leží na kulové ploše, pak $t = 0$.

Dále budeme definovat mocnost bodu $\boldsymbol{X}$ ke kulové ploše $\boldsymbol{\kappa}$ o středu $\boldsymbol{S}$ a poloměru r. Uvažujme nejprve bod $\boldsymbol{X}$ ležící vně kulové plochy $\boldsymbol{\kappa}$. Bodem $\boldsymbol{X}$ vedeme libovolnou sečnu kulové plochy $\boldsymbol{\kappa}$, která ji protíná ve dvou bodech $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$. Veďme bodem $\boldsymbol{X}$ další přímku, která prochází středem $\boldsymbol{S}$ sféry $\boldsymbol{\kappa}$ a protíná ji v bodech $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$. Body $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{X}$ leží v jedné rovině $\boldsymbol{\chi}$, která kulovou plochu $\boldsymbol{\kappa}$ protíná v kružnici $\boldsymbol{k}$. Uvážíme-li v rovině $\boldsymbol{\chi}$ mocnost bodu $\boldsymbol{X}$ ke kružnici $\boldsymbol{k}$, můžeme psát:

$$|\boldsymbol{XA}| \cdot |\boldsymbol{XB}| = |\boldsymbol{XC}| \cdot |\boldsymbol{XD}| = |\boldsymbol{XS}|^2 - r^2 = m.$$

Zjevně je veličina m konstantní pro libovolnou sečnu kulové plochy $\boldsymbol{\kappa}$ vedenou bodem $\boldsymbol{X}$. Nazveme ji mocnost bodu $\boldsymbol{X}$ vzhledem ke kulové ploše $\boldsymbol{\kappa}$. Obdobně jako v rovině můžeme podobnou vlastnost dokázat i pro body ležící na kulové ploše $\boldsymbol{\kappa}$ nebo uvnitř této plochy. Mocnost m libovolného bodu $\boldsymbol{X}$ ke kulové ploše $\boldsymbol{\kappa}$ definujeme vztahem:

$$m = |\boldsymbol{XS}|^2 - r^2.$$

Vidíme, že mocnost bodu $\boldsymbol{X}$ ke kulové ploše $\boldsymbol{\kappa}$ je rovna druhé mocnině délky úseku tečny vedené bodem $\boldsymbol{X}$ ke kulové ploše $\boldsymbol{\kappa}$. Má-li kulová plocha $\boldsymbol{\kappa}$ rovnici $K = 0$ a bod $\boldsymbol{X}$ souřadnice $[x, y, z]$, platí:

$$m = K(x, y, z).$$

Můžeme též uvažovat množiny bodů prostoru, které mají stejnou mocnost vzhledem ke dvěma (resp. třem, resp. čtyřem) kulovým plochám. Není těžké ukázat, že množina všech bodů, které mají stejnou mocnost vzhledem ke dvěma kulovým plochám $\boldsymbol{\kappa}_1$ a $\boldsymbol{\kappa}_2$ o rovnicích $K_1 = 0$ a $K_2 = 0$, je rovina, jejíž rovnice má tvar:

$$K_1 - K_2 = 0. \tag{2.3.7}$$

Tuto rovinu budeme nazývat potenční rovina kulových ploch $\boldsymbol{\kappa}_1$ a $\boldsymbol{\kappa}_2$. Potenční rovina je kolmá na spojnici středů příslušných kulových ploch. Můžeme též dokázat, že trojice potenčních rovin určených třemi kulovými plochami prochází jedinou přímkou, tzv. potenční přímku těchto tří kulových ploch. Tato přímka je kolmá na rovinu určenou středy příslušných kulových ploch. Konečně šestice potenčních rovin (resp. čtveřice potenčních přímek) určených čtyřmi kulovými plochami prochází jedním bodem, tzv. potenčním středem těchto čtyř kulových ploch.

C. Orientovaná sféra

Viděli jsme, že pro Sobotkovo řešení Apolloniovy úlohy v rovině nebo na kulové ploše bylo vhodné zavést pojem orientované kružnice. Je nasnadě, že v případě Apolloniovy úlohy v prostoru se ukáže vhodné, abychom uvažovali o orientování kulové plochy. Sobotka nazývá orientovanou kulovou plochu sféra, my jsme tak až dosud označovali (neorientovanou) kulovou plochu. Tento význam si pojem sféra ponechá i v dalším textu. Orientovanou kulovou plochu budeme nazývat též orientovaná sféra.

Je zřejmé, že v trojrozměrném prostoru není možné orientaci kulové plochy přiblížit tak, jak jsme se o to snažili v případě orientované kružnice. Tehdy jsme orientaci kružnice připodobnili k jednomu ze dvou možných smyslů otáčení kružítka, kterým můžeme danou kružnici narýsovat.

Podívejme se nejprve, jak orientaci kulové plochy vyřešil Sobotka. V dalším textu vyložím svoji představu. V [11] Sobotka píše: „*Při tom zaveďme si pojem koulí orientovaných, které můžeme nazvati sférami. Když totiž zavedeme určitý smysl rotační kolem přímky za kladný a opačný za záporný dle známé definice, a orientujeme každou normálu koule tak, aby od paty její na př. ve směru neobsahujícím střed koule byla kladnou, ve směru k středu směřujícím zápornou, pak smysl na kouli odpovídající kladnému smyslu otáčení orientuje kouli jakožto sféru kladnou, opačný smysl pak stanový sféru zápornou. Poloměr kladné sféry béřeme kladně, poloměr záporné sféry béřem záporně.*“ Tuto formulaci lze chápat takto: je-li kulová ploch orientována kladně (resp. záporně), je takto orientován i smysl otáčení kulové plochy v jejím libovolném bodě okolo normály v tomto bodě. Kladný smysl otáčení je ten, který určují prsty pravé ruky, ukazuje-li palec kladný směr normály, tj. od středu kulové plochy. Zkusme nyní na okamžik chápat orientované kružnice a orientované sféry jako rotující objekty. Zatímco v případě orientované kružnice se každý její bod otáčí stále stejně a můžeme si ji tak představit jako rotující kotouč, v případě orientované sféry je tomu jinak. Uvažované otáčení vždy souvisí s výběrem konkrétního bodu, kdy plocha rotuje v uvažovaném smyslu okolo normály v daném bodě. Přejdeme-li v našich úvahách k jinému bodu orientované sféry, změní se i osa otáčení celé kulové plochy, i když plocha bude rotovat stále ve stejném smyslu. Na rozdíl od orientované kružnice tak pro orientovanou sféru nemáme v reálném světě žádnou adekvátní představu rotujícího tělesa.

Takové pojetí je přesto postačující, pokud studujeme dotyk dvou orientovaných sfér. Budeme požadovat, aby směr otáčení obou sfér v bodě dotyku okolo příslušné normály byl u obou orientovaných sfér stejný. Tak dojdeme k tomu, že souhlasně orientované sféry mohou mít pouze vnitřní dotyk, nesouhlasně orientované sféry pouze dotyk vnější. V našich úvahách však budeme nuceni uvažovat (podobně jako u orientovaných kružnic) vzdálenost bodů dotyku společné tečny dvou orientovaných sfér. V rovinném případě jsme viděli, že orientaci uvažovaných cyklů můžeme přenést i na jejich tečny. V případě orientované sféry a její tečny (resp. tečné roviny) však nic takového není možné. Otázku společné tečny dvou orientovaných sfér tak budeme muset řešit podobným způsobem, jak jsme činili v případě společné tečny dvou orientovaných kružnic na sféře. Tehdy jsme požadovali, aby souhlasně (resp. nesouhlasně) orientované kružnice dotýkající se nějaké hlavní kružnice $\boldsymbol{k}$ ležely v téže polosféře (resp. v opačných polosférách) s hraniční kružnicí $\boldsymbol{k}$.

Z toho, co jsem výše uvedl, se mi zdá vhodnější nezatěžovat se při definování pojmu orientovaná sféra úvahami o smyslu otáčení na kulové ploše. Kulovou plochu $\boldsymbol{\kappa}$ o středu $\boldsymbol{S}$ a poloměru $|r|$, definujme jako útvar, který má ve zvolené lineární soustavě souřadnic rovnici tvaru (2.3.4), kde bod $\boldsymbol{S}$ má souřadnice $[a, b, c]$ a r je reálné (ne nezbytně kladné) číslo. Pak v případě, že poloměr $|r|$ je nenulový, určuje tutéž kulovou plochu jak číslo $|r|$, tak číslo $-|r|$. Řekneme, že jsme danou kulovou plochu $\boldsymbol{\kappa}$ orientovali kladně (resp. záporně), pokud ji budeme chápat jako plochu určenou rovnicí (2.3.4), kde r bude číslo kladné (resp. záporné). Kladně orientovanou sférou (příp. sférou orientovanou kladně) o středu $\boldsymbol{S}$ a poloměru r, kde r je kladné číslo, budeme rozumět kulovou plochu o středu $\boldsymbol{S}$ a poloměru r. Záporně orientovanou sférou (příp. sférou orientovanou záporně) o středu $\boldsymbol{S}$ a poloměru r, kde r je záporné číslo, budeme rozumět kulovou plochu o středu $\boldsymbol{S}$ a poloměru $-r$. Kulovou plochu $\boldsymbol{\kappa}$ o středu $\boldsymbol{S}$ a poloměru r označíme symbolem $\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{S}, r)$. Je-li určena rovnicí $K(x, y, z) = 0$, označíme ji též symbolem $K = 0$. Orientovanou sféru o středu $\boldsymbol{S}$ a poloměru r, která obsahuje tytéž body jako neorientovaná kulová plocha $\boldsymbol{\kappa}$, označíme symbolem $\underline{\boldsymbol{\kappa}}$, případně $\underline{\boldsymbol{\kappa}}(\boldsymbol{S}, r)$ nebo $\underline{K} = 0$.

Tuto část zakončíme úvahami o dotycích dvou orientovaných sfér a společné tečně dvou kulových ploch. Řekneme, že se dvě souhlasně (resp. nesouhlasně) orientované sféry $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_1(\boldsymbol{S}_1, r_1)$, $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_2(\boldsymbol{S}_2, r_2)$ dotýkají roviny $\boldsymbol{\tau}$ po řadě v bodech $\boldsymbol{T}_1$, $\boldsymbol{T}_2$, právě když se jí dotýkají (neorientované) kulové plochy $\boldsymbol{\kappa}_1(\boldsymbol{S}_1, |r_1|)$, $\boldsymbol{\kappa}_2(\boldsymbol{S}_2, |r_2|)$ a tyto plochy leží v témže uzavřeném poloprostoru (resp. leží v opačných uzavřených poloprostorech) s hraniční rovinou $\boldsymbol{\tau}$. Pokud je bod $\boldsymbol{T}_1$ totožný s bodem $\boldsymbol{T}_2$, říkáme, že se orientované sféry $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_1$, $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_2$ dotýkají, resp. mají dotyk. Jsou-li souhlasně (resp. nesouhlasně) orientované, mají dotyk vnitřní (resp. vnější). Pro vzdálenost jejich středů platí:

$$|\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2| = |r_1 - r_2|. \tag{2.3.8}$$

Pokud jsou body $\boldsymbol{T}_1$ a $\boldsymbol{T}_2$ různé, řekneme, že přímka $\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2$ je společnou tečnou orientovaných sfér $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_1$, $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_2$. Vzdálenost těchto bodů označíme t_{12} a nazveme ji délka úseku společné tečny orientovaných sfér $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_1$, $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_2$. Hodnotu veličiny t_{12} určíme takto:

$$t_{12}^2 = |\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2| - (r_1 - r_2)^2. \tag{2.3.9}$$

Zatím jsme určovali veličinu t_{12} pouze v případě, že společná tečna dvou orientovaných sfér existuje. Pomocí vztahu (2.3.9) hodnotu t_{12} definujeme i v případech, že se orientované sféry dotýkají (tj. $t_{12} = 0$), nebo žádná společná tečna neexistuje, pak je ovšem číslo t_{12}^2 určené pomocí vztahu (2.3.9) záporné, tj. t_{12} je číslo imaginární.

2.3.3 Přípravné úvahy

Uvažujme nyní pět orientovaných sfér $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_i(\boldsymbol{S}_i, r_i)$, $i = 1,\dots, 5$, které se dotýkají orientované sféry $\underline{\boldsymbol{\kappa}}(\boldsymbol{S}, r)$ v bodech $\boldsymbol{A}_1,\dots, \boldsymbol{A}_5$. Označíme symbolem φ_{ij} velikost úhlu $\boldsymbol{S}_i\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}_j$. Označíme symbolem d_{ij} vzdálenost bodů $\boldsymbol{A}_i$ a $\boldsymbol{A}_j$. Pak platí:

$$d_{ij}^2 = 4r^2 \sin^2 \frac{\varphi_{ij}}{2}.$$

Označíme symbolem s_{ij} vzdálenost středů $\boldsymbol{S}_i$ a $\boldsymbol{S}_j$. Tu určíme pomocí kosinové věty pro trojúhelník $\boldsymbol{S}_i\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}_j$:

$$s_{ij}^2 = |\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}_i|^2 + |\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}_j|^2 - 2|\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}_i| \cdot |\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}_j| \cos\varphi_{ij}.$$

Uvážíme-li vztah (2.3.8), získáme:

$$s_{ij}^2 = (r - r_i)^2 + (r - r_j)^2 - 2(r - r_i)(r - r_j)\cos\varphi_{ij}.$$

Odtud vyplývá:

$$s_{ij}^2 = (r_i - r_j)^2 + 4(r - r_i)(r - r_j)\sin^2\frac{\varphi_{ij}}{2} = (r_i - r_j)^2 + \frac{r - r_i}{r} \cdot \frac{r - r_j}{r} d_{ij}^2.$$

Konečně označíme symbolem t_{ij} délku společné tečny orientovaných sfér $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_i$ a $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_j$ (ať již jde o číslo reálné nebo imaginární). Pak pomocí vztahu (2.3.9) odvodíme, že platí:

$$t_{ij}^2 = s_{ij}^2 - (r_i - r_j)^2 = \frac{r - r_i}{r} \cdot \frac{r - r_j}{r} d_{ij}^2 . \tag{2.3.10}$$

Pro vzájemné vzdálenosti bodů $\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_5$ platí tvrzení věty 2.3.1. Proto můžeme psát:

$$\begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 & d_{15}^2 \\ d_{12}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 & d_{25}^2 \\ d_{13}^2 & d_{23}^2 & 0 & d_{34}^2 & d_{35}^2 \\ d_{14}^2 & d_{24}^2 & d_{34}^2 & 0 & d_{45}^2 \\ d_{15}^2 & d_{25}^2 & d_{35}^2 & d_{45}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Násobíme-li i-tý řádek determinantu na levé straně $\frac{r - r_i}{r}$ a j-tý sloupec téhož determinantu $\frac{r - r_j}{r}$, získáme vzhledem k (2.3.10) rovnost:

$$\begin{vmatrix} 0 & t_{12}^2 & t_{13}^2 & t_{14}^2 & t_{15}^2 \\ t_{12}^2 & 0 & t_{23}^2 & t_{24}^2 & t_{25}^2 \\ t_{13}^2 & t_{23}^2 & 0 & t_{34}^2 & t_{35}^2 \\ t_{14}^2 & t_{24}^2 & t_{34}^2 & 0 & t_{45}^2 \\ t_{15}^2 & t_{25}^2 & t_{35}^2 & t_{45}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.3.11}$$

Získali jsme tak vztah, který je zobecněním věty Caseyovy (viz (2.1.6), (2.1.7)), která platí pro čtyři cykly dotýkající se pátého cyklu. Takový výsledek není nijak překvapivý. Úvahy, které jsme provedli v této podkapitole, jsou takřka identické s těmi z podkapitoly 2.1.3. Důsledkem těchto úvah byla právě výše zmiňovaná věta Caseyova. Podobně jako v případě Apolloniovy úlohy v rovině či na kulové ploše se vztah (2.3.11) stane východiskem analytického řešení Apolloniova problému v prostoru.

2.3.4 Analytické řešení Apolloniovy úlohy v prostoru

Nechť se nyní orientovaná sféra $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_5$ redukuje na kulovou plochu s nulovým poloměrem, tj. bod $\boldsymbol{S}_5$, v dalších úvahách ho budeme označovat $\boldsymbol{P}$. Pak je bod $\boldsymbol{P}$ bodem orientované sféry $\underline{\boldsymbol{\kappa}}$, která se dotýká orientovaných sfér $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_1, \ldots, \underline{\boldsymbol{\kappa}}_4$. Veličina t_{i5} ve vztahu (2.3.11) přitom přechází v délku úseku tečny vedené z bodu ***P*** ke kulové ploše $\underline{\boldsymbol{K}}_i$. Nechť mají orientované sféry $\underline{\boldsymbol{K}}_1$,..., $\underline{\boldsymbol{K}}_4$ rovnice $\underline{K}_1 = 0$,..., $\underline{K}_4 = 0$. Jestliže má bod ***P*** souřadnice $[x, y, z]$, můžeme podle (2.3.6) určit t_{i5}^2 jako $K_i(x, y, z)$, což stručně zapíšeme K_i. Pokud tento výsledek dosadíme do vztahu (2.3.11), získáme:

$$\begin{vmatrix} 0 & t_{12}^2 & t_{13}^2 & t_{14}^2 & K_1 \\ t_{12}^2 & 0 & t_{23}^2 & t_{24}^2 & K_2 \\ t_{13}^2 & t_{23}^2 & 0 & t_{34}^2 & K_3 \\ t_{14}^2 & t_{24}^2 & t_{34}^2 & 0 & K_4 \\ K_1 & K_2 & K_3 & K_4 & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.3.12)$$

Obdrželi jsem tak rovnici, která určuje orientované sféry, které se dotýkají daných čtyř orientovaných sfér $\underline{K}_1 = 0,\dots, \underline{K}_4 = 0$. Takové kulové plochy jsou při jisté orientaci sfér $\underline{K}_1 = 0$, …, $\underline{K}_4 = 0$ nejvýše dvě. Čtyři (neorientované) kulové plochy je možné orientovat právě šestnácti způsoby. Každá taková volba orientací sfér $\underline{K}_1 = 0,\dots, \underline{K}_4 = 0$ určuje znaménko jejich poloměrů $r_1,\dots, r_4$. To vede k určitým hodnotám t_{ij}^2 určeným pomocí vztahu (2.3.10) jako $s_{ij}^2 - (r_i - r_j)^2$. Pokud kulové plochy $\underline{K}_1 = 0,\dots, \underline{K}_4 = 0$ orientujeme tak, že jejich poloměry jsou právě $-r_1,\dots, -r_4$, získáme zjevně tytéž hodnoty t_{ij}^2 pro každé $i, j = 1,\dots, 4$. Pak má smysl orientovat zadané kulové plochy pouze osmi vhodně zvolenými způsoby. Získáme tak nejvýše 16 řešení Apolloniovy úlohy v prostoru.

Sobotka označuje t_{ij}^2 symbolem τ_{ij}. Rovnici určitého páru řešení Apolloniovy úlohy pak zapisuje ve tvaru:

$$\begin{vmatrix} 0 & \tau_{12} & \tau_{13} & \tau_{14} & K_1 \\ \tau_{12} & 0 & \tau_{23} & \tau_{24} & K_2 \\ \tau_{13} & \tau_{23} & 0 & \tau_{34} & K_3 \\ \tau_{14} & \tau_{24} & \tau_{34} & 0 & K_4 \\ K_1 & K_2 & K_3 & K_4 & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.3.13)$$

Pokud rozvedeme determinant na pravé straně, získáme rovnici hledaných orientovaných sfér $\underline{\boldsymbol{K}}$, $\underline{\boldsymbol{K}}$**’** ve tvaru:

$$\begin{aligned}
&\tau_{23}\tau_{24}\tau_{34}K_1^2 + \tau_{13}\tau_{14}\tau_{34}K_2^2 + \tau_{12}\tau_{14}\tau_{24}K_3^2 + \tau_{12}\tau_{13}\tau_{23}K_4^2 - \\
&\qquad - \tau_{34}(-\tau_{12}\tau_{34} + \tau_{13}\tau_{24} + \tau_{14}\tau_{23})K_1K_2 - \\
&\qquad - \tau_{24}(\tau_{12}\tau_{34} - \tau_{13}\tau_{24} + \tau_{14}\tau_{23})K_1K_3 - \\
&\qquad - \tau_{23}(\tau_{12}\tau_{34} + \tau_{13}\tau_{24} - \tau_{14}\tau_{23})K_1K_4 - \\
&\qquad - \tau_{14}(\tau_{12}\tau_{34} + \tau_{13}\tau_{24} - \tau_{14}\tau_{23})K_2K_3 - \\
&\qquad - \tau_{13}(\tau_{12}\tau_{34} - \tau_{13}\tau_{24} + \tau_{14}\tau_{23})K_2K_4 - \\
&\qquad - \tau_{12}(-\tau_{12}\tau_{34} + \tau_{13}\tau_{24} + \tau_{14}\tau_{23})K_3K_4 = 0. \qquad (2.3.14)
\end{aligned}$$

Vidíme, že rovnice (2.3.14) je složitější než rovnice (2.1.9) (resp. (2.2.14)), kterou byl určen pár orientovaných kružnic, které jsou řešením Apolloniovy úlohy v rovině (resp. na kulové ploše). Složitější bude i nalezení konstruktivního řešení Apolloniovy úlohy v prostoru, které získáme vhodnou interpretací rovnice (2.3.14).

2.3.5 Analytické odvození konstruktivního řešení Apolloniovy úlohy v prostoru

V této podkapitole se soustředím na to, abych objasnil především ideu Sobotkova přístupu. Někdy budu uvádět pouze klíčové vztahy důležité pro porozumění výkladu. Přitom ale nebudu rozepisovat úpravy, které vedou od jednoho takového vztahu ke druhému.

Nechť má daná orientovaná sféra $\underline{K}_i = 0$ poloměr r_i a střed $\boldsymbol{S}_i$ o souřadnicích $[a_i, b_i, c_i]$, $i = 1,\dots,4$. Uvažujme rovnice orientovaných sfér $\underline{K}_1 = 0,\dots, \underline{K}_4 = 0$ ve tvaru obdobném rovnici (2.3.5), tj.:

$$\underline{K}_i(x, y, z) = \varphi(x, y, z) - x\varphi'_{a_i} - y\varphi'_{b_i} - z\varphi'_{c_i} + \varphi(a_i, b_i, c_i) - r_i^2 = 0.$$

Umístíme počátek soustavy souřadnic do potenčního středu $\boldsymbol{O}$ daných čtyř kulových ploch. Mocnost bodu $\boldsymbol{O}$ vzhledem ke každé z kulových ploch $K_i = 0$ je stejná a rovná číslu p. Jak jsme uvedli v podkapitole 2.3.2 části B, můžeme mocnost p bodu $\boldsymbol{O}$ vzhledem ke kulové ploše $K_i = 0$ určit takto:

$$p = K_i(0, 0, 0) = \varphi(0, 0, 0) + \varphi(a_i, b_i, c_i) - r_i^2 = \varphi(a_i, b_i, c_i) - r_i^2.$$

Budeme-li místo $\varphi(x, y, z)$ psát stručně φ, můžeme rovnici orientované sféry $\underline{K}_i = 0$ psát ve tvaru:

$$\varphi + p - x\varphi'_{a_i} - y\varphi'_{b_i} - z\varphi'_{c_i} = 0. \qquad (2.3.15)$$

Dále označíme (m_i, n_i) následující determinant:

$$\begin{vmatrix} 0 & \tau_{12} & \tau_{13} & \tau_{14} & n_1 \\ \tau_{12} & 0 & \tau_{23} & \tau_{24} & n_2 \\ \tau_{13} & \tau_{23} & 0 & \tau_{34} & n_3 \\ \tau_{14} & \tau_{24} & \tau_{34} & 0 & n_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 \end{vmatrix}.$$

Potom můžeme rovnici (2.3.13) psát ve tvaru:

$(K_i, K_i) = 0$.

Dosadíme-li za K_i rovnici (2.3.15) (rovnice orientované sféry $\underline{K}_i = 0$ a neorientované sféry $K_i = 0$ jsou identické) a rozvedeme-li determinant (K_i, K_i) podle prvků posledního sloupce a posledního řádku, získáme rovnici páru orientovaných sfér $\underline{\boldsymbol{\kappa}}$, $\underline{\boldsymbol{\kappa}}$**'** dotýkajících se daných čtyř orientovaných sfér:

$$\begin{aligned} &(1,1)(\varphi + p)^2 - 2[(\varphi'_{a_i}, 1)\,x + (\varphi'_{b_i}, 1)\,y + (\varphi'_{c_i}, 1)\,z](\varphi + p) + \\ &+ [(\varphi'_{a_i}, \varphi'_{a_i})\,x^2 + (\varphi'_{b_i}, \varphi'_{b_i})\,y^2 + (\varphi'_{c_i}, \varphi'_{c_i})\,z^2] + \\ &+ [(\varphi'_{a_i}, \varphi'_{b_i})\,xy + (\varphi'_{b_i}, \varphi'_{c_i})\,yz + (\varphi'_{c_i}, \varphi'_{a_i})\,zx] = 0\,. \end{aligned} \qquad (2.3.16)$$

Označíme $\boldsymbol{U}_i$, $\boldsymbol{V}_i$ body dotyku orientované sféry $\underline{K}_i = 0$ (kde $i = 1, \ldots, 4$) s nalezeným párem řešení $\underline{\boldsymbol{\kappa}}$, $\underline{\boldsymbol{\kappa}}$**'**. Určíme nejprve průnik orientovaných sfér $\underline{\boldsymbol{\kappa}}$, $\underline{\boldsymbol{\kappa}}$**'** s orientovanou sférou $\underline{K}_1 = 0$. S ohledem na rovnici (2.3.15) leží bod na orientované sféře $\underline{K}_1 = 0$, jestliže $\varphi + p = x\varphi'_{a_i} + y\varphi'_{b_i} + z\varphi'_{c_i}$. Dosadíme tento výsledek do (2.3.16) a tuto rovnici dále upravíme. Potom získáme:

$$\begin{aligned} &(\varphi'_{a_i} - \varphi'_{a_1}, \varphi'_{a_i} - \varphi'_{a_1})\,x^2 + (\varphi'_{b_i} - \varphi'_{b_1}, \varphi'_{b_i} - \varphi'_{b_1})\,y^2 + (\varphi'_{a_i} - \varphi'_{a_1}, \varphi'_{a_i} - \varphi'_{a_1})\,x^2 + \\ &+ (\varphi'_{c_i} - \varphi'_{c_1}, \varphi'_{c_i} - \varphi'_{c_1})\,z^2 + 2(\varphi'_{a_i} - \varphi'_{a_1}, \varphi'_{b_i} - \varphi'_{b_1})\,xy + 2(\varphi'_{b_i} - \varphi'_{b_1}, \varphi'_{c_i} - \varphi'_{c_1})\,yz + \\ &+ 2(\varphi'_{c_i} - \varphi'_{c_1}, \varphi'_{a_i} - \varphi'_{a_1})\,zx = 0\,. \end{aligned} \qquad (2.3.17)$$

V tomto místě opustím Sobotkův výklad, který vyžaduje další geometrické znalosti[51], které nejsou obvykle součástí studia učitelství na našich vysokých školách. Místo toho předkládám vlastní přístup, který se opírá o pojem vrcholu kvadratické formy. Rovnice (2.3.17) je zřejmě rovnicí nějaké kvadriky, označíme ji $\boldsymbol{Q}$.

Její rovnici zapíšeme zjednodušeně ve tvaru:

[51] Konkrétně se jedná o vlastnosti komplexu kulových ploch, určeného čtyřmi danými koulemi.

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Exy + 2Fyz + 2Gzx = 0.$$

Zapíšeme matici této kvadriky:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & E & G \\ 0 & E & B & F \\ 0 & G & F & C \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že kvadrika $\boldsymbol{Q}$ není regulární. Libovolný bod $\boldsymbol{X}$ o souřadnicích $[x, y, z]$ leží ve vrcholu této kvadriky, jestliže jeho souřadnice vyhovují soustavě rovnic:

$$Ax + Ey + Gz = 0,$$

$$Ex + By + Fz = 0, \qquad (2.3.18)$$

$$Gx + Fy + Cz = 0.$$

Jestliže jsou tyto tři rovnice lineárně nezávislé je jediným reálným bodem vrcholu kvadriky $\boldsymbol{Q}$ počátek soustavy souřadnic $\boldsymbol{O}$, tj. potenční střed daných kulových ploch. Kvadrika $\boldsymbol{Q}$ je pak kuželovou plochou s vrcholem $\boldsymbol{O}$. Víme však, že průnikem kvadriky $\boldsymbol{Q}$ s orientovanou sférou $\underline{K}_1 = 0$ bude množina společných bodů orientované sféry $\underline{K}_1 = 0$ a páru řešení Apolloniovy úlohy $\underline{\boldsymbol{\kappa}}$, $\underline{\boldsymbol{\kappa}}'$, tj. dvouprvková množina obsahující body $\boldsymbol{U}_1$ a $\boldsymbol{V}_1$. Není však možné, aby kuželová plocha protnula nějakou kulovou plochu pouze ve dvou bodech. Uvažovaná kvadrika $\boldsymbol{Q}$ nemůže být proto kuželová plocha. Kdyby naopak každá rovnice soustavy (2.3.18) byla násobkem ostatních rovnic této soustavy, byla by vrcholem kvadriky rovina určená jednou z rovnic (2.3.18). Kvadrika $\boldsymbol{Q}$ by pak byla v reálné části rovna této rovině. Opět nemůže nastat, aby průnik takové kvadriky $\boldsymbol{Q}$ s nějakou kulovou plochou byla množina dvou bodů.

Je zřejmé, že právě dvě rovnice soustavy (2.3.18) jsou lineárně nezávislé. Pak je v reálné části vrcholem kvadriky $\boldsymbol{Q}$ přímka, označíme ji $\boldsymbol{v}$. Kvadrika $\boldsymbol{Q}$ je tvořena dvojicí rovin, které se protínají v přímce $\boldsymbol{v}$. Protože jsou společnými body kvadriky $\boldsymbol{Q}$ a kulové plochy $K_1 = 0$ pouze body $\boldsymbol{U}_1$ a $\boldsymbol{V}_1$, jsou tyto roviny imaginární (s reálnou průsečnicí) a jediné reálné body kvadriky $\boldsymbol{Q}$ leží na přímce $\boldsymbol{v}$. Vidíme, že přímka $\boldsymbol{v}$ je spojnicí bodů dotyku $\boldsymbol{U}_1$ a $\boldsymbol{V}_1$, tj. přímka, kterou jsme výše označili $\boldsymbol{l}_1$. Je zřejmé, že každou z rovnic soustavy (2.3.18) můžeme chápat jako rovnici jisté roviny. Přímka $\boldsymbol{l}_1$ je pak průsečnicí určitých tří rovin, označíme je $\boldsymbol{\rho}_1$, $\boldsymbol{\rho}_2$, $\boldsymbol{\rho}_3$. Vrátíme-li se k původnímu významu konstant A, B, C, E, F, G, můžeme napsat rovnice těchto rovin:

$$\left.\begin{aligned}\rho_1:\ & (\varphi'_{a_i}-\varphi'_{a_1},\varphi'_{a_i}-\varphi'_{a_1})x+(\varphi'_{a_i}-\varphi'_{a_1},\varphi'_{b_i}-\varphi'_{b_1})y+(\varphi'_{a_i}-\varphi'_{a_1},\varphi'_{c_i}-\varphi'_{c_1})z=0,\\ \rho_2:\ & (\varphi'_{b_i}-\varphi'_{b_1},\varphi'_{a_i}-\varphi'_{a_1})x+(\varphi'_{b_i}-\varphi'_{b_1},\varphi'_{b_i}-\varphi'_{b_1})y+(\varphi'_{b_i}-\varphi'_{b_1},\varphi'_{c_i}-\varphi'_{c_1})z=0,\\ \rho_3:\ & (\varphi'_{c_i}-\varphi'_{c_1},\varphi'_{a_i}-\varphi'_{a_1})x+(\varphi'_{c_i}-\varphi'_{c_1},\varphi'_{b_i}-\varphi'_{b_1})y+(\varphi'_{c_i}-\varphi'_{c_1},\varphi'_{c_i}-\varphi'_{c_1})z=0.\end{aligned}\right\}\quad(2.3.19)$$

V dalším textu již budu opět využívat Sobotkův přístup. Uvážíme-li, že rovnice orientované sféry $\underline{K}_i = 0$ má tvar $\varphi + p - x\varphi'_{a_i} - y\varphi'_{b_i} - z\varphi'_{c_i} = 0$ (viz vztah (2.3.15)), získáme:

$$-(K_i - K_1) = (\varphi'_{a_i}-\varphi'_{a_1})x + (\varphi'_{b_i}-\varphi'_{b_1})y + (\varphi'_{c_i}-\varphi'_{c_1})z = 0\,.$$

Rovnice (2.3.19) můžeme potom psát ve tvaru:

$$\left.\begin{aligned}\rho_1:\ & (\varphi'_{a_i}-\varphi'_{a_1}, K_i - K_1) = 0,\\ \rho_2:\ & (\varphi'_{b_i}-\varphi'_{b_1}, K_i - K_1) = 0,\\ \rho_3:\ & (\varphi'_{c_i}-\varphi'_{c_1}, K_i - K_1) = 0.\end{aligned}\right\}\quad(2.3.20)$$

Naší snahou je analyticky odvodit konstrukci, která umožní sestrojit přímku $\boldsymbol{l}_1$. Zatím jsme zjistili, že je průsečnicí rovin ρ_1, ρ_2, ρ_3. Vzhledem k rovnicím (2.3.19) prochází přímka $\boldsymbol{l}_1$ počátkem soustavy souřadnic, tj. potenčním středem kulových ploch $\kappa_1, \ldots, \kappa_4$. Podobný výsledek jsme získaly i v případě Apolloniovy úlohy v rovině. Vraťme se k uvažovaným rovinám ρ_1, ρ_2, ρ_3. Nejprve vhodnou volbou soustavy souřadnic zjednodušíme jejich rovnice.

Počátkem soustavy souřadnic je nadále potenční střed $\boldsymbol{O}$ daných kulových ploch. Souřadnicové osy volíme takto: osy $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ (v tomto pořadí) jsou kolmice z bodu $\boldsymbol{O}$ na roviny $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3$, $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_4$, $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{S}_4$ (v tomto pořadí). Osu $\boldsymbol{x}$ (resp. $\boldsymbol{y}$, resp. $\boldsymbol{z}$) orientujeme tak, aby její průsečík s rovinou $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3$ (resp. $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_4$, resp. $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{S}_4$) ležel v její kladné části. Příslušné souřadnicové vektory budou opět jednotkové. Takto zavedené souřadnicové osy jsou zjevně potenčními přímkami trojic kulových ploch $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$; $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_4$; $\kappa_1, \kappa_3, \kappa_4$. Roviny $\boldsymbol{xy}$, $\boldsymbol{yz}$, $\boldsymbol{zx}$ jsou potenčními rovinami dvojic kulových ploch κ_1, κ_2; κ_1, κ_4; κ_1, κ_3. Pravoúhlé průměty středů $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{S}_2$, $\boldsymbol{S}_3$ do osy $\boldsymbol{x}$ (resp. $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{S}_2$, $\boldsymbol{S}_4$ do osy $\boldsymbol{y}$, resp. $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{S}_3$, $\boldsymbol{S}_4$ do osy $\boldsymbol{z}$) splynou v jediný bod. Proto vzhledem k větě 2.3.2 platí:

$$\varphi'_{a_1} = \varphi'_{a_2} = \varphi'_{a_3},\ \varphi'_{b_1} = \varphi'_{b_2} = \varphi'_{b_4},\ \varphi'_{c_1} = \varphi'_{c_3} = \varphi'_{c_4}\,.$$

Označíme symbolem π_{ij} potenční rovinu kulových ploch κ_i, κ_j. Její rovnice je tvaru $K_i - K_j = 0$, zjednodušeně ji zapíšeme $P_{ij} = 0$. Uvážíme-li výše uvedené rovnosti, může být v determinantech obsažených v rovnicích (2.3.20) pouze jediný prvek posledního řádku nenulový. Rozvineme determinanty podle těchto prvků. Prvky posledního sloupce jsou levé strany rovnic potenčních rovin π_{ij}. Proto například pro rovinu ρ_1 získáme:

$$(\varphi'_{a_i}-\varphi'_{a_1},K_i-K_1)=\begin{vmatrix} 0 & \tau_{12} & \tau_{13} & \tau_{14} & 0 \\ \tau_{12} & 0 & \tau_{23} & \tau_{24} & K_2-K_1 \\ \tau_{13} & \tau_{23} & 0 & \tau_{34} & K_3-K_1 \\ \tau_{14} & \tau_{24} & \tau_{34} & 0 & K_4-K_1 \\ 0 & \varphi'_{a_2}-\varphi'_{a_1} & \varphi'_{a_3}-\varphi'_{a_1} & \varphi'_{a_4}-\varphi'_{a_1} & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & \tau_{12} & \tau_{13} & \tau_{14} & 0 \\ \tau_{12} & 0 & \tau_{23} & \tau_{24} & P_{12} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & 0 & \tau_{34} & P_{13} \\ \tau_{14} & \tau_{24} & \tau_{34} & 0 & P_{14} \\ 0 & 0 & 0 & \varphi'_{a_4}-\varphi'_{a_1} & 0 \end{vmatrix}=-(\varphi'_{a_4}-\varphi'_{a_1})\begin{vmatrix} 0 & \tau_{12} & \tau_{13} & 0 \\ \tau_{12} & 0 & \tau_{23} & P_{12} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & 0 & P_{13} \\ \tau_{14} & \tau_{24} & \tau_{34} & P_{14} \end{vmatrix}=0.$$

Vyčíslíme-li posledně uvedený determinant, získáme rovnici roviny $\boldsymbol{\rho}_1$ (a obdobně i rovin $\boldsymbol{\rho}_2$ a $\boldsymbol{\rho}_3$) ve tvaru:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\rho}_1 : \tau_{13}(-\tau_{12}\tau_{34}+\tau_{13}\tau_{24}-\tau_{14}\tau_{23})P_{12}+\tau_{12}(\tau_{12}\tau_{34}-\tau_{13}\tau_{24}-\tau_{14}\tau_{23})P_{13}+2\tau_{12}\tau_{13}\tau_{23}P_{14}=0,\\
&\boldsymbol{\rho}_2 : \tau_{14}(-\tau_{12}\tau_{34}-\tau_{13}\tau_{24}+\tau_{14}\tau_{23})P_{12}+2\tau_{12}\tau_{14}\tau_{24}P_{13}+\tau_{12}(\tau_{12}\tau_{34}-\tau_{13}\tau_{24}-\tau_{14}\tau_{23})P_{14}=0,\\
&\boldsymbol{\rho}_3 : 2\tau_{13}\tau_{14}\tau_{34}P_{12}+\tau_{14}(-\tau_{12}\tau_{34}-\tau_{13}\tau_{24}+\tau_{14}\tau_{23})P_{13}+\tau_{13}(-\tau_{12}\tau_{34}+\tau_{13}\tau_{24}-\tau_{14}\tau_{23})P_{14}=0.
\end{aligned}$$

Již víme, že z uvedených rovnic jsou právě dvě lineárně nezávislé. Každý bod přímky $\boldsymbol{l}_1$ tak splňuje např. první dvě rovnice. Vyloučíme-li z nich výraz P_{14}, získáme po úpravách následující rovnici, kterou musí splňovat každý bod přímky $\boldsymbol{l}_1$:

$$\tau_{13}P_{12}-\tau_{12}P_{13}=0.$$

Jedná se zjevně o rovnici jisté roviny, označíme ji symbolem $\boldsymbol{\pi}_4$. Obdobně můžeme z rovnic rovin $\boldsymbol{\rho}_1$ a $\boldsymbol{\rho}_2$ vyloučit výraz P_{13} (resp. P_{12}) a nalezneme tak rovnici další roviny $\boldsymbol{\pi}_3$ (resp. $\boldsymbol{\pi}_2$), které vyhovuje každý bod přímky $\boldsymbol{l}_1$. Hledaná spojnice $\boldsymbol{l}_1$ bodů dotyku $\boldsymbol{U}_1$ a $\boldsymbol{V}_1$ orientované sféry $\underline{\boldsymbol{K}}_1$ a páru řešení příslušné Apolloniovy úlohy je proto průsečnicí tří rovin $\boldsymbol{\pi}_2$, $\boldsymbol{\pi}_3$, $\boldsymbol{\pi}_4$, jejichž rovnice mají tvar:

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{\pi}_2 : \tau_{14}P_{13}-\tau_{13}P_{14}=0,\\
&\boldsymbol{\pi}_3 : \tau_{14}P_{12}-\tau_{12}P_{14}=0,\\
&\boldsymbol{\pi}_4 : \tau_{13}P_{12}-\tau_{12}P_{13}=0.
\end{aligned}\right\} \qquad (2.3.21)$$

2.3.6 Konstruktivní řešení Apolloniovy úlohy v prostoru

Vidíme, že rovnice (2.3.21) jsou podstatně jednodušší než ty, kterými jsme přímku $\boldsymbol{l}_1$ určovali dosud. Skýtají tak možnost, že pomocí nich již bude možné nalézt vhodnou konstrukci přímky $\boldsymbol{l}_1$. S ohledem na rovnice orientovaných sfér $\underline{K}_i = 0$, můžeme napsat rovnice potenční roviny kulových ploch $K_i = 0$ a $K_j = 0$ ve tvaru:

$$P_{ij} = K_i - K_j = (\varphi'_{a_j} - \varphi'_{a_i})x + (\varphi'_{b_j} - \varphi'_{b_i})y + (\varphi'_{c_j} - \varphi'_{c_i})z = 0.$$

Protože současně platí $\varphi'_{a_1} = \varphi'_{a_2} = \varphi'_{a_3}$, $\varphi'_{b_1} = \varphi'_{b_2} = \varphi'_{b_4}$, $\varphi'_{c_1} = \varphi'_{c_3} = \varphi'_{c_4}$, můžeme psát rovnice všech šesti potenčních rovin daných kulových ploch ve tvaru:

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{\pi}_{12} &: P_{12} = (\varphi'_{c_2} - \varphi'_{c_1})z = 0,\\
\boldsymbol{\pi}_{13} &: P_{13} = (\varphi'_{b_3} - \varphi'_{b_1})y = 0,\\
\boldsymbol{\pi}_{14} &: P_{14} = (\varphi'_{a_4} - \varphi'_{a_1})x = 0,\\
\boldsymbol{\pi}_{23} &: P_{23} = (\varphi'_{b_3} - \varphi'_{b_2})y + (\varphi'_{c_3} - \varphi'_{c_2})z = (\varphi'_{b_3} - \varphi'_{b_1})y - (\varphi'_{c_2} - \varphi'_{c_1})z = P_{13} - P_{12} = 0,\\
\boldsymbol{\pi}_{24} &: P_{24} = (\varphi'_{a_4} - \varphi'_{a_2})x + (\varphi'_{c_4} - \varphi'_{c_2})z = (\varphi'_{a_4} - \varphi'_{a_1})x - (\varphi'_{c_2} - \varphi'_{c_1})z = P_{14} - P_{12} = 0,\\
\boldsymbol{\pi}_{34} &: P_{34} = (\varphi'_{a_4} - \varphi'_{a_3})x + (\varphi'_{b_4} - \varphi'_{b_3})y = (\varphi'_{a_4} - \varphi'_{a_1})x - (\varphi'_{b_3} - \varphi'_{b_1})y = P_{14} - P_{13} = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (2.3.22)$$

Rovnice (2.3.21) pak přecházejí ve tvar:

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{\pi}_2 &: \tau_{14}(\varphi'_{b_3} - \varphi'_{b_1})y - \tau_{13}(\varphi'_{a_4} - \varphi'_{a_1})x = 0,\\
\boldsymbol{\pi}_3 &: \tau_{14}(\varphi'_{c_2} - \varphi'_{c_1})z - \tau_{12}(\varphi'_{a_4} - \varphi'_{a_1})x = 0,\\
\boldsymbol{\pi}_4 &: \tau_{13}(\varphi'_{c_2} - \varphi'_{c_1})z - \tau_{12}(\varphi'_{b_3} - \varphi'_{b_1})y = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (2.3.23)$$

Z těchto rovnic již snadno odvodíme, že pro libovolný bod přímky $\boldsymbol{l}_1$ o souřadnicích $[x, y, z]$ platí:

$$x : y : z = \frac{\tau_{14}}{\varphi'_{a_4} - \varphi'_{a_1}} : \frac{\tau_{13}}{\varphi'_{b_3} - \varphi'_{b_1}} : \frac{\tau_{12}}{\varphi'_{c_2} - \varphi'_{c_1}}.$$

Jaký je geometrický význam veličin ve jmenovatelích zlomků na pravé straně. Uvažujme např. veličinu $\varphi'_{a_4} - \varphi'_{a_1}$. Podle věty 2.3.2 je první souřadnice pravoúhlého průmětu středu $\boldsymbol{S}_4$ (resp. $\boldsymbol{S}_1$) do osy $\boldsymbol{x}$ rovna polovině φ'_{a_4} (resp. φ'_{a_1}). Polovina absolutní hodnoty veličiny $\varphi'_{a_4} - \varphi'_{a_1}$ je rovna vzdálenosti pravoúhlých průmětů bodů $\boldsymbol{S}_1$ a $\boldsymbol{S}_4$, označíme je $\boldsymbol{S}_{1x}$ a $\boldsymbol{S}_{4x}$. Veličina $\varphi'_{a_4} - \varphi'_{a_1}$ je kladná (resp. záporná), jestliže je orientovaná úsečka $\overrightarrow{\boldsymbol{S}_{1x}\boldsymbol{S}_{4x}}$

orientována ve směru kladné (resp. záporné) části osy $\boldsymbol{x}$. Protože je rovina $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3$ kolmá na osu $\boldsymbol{x}$, je vzdálenost bodů $\boldsymbol{S}_{1x}$ a $\boldsymbol{S}_{4x}$ rovná velikosti výšky čtyřstěnu $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{S}_4$ vedené z bodu $\boldsymbol{S}_4$.

Zavedeme veličiny v_2, v_3, v_4 (v uvedeném pořadí) takto: jejich absolutní hodnota je rovna výškám čtyřstěnu $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{S}_4$ vedeným z bodů $\boldsymbol{S}_2$, $\boldsymbol{S}_3$, $\boldsymbol{S}_4$ (v uvedeném pořadí), veličina v_i je kladná (resp. záporná), pokud je směr od paty příslušné výšky k vrcholu v kladném (resp. záporném) směru osy rovnoběžné s touto výškou. Pak zjevně platí:

$$\varphi'_{a_4} - \varphi'_{a_1} = 2v_4,\ \varphi'_{b_3} - \varphi'_{b_1} = 2v_3,\ \varphi'_{c_2} - \varphi'_{c_1} = 2v_2.$$

Odtud pro libovolný bod přímky $\boldsymbol{l}_1$ o souřadnicích $[x, y, z]$ plyne:

$$x : y : z = \frac{\tau_{14}}{v_4} : \frac{\tau_{13}}{v_3} : \frac{\tau_{12}}{v_2}$$

Protože přímka $\boldsymbol{l}_1$ prochází potenčním středem daných čtyř kulových ploch, tj. počátkem soustavy souřadnic, je vektor o souřadnicích $(t_{14}^2 / v_4, t_{13}^2 / v_3, t_{12}^2 / v_2)$ směrovým vektorem přímky $\boldsymbol{l}_1$. Sestrojíme na ose $\boldsymbol{x}$ (resp. $\boldsymbol{y}$, resp. $\boldsymbol{z}$)[52] bod s příslušnou souřadnicí rovnou t_{14}^2 / v_4 (resp. t_{13}^2 / v_3, resp. t_{12}^2 / v_2). Počátek (potenční střed) a tyto tři body doplníme na rovnoběžnostěn. Tělesová úhlopříčka tohoto rovnoběžnostěnu vedená potenčním středem daných čtyř kulových ploch je hledaná přímka $\boldsymbol{l}_1$, která orientovanou sféru $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_1$ protíná v bodech dotyku páru orientovaných sfér, které jsou řešením příslušné Apolloniovy úlohy v prostoru. Obdobným způsobem můžeme sestrojit i přímky $\boldsymbol{l}_2$, $\boldsymbol{l}_3$ a $\boldsymbol{l}_4$.

Doplníme Sobotkovo konstruktivní řešení postupem, jak sestrojit úsečku o velikosti rovné t_{ij}^2 / v_k. Veličina t_{ij} je i s ohledem na znaménko definována vztahem $t_{ij}^2 = s_{ij}^2 - (r_i - r_j)^2$. Užitím Pythagorovy věty sestrojíme úsečku o velikosti rovné absolutní hodnotě t_{ij}. Pomocí pravoúhlého trojúhelníka (s výškou k přeponě o velikosti $|t_{ij}|$ a úsekem na přeponě o velikosti $|v_k|$) nalezneme úsečku o velikosti rovné $|t_{ij}^2 / v_k|$ jako druhý z úseků na přeponě. Znaménko t_{ij}^2 i v_k vezmeme do úvahy při určení odpovídajícího bodu na příslušné souřadnicové ose.

[52] Jak bylo uvedeno výše, osa $\boldsymbol{x}$ (resp. $\boldsymbol{y}$, resp. $\boldsymbol{z}$) je potenční přímka kulových ploch $\boldsymbol{\kappa}_1$, $\boldsymbol{\kappa}_2$, $\boldsymbol{\kappa}_3$ (resp. $\boldsymbol{\kappa}_1$, $\boldsymbol{\kappa}_2$, $\boldsymbol{\kappa}_4$, resp. $\boldsymbol{\kappa}_1$, $\boldsymbol{\kappa}_3$, $\boldsymbol{\kappa}_4$), která je orientována kladně ve směru od potenčního středu daných čtyř kružnic k rovině $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3$ (resp. $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_4$, resp. $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{S}_4$).

2.3.7 Další konstruktivní řešení Apolloniovy úlohy v prostoru

Sobotka obdobně jako v pracích [1] a [6] hledal i další konstruktivní řešení. Toto řešení Apolloniovy úlohy v prostoru nám může připomínat řešení Apolloniovy úlohy v rovině uvedené v podkapitole 2.1.7 nebo řešení problému na kulové ploše vyložené v podkapitole 2.2.6. Obdobně jako v předchozím textu se zaměříme na konstrukci přímky $\boldsymbol{l}_1$.

Uvažujme roviny π_{12}, π_{13}, π_4, π_{23}, které vzhledem k rovnicím (2.3.22) a (2.3.23) všechny procházejí osou $\boldsymbol{x}$. Určíme dvojpoměr těchto rovin. Ten je roven dvojpoměru bodů, v nichž libovolná přímka $\boldsymbol{p}$ mimoběžná s osou $\boldsymbol{x}$ protíná tyto roviny.

Označíme $b = \varphi'_{b_3} - \varphi'_{b_1}$, $c = \varphi'_{c_2} - \varphi'_{c_1}$. Snadno se přesvědčíme, že body o souřadnicích $[0, c, 0], [0, 0, b], [0, \dfrac{c\tau_{13}}{\tau_{12} + \tau_{13}}, \dfrac{b\tau_{12}}{\tau_{12} + \tau_{13}}], [0, \dfrac{c}{2}, \dfrac{b}{2}]$ leží v jedné přímce a přitom leží po řadě i v rovinách π_{12}, π_{13}, π_4, π_{23}. Označíme uvažované body po řadě symboly $\boldsymbol{P}_{12}$, $\boldsymbol{P}_{13}$, $\boldsymbol{P}_4$, $\boldsymbol{P}_{23}$. Snadno ukážeme, že dvojpoměr bodů $\boldsymbol{P}_{12}$, $\boldsymbol{P}_{13}$, $\boldsymbol{P}_4$, $\boldsymbol{P}_{23}$ je roven τ_{12} / τ_{13}, tj. t_{12}^2 / t_{13}^2. Potom platí:

$$\left.\begin{array}{l} (\pi_{12}\pi_{13}\pi_4\pi_{23}) = \dfrac{t_{12}^2}{t_{13}^2}, \\ \text{obdobně získáme:} \\ (\pi_{12}\pi_{14}\pi_3\pi_{24}) = \dfrac{t_{12}^2}{t_{14}^2}, \\ (\pi_{13}\pi_{14}\pi_2\pi_{34}) = \dfrac{t_{13}^2}{t_{14}^2}. \end{array}\right\} \qquad (2.3.24)$$

Tyto dvojpoměry určují roviny π_2, π_3, π_4, jejichž průsečnicí je hledaná přímka $\boldsymbol{l}_1$. Uvažujme nejprve první z dvojpoměrů (2.3.24). Z bodu $\boldsymbol{S}_1$ vedeme kolmice na uvažované čtyři roviny. Kolmice na rovinu π_{12} je vzhledem k vlastnostem potenční roviny dvou kulových ploch přímka $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2$, obdobně je kolmicí na rovinu π_{13} přímka $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_3$. Kolmici na rovinu π_4 označíme $\boldsymbol{s}_4$. Kolmici na rovinu π_{23} označíme $\boldsymbol{s}_{23}$, přitom je zjevně přímka $\boldsymbol{s}_{23}$ rovnoběžná s přímkou $\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3$. Potom pro dvojpoměr přímek platí:

$$(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\ \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_3\,\boldsymbol{s}_4\boldsymbol{s}_{23}) = \frac{t_{12}^2}{t_{13}^2}.$$

Uvážíme průsečíky těchto přímek s přímkou $\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3$. Průsečík přímky $\boldsymbol{s}_4$ s přímkou $\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3$ označíme $\boldsymbol{G}_4$. Průsečík přímky $\boldsymbol{s}_{23}$ s přímkou $\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3$ je nevlastní bod těchto přímek. Proto můžeme psát:

$$(\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{G}_4) = \frac{t_{12}^2}{t_{13}^2}. \tag{2.3.25}$$

Sestrojíme na přímce $\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3$ bod $\boldsymbol{G}_4$ tak, aby platilo (2.3.25). Přitom postupujeme obdobně jako v rovinném případě (viz podkapitola 2.1.7). Vzhledem k (2.3.23) víme, že rovina π_4 prochází počátkem soustavy souřadnic, tj. potenčním středem $\boldsymbol{O}$ daných kulových ploch $\kappa_1, \ldots, \kappa_4$. Rovina π_4 je rovina vedená kolmo bodem $\boldsymbol{O}$ k přímce $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{G}_4$. Obdobně můžeme vzhledem k (2.3.24) sestrojit na přímce $\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_4$ (resp. $\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{S}_4$) bod $\boldsymbol{G}_3$ (resp. $\boldsymbol{G}_2$) tak, aby platilo:

$$(\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_4\boldsymbol{G}_3) = \frac{t_{12}^2}{t_{14}^2} \quad (\text{resp.}\, (\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{S}_4\boldsymbol{G}_2) = \frac{t_{13}^2}{t_{14}^2}). \tag{2.3.25*}$$

Rovina π_3 (resp. π_2) je rovina vedená kolmo bodem $\boldsymbol{O}$ k přímce $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{G}_3$ (resp. $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{G}_2$). Pomocí Menelaovy věty můžeme dokázat, že body $\boldsymbol{G}_2$, $\boldsymbol{G}_3$, $\boldsymbol{G}_4$ (náležející rovině $\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{S}_4$) leží v jedné přímce, označíme ji $\boldsymbol{g}_1$. Přímka $\boldsymbol{l}_1$ jako průsečnice rovin π_2, π_3, π_4 je proto kolmá na přímky $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{G}_2$, $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{G}_3$, $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{G}_4$, tj. na rovinu $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{g}_1$. Podobně můžeme sestrojit v rovinách $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{S}_4$, $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_4$, $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3$ přímky $\boldsymbol{g}_2$, $\boldsymbol{g}_3$, $\boldsymbol{g}_4$. Hledané přímky $\boldsymbol{l}_2$, $\boldsymbol{l}_3$, $\boldsymbol{l}_4$ procházejí potenčním středem $\boldsymbol{O}$ a jsou po řadě kolmé na roviny $\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{g}_2$, $\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{g}_3$, $\boldsymbol{S}_4\boldsymbol{g}_4$.

V další části své práce se Sobotka zabývá vlastnostmi přímek $\boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{g}_2$, $\boldsymbol{g}_3$, $\boldsymbol{g}_4$. Ukazuje, že leží na jistém přímkovém hyperboloidu a tvoří přímky první osnovy tohoto hyperboloidu. Dále vyšetřuje vlastnosti čtyř přímek druhé osnovy uvažovaného hyperboloidu, které protínají vždy tři z přímek $\boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{g}_2$, $\boldsymbol{g}_3$, $\boldsymbol{g}_4$. Tyto úvahy opírá o poznatky, které výrazně přesahují geometrické znalosti absolventa univerzitního studia učitelství matematiky. Nebudeme je zde proto dále rozvíjet, neboť jejich důsledkem je konstrukce přímek $\boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{g}_2$, $\boldsymbol{g}_3$, $\boldsymbol{g}_4$, kterou můžeme odůvodnit i jiným (jednodušším) způsobem. V tomto místě opustím Sobotkův výklad a představím zde vlastní přístup k problematice. Učiním nejprve přípravnou úvahu, která mi umožní komentovat konstrukci, kterou Sobotka navrhuje v závěru své práce o Apolloniově úloze v prostoru.

Nejprve shrneme konstrukci, kterou jsme odvodili výše. Na přímce $\boldsymbol{S}_i\boldsymbol{S}_j$ sestrojíme body $\boldsymbol{G}_k^l$ tak, aby platilo:

$$\left.\begin{aligned}
&(\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{G}_1^4)=\frac{t_{12}^2}{t_{13}^2},\ (\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_4\boldsymbol{G}_1^3)=\frac{t_{12}^2}{t_{14}^2},\ (\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{S}_4\boldsymbol{G}_1^2)=\frac{t_{13}^2}{t_{14}^2},\\
&(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{G}_2^4)=\frac{t_{12}^2}{t_{23}^2},\ (\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_4\boldsymbol{G}_2^3)=\frac{t_{12}^2}{t_{24}^2},\ (\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{S}_4\boldsymbol{G}_2^1)=\frac{t_{23}^2}{t_{24}^2},\\
&(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{G}_3^4)=\frac{t_{13}^2}{t_{23}^2},\ (\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_4\boldsymbol{G}_3^2)=\frac{t_{13}^2}{t_{34}^2},\ (\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_4\boldsymbol{G}_3^1)=\frac{t_{23}^2}{t_{34}^2},\\
&(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{G}_4^3)=\frac{t_{14}^2}{t_{24}^2},\ (\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{G}_4^2)=\frac{t_{14}^2}{t_{34}^2},\ (\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{G}_4^1)=\frac{t_{24}^2}{t_{34}^2}.
\end{aligned}\right\}\qquad (2.3.26)$$

Porovnáním prvního řádku se vztahy (2.3.25) a (2.3.25*) nahlédneme, že $\boldsymbol{G}_2=\boldsymbol{G}_1^2$, $\boldsymbol{G}_3=\boldsymbol{G}_1^3$, $\boldsymbol{G}_4=\boldsymbol{G}_1^4$. Pak můžeme snadno ukázat, že přímka $\boldsymbol{g}_1$ (resp. $\boldsymbol{g}_2$, resp. $\boldsymbol{g}_3$, resp. $\boldsymbol{g}_4$) prochází body $\boldsymbol{G}_1^2$, $\boldsymbol{G}_1^3$, $\boldsymbol{G}_1^4$ (resp. $\boldsymbol{G}_2^1$, $\boldsymbol{G}_2^3$, $\boldsymbol{G}_2^4$, resp. $\boldsymbol{G}_3^1$, $\boldsymbol{G}_3^2$, $\boldsymbol{G}_3^4$, resp. $\boldsymbol{G}_4^1$, $\boldsymbol{G}_4^2$, $\boldsymbol{G}_4^3$). Těchto dvanáct bodů (některé mohou být i nevlastní) leží po dvou na šesti přímkách $\boldsymbol{S}_i\boldsymbol{S}_j$ a jsou v obecném případě různé. K tomu, abychom mohli sestrojit přímky $\boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{g}_2$, $\boldsymbol{g}_3$, $\boldsymbol{g}_4$, musíme sestrojit osm z těchto bodů. Sobotka se však snaží počet bodů $\boldsymbol{G}_k^l$, který musíme nezbytně sestrojit, redukovat. Formulace, které jsou částí Sobotkovy práce, budu psát kurzivou. Za citovanou pasáží budu normálním řezem písma zdůvodňovat nebo komentovat příslušnou pasáž.

„Naše úvahy vedou nejprv k následující konstrukci: Označme dané koule v libovolném uspořádání $\boldsymbol{K}_1$*,* $\boldsymbol{K}_2$*,* $\boldsymbol{K}_3$*,* $\boldsymbol{K}_4$ *a jejich středy tudíž* $\boldsymbol{S}_1$*,* $\boldsymbol{S}_2$*,* $\boldsymbol{S}_3$*,* $\boldsymbol{S}_4$*. Sestrojme na př. nejprv body* $\boldsymbol{C}_3$*,* $\boldsymbol{C}_4$ *na* $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2$ *tak, aby* $(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{C}_3)=\tau_{13}/\tau_{23}$*,* $(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{C}_4)=\tau_{14}/\tau_{24}$*, dále bod* $\boldsymbol{D}_3$ *na* $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_4$ *tak, aby* $(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_4\boldsymbol{D}_3)=\tau_{13}/\tau_{43}$*, bod* $\boldsymbol{A}_1$ *na* $\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3$ *tak, aby* $(\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{A}_1)=\tau_{21}/\tau_{31}$ *a konečně bod* $\boldsymbol{B}_1$ *na* $\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{S}_4$ *tak, aby* $(\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{S}_4\boldsymbol{B}_1)=\tau_{31}/\tau_{41}$*.“* Jak jsme již uvedli, symbolem τ_{ij} Sobotka označuje t_{ij}^2. Pak s ohledem na (2.3.26) platí: $\boldsymbol{C}_3=\boldsymbol{G}_3^4$, $\boldsymbol{C}_4=\boldsymbol{G}_4^3$, $\boldsymbol{D}_3=\boldsymbol{G}_3^2$, $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{G}_1^4$, $\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{G}_1^2$. Potom ovšem leží body $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{B}_1$ na přímce $\boldsymbol{g}_1$ a body $\boldsymbol{C}_3$, $\boldsymbol{D}_3$ na přímce $\boldsymbol{g}_3$. *„Jest pak* $\boldsymbol{g}_1=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1$ *a přímka* $\boldsymbol{p}_1$ *jest kolmá k rovině* $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{g}_1$*; dále jest* $\boldsymbol{g}_3=\boldsymbol{C}_3\boldsymbol{D}_3$ *a přímka* $\boldsymbol{p}_3$ *jest kolmá k rovině* $\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{g}_3$*.“* Sobotka označuje symbolem $\boldsymbol{p}_i$ spojnici bodů $\boldsymbol{U}_i$, $\boldsymbol{V}_i$, kterou jsme označovali symbolem $\boldsymbol{l}_i$.

„Přímka $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1$ *nechť seče* $\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_4$ *v bodě* $\boldsymbol{C}_1$*, přímka* $\boldsymbol{C}_3\boldsymbol{D}_3$ *nechť seče* $\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_4$ *v bodě* $\boldsymbol{E}_3$*.“* Přímka $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1$ leží v rovině určené trojúhelníkem $\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{S}_4$ a podle Menelaovy věty je $(\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{A}_1)(\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{S}_4\boldsymbol{B}_1)(\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_4\boldsymbol{C}_1)=1$. Odtud $(\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_4\boldsymbol{C}_1)=\tau_{12}/\tau_{14}$ a zjevně $\boldsymbol{C}_1=\boldsymbol{G}_1^3$. Protože přímka $\boldsymbol{C}_3\boldsymbol{D}_3$ náleží rovině $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_4$, můžeme obdobně ukázat, že $(\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_4\boldsymbol{E}_3)=\tau_{23}/\tau_{34}$ a $\boldsymbol{E}_3=\boldsymbol{G}_3^1$. *„Tím jsou dány*

přímky $\boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{g}_3$ řady jedné na přímkovém hyperboloidu ($\boldsymbol{g}_1\ \boldsymbol{g}_2\ \boldsymbol{g}_3\ \boldsymbol{g}_4$); přímka $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{D}_3$ náleží mu jakožto přímka řady druhé v rovině $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{S}_4$, která se hyperboloidu dotýká. Průsečík této přímky s $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_3$ označíme $\boldsymbol{E}_4$." Nebudeme komentovat část týkající se vlastností přímkového hyperboloidu. Přímka $\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{D}_3$ leží v rovině trojúhelníka $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{S}_4$. Pomocí Menelaovy věty ukážeme, že $(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{E}_4) = \tau_{14}/\tau_{34}$. Proto vzhledem k (2.3.26) platí: $\boldsymbol{E}_4 = \boldsymbol{G}_4^2$. Vidíme, že bod $\boldsymbol{E}_4$ náleží přímce $\boldsymbol{g}_4$. Na této přímce leží i výše uvažovaný bod $\boldsymbol{C}_4 = \boldsymbol{G}_4^3$. „*Tím obdržíme v $\boldsymbol{C}_4\boldsymbol{E}_4$ další přímku $\boldsymbol{g}_4$ a přímka $\boldsymbol{p}_4$ jest kolmá ku rovině $\boldsymbol{S}_4\boldsymbol{g}_4$. Průsečík přímky $\boldsymbol{g}_4$ s $\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3$ označme $\boldsymbol{F}_4$.*" Přímka $\boldsymbol{g}_4$ inciduje s rovinou trojúhelníka $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3$. Podobně jako výše ukážeme, že $(\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{F}_4) = \tau_{24}/\tau_{34}$. Pak $\boldsymbol{F}_4 = \boldsymbol{G}_4^1$.

„*Tím dospíváme ku přímce $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{E}_3\boldsymbol{F}_4$ řady druhé, která seče $\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{S}_4$ v bodě, jejž označíme $\boldsymbol{F}_2$.*" Protože bod $\boldsymbol{E}_3$ leží na přímce $\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_4$ a bod $\boldsymbol{F}_4$ náleží přímce $\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3$, inciduje přímka $\boldsymbol{e}_1$ s rovinou trojúhelníka $\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{S}_4$. Pomocí Menelaovy věty snadno ukážeme, že $(\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{S}_4\boldsymbol{F}_2) = \tau_{23}/\tau_{24}$ a $\boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{G}_2^1$. „*Dále jest $\boldsymbol{e}_4 = \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{C}_3$ přímkou hyperboloidu z řady druhé a seče $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_3$ v bodě $\boldsymbol{D}_2$.*" Přímka $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{C}_3$ náleží rovině trojúhelníka $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3$. Opět pomocí Menelaovy věty ukážeme, že $(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{D}_2) = \tau_{12}/\tau_{23}$ a $\boldsymbol{D}_2 = \boldsymbol{G}_2^4$. Vidíme, že přímka $\boldsymbol{g}_2$ prochází bodem $\boldsymbol{D}_2$ i bodem $\boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{G}_2^1$. „*Pak jest konečně $\boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{F}_2\boldsymbol{D}_2$ a přímka $\boldsymbol{p}_2$ jest kolmá ku rovině $\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{g}_2$. Seče-li $\boldsymbol{g}_2$ přímku $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_4$ v bodě $\boldsymbol{E}_2$, leží body $\boldsymbol{C}_1$, $\boldsymbol{C}_4$, $\boldsymbol{E}_2$ na přímce $\boldsymbol{e}_3$ řady druhé. Takto jsme všechny body dotyku s danými koulemi stanovili.*" Vlastnost bodu $\boldsymbol{E}_2$ (který je roven bodu $\boldsymbol{G}_2^3$) i přímky $\boldsymbol{e}_3$ je možné dokázat opět užitím Menelaovy věty.

Výše popsaná konstrukce ukazuje, že je možné pomocí pěti bodů $\boldsymbol{G}_k^l$ nalézt zbývajících sedm bodů. Viděli jsme, že body $\boldsymbol{G}_2^1, \boldsymbol{G}_3^1, \boldsymbol{G}_4^1$ (resp. $\boldsymbol{G}_1^2, \boldsymbol{G}_3^2, \boldsymbol{G}_4^2$, resp. $\boldsymbol{G}_1^3, \boldsymbol{G}_2^3, \boldsymbol{G}_4^3$, resp. $\boldsymbol{G}_1^4, \boldsymbol{G}_2^4, \boldsymbol{G}_3^4$) leží v přímce $\boldsymbol{e}_1$ (resp. $\boldsymbol{e}_2$, resp. $\boldsymbol{e}_3$, resp. $\boldsymbol{e}_4$). Přitom uvažované body neleží na přímce $\boldsymbol{g}_1$ (resp. $\boldsymbol{g}_2$, resp. $\boldsymbol{g}_3$, resp. $\boldsymbol{g}_4$). Konečně přímky $\boldsymbol{g}_1$ a $\boldsymbol{e}_1$ (resp. $\boldsymbol{g}_2$ a $\boldsymbol{e}_2$, resp. $\boldsymbol{g}_3$ a $\boldsymbol{e}_3$, resp. $\boldsymbol{g}_4$ a $\boldsymbol{e}_4$) leží v rovině $\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{S}_4$ (resp. $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{S}_4$, resp. $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_4$, resp. $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3$). Tyto vlastnosti ovšemže bezprostředně plynou z dělících poměrů (2.3.26).

Až dosud jsme se soustředili na sestrojení dotykových bodů daných orientovaných sfér $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_1$, $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_2$, $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_3$, $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_4$ a páru orientovaných sfér $\underline{\boldsymbol{\kappa}}$, $\underline{\boldsymbol{\kappa}}'$, který je řešením příslušné Apolloniovy úlohy v prostoru. Závěr své práce věnuje Sobotka konstrukci, kterou považuje za výhodnější, pokud chceme sestrojit přímo středy hledaných orientovaných sfér $\underline{\boldsymbol{\kappa}}$, $\underline{\boldsymbol{\kappa}}'$. Tato konstrukce se neopírá o žádné nové poznatky a vychází z výše uvedené konstrukce. Není nutné, abychom se jí zde zabývali.

2.4 Další úvahy o Apolloniově úloze v rovině a prostoru a příbuzných problémech

2.4.1 Úvod

Sobotka uveřejnil v témže roce jako výše studované práce ještě jedno pojednání, které nazval „*Dodatky k analytickým úvahám o kružnicích a koulích Apolloniových a isogonálních*“ (Rozpravy II. tř. České akademie věd a umění XXI, 1912, číslo 12). Tato práce je podle mě velice zajímavá a podnětná. Přestože by se mohlo z názvu zdát, že se v ní věnoval Apolloniově úloze jak v prostoru, tak v rovině, soustředil se Sobotka pouze na prostorový případ. Avšak výsledky, kterých dosáhl, není nijak těžké přenést do roviny. Sobotka to v závěru článku shrnul slovy: „*Z odvozených zde úvah a konstrukcí plynou příslušné úvahy a konstrukce pro Apollonický problém* [myšleno v rovině] *jako specielní případy přímo, tak že by bylo zbytečno je zde zvláště prováděti.*“

Nalezneme zde část, která naznačuje, že známá řešení Apolloniovy úlohy v rovině jiných autorů (Gergonnovo, Gaultierovo, Fouchéovo) využívající osy podobnosti je možné dokázat analyticky a jsou bezprostředním důsledkem Sobotkových úvah provedených v [1]. Syntetické důkazy těchto tří řešení nalezneme např. v [2]. Sobotka se přímo rovinným případem nezabýval, vše řešil pro Apolloniovu úlohu v prostoru. Vycházel přitom z výsledků práce [11]. Z jeho úvah plyne, že uvažovaná tři řešení mají svoji prostorovou analogii založenou na rovině podobnosti.

Následně se Sobotka zabýval úlohou, kdy máme ke zvoleným čtyřem koulím nalézt kouli, která je všechny protíná pod daným úhlem. Takovou kouli budeme nazývat koule izogonální vzhledem k daným čtyřem koulím. Na základě vlastnosti středů izogonálních koulí odvodil další řešení Apolloniovy úlohy v prostoru. Na závěr uvedl i další velice jednoduché řešení, jehož obměna pro rovinný případ se objevuje v literatuře (např. [2]) pod názvem Sobotkovo řešení.

V celé kapitole budeme pracovat pouze s pravoúhlou (kartézskou) soustavou souřadnic. Budeme-li v dalším textu kapitoly 2.4 hovořit o soustavě souřadnic nebo souřadnicích bodů, bude se vždy jednat o jistou kartézskou soustavu souřadnic nebo souřadnice bodu v takové soustavě souřadnic.

2.4.2 Pomocné pojmy a poznatky

A. Rovina podobnosti čtyř orientovaných sfér

K libovolným dvěma kružnicím $\boldsymbol{k}_1(\boldsymbol{S}_1, r_1)$, $\boldsymbol{k}_2(\boldsymbol{S}_2, r_2)$ s různými poloměry i středy existují právě dvě stejnolehlosti, které kružnici $\boldsymbol{k}_1$ zobrazí na kružnici $\boldsymbol{k}_2$. Podobně i ke dvěma libovolným kulovým plochám $\boldsymbol{\kappa}_1(\boldsymbol{S}_1, r_1)$, $\boldsymbol{\kappa}_2(\boldsymbol{S}_2, r_2)$, kde $\boldsymbol{S}_1 \neq \boldsymbol{S}_2$ a $r_1 \neq r_2$, existují právě dvě stejnolehlosti h_1, h_2 (h_1 se středem $\boldsymbol{E}$ a koeficientem r_2/r_1, h_2 se středem $\boldsymbol{I}$ a koeficientem $-r_2/r_1$), které kulovou plochu $\boldsymbol{\kappa}_1$ zobrazí na kulovou plochu $\boldsymbol{\kappa}_2$. Zjevně pro dělící poměry bodů $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{I}$ vzhledem k bodům $\boldsymbol{S}_1$ a $\boldsymbol{S}_2$ platí:

$(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{E}) = r_1/r_2$, $(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{I}) = -r_1/r_2$.

Pokud mají kulové plochy různé středy a stejný poloměr, existuje jedna stejnolehlost h_1 se středem $\boldsymbol{I}$ a koeficientem $-r_2/r_1 = -1$ a jedno posunutí, které kulovou plochu $\boldsymbol{\kappa}_1$ zobrazí na kulovou plochu $\boldsymbol{\kappa}_2$. Chápeme-li stejnolehlost jako homotetii s vlastním středem a posunutí jako homotetii s nevlastním středem, je nevlastní bod přímky $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2$ středem této homotetie. Označíme ho symbolem $\boldsymbol{E}$. Pak opět platí:

$(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{E}) = r_1/r_2$, $(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{I}) = -r_1/r_2$.

Jsou-li kulové plochy $\boldsymbol{\kappa}_1$ a $\boldsymbol{\kappa}_2$ soustředné, existují opět právě dvě stejnolehlosti h_1, h_2 (h_1 se středem $\boldsymbol{E}$ a koeficientem r_2/r_1, h_2 se středem $\boldsymbol{I}$ a koeficientem $-r_2/r_1$), které kulovou plochu $\boldsymbol{\kappa}_1$ zobrazí na kulovou plochu $\boldsymbol{\kappa}_2$. Přitom ovšem $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{I} = \boldsymbol{S}_1 = \boldsymbol{S}_2$. Nemá smysl uvažovat dělící poměry bodů $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{I}$ vzhledem k bodům $\boldsymbol{S}_1$ a $\boldsymbol{S}_2$. Vidíme, že pro libovolné dvě kulové plochy $\boldsymbol{\kappa}_1$ a $\boldsymbol{\kappa}_2$ je možné nalézt dva (ne nutně různé a vlastní) body $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{I}$, které nazveme středy stejnolehlosti kulových ploch $\boldsymbol{\kappa}_1$ a $\boldsymbol{\kappa}_2$. Bod $\boldsymbol{E}$ (resp. $\boldsymbol{I}$) nazýváme vnější (resp. vnitřní) střed stejnolehlosti kulových ploch $\boldsymbol{\kappa}_1$ a $\boldsymbol{\kappa}_2$.

Uvažujme, že kulové plochy $\boldsymbol{\kappa}_1$ a $\boldsymbol{\kappa}_2$ orientujeme. V dalším textu tak mohou být poloměry r_1 a r_2 jak čísla kladná, tak záporná. Libovolná stejnolehlost s kladným koeficientem nebo jakékoliv posunutí zobrazí libovolnou orientovanou úsečku na souhlasně orientovanou úsečku. Naopak libovolná stejnolehlost se záporným koeficientem zobrazí libovolnou orientovanou úsečku na nesouhlasně orientovanou úsečku. Je zjevné, že existuje jediná stejnolehlost (nebo posunutí, je-li $r_1 = r_2$), která zobrazí orientovanou sféru $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_1$ na orientovanou sféru $\underline{\kappa}_2$. Střed příslušné homotetie nazveme střed stejnolehlosti orientovaných sfér $\underline{\kappa}_1$ a $\underline{\kappa}_2$ a označíme ho symbolem $\boldsymbol{S}_{12}$. Zjevně platí, že pokud jsou sféry $\underline{\kappa}_1$ a $\underline{\kappa}_2$ orientovány souhlasně (resp. nesouhlasně) je $\boldsymbol{S}_{12} = \boldsymbol{E}$ (resp. $\boldsymbol{S}_{12} = \boldsymbol{I}$)[53]. Pokud $\boldsymbol{S}_1 \neq \boldsymbol{S}_2$, platí:

$$(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_{12}) = \frac{r_1}{r_2}. \qquad (2.4.1)$$

Uvažujme nyní čtyři orientované sféry $\underline{\kappa}_1(\boldsymbol{S}_1, r_1),\ldots, \underline{\kappa}_4(\boldsymbol{S}_4, r_4)$. Pak pro středy stejnolehlosti dvojic těchto orientovaných sfér platí věta, která je podobná větě Mongeově pro středy stejnolehlosti tří kružnic v rovině[54].

Věta 2.4.1: *Nechť jsou dány čtyři orientované sféry* $\underline{\kappa}_1(\boldsymbol{S}_1, r_1),\ldots, \underline{\kappa}_4(\boldsymbol{S}_4, r_4)$. *Označíme symbolem* $\boldsymbol{S}_{ij}$ *střed stejnolehlosti orientovaných sfér* $\underline{\kappa}_i$ *a* $\underline{\kappa}_j$. *Pak všech šest středů stejnolehlosti určených danými čtyřmi orientovanými sférami leží v jedné rovině, kterou nazveme rovina podobnosti orientovaných sfér* $\underline{\kappa}_1,\ldots, \underline{\kappa}_4$.

Důkaz:

Uvažujme nejprve, že všechny středy $\boldsymbol{S}_1,\ldots, \boldsymbol{S}_4$ jsou různé. Pro středy stejnolehlosti $\boldsymbol{S}_{12}$, $\boldsymbol{S}_{13}$, $\boldsymbol{S}_{23}$ podle (2.4.1) platí: $(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_{12}) = \frac{r_1}{r_2}$, $(\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{S}_{23}) = \frac{r_2}{r_3}$, $(\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_{13}) = \frac{r_3}{r_2}$. Protože body $\boldsymbol{S}_{12}$, $\boldsymbol{S}_{13}$, $\boldsymbol{S}_{23}$ leží na stranách trojúhelníka $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3$ a přitom $(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_{12})(\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{S}_{23})(\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_{13}) = 1$, incidují podle Menelaovy věty body $\boldsymbol{S}_{12}$, $\boldsymbol{S}_{13}$, $\boldsymbol{S}_{23}$ s jedinou přímkou, označíme ji symbolem $\boldsymbol{p}_{123}$. Obdobně můžeme ukázat, že i body $\boldsymbol{S}_{12}$, $\boldsymbol{S}_{14}$, $\boldsymbol{S}_{24}$ leží v přímce, kterou označíme $\boldsymbol{p}_{124}$. Zjevně se přímky $\boldsymbol{p}_{123}$ a $\boldsymbol{p}_{124}$ protínají v bodě $\boldsymbol{S}_{12}$ a náleží tak jedné rovině, kterou označíme symbolem $\boldsymbol{\rho}$. Vidíme, že pět středů stejnolehlosti $\boldsymbol{S}_{12}$, $\boldsymbol{S}_{13}$, $\boldsymbol{S}_{14}$, $\boldsymbol{S}_{23}$, $\boldsymbol{S}_{24}$ leží v rovině $\boldsymbol{\rho}$. Protože $(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{S}_{13})(\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{S}_4\boldsymbol{S}_{34})(\boldsymbol{S}_4\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_{14}) = \frac{r_1}{r_3}\frac{r_3}{r_4}\frac{r_4}{r_1} = 1$, můžeme pomocí Menelaovy věty ukázat, že přímka $\boldsymbol{S}_{13}\boldsymbol{S}_{14}$ prochází bodem $\boldsymbol{S}_{34}$. Proto v rovině $\boldsymbol{\rho}$ leží i šestý ze středů stejnolehlosti.

Nyní nechť je např. $\boldsymbol{S}_1 = \boldsymbol{S}_2$ a středy $\boldsymbol{S}_3$ a $\boldsymbol{S}_4$ jsou navzájem různé a přitom různé i od $\boldsymbol{S}_1$. Pak ovšem $\boldsymbol{S}_{12} = \boldsymbol{S}_1$. Protože leží středy stejnolehlosti $\boldsymbol{S}_{13}$ a $\boldsymbol{S}_{23}$ na přímce $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_3$ a středy $\boldsymbol{S}_{14}$ a $\boldsymbol{S}_{24}$ na přímce $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_4$, náleží pět středů stejnolehlosti $\boldsymbol{S}_{12}$, $\boldsymbol{S}_{13}$, $\boldsymbol{S}_{14}$, $\boldsymbol{S}_{23}$, $\boldsymbol{S}_{24}$ rovině $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{S}_4$. Protože $\boldsymbol{S}_{34}$

---

[53] Kde bod $\boldsymbol{E}$ (resp. $\boldsymbol{I}$) je vnějším (resp. vnitřním) středem stejnolehlosti příslušných neorientovaných kulových ploch κ_1 a κ_2.

[54] Viz např. [2], str. 23: „*Šest středů podobnosti tří kružnic tvoří vrcholy úplného čtyřstranu; jedna strana obsahuje tři vnější středy podobnosti a ostatní tři strany spojují vždy jeden vnější střed s dvěma vnitřními.*“ Každá z těchto čtyř přímek odpovídá při jisté orientaci těchto tří kružnic spojnici středů stejnolehlosti příslušných cyklů.

je bodem přímky $\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{S}_4$, leží i tento bod v rovině $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{S}_4$. Obdobně můžeme postupovat i v případě rovnosti jiné dvojice středů.

Pokud se rovnají právě tři, nebo právě dva a dva ze středů, leží středy podobnosti v jedné přímce - spojnici středů orientovaných sfér. Jestliže jsou všechny čtyři orientované cykly soustředné, splývají středy stejnolehlosti v jediný bod.

Tím je věta dokázána.

B. Rovnice roviny podobnosti čtyř orientovaných sfér

V dalším textu se budeme zabývat pouze případem, kdy jsou všechny středy $\boldsymbol{S}_1,\ldots,\boldsymbol{S}_4$ orientovaných sfér $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_1(\boldsymbol{S}_1, r_1),\ldots, \underline{\boldsymbol{\kappa}}_4(\boldsymbol{S}_4, r_4)$ různé. Rovinu podobnosti těchto sfér označíme symbolem $\boldsymbol{\rho}$. Nechť má tato rovina ve zvolené soustavě souřadnic rovnici tvaru $ax + by + cz + d = 0$. Zavedeme orientovanou vzdálenost bodu $\boldsymbol{X}$ o souřadnicích $[x, y, z]$ od roviny $\boldsymbol{\rho}$ jako číslo v, pro které platí:

$$v = \frac{ax + by + cz + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Pak zjevně pro dva body, které leží v téže otevřené polorovině (resp. v opačných otevřených polorovinách) s hraniční rovinou $\boldsymbol{\rho}$, má jejich orientovaná vzdálenost od roviny $\boldsymbol{\rho}$ stejné (resp. opačné) znaménko.

Vzhledem k vlastnostem středu stejnolehlosti orientovaných sfér leží středy $\boldsymbol{S}_i$, $\boldsymbol{S}_j$ dvou souhlasně (resp. nesouhlasně) orientovaných sfér $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_i$, $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_j$ v téže polorovině (resp. opačných polorovinách) s hraniční rovinou $\boldsymbol{\rho}$. Proto mají orientované vzdálenosti v_i, v_j středů $\boldsymbol{S}_i$, $\boldsymbol{S}_j$ dvou souhlasně (resp. nesouhlasně) orientovaných sfér od roviny $\boldsymbol{\rho}$ stejné (resp. opačné) znaménko. Označíme $\boldsymbol{E}_i$, $\boldsymbol{E}_j$ pravoúhlé průměty středů $\boldsymbol{S}_i$, $\boldsymbol{S}_j$ do roviny $\boldsymbol{\rho}$. Trojúhelníky $\boldsymbol{S}_i\boldsymbol{E}_i\boldsymbol{S}_{ij}$ a $\boldsymbol{S}_j\boldsymbol{E}_j\boldsymbol{S}_{ij}$ jsou podobné. Odtud:

$$\frac{|v_i|}{|v_j|} = \frac{|\boldsymbol{S}_i\boldsymbol{E}_i|}{|\boldsymbol{S}_j\boldsymbol{E}_j|} = \frac{|\boldsymbol{S}_i\boldsymbol{S}_{ij}|}{|\boldsymbol{S}_j\boldsymbol{S}_{ij}|} = |(\boldsymbol{S}_i\boldsymbol{S}_j\boldsymbol{S}_{ij})| = \frac{|r_i|}{|r_j|}.$$

Vzhledem k výše uvedené úvaze o souvislosti znamének veličin v_i, v_j s orientací sfér $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_i$, $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_j$ (tj. znaménky r_i, r_j) platí:

$$\frac{v_i}{v_j}=\frac{r_i}{r_j}, \text{ tj. } \frac{v_i}{r_i}=\frac{v_j}{r_j}.$$

Nechť má střed $\boldsymbol{S}_i$ souřadnice $[a_i, b_i, c_i]$. Pak můžeme psát:

$$\frac{v_i}{r_i}=\frac{aa_i+bb_i+cc_i+d}{r_i\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=k, \tag{2.4.2}$$

kde k je jistá konstanta.

Nechť je nyní bod $\boldsymbol{X}$ o souřadnicích $[x, y, z]$ bodem roviny $\boldsymbol{\rho}$. Pak platí:

$$ax + by + cz + d = 0. \tag{2.4.3a}$$

Dále upravíme vztah (2.4.2) pro každý ze čtyř středů $\boldsymbol{S}_1,\ldots, \boldsymbol{S}_4$. Přitom označíme $l=-k\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Odtud:

$$\begin{aligned} lr_1+aa_1+bb_1+cc_1+d&=0,\\ lr_2+aa_2+bb_2+cc_2+d&=0,\\ lr_3+aa_3+bb_3+cc_3+d&=0,\\ lr_4+aa_4+bb_4+cc_4+d&=0. \end{aligned} \tag{2.4.3b}$$

Rovnice (2.4.3a) a (2.4.3b) můžeme chápat jako homogenní soustavu pěti rovnic o pěti neznámých, jejímž netriviálním řešením jsou koeficienty a, b, c, d rovnice roviny $\boldsymbol{\rho}$ a konstanta l. Podmínkou existence netriviálního řešení je, aby determinant soustavy byl roven nule. Odtud získáme:

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z & 1\\ r_1 & a_1 & b_1 & c_1 & 1\\ r_2 & a_2 & b_2 & c_2 & 1\\ r_3 & a_3 & b_3 & c_3 & 1\\ r_4 & a_4 & b_4 & c_4 & 1 \end{vmatrix}=0. \tag{2.4.4}$$

Protože však $[x, y, z]$ jsou souřadnice libovolného bodu roviny $\boldsymbol{\rho}$, je rovnice (2.4.4) hledanou rovnicí roviny podobnosti orientovaných sfér $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_1(\boldsymbol{S}_1, r_1),\ldots, \underline{\boldsymbol{\kappa}}_4(\boldsymbol{S}_4, r_4)$, jejichž středy jsou různé.

Pokud by splývaly např. pouze středy $\boldsymbol{S}_1$ a $\boldsymbol{S}_2$, tj. $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$, přejde vztah (2.4.4) ve tvar:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \\ a_4 & b_4 & c_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Je zřejmé, že tento determinant bude roven nule, dosadíme-li za x, y, z souřadnice a_i, b_i, c_i středu $\boldsymbol{S}_i$ (i = 1, 3, 4). Výše uvedený vztah je tedy rovnicí roviny $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{S}_4$, která je v uvažovaném případě rovinou podobnosti orientovaných sfér $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_1(\boldsymbol{S}_1, r_1),\ldots, \underline{\boldsymbol{\kappa}}_4(\boldsymbol{S}_4, r_4)$. Vidíme, že rovnice (2.4.4) je rovnicí roviny podobnosti i v případě, že jsou soustředné právě dvě z daných orientovaných sfér.

C. Izogonální orientovaná sféra čtyř daných orientovaných sfér

Uvažujme nejprve dvě kulové plochy $\boldsymbol{\kappa}_1(\boldsymbol{S}_1, r_1)$, $\boldsymbol{\kappa}_2(\boldsymbol{S}_2, r_2)$, které se navzájem protínají v kružnici $\boldsymbol{k}$ (i nulového poloměru). Nechť $\boldsymbol{A}$ je bodem kružnice $\boldsymbol{k}$. Označíme ϕ velikost úhlu $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}_2$. Uvažujme dále tečnou rovinu $\boldsymbol{\tau}_1$ (resp. $\boldsymbol{\tau}_2$) kulové plochy $\boldsymbol{\kappa}_1$ (resp. $\boldsymbol{\kappa}_2$) v bodě $\boldsymbol{A}$. Pak velikost jednoho z úhlů, který svírají roviny $\boldsymbol{\tau}_1$ a $\boldsymbol{\tau}_2$, je roven ϕ, druhý má velikost $\pi - \phi$. Řekneme, že se kulové plochy $\boldsymbol{\kappa}_1$, $\boldsymbol{\kappa}_2$ protínají pod úhlem o velikosti min(ϕ, $\pi - \phi$). Označíme-li d_{12} vzdálenost středů $\boldsymbol{S}_1$ a $\boldsymbol{S}_2$, platí:

$$d_{12}^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\phi . \qquad (2.4.5)$$

Kulové plochy $\boldsymbol{\kappa}_1$, $\boldsymbol{\kappa}_2$ orientujeme. Poloměry r_1, r_2 mohou být nadále kladná i záporná čísla. Rozhodneme se, pod kterým z úhlů o velikosti ϕ nebo $\pi - \phi$ se orientované sféry $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_1$, $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_2$ protínají. Jsou-li orientovány souhlasně (resp. nesouhlasně), řekneme, že se protínají pod úhlem velikosti ϕ (resp. $\pi - \phi$). Označíme velikost úhlu, pod kterým se protínají orientované sféry $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_1$, $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_2$ symbolem ω. Protože v případě souhlasně (resp. nesouhlasně) orientovaných sfér je cos ω = cos ϕ (resp. cos ω = – cos ϕ), zjevně platí:

$$d_{12}^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\omega . \qquad (2.4.6)$$

Uvažujme dvě orientované sféry $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_1$, $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_2$, které se dotýkají. Mají-li vnitřní (resp. vnější) dotyk, jsou orientovány souhlasně (resp. nesouhlasně). Pak s ohledem na vztah (2.4.6) můžeme říci, že se orientované sféry $\underline{\kappa}_1$, $\underline{\kappa}_2$ protínají pod úhlem velikosti 0. Uvažujeme dvě orientované sféry $\underline{\kappa}_1$, $\underline{\kappa}_2$, které jsme přiřadili dvěma kulovým plochám s vnějším (resp. vnitřním) dotykem tak, že jsme je orientovali souhlasně (resp. nesouhlasně). Tyto orientované sféry sice mají společný jediný bod, ale nedotýkají se. Opět s přihlédnutím k (2.4.6) můžeme říci, že se orientované sféry $\underline{\kappa}_1$, $\underline{\kappa}_2$ protínají pod úhlem velikosti π. Jestliže se dvě orientované sféry $\underline{\kappa}_1$, $\underline{\kappa}_2$ protínají pod úhlem o velikosti $\pi/2$, řekneme, že jsou orientované sféry $\underline{\kappa}_1$, $\underline{\kappa}_2$ ortogonální nebo že orientovaná sféra $\underline{\kappa}_1$ protíná ortogonálně orientovanou sféru $\underline{\kappa}_2$.

Nechť jsou dány čtyři orientované sféry $\underline{\kappa}_1(\boldsymbol{S}_1, r_1),\ldots, \underline{\kappa}_4(\boldsymbol{S}_4, r_4)$. Nechť má střed $\boldsymbol{S}_i$ souřadnice $[a_i, b_i, c_i]$, přitom nechť jsou body $\boldsymbol{S}_i$ všechny navzájem různé. Orientovanou sféru, která protíná každou z orientovaných sfér $\underline{\kappa}_1,\ldots, \underline{\kappa}_4$ pod úhlem velikosti ω, nazveme orientovaná sféra izogonální k orientovaným sférám $\underline{\kappa}_1,\ldots, \underline{\kappa}_4$. Označíme ji symbolem $\underline{\kappa}_\omega$. V dalším textu odvodíme rovnici orientované sféry $\underline{\kappa}_\omega$.

Hledaná orientovaná sféra $\underline{\kappa}_\omega$ nechť má rovnici:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - r^2 = 0.$$

Střed orientované sféry $\underline{\kappa}_\omega$ označíme symbolem $\boldsymbol{S}_\omega$. Označíme symbolem p mocnost počátku soustavy souřadnic vzhledem ke kulové ploše κ_ω. Potom $p = a^2 + b^2 + c^2 - r^2$. Rovnici orientované sféry $\underline{\kappa}_\omega$ můžeme též zapsat ve tvaru:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + p = 0. \qquad (2.4.7)$$

Označíme symbolem d_i vzdálenost středů $\boldsymbol{S}_i$ a $\boldsymbol{S}_\omega$. Dále označíme symbolem p_i mocnost počátku soustavy souřadnic vzhledem ke kulové ploše κ_i. Zjevně platí $p_i = a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 - r_i^2$. Potom s ohledem na vztah (2.4.6) platí:

$$d_i^2 = (a-a_i)^2 + (b-b_i)^2 + (c-c_i)^2 = r^2 + r_i^2 - 2rr_i \cos\omega.$$

Odtud vyplývá:

$$p_i - 2rr_i \cos\omega - 2aa_i - 2bb_i - 2cc_i + p = 0, \quad i = 1,\ldots, 4. \qquad (2.4.8)$$

Koeficienty v rovnici (2.4.7) určíme jako řešení soustavy (2.4.8) čtyř rovnic o čtyřech neznámých a, b, c, p. Uvažujme nyní libovolný bod $\boldsymbol{X}$ o souřadnicích $[x, y, z]$ ležící na orientované sféře $\underline{\kappa}_\omega$. Rovnici (2.4.7) pak můžeme chápat jako další z rovnic, kterou splňují neznámé a, b, c, p. Aby měla soustava pěti rovnic (2.4.7) a (2.4.8) o čtyřech neznámých řešení, musí být některá z rovnic lineární kombinací ostatních. Potom je determinant tvořený koeficienty těchto rovnic roven nule. Po úpravě můžeme psát:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ p_1+2rr_1\cos\omega & a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ p_2+2rr_2\cos\omega & a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ p_3+2rr_3\cos\omega & a_3 & b_3 & c_3 & 1 \\ p_4+2rr_4\cos\omega & a_4 & b_4 & c_4 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.4.9}$$

Rovnici (2.4.9) lze chápat jako rovnici orientované sféry $\underline{\boldsymbol{K}}_{\omega}$. Obsahuje přitom veličinu r ve smyslu poloměru hledané orientované sféry $\underline{\boldsymbol{K}}_{\omega}$. Vyčíslíme-li determinant v rovnici (2.4.9), získáme po vydělení koeficientem u $x^2 + y^2 + z^2$ (který není závislý na r) rovnici:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2e(r)x - 2f(r)y - 2g(r)z + h(r) = 0,$$

kde $e(r)$, $f(r)$, $g(r)$, $h(r)$ jsou jisté výrazy obsahující veličinu r nejvýše v první mocnině. Pak zjevně $a = e(r)$, $b = f(r)$, $c = g(r)$, $a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = h(r)$. Odtud plyne:

$$[e(r)]^2 + [f(r)]^2 + [g(r)]^2 - r^2 - h(r) = 0.$$

Výraz na levé straně obsahuje veličinu r nejvýše ve druhé mocnině. Poloměr r hledané orientované sféry $\underline{\boldsymbol{K}}_{\omega}$ je tak řešením výše uvedené kvadratické rovnice. Vidíme, že existují nejvýše dvě orientované sféry, které protínají dané orientované sféry $\underline{\boldsymbol{K}}_1,\ldots,\underline{\boldsymbol{K}}_4$ pod úhlem velikosti ω. Znaménko takto určeného r současně určuje orientaci orientované sféry $\underline{\boldsymbol{K}}_{\omega}$.

Nalezneme-li orientovanou sféru, která protíná každou z orientovaných sfér $\underline{\boldsymbol{K}}_1,\ldots,\underline{\boldsymbol{K}}_4$ pod úhlem o velikosti ω, a orientujeme-li ji opačně, bude taková orientovaná sféra protínat uvažované čtyři orientované sféry pod úhlem $\pi - \omega$ (viz vztah (2.4.6)). Vidíme, že stačí nalézt pouze orientované sféry, které protínají dané čtyři orientované sféry pod úhlem o velikosti ω z intervalu $\langle 0, \pi/2\rangle$. Orientované sféry, které protínají orientované sféry $\underline{\boldsymbol{K}}_1,\ldots,\underline{\boldsymbol{K}}_4$ pod úhlem o velikosti ω' z intervalu $\langle \pi/2, \pi\rangle$, splývají s těmi, které je protínají pod úhlem o velikosti $\pi - \omega'$, pouze jsou opačně orientované.

Všimněme si ještě rovnice (2.4.9). Vidíme, že rovnice orientované sféry, která se dotýká daných orientovaných sfér $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_1,\ldots,\underline{\boldsymbol{\kappa}}_4$ (pro $\omega = 0$) je:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ p_1+2rr_1 & a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ p_2+2rr_2 & a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ p_3+2rr_3 & a_3 & b_3 & c_3 & 1 \\ p_4+2rr_4 & a_4 & b_4 & c_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Označíme symbolem ${}^{O}\boldsymbol{Q}$ orientovanou sféru, která protíná dané čtyři orientované sféry ortogonálně. Pak rovnice (2.4.9) přechází ve tvar:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ p_1 & a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ p_2 & a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ p_3 & a_3 & b_3 & c_3 & 1 \\ p_4 & a_4 & b_4 & c_4 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.4.10)$$

Vidíme, že touto rovnicí je určena právě jedna kulová plocha. Ať již ji orientujeme kladně, nebo záporně, bude orientovaná sféra ${}^{O}\boldsymbol{Q}$ protínat orientované sféry $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_1,\ldots,\underline{\boldsymbol{\kappa}}_4$ ortogonálně. Dokonce nezáleží ani na orientaci sfér $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_1,\ldots,\underline{\boldsymbol{\kappa}}_4$. Orientace sféry ${}^{O}\boldsymbol{Q}$ ani sfér $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_1,\ldots,\underline{\boldsymbol{\kappa}}_4$ tak pro nás nebude podstatná. Budeme proto o ní často hovořit jako o sféře (kulové ploše) ortogonální k orientovaným sférám $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_1,\ldots,\underline{\boldsymbol{\kappa}}_4$, resp. sféře (kulové ploše) ortogonální ke kulovým plochám $\boldsymbol{\kappa}_1,\ldots,\boldsymbol{\kappa}_4$. Značit ji budeme $\boldsymbol{Q}$. V literatuře se někdy kulová plocha $\boldsymbol{Q}$ nazývá ortotomická kulová plocha sfér $\boldsymbol{\kappa}_1,\ldots,\boldsymbol{\kappa}_4$.

Kulová plocha ortogonální ke čtyřem daným kulovým plochám bude důležitá pro naše další úvahy. Všimněme si jejích vlastností. Uvažujme nejprve dvě kulové plochy $\boldsymbol{\kappa}_1(\boldsymbol{S}_1, r_1)$, $\boldsymbol{\kappa}_2(\boldsymbol{S}_2, r_2)$, které se protínají ortogonálně. Označíme $\boldsymbol{A}$ jeden z jejich společných bodů. Pak je ovšem úhel $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}_2$ pravý. Bod $\boldsymbol{A}$ je přitom bodem dotyku jedné z tečen vedených z bodu $\boldsymbol{S}_1$ (resp. $\boldsymbol{S}_2$) ke kulové ploše $\boldsymbol{\kappa}_2$ (resp. $\boldsymbol{\kappa}_1$). Mocnost bodu $\boldsymbol{S}_1$ (resp. $\boldsymbol{S}_2$) vzhledem ke kulové ploše $\boldsymbol{\kappa}_2$ (resp. $\boldsymbol{\kappa}_1$) je tak rovna druhé mocnině poloměru r_1 (resp. r_2). Uvažujme nyní libovolné dvě kulové plochy $\boldsymbol{\kappa}_1(\boldsymbol{S}_1, r_1)$, $\boldsymbol{\kappa}_2(\boldsymbol{S}_2, r_2)$. Kulová plocha $\boldsymbol{\kappa}$ o středu $\boldsymbol{S}$ a poloměru r nechť je obě protíná ortogonálně. Pak je mocnost bodu $\boldsymbol{S}$ vzhledem k oběma kulovým plochám stejná a rovná druhé mocnině poloměru r. Bod $\boldsymbol{S}$ tedy leží v potenční rovině kulových ploch $\boldsymbol{\kappa}_1$ a $\boldsymbol{\kappa}_2$.

Zjevně musí mít kulová plocha $\boldsymbol{Q}$, která protíná ortogonálně čtyři dané kulové plochy $\boldsymbol{\kappa}_1,\ldots,\boldsymbol{\kappa}_4$ svůj střed v potenčním středu těchto čtyř kulových ploch, označíme ho symbolem $\boldsymbol{O}$.

Aby kulová plocha $\boldsymbol{Q}$ existovala, musí být bod $\boldsymbol{O}$ vnějším bodem všech sfér $\kappa_1, \dots, \kappa_4$. Poloměr kulové plochy $\boldsymbol{Q}$ je pak roven odmocnině z mocnosti bodu $\boldsymbol{O}$ vzhledem k libovolné z kulových ploch $\kappa_1, \dots, \kappa_4$. Konečně je zřejmé, že kulová plocha $\boldsymbol{Q}$ protíná libovolnou z kulových ploch κ_i ve kružnici, kterou tvoří body dotyku tečen vedených ke kulové ploše κ_i z bodu $\boldsymbol{O}$.

Tyto vlastnosti plynou ovšem i z rovnice (2.4.10) kulové plochy $\boldsymbol{Q}$. Uvažujme soustavu souřadnic s počátkem v potenčních středu $\boldsymbol{O}$ kulových ploch $\kappa_1, \dots, \kappa_4$. Označíme symbolem p mocnost bodu $\boldsymbol{O}$ vzhledem k libovolné z kulových ploch $\kappa_1, \dots, \kappa_4$. Pak je ovšem v rovnici (2.4.10) $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p$. Odtud plyne:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ p & a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ p & a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ p & a_3 & b_3 & c_3 & 1 \\ p & a_4 & b_4 & c_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Rozvineme tento determinant podle prvků prvního řádku. Doplňky prvků x, y, z zjevně obsahují dva až na konstantu identické sloupce, jsou tak rovny nule. Rovnice kulové plochy $\boldsymbol{Q}$ má tvar:

$$(x^2+y^2+z^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \\ a_4 & b_4 & c_4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p & a_1 & b_1 & c_1 \\ p & a_2 & b_2 & c_2 \\ p & a_3 & b_3 & c_3 \\ p & a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Odtud úpravou získáme:

$$(x^2+y^2+z^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \\ a_4 & b_4 & c_4 & 1 \end{vmatrix} - p\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \\ a_4 & b_4 & c_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Proto je rovnice kulové plochy $\boldsymbol{Q}$:

$$x^2+y^2+z^2-p=0.$$

Vidíme, že kulová plocha $\boldsymbol{Q}$ má svůj střed v počátku soustavy souřadnic, tj. v potenčním středu $\boldsymbol{O}$ daných čtyř kulových ploch. Poloměr kulové plochy $\boldsymbol{Q}$ je roven odmocnině z p

(pokud je p kladná), tj. odmocnině z mocnosti bodu $\boldsymbol{O}$ vzhledem k libovolné z daných kulových ploch (pokud bod $\boldsymbol{O}$ leží vně těchto kružnic).

2.4.3 Důsledky Sobotkových výsledků při řešení Apolloniovy úlohy v prostoru

Nechť jsou dány čtyři orientované sféry $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_1(\boldsymbol{S}_1, r_1),\ldots, \underline{\boldsymbol{\kappa}}_4(\boldsymbol{S}_4, r_4)$. Střed $\boldsymbol{S}_i$ nechť má souřadnice $[a_i, b_i, c_i]$. Body $\boldsymbol{S}_i$ nechť jsou navzájem různé. Vzdálenost středů $\boldsymbol{S}_i$, $\boldsymbol{S}_j$ budeme označovat d_{ij}. Rovinu podobnosti těchto orientovaných sfér označíme symbolem $\boldsymbol{\rho}$. Potenční střed těchto čtyř orientovaných sfér označíme symbolem $\boldsymbol{O}$. Dvě orientované sféry, které se dotýkají těchto čtyř orientovaných sfér (pokud existují), označíme symboly $\underline{\boldsymbol{\kappa}}$, $\underline{\boldsymbol{\kappa}}'$. Středy těchto orientovaných sfér označíme $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{S}'$, jejich poloměry označíme r_0, r_0'. Orientované sféry, které protínají dané čtyři orientované sféry pod úhlem velikosti ω (pokud existují), označíme symboly $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_\omega$, $\underline{\boldsymbol{\kappa}}'_\omega$. Jejich středy (resp. poloměry) označíme $\boldsymbol{S}_\omega, \boldsymbol{S}'_\omega$ (resp. r, r'). Symbolem $\boldsymbol{Q}$ označíme kulovou plochu, která protíná dané čtyři orientované sféry ortogonálně. Toto označení budeme používat ve zbytku kapitoly 2.4.

Nejprve se vrátíme k výsledku, který je obsažen v Sobotkově práci [11] o Apolloniově úloze v prostoru. V podkapitole 2.3.7 jsme odvodili následující konstrukci spojnice $\boldsymbol{l}_1$ bodů dotyku $\boldsymbol{U}_1$, $\boldsymbol{V}_1$ orientované sféry $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_1$ a orientovaných sfér $\underline{\boldsymbol{\kappa}}$, $\underline{\boldsymbol{\kappa}}'$. Na přímkách $\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3$, $\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_4$, $\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{S}_4$ sestrojíme body $\boldsymbol{G}_4$, $\boldsymbol{G}_3$, $\boldsymbol{G}_2$ tak, aby pro příslušné dělící poměry platilo: $(\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{G}_4) = \dfrac{t_{12}^2}{t_{13}^2}$, $(\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_4\boldsymbol{G}_3) = \dfrac{t_{12}^2}{t_{14}^2}$, $(\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{S}_4\boldsymbol{G}_2) = \dfrac{t_{13}^2}{t_{14}^2}$. Veličinu t_{ij}^2 budeme též označovat τ_{ij}. Body $\boldsymbol{G}_4$, $\boldsymbol{G}_3$, $\boldsymbol{G}_2$ leží na jedné přímce, kterou označíme symbolem $\boldsymbol{g}_1$. Rovinu $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{g}_1$ označíme γ_1. Přímka $\boldsymbol{l}_1$ je kolmice vedená z potenčního středu $\boldsymbol{O}$ k rovině γ_1.

Uvažujme nyní body $\boldsymbol{G}_4$ a $\boldsymbol{G}_2$, jejichž souřadnice jsou s ohledem na uvedené dělící poměry

$$[\frac{\tau_{13}a_2 - \tau_{12}a_3}{\tau_{13} - \tau_{12}}, \frac{\tau_{13}b_2 - \tau_{12}b_3}{\tau_{13} - \tau_{12}}, \frac{\tau_{13}c_2 - \tau_{12}c_3}{\tau_{13} - \tau_{12}}],\ [\frac{\tau_{14}a_3 - \tau_{13}a_4}{\tau_{14} - \tau_{13}}, \frac{\tau_{14}b_3 - \tau_{13}b_4}{\tau_{14} - \tau_{13}}, \frac{\tau_{14}c_3 - \tau_{13}c_4}{\tau_{14} - \tau_{13}}].$$

Není těžké ukázat, že rovnice roviny γ_1 (tj. roviny $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{G}_4\boldsymbol{G}_2$) má tvar:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ \tau_{13}-\tau_{12} & \tau_{13}a_2-\tau_{12}a_3 & \tau_{13}b_2-\tau_{12}b_3 & \tau_{13}c_2-\tau_{12}c_3 \\ \tau_{14}-\tau_{13} & \tau_{14}a_3-\tau_{13}a_4 & \tau_{14}b_3-\tau_{13}b_4 & \tau_{14}c_3-\tau_{13}c_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Determinant na levé straně této rovnice můžeme napsat jako součet dvou determinantů, které mají ve třetím řádku pouze prvky obsahující buď τ_{13}, nebo τ_{12}. Tyto determinanty můžeme podobně rozložit na součet opět dvou determinantů tak, aby měly ve čtvrtém řádku pouze prvky obsahující buď τ_{14}, nebo τ_{13}. Odtud vyplývá:

$$\tau_{13}\tau_{14}\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 1 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - \tau_{13}^2\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 1 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} - \tau_{12}\tau_{14}\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 1 & a_3 & b_3 & c_3 \\ 1 & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \tau_{12}\tau_{13}\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 1 & a_3 & b_3 & c_3 \\ 1 & a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Třetí z determinantů je zjevně nulový, rovnici je pak možné dělit τ_{13}. Levou stranu takto upravené rovnice můžeme chápat jako rozvoj jistého determinantů podle prvků např. prvního sloupce, přičemž dva z prvků tohoto sloupce jsou rovny nule. Zjevně platí:

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z & 1 \\ 0 & a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ \tau_{12} & a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ \tau_{13} & a_3 & b_3 & c_3 & 1 \\ \tau_{14} & a_4 & b_4 & c_4 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.4.11)$$

Rovnici roviny γ_1 ve tvaru (2.4.11) budeme stručně zapisovat $G_1 = 0$.

Uvažujme rovnici kulové plochy $\boldsymbol{Q}$ ve tvaru (2.4.10), kterou budeme stručně zapisovat $Q = 0$:

$$Q = \begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ p_1 & a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ p_2 & a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ p_3 & a_3 & b_3 & c_3 & 1 \\ p_4 & a_4 & b_4 & c_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

K prvkům prvního sloupce přičteme druhý sloupec násobený $-2a_1$, třetí sloupec násobený $-2b_1$, čtvrtý sloupec násobený $-2c_1$ a pátý sloupec násobený p_1. Přihlédneme k rovnici orientované sféry $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_1$ ve tvaru obdobném rovnici (2.4.7), kterou budeme stručně zapisovat $K_1 = 0$. Uvážíme, že platí:

$$p_i - 2a_i a_j - 2b_i b_j - 2c_i c_j + p_j = a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 - r_i^2 - 2a_i a_j - 2b_i b_j - 2c_i c_j + a_j^2 + b_j^2 + c_j^2 - r_j^2 =$$
$$= d_{ij}^2 - (r_i - r_j)^2 - 2r_i r_j = \tau_{ij} - 2r_i r_j .$$

Odtud vyplývá:

$$Q = \begin{vmatrix} K_1 & x & y & z & 1 \\ -2r_1^2 & a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ \tau_{12} - 2r_1 r_2 & a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ \tau_{13} - 2r_1 r_3 & a_3 & b_3 & c_3 & 1 \\ \tau_{14} - 2r_1 r_4 & a_4 & b_4 & c_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Uvažujme nyní rovnici roviny, ve které leží průnik kulové plochy $\boldsymbol{Q}$ a orientované sféry $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_1$. Tuto rovinu označíme $\boldsymbol{\pi}_1$, její rovnici budeme stručně zapisovat $P_1 = 0$. Pak zjevně platí:

$$P_1 = \begin{vmatrix} 0 & x & y & z & 1 \\ -2r_1^2 & a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ \tau_{12} - 2r_1 r_2 & a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ \tau_{13} - 2r_1 r_3 & a_3 & b_3 & c_3 & 1 \\ \tau_{14} - 2r_1 r_4 & a_4 & b_4 & c_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Odtud plyne:

$$P_1 = \begin{vmatrix} 0 & x & y & z & 1 \\ 0 & a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ \tau_{12} & a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ \tau_{13} & a_3 & b_3 & c_3 & 1 \\ \tau_{14} & a_4 & b_4 & c_4 & 1 \end{vmatrix} - 2r_1 \begin{vmatrix} 0 & x & y & z & 1 \\ r_1 & a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ r_2 & a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ r_3 & a_3 & b_3 & c_3 & 1 \\ r_4 & a_4 & b_4 & c_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Přihlédneme-li k rovnici (2.4.4) roviny podobnosti $\boldsymbol{\rho}$, kterou budeme stručně zapisovat $R = 0$, a rovnici (2.4.11) roviny $\boldsymbol{\gamma}_1$ (tj. $G_1 = 0$), můžeme psát:

$$P_1 = G_1 - 2r_1 R = 0. \qquad (2.4.12)$$

Uvážíme rovnici (2.4.9) orientované sféry $\underline{\boldsymbol{K}}_\omega$, kterou budeme stručně zapisovat $K_\omega = 0$. Potom platí:

$$K_\omega = \begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ p_1 + 2rr_1\cos\omega & a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ p_2 + 2rr_2\cos\omega & a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ p_3 + 2rr_3\cos\omega & a_3 & b_3 & c_3 & 1 \\ p_4 + 2rr_4\cos\omega & a_4 & b_4 & c_4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K_1 & x & y & z & 1 \\ 2r_1(r\cos\omega - r_1) & a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ \tau_{12} + 2r_2(r\cos\omega - r_1) & a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ \tau_{13} + 2r_3(r\cos\omega - r_1) & a_3 & b_3 & c_3 & 1 \\ \tau_{14} + 2r_4(r\cos\omega - r_1) & a_4 & b_4 & c_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Označíme symbolem $\boldsymbol{\pi}_{1\omega}$ rovinu, v níž leží průnik orientované sféry $\underline{\boldsymbol{K}}_\omega$ a orientované sféry $\underline{\boldsymbol{K}}_1$. Pokud $\omega = 0$, bereme za tuto rovinu společnou tečnou rovinu orientované sféry $\underline{\boldsymbol{K}}_\omega$ a orientované sféry $\underline{\boldsymbol{K}}_1$. Rovnici roviny $\boldsymbol{\pi}_{1\omega}$ budeme stručně psát ve tvaru $P_{1\omega} = 0$. Potom není těžké ukázat, že:

$$P_{1\omega} = G_1 + 2(r\cos\omega - r_1)R = 0. \tag{2.4.13}$$

Vidíme, že roviny $\boldsymbol{\pi}_1$ i $\boldsymbol{\pi}_{1\omega}$ procházejí průsečnicí roviny $\boldsymbol{\gamma}_1$ a roviny podobnosti $\boldsymbol{\rho}$. Obdobné úvahy můžeme provést i pro zbylé tři orientované sféry $\boldsymbol{K}_2$, $\boldsymbol{K}_3$, $\boldsymbol{K}_4$. Tento výsledek můžeme shrnout do následující věty.

Věta 2.4.2: *Potenční roviny orientovaných sfér, které protínají dané čtyři orientované sféry pod úhlem o konstantní velikosti, a jedné z těchto čtyř daných orientovaných sfér tvoří svazek rovin, který obsahuje rovinu podobnosti daných čtyř orientovaných sfér.*

Z výše uvedených úvah plyne konstrukce páru orientovaných sfér, které se dotýkají čtyř daných orientovaných sfér $\underline{\boldsymbol{K}}_1,\dots, \underline{\boldsymbol{K}}_4$. Sestrojíme kulovou ploch $\boldsymbol{Q}$, která protíná ortogonálně dané čtyři orientované sféry. Určíme rovinu $\boldsymbol{\pi}_i$, ve které leží průnik kulové plochy $\boldsymbol{Q}$ a orientované sféry $\underline{\boldsymbol{K}}_i$. Sestrojíme průsečnici $\boldsymbol{r}_i$ roviny $\boldsymbol{\pi}_i$ a roviny podobnosti $\boldsymbol{\rho}$ daných čtyř orientovaných sfér. Pak je zjevně rovina $\boldsymbol{S}_i\boldsymbol{r}_i$ rovna rovině $\boldsymbol{\gamma}_i$ a kolmice na tuto rovinu vedená potenčním středem $\boldsymbol{O}$ (středem kulové plochy $\boldsymbol{Q}$) protíná orientovanou sféru $\underline{\boldsymbol{K}}_i$ v bodech dotyku této orientované sféry a hledaných řešení příslušné Apolloniovy úlohy.

Z věty 2.4.2 plyne i toto řešení. Předpokládejme, že jsme sestrojili orientovanou sféru $\underline{\boldsymbol{K}}_\omega$, která protíná dané čtyři orientované sféry $\underline{\boldsymbol{K}}_1,\dots, \underline{\boldsymbol{K}}_4$ pod úhlem velikosti ω. Sestrojíme rovinu, v níž leží průnik orientovaných sfér $\underline{\boldsymbol{K}}_\omega$ a $\underline{\boldsymbol{K}}_i$. Průsečnice této roviny a roviny podobnosti $\boldsymbol{\rho}$ je opět přímka $\boldsymbol{r}_i$ uvažovaná v předchozím odstavci. Přímkou $\boldsymbol{r}_i$ prochází i společná tečná rovina orientované sféry $\underline{\boldsymbol{K}}_i$ a hledaného řešení příslušné Apolloniovy úlohy. Jinak řečeno: body dotyku tečných rovin vedených k orientované sféře $\boldsymbol{K}_i$ přímkou $\boldsymbol{r}_i$ jsou hledanými body dotyku páru řešení příslušné Apolloniovy úlohy. V tomto řešení můžeme vidět prostorovou analogii Fouchéova řešení Apolloniovy úlohy v rovině (viz [2]).

2.4.4 Konstrukce izogonální orientované sféry

V této podkapitole odvodíme konstukci, kterou Sobotka navrhuje pro řešení úlohy, kdy máme nalézt orientované sféry, které protínají dané čtyři orientované sféry pod úhlem o velikosti ω. Upravíme rovnici (2.4.9) hledané orientované sféry $\underline{\boldsymbol{K}}_\omega$:

$$K_\omega = \begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ p_1+2rr_1\cos\omega & a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ p_2+2rr_2\cos\omega & a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ p_3+2rr_3\cos\omega & a_3 & b_3 & c_3 & 1 \\ p_4+2rr_4\cos\omega & a_4 & b_4 & c_4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ p_1 & a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ p_2 & a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ p_3 & a_3 & b_3 & c_3 & 1 \\ p_4 & a_4 & b_4 & c_4 & 1 \end{vmatrix} + 2r\cos\omega \begin{vmatrix} 0 & x & y & z & 1 \\ r_1 & a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ r_2 & a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ r_3 & a_3 & b_3 & c_3 & 1 \\ r_4 & a_4 & b_4 & c_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Porovnáme-li tento výsledek s rovnicí roviny podobnosti daných orientovaných sfér (2.4.4) a rovnicí kulové plochy ortogonální k těmto orientovaným sférám (2.4.10), můžeme psát:

$$K_\omega = Q + 2r\cos\omega\, R = 0. \qquad (2.4.14)$$

Následuje úvaha vedoucí k větě 2.4.3, která je důležitá pro porozumění dalšímu výkladu. Sobotka její platnost mlčky předpokládal, neuváděl však žádné zdůvodnění. Rozvineme-li determinant v rovnici $K_\omega = 0$ (tj. (2.4.9)) i $Q = 0$ (tj. (2.4.10)) podle prvků prvního řádku, vidíme, že koeficienty u x^2, y^2 a z^2 jsou v obou rovnicích stejné. Pak napíšeme rovnici potenční roviny orientované sféry $K_\omega = 0$ a kulové plochy $Q = 0$ ve tvaru:

$$K_\omega - Q = 0.$$

Pokud přihlédneme k rovnici (2.4.14), vidíme, že uvažovanou potenční rovinou orientované sféry $K_\omega = 0$ a kulové plochy $Q = 0$ je rovina podobnosti daných orientovaných sfér $\underline{\boldsymbol{K}}_1, \ldots, \underline{\boldsymbol{K}}_4$. Uvažujme konečně dvě libovolné orientované sféry $\underline{\boldsymbol{K}}_\varphi$ a $\underline{\boldsymbol{K}}_\psi$, které protínají dané čtyři orientované sféry pod úhly o velikostech φ a ψ. Libovolný bod ležící v rovině podobnosti $\boldsymbol{\rho}$

daných čtyř orientovaných sfér má stejnou mocnost vzhledem k orientované sféře $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_\varphi$ a kulové ploše $\boldsymbol{Q}$, resp. $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_\psi$ a $\boldsymbol{Q}$. Odtud vidíme, že libovolný bod roviny podobnosti $\boldsymbol{\rho}$ má stejnou mocnost vzhledem k orientovaným sférám $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_\varphi$ a $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_\psi$. Platí tedy následující věta.

Věta 2.4.3: *Nechť jsou dány čtyři orientované sféry $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_1,\dots,\underline{\boldsymbol{\kappa}}_4$, z nichž žádné dvě nejsou soustředné. Uvažujme různé orientované sféry $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_\varphi$ a $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_\psi$, které protínají dané čtyři sféry po řadě pod úhly o velikosti φ a ψ. Pak je rovina podobnosti orientovaných sfér $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_1,\dots,\underline{\boldsymbol{\kappa}}_4$ potenční rovinou orientovaných sfér $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_\varphi$ a $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_\psi$.*

Volíme potenční střed $\boldsymbol{O}$ daných orientovaných sfér $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_1,\dots,\underline{\boldsymbol{\kappa}}_4$ za počátek soustavy souřadnic. Osy $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ volíme tak, aby rovina $\boldsymbol{xy}$ byla rovnoběžná s rovinou podobnosti $\boldsymbol{\rho}$ daných čtyř orientovaných sfér. Osa $\boldsymbol{z}$ je potom kolmá na rovinu $\boldsymbol{\rho}$. Rovnice roviny $\boldsymbol{\rho}$ nechť má tvar:

$R = m\,(z - e) = 0,$

kde m a e jsou jisté konstanty, které jsou voleny tak, aby rovnice $R = 0$ odpovídala rovnici (2.4.4). Přitom absolutní hodnota e je rovna vzdálenosti potenčního středu $\boldsymbol{O}$ od roviny $\boldsymbol{\rho}$. Rovnice kulové plochy $\boldsymbol{Q}$ ortogonální k daným orientovaným sférám je:

$Q = n\,(x^2 + y^2 + z^2 - p) = 0,$

kde n je jistá konstanta, která je volená tak, aby rovnice $Q = 0$ odpovídala rovnici (2.4.10).

Pak má s ohledem na (2.4.14) rovnice orientované sféry $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_\omega$ tvar:

$K_\omega = n\,(x^2 + y^2 + z^2 - p) + 2mr\cos\omega\,(z - e) = 0.$

Po úpravě můžeme psát rovnici orientované sféry $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_\omega$:

$(x^2 + y^2 + z^2 - p) - 2kr\cos\omega\,(z - e) = 0.$

Z této rovnice vidíme, že střed $\boldsymbol{S}_\omega$ orientované sféry $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_\omega$ má souřadnice $[0, 0, kr\cos\omega]$. Bod $\boldsymbol{S}_\omega$ proto leží na ose $\boldsymbol{z}$, tj. na kolmici vedené potenčním středem $\boldsymbol{O}$ k rovině podobnosti $\boldsymbol{\rho}$. Platí tedy následující věta.

Věta 2.4.4: *Střed libovolné orientované sféry, která protíná dané čtyři orientované sféry (z nichž žádné nejsou soustředné) pod úhlem konstantní velikosti, leží na kolmici vedené potenčním středem daných čtyř orientovaných sfér k rovině podobnosti daných čtyř orientovaných sfér.*

Označíme symbolem s třetí souřadnici bodu $\boldsymbol{S}_\omega$. Absolutní hodnota s je rovna vzdálenosti bodu $\boldsymbol{S}_\omega$ od potenčního středu $\boldsymbol{O}$ daných orientovaných sfér. Pak platí:

$$\frac{r\cos\omega}{s} = \frac{1}{k} = \text{konst.} \tag{2.4.15}$$

Označili jsme symbolem r_0 (resp. r_0') poloměr orientované sféry $\underline{\kappa}$ (resp. $\underline{\kappa}'$), která se dotýká orientovaných sfér $\underline{\kappa}_1, \ldots, \underline{\kappa}_4$. Označení volíme tak, aby $\underline{\kappa}$ (resp. $\underline{\kappa}'$) byla kladně (resp. záporně) orientovaná. Středy těchto orientovaných sfér jsme označili symboly $\boldsymbol{S}$ a $\boldsymbol{S}'$. Body $\boldsymbol{S}$ i $\boldsymbol{S}'$ leží podle věty 2.4.4 na kolmici k rovině podobnosti $\boldsymbol{\rho}$ potenčním středem $\boldsymbol{O}$, tj. ose na $\boldsymbol{z}$. Třetí souřadnici bodu $\boldsymbol{S}$ (resp. $\boldsymbol{S}'$) označíme s_0 (resp. s_0'). Osu $\boldsymbol{z}$ orientujeme tak, aby s_0 (resp. s_0') bylo číslo kladné (resp. záporné). Ze vztahu (2.4.15) plyne:

$$\frac{r\cos\omega}{s} = \frac{r_0}{s_0} = \frac{r_0'}{s_0'}. \tag{2.4.16}$$

Vidíme, že všechny kladně (resp. záporně) orientované sféry, které protínají dané čtyři orientované sféry pod úhlem o velikosti ω z intervalu $\langle 0, \pi/2)$ (resp. $(\pi/2, \pi\rangle$), leží na polopřímce $\boldsymbol{OS}$. Všechny kladně (resp. záporně) orientované sféry, které protínají dané čtyři orientované sféry pod úhlem o velikosti ω z intervalu $(\pi/2, \pi\rangle$ (resp. $\langle 0, \pi/2)$), leží na polopřímce $\boldsymbol{OS}'$.

V dalším textu ukážeme, jak je možné v případě, že známe středy $\boldsymbol{S}$ a $\boldsymbol{S}'$, sestrojit středy orientovaných sfér $\underline{\kappa}_\omega$, $\underline{\kappa}'_\omega$. Označení volíme opět tak, aby sféra $\underline{\kappa}_\omega$ (resp. $\underline{\kappa}'_\omega$) byla orientována kladně (resp. záporně). Již víme, že bod $\boldsymbol{O}$ leží vždy mezi středy $\boldsymbol{S}$ a $\boldsymbol{S}'$. Sestrojíme kulovou plochu $\boldsymbol{Q}$ (se středem v bodě $\boldsymbol{O}$). Vedeme bodem $\boldsymbol{S}_1$ a osou $\boldsymbol{z}$ rovinu $\boldsymbol{\alpha}$ (bod $\boldsymbol{O}$ v ní nutně leží), která protne kulovou plochu $\boldsymbol{Q}$ v hlavní kružnici $\boldsymbol{q}$, orientovanou sféru $\underline{\kappa}_1$ v hlavní kružnici $\boldsymbol{k}_1$ a rovinu $\boldsymbol{\rho}$ v přímce $\boldsymbol{r}$. Kružnice $\boldsymbol{k}_\omega$ a $\boldsymbol{k}'_\omega$, jejichž středy leží na ose $\boldsymbol{z}$ a které v rovině $\boldsymbol{\alpha}$ protnou kružnici $\boldsymbol{k}_1$ pod úhlem ω[55], jsou zjevně průnikem hledaných orientovaných sfér $\underline{\kappa}_\omega$ a $\underline{\kappa}'_\omega$ a roviny $\boldsymbol{\alpha}$. Protože středy $\boldsymbol{S}_\omega$, $\boldsymbol{S}'_\omega$ leží na ose $\boldsymbol{z}$ a tím i v rovině $\boldsymbol{\alpha}$, jsou kružnice $\boldsymbol{k}_\omega$ a $\boldsymbol{k}'_\omega$ hlavními kružnicemi orientovaných sfér $\underline{\kappa}_\omega$ a $\underline{\kappa}'_\omega$. Středy kružnic $\boldsymbol{k}_\omega$ a $\boldsymbol{k}'_\omega$ jsou tak hledanými body $\boldsymbol{S}_\omega$, $\boldsymbol{S}'_\omega$. Poloměry kružnic $\boldsymbol{k}_\omega$ a $\boldsymbol{k}'_\omega$ jsou přitom rovny r a r'. Víme též, že body $\boldsymbol{S}$ a $\boldsymbol{S}'$ leží v rovině $\boldsymbol{\alpha}$. Průnikem roviny $\boldsymbol{\alpha}$ s orientovanými sférami $\underline{\kappa}$ a $\underline{\kappa}'$

[55] Velikost úhlu, pod kterým se protínají dvě kružnice, můžeme definovat obdobně, jako jsme definovali velikost úhlu, pod kterým se protínají dvě kulové plochy.

jsou hlavní kružnice těchto orientovaných sfér, označíme je $\boldsymbol{k}$ a $\boldsymbol{k'}$. Jejich poloměry jsou ovšem rovny r_0 a r_0'. V dalším textu provedeme veškeré konstrukce a úvahy v rovině α.

Označíme symbolem $\boldsymbol{L}$ patu kolmice vedené z potenčního středu $\boldsymbol{O}$ k přímce $\boldsymbol{r}$ (a současně i k rovině podobnosti ρ). Dále označíme $\boldsymbol{U}$ průsečík přímky $\boldsymbol{r}$ a chordály kružnic $\boldsymbol{q}$ a $\boldsymbol{k}_1$. Sestrojíme kružnici $\boldsymbol{u}$ se středem $\boldsymbol{U}$, která protíná ortogonálně kružnici $\boldsymbol{k}_1$. Podobně jako v případě kulových ploch můžeme ukázat, že středy kružnic, které protínají ortogonálně dvě dané kružnice, leží na chordále těchto kružnic. Pak kružnice $\boldsymbol{u}$ protíná ortogonálně i kružnici $\boldsymbol{q}$. Na základě věty 2.4.3 je možné ukázat, že přímka $\boldsymbol{r}$ je chordálou kružnic $\boldsymbol{q}$ a $\boldsymbol{k}_\omega$ (resp. $\boldsymbol{k'}_\omega$). Kružnice $\boldsymbol{u}$ tak protíná ortogonálně i kružnici $\boldsymbol{k}_\omega$ (resp. $\boldsymbol{k'}_\omega$).

Protože jsme ukázali, že $\boldsymbol{S}_\omega = \boldsymbol{S}'_{\pi-\omega}, \boldsymbol{S}'_\omega = \boldsymbol{S}_{\pi-\omega}$, stačí nalézt konstrukci bodů $\boldsymbol{S}_\omega, \boldsymbol{S}'_\omega$ pro velikost úhlu ω v intervalu $(0, \pi/2)$. Potom budou body $\boldsymbol{S}_\omega$, $\boldsymbol{S}$ (resp. $\boldsymbol{S}'_\omega$, $\boldsymbol{S'}$) ležet na téže polopřímce určené osou z a hraničním bodem $\boldsymbol{O}$. Ve své práci Sobotka odvodil konstrukce bodů $\boldsymbol{S}_\omega, \boldsymbol{S}'_\omega$ v závislosti na vzájemné poloze kružnice $\boldsymbol{q}$ a přímky $\boldsymbol{r}$ (tj. kulové plochy $\boldsymbol{Q}$ a roviny podobnosti ρ). Důsledkem těchto úvah bude i jistý poznatek, který nám umožní odvodit další z řešení Apolloniovy úlohy v prostoru.

1. Přímka $\boldsymbol{r}$ je tečnou kružnice $\boldsymbol{q}$.

Bodem dotyku je zjevně bod $\boldsymbol{L}$. Protože přímka $\boldsymbol{r}$ je chordálou kružnic $\boldsymbol{q}$ a $\boldsymbol{k}_\omega$ (resp. $\boldsymbol{k'}_\omega$), musí se přímka $\boldsymbol{r}$ dotýkat v bodě $\boldsymbol{L}$ i kružnice $\boldsymbol{k}_\omega$ (resp. $\boldsymbol{k'}_\omega$). Body $\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{S}_\omega, \boldsymbol{S}'_\omega$ leží na ose z. Pro vzdálenosti těchto bodů platí:

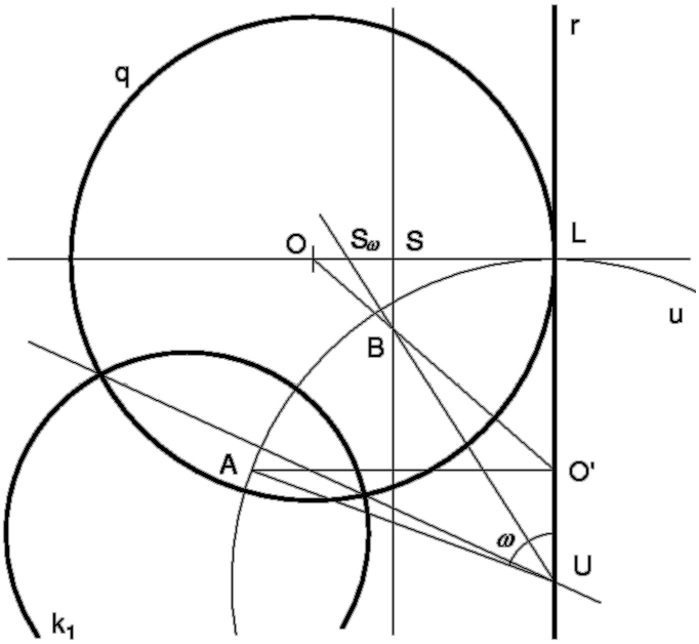
$|\boldsymbol{LS}| = r_0$, $|\boldsymbol{OS}| = s_0$, $|\boldsymbol{LS}_\omega| = |r|$, $|\boldsymbol{OS}_\omega| = |s|$, $|\mathrm{L}\boldsymbol{S}'_\omega| = |r'|$, $|\mathrm{O}\boldsymbol{S}'_\omega| = |s'|$.

Z těchto vztahů a rovnosti (2.4.16) plyne:

$$|(\boldsymbol{LOS}_\omega\boldsymbol{S})| = |(\boldsymbol{LOS}'_\omega\boldsymbol{S})| = \frac{1}{|\cos\omega|}.$$

Výše jsme ukázali, jak souvisí uspořádání bodů $\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{S}_\omega, \boldsymbol{S}'_\omega$ s velikostí úhlu ω a znaménkem r_0, r a r'. Není těžké ukázat, že:

$$(\boldsymbol{LOS}_\omega\boldsymbol{S}) = \frac{1}{\cos\omega}, \quad (\boldsymbol{LOS}'_\omega\boldsymbol{S}) = -\frac{1}{\cos\omega}. \qquad (2.4.17).$$



Obr. 2.4.1

Tyto dvojpoměry nám umožní sestrojit body S_ω, S'_ω. Nejprve odvodíme konstrukci bodu S_ω (viz obr. 2.4.1). Kružnice $\boldsymbol{u}$ zjevně prochází bodem $\boldsymbol{L}$. Na kružnici $\boldsymbol{u}$ sestrojíme bod $\boldsymbol{A}$ tak, aby $|\angle LUA| = \omega$. Označíme $\boldsymbol{O'}$ pravoúhlý průmět bodu $\boldsymbol{A}$ do přímky $\boldsymbol{r}$. Pak zjevně platí:

$$(LO'U) = \frac{1}{\cos\omega}.$$

Pokud označíme R_∞ nevlastní bod přímky $\boldsymbol{r}$, můžeme též psát:

$$(LO'UR_\infty) = \frac{1}{\cos\omega}.$$

Bodem $\boldsymbol{S}$ vedeme rovnoběžku s přímkou $\boldsymbol{r}$ a její průsečík s přímkou $\boldsymbol{OO'}$ označíme $\boldsymbol{B}$. Body $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{O'}$, $\boldsymbol{U}$ a R_∞ vedeme přímky procházející bodem $\boldsymbol{B}$. Tyto přímky protnou osu $\boldsymbol{z}$ po řadě v bodech $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{U'}$, $\boldsymbol{S}$. Potom podle věty 2.1.3 platí:

$$(LOU'S) = (LO'UR_\infty) = \frac{1}{\cos\omega}.$$

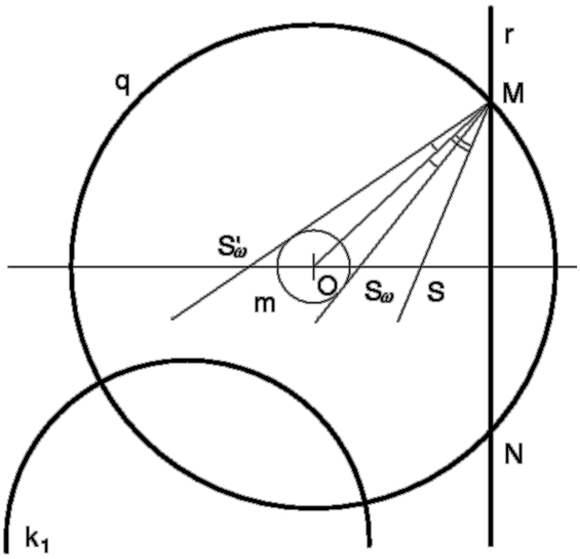
S ohledem na dvojpoměr (2.4.17) vidíme, že $S_\omega = U'$. Tím jsme bod S_ω sestrojili. Hledaná kružnice k_ω má poloměr $r = |S_\omega L|$.

V případě konstrukce bodu S'_ω postupujeme podobně. Pouze místo bodu $\boldsymbol{A}$ sestrojíme na kružnici $\boldsymbol{u}$ bod $\boldsymbol{A'}$ tak, aby $|\angle LUA'| = \pi - \omega$. Ze vztahů (2.4.17) plyne důležitá vlastnost bodů S_ω, S'_ω:

$$(\boldsymbol{LOS}_\omega \boldsymbol{S}'_\omega) = \frac{(\boldsymbol{LOS}_\omega)}{(\boldsymbol{LOS}'_\omega)} = \frac{(\boldsymbol{LOS}_\omega)(\boldsymbol{LOS})}{(\boldsymbol{LOS})(\boldsymbol{LOS}'_\omega)} = \frac{(\boldsymbol{LOS}_\omega \boldsymbol{S})}{(\boldsymbol{LOS}'_\omega \boldsymbol{S})} = -1.$$

Označíme symbolem $\boldsymbol{V}$ pól přímky $\boldsymbol{r}$ vzhledem ke kružnici $\boldsymbol{q}$ (tj. $\boldsymbol{V}$ je také pól roviny $\boldsymbol{\rho}$ vzhledem ke kulové ploše $\boldsymbol{Q}$). Pak ovšem $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{L}$. Vidíme, že body $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{S}_\omega$, $\boldsymbol{S}'_\omega$ se na ose $\boldsymbol{z}$ harmonicky oddělují. Uvedené tvrzení platí i pro $\omega = 0$, tj. body $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{S'}$.

2. Přímka $\boldsymbol{r}$ je sečnou kružnice $\boldsymbol{q}$.



Obr. 2.4.2

Označíme $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ průsečíky přímky $\boldsymbol{r}$ a kružnice $\boldsymbol{q}$ (viz obr. 2.4.2). Již víme, že přímka $\boldsymbol{r}$ je chordálou kružnic $\boldsymbol{q}$ a $\boldsymbol{k}_\omega$ (resp. $\boldsymbol{k'}_\omega$). Kružnice $\boldsymbol{k}_\omega$ a $\boldsymbol{k'}_\omega$ tak procházejí vždy body $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$. Uvažujme nyní trojúhelníky $\boldsymbol{OS}_\omega\boldsymbol{M}$ a $\boldsymbol{O}\,\boldsymbol{S}'_\omega\,\boldsymbol{M}$. Označíme velikosti úhlů: $|\angle \boldsymbol{OMS}_\omega| = \varphi$, $|\angle \boldsymbol{OM}\ \boldsymbol{S}'_\omega| = \varphi'$, $|\angle \boldsymbol{MOS}_\omega| = \psi$. Protože bod $\boldsymbol{O}$ odděluje středy $\boldsymbol{S}_\omega, \boldsymbol{S}'_\omega$, platí $|\angle \boldsymbol{MO}\,\boldsymbol{S}'_\omega| = \pi - \psi$. Dále platí:

$$\frac{|\boldsymbol{S}_\omega \boldsymbol{M}|}{|\boldsymbol{S}_\omega \boldsymbol{O}|} = \frac{\sin\psi}{\sin\varphi}, \quad \frac{|\boldsymbol{S}'_\omega \boldsymbol{M}|}{|\boldsymbol{S}'_\omega \boldsymbol{O}|} = \frac{\sin(\pi-\psi)}{\sin\varphi'} = \frac{\sin\psi}{\sin\varphi'}.$$

Odtud vyplývá:

$$\frac{\sin\varphi'}{\sin\varphi} = \frac{|\boldsymbol{S}_\omega \boldsymbol{M}|}{|\boldsymbol{S}_\omega \boldsymbol{O}|}\frac{|\boldsymbol{S}'_\omega \boldsymbol{O}|}{|\boldsymbol{S}'_\omega \boldsymbol{M}|} = \frac{|r \cdot s'|}{|s \cdot r'|}.$$

S ohledem na (2.4.16) platí, že $r/s = r'/s'$. Pak $\varphi = \varphi'$. Vidíme, že přímky $\boldsymbol{S_\omega M}$ a $\boldsymbol{S'_\omega}$M jsou souměrné podle přímky ***OM***.

Označíme velikost úhlu ***OMS*** symbolem φ_0. Pak platí:

$$\frac{r}{s} = \frac{\sin\psi}{\sin\varphi}, \frac{r_0}{s_0} = \frac{\sin\psi}{\sin\varphi_0}.$$

Odtud vzhledem ke vztahu (2.4.16) vyplývá:

$$\sin\varphi = \frac{s}{r}\sin\psi = \frac{s}{r}\frac{r_0}{s_0}\sin\varphi_0 = \cos\omega\sin\varphi_0.$$

Označíme d_0 (resp. d) vzdálenost bodu ***O*** od přímky ***SM*** (resp. $\boldsymbol{S'_\omega M}$). Potom můžeme psát:

$$\frac{d}{d_0} = \frac{|\boldsymbol{OM}|\sin\varphi}{|\boldsymbol{OM}|\sin\varphi_0} = \cos\omega.$$

Body $\boldsymbol{S_\omega}, \boldsymbol{S'_\omega}$ tak můžeme sestrojit pomocí následující konstrukce. Určíme vzdálenost d_0 bodu ***O*** od přímky ***SM***. Sestrojíme úsečku o velikosti $d = d_0 \cos\,\omega$. Okolo bodu ***O*** opíšeme kružnici ***m*** o poloměru d. Tečny vedené z bodu ***M*** ke kružnici ***m***, které jsou zjevně souměrné podle přímky ***OM***, protínají přímku ***OS*** v hledaných bodech $\boldsymbol{S_\omega}, \boldsymbol{S'_\omega}$. Hledané kružnice $\boldsymbol{k_\omega}$ a $\boldsymbol{k'_\omega}$ mají poloměry $r = |\boldsymbol{S_\omega M}|$ a $r' = |\boldsymbol{S'_\omega M}|$.

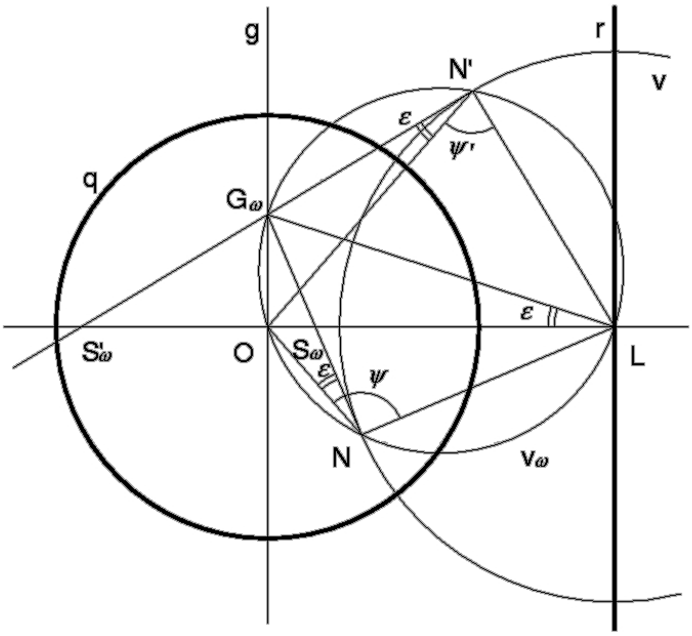
Podobně jako v předchozím případě uvážíme pól ***V*** přímky ***r*** vzhledem ke kružnici ***q***. Zjevně je úhel ***OMV*** pravý. Dvojpoměr bodů $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{O}, \boldsymbol{S_\omega}, \boldsymbol{S'_\omega}$ je stejný jako dvojpoměr přímek, které spojují tyto body s bodem ***M***. Proto (i s ohledem na orientaci příslušných úhlů) platí:

$$(\boldsymbol{VOS_\omega S'_\omega}) = \frac{\sin[-(\pi/2-\varphi)]}{\sin\varphi}\frac{\sin(-\varphi)}{\sin[-(\pi/2+\varphi)]} = -1.$$

Opět vidíme, že se body $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{O}, \boldsymbol{S_\omega}, \boldsymbol{S'_\omega}$ na ose ***z*** harmonicky oddělují. Uvedené tvrzení platí i pro $\omega = 0$, tj. body ***S***, ***S'***.

3. Přímka ***r*** je vnější přímkou kružnice ***q***.

Sestrojíme kružnici $\boldsymbol{v}$ se středem v bodě $\boldsymbol{L}$[56], která ortogonálně protíná kružnici $\boldsymbol{q}$ (viz obr. 2.4.3). Poloměr kružnice $\boldsymbol{v}$ označíme symbolem t. Označíme symbolem $\boldsymbol{N}$ (resp. $\boldsymbol{N'}$) průsečík kružnic $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{k}_\omega$ (resp. $\boldsymbol{k'}_\omega$). Velikost úhlu $\boldsymbol{ONL}$ (resp. $\boldsymbol{ON'L}$) označíme ψ (resp. ψ'), označíme β velikost úhlu $\boldsymbol{LON}$. Protože střed kružnice $\boldsymbol{v}$ leží na chordále kružnic $\boldsymbol{q}$ a $\boldsymbol{k}_\omega$ (resp. $\boldsymbol{k'}_\omega$) (tj. přímce $\boldsymbol{r}$), protíná kružnice $\boldsymbol{v}$ ortogonálně i kružnici $\boldsymbol{k}_\omega$ (resp. $\boldsymbol{k'}_\omega$). Potom jsou úhly $\boldsymbol{S_\omega NL}$ a $\boldsymbol{S'_\omega N'L}$ pravé. Předpokládejme, že body $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{S}_\omega$ jsou vnitřními body úsečky $\boldsymbol{LO}$ (pokud by tomu tak nebylo, stačí změnit orientaci daných čtyř orientovaných sfér $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_1,\ldots,\underline{\boldsymbol{\kappa}}_4$).



Obr. 2.4.3

Z vlastností trojúhelníku $\boldsymbol{ONL}$ (resp. $\boldsymbol{OS_\omega N}$) odvodíme:

$$\sin\beta = \frac{t}{|e|}\sin\psi, (\text{resp.} \sin\beta = \frac{r}{s}\sin(\psi - \pi/2) = -\frac{r}{s}\cos\psi).$$

Odtud získáme:

$$\operatorname{cotg}\psi = -\frac{st}{r|e|}$$

Označíme symbolem $\boldsymbol{N}_0$ průsečík kružnic $\boldsymbol{k}$ a $\boldsymbol{q}$. Pokud označíme ψ_0 velikost úhlu $\boldsymbol{ON_0L}$. Pak zjevně platí:

$$\operatorname{cotg}\psi_0 = -\frac{s_0 t}{r_0|e|}.$$

[56] Viz výše: $\boldsymbol{L}$ je pata kolmice vedené z potenčního středu $\boldsymbol{O}$ k přímce $\boldsymbol{r}$ (resp. rovině podobnosti $\boldsymbol{\rho}$).

Ze vztahu (2.4.16) plyne:

$$\operatorname{cotg}\psi = \operatorname{cotg}\psi_0 \cos\omega . \tag{2.4.18a}$$

Pomocí vlastností trojúhelníků ***ON'L*** a $\boldsymbol{O}\,\boldsymbol{S}'_{\omega}$***N'*** ukážeme, že platí:

$$\operatorname{cotg}\psi' = \frac{s't}{r'|e|}.$$

Odtud vyplývá:

$$\operatorname{cotg}\psi' = -\operatorname{cotg}\psi_0 \cos\omega . \tag{2.4.18b}$$

Ze vztahů (2.4.18a) a (2.4.18b) plyne, že cotg ψ = – cotg ψ', tj. $\psi + \psi' = \pi$. Pak je ovšem možné čtyřúhelníku ***ONLN'*** opsat kružnici, kterou označíme symbolem $\boldsymbol{v}_{\omega}$. V dalším textu volím jiný přístup k problematice než Sobotka. Jeho výklad vyžaduje poznatky, které výrazně přesahují okruh předpokládaných znalostí absolventů učitelství matematiky na českých vysokých školách. Body ***N*** a ***N'*** zjevně leží v opačných polorovinách s hraniční přímkou ***OL***. Bod $\boldsymbol{S}_{\omega}$ je vnitřním bodem kružnice $\boldsymbol{v}_{\omega}$. Označíme symbolem $\boldsymbol{G}_{\omega}$ průsečík přímky $\boldsymbol{NS}_{\omega}$ a kružnice $\boldsymbol{v}_{\omega}$, tento bod leží určitě ve stejné polorovině s hraniční přímkou ***OL*** jako bod ***N'***. Potom pro velikosti obvodových úhlů platí $|\angle \boldsymbol{OG}_{\omega}\boldsymbol{L}| = |\angle \boldsymbol{ON'L}| = \psi'$. Dále platí $|\angle \boldsymbol{ON'G}_{\omega}| = |\angle \boldsymbol{OLG}_{\omega}| = |\angle \boldsymbol{ONG}_{\omega}|$, velikosti těchto úhlů označíme ε. Protože $|\angle \boldsymbol{ONL}| - |\angle \boldsymbol{ONS}_{\omega}| = |\angle \boldsymbol{S}_{\omega}\boldsymbol{NL}|$, platí $\psi - \varepsilon = \pi/2$. Dále můžeme psát, že $|\angle \boldsymbol{G}_{\omega}\boldsymbol{N'L}| = |\angle \boldsymbol{ON'L}| + |\angle \boldsymbol{ON'G}_{\omega}| = \psi' + \varepsilon = (\pi - \psi) + \varepsilon = \pi/2$. Vidíme, že úhel $\boldsymbol{G}_{\omega}\boldsymbol{N'L}$ je pravý, pravý je však i úhel $\boldsymbol{S}'_{\omega}\boldsymbol{N'L}$. Odtud vidíme, že i přímka $\boldsymbol{S}'_{\omega}\boldsymbol{N'}$ protíná kružnici $\boldsymbol{v}_{\omega}$ v bodě $\boldsymbol{G}_{\omega}$. Všimněme si konečně trojúhelníku $\boldsymbol{OLG}_{\omega}$. Velikost jeho vnitřního úhlu při vrcholu ***L*** (resp. $\boldsymbol{G}_{\omega}$) je ε (resp. ψ'). Potom je ovšem úhel $\boldsymbol{LOG}_{\omega}$ pravý. Bod $\boldsymbol{G}_{\omega}$ proto vždy leží na kolmici k přímce ***OL*** vedené bodem ***O***, tuto přímku označíme symbolem ***g***.

Vidíme, že tečny kružnice ***v*** z bodu $\boldsymbol{G}_{\omega}$ protínají přímku ***OL*** v bodech $\boldsymbol{S}_{\omega}, \boldsymbol{S}'_{\omega}$. Vedeme bodem ***S*** tečnu kružnice ***v***, přitom volíme tu, jež prochází průsečíkem $\boldsymbol{N}_0$ kružnic ***k*** a ***v***. Označíme $\boldsymbol{G}_0$ průsečík této tečny a přímky ***g***. Pak z výše uvedeného plyne, že $|\angle \boldsymbol{OG}_0\boldsymbol{L}| = \pi - \psi_0$. Dále jsme ukázaly, že $|\angle \boldsymbol{OG}_{\omega}\boldsymbol{L}| = \psi'$. Uvážíme vztah (2.4.18b):

$$\operatorname{cotg}\psi' = -\operatorname{cotg}\psi_0 \cos\omega = \operatorname{cotg}(\pi - \psi_0)\cos\omega .$$

Odtud plyne:

$$\frac{|OG_\omega|}{|OL|} = \frac{|OG_0|}{|OL|}\cos\omega.$$

Vidíme, že stačí na polopřímce OG_0 sestrojit bod G_ω tak, aby $|OG_\omega| = |OG_0|\cos\omega$. Tečny z bodu G_ω ke kružnici v určují na přímce OL středy S_ω, S'_ω. Označíme body dotyku těchto tečen N a N'. Hledané kružnice k_ω a k'_ω mají poloměry $r = |S_\omega N|$ a $r' = |S'_\omega N'|$. Označíme V pól přímky r vzhledem ke kružnici q. Tento bod je nutně průsečíkem přímky OL a spojnice průsečíků kružnic q a v (které se protínají ortogonálně). Bod V je ovšem i pólem přímky g vzhledem ke kružnici v. Polára libovolného bodu na přímce g tak nutně prochází bodem V. Proto bodem V prochází přímka NN', která je polárou bodu G_ω.

K základním poznatkům projektivní geometrie (viz např. [9]) patří následující skutečnost. Uvažujme regulární kuželosečku c a libovolný bod A, který na ní neleží. Označíme a poláru tohoto bodu vzhledem ke kuželosečce c. Bodem A vedeme libovolnou sečnu p kuželosečky c. Označíme A' průsečík přímek p a a. Označíme X, Y průsečíky přímky p a kuželosečky c. Pak $(AA'XY) = -1$. Vrátíme se k výše studované situaci. Polárou bodu V vzhledem ke kružnici v je zjevně přímka g. Označíme O' průsečík přímky NN' a přímky g. Pak $(VO'NN') = -1$. Vedeme bodem G_ω přímky procházející po řadě body V, O', N, N'. Tyto přímky protínají přímku OL po řadě v bodech V, O, S_ω, S'_ω. Pak ovšem $(VOS_\omega S'_\omega) = -1$. Vidíme, že se body V, O, S_ω, S'_ω i v tomto případě na ose z harmonicky oddělují. Uvedené tvrzení platí i pro $\omega = 0$, tj. body S, S'.

Věta 2.4.5: *Nechť jsou dány orientované sféry $\underline{\kappa}_1, \ldots, \underline{\kappa}_4$ s navzájem různými středy. Nechť je rovina $\boldsymbol{\rho}$ rovinou podobnosti těchto orientovaných sfér. Nechť je dáno číslo ω z intervalu $\langle 0, \pi\rangle$ různé od $\pi/2$. Nechť orientované sféry sfér $\underline{\kappa}_\omega$, $\underline{\kappa'}_\omega$ protínají orientované sféry $\underline{\kappa}_1, \ldots, \underline{\kappa}_4$ pod úhlem o velikosti ω. Nechť kulová plocha Q protíná ortogonálně orientované sféry $\underline{\kappa}_1, \ldots, \underline{\kappa}_4$. Označíme symboly O potenční střed daných čtyř orientovaných sfér, V pól roviny $\boldsymbol{\rho}$ vzhledem ke kulové ploše Q a S_ω, S'_ω středy orientovaných sfér $\underline{\kappa}_\omega$, κ'_ω. Pak pro dvojpoměr těchto čtyř bodů platí:*

$$(VOS_\omega S'_\omega) = -1.$$

V předchozím textu jsme ukázali platnost tvrzení pro ω z intervalu $\langle 0, \pi/2)$. Pro velikost ω z intervalu $(\pi/2, \pi\rangle$ můžeme psát:

$$(\boldsymbol{VOS}_{\omega}\boldsymbol{S}'_{\omega}) = (\boldsymbol{VOS}'_{\pi-\omega}\boldsymbol{S}_{\pi-\omega}) = \frac{1}{(\boldsymbol{VOS}_{\pi-\omega}\boldsymbol{S}'_{\pi-\omega})} = -1.$$

Pomocí věty 2.4.5 můžeme odvodit následující řešení Apolloniovy úlohy v prostoru. Rovinu, ve které leží průnik kulové plochy $\boldsymbol{Q}$ a orientované sféry $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_1$ jsme označili $\boldsymbol{\pi}_1$. Průsečnici rovin $\boldsymbol{\pi}_1$ a $\boldsymbol{\rho}$ jsme značili symbolem $\boldsymbol{r}_1$. Protože je dvojpoměr bodů $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{S'}$ roven –1, bude roven –1 i dvojpoměr přímek $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S'}$. Na přímkách $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}$ a $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S'}$ leží body $\boldsymbol{U}_1$ a $\boldsymbol{V}_1$ (tak jsme označili body dotyku orientované sféry $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_1$ a páru řešení příslušné Apolloniovy úlohy). Přímka $\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{V}_1$ prochází potenčním středem $\boldsymbol{O}$. Označíme $\boldsymbol{V'}$ průsečík přímek $\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{V}_1$ a $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{V}$. Je-li dvojpoměr přímek $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S'}$ roven –1, je i dvojpoměr $(\boldsymbol{V'OU}_1\boldsymbol{V}_1) = -1$. Uvažované přímky leží v rovině $\boldsymbol{\alpha}$, která je kolmá k přímce $\boldsymbol{r}_1$. Pak můžeme k přímkám $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S'}$ vést přímkou $\boldsymbol{r}_1$ po řadě roviny $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\sigma'}$ kolmé na tyto přímky. Není těžké ukázat, že dvojpoměr těchto rovin je opět –1. Přitom je zjevně rovina $\boldsymbol{o}$ totožná s rovinou $\boldsymbol{\pi}_1$. Vzhledem k řešení Apolloniovy úlohy v prostoru uvedené v závěru podkapitoly 2.4.3 jsou roviny $\boldsymbol{\sigma}$ a $\boldsymbol{\sigma'}$ tečnými rovinami orientované sféry $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_1$, které se jí dotýkají v bodech $\boldsymbol{U}_1$ a $\boldsymbol{V}_1$. Označíme $\boldsymbol{P}_1$ průsečík přímky $\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{V}_1$ a roviny $\boldsymbol{\pi}_1$, $\boldsymbol{O'}$ průsečík roviny $\boldsymbol{\nu}$ a přímky $\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{V}_1$. Potom $(\boldsymbol{O'P}_1\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{V}_1) = -1$. Bod $\boldsymbol{O}$ je přitom zjevně pólem roviny $\boldsymbol{\pi}_1$ vzhledem ke kulové ploše $\boldsymbol{\kappa}_1$. Potom je ovšem dvojpoměr bodů $\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{U}_1$, $\boldsymbol{V}_1$ také roven –1. Body $\boldsymbol{O}$ a $\boldsymbol{O'}$ proto splývají. Rovina $\boldsymbol{\nu}$ tudíž prochází bodem $\boldsymbol{O}$. Nadto jsme viděli, že $(\boldsymbol{V'OU}_1\boldsymbol{V}_1) = -1$, tj. $(\boldsymbol{OV'U}_1\boldsymbol{V}_1) = -1$. Proto splývají i body $\boldsymbol{V'}$ a $\boldsymbol{P}_1$. Kolmice bodem $\boldsymbol{S}_1$ na rovinu $\boldsymbol{\nu}$ (tj. rovinu $\boldsymbol{Or}_1$) potom nutně prochází bodem $\boldsymbol{P}_1$.

Odvodili jsem tak následující konstrukci. Středem $\boldsymbol{S}_1$ vedeme kolmici k rovině $\boldsymbol{Or}_1$. Průsečík této přímky s rovinou $\boldsymbol{\pi}_1$ označíme $\boldsymbol{P}_1$. Přímka $\boldsymbol{OP}_1$ protíná orientovanou sféru $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_1$ v bodech $\boldsymbol{U}_1$, $\boldsymbol{V}_1$. Spojnice středu $\boldsymbol{S}_1$ a bodu $\boldsymbol{U}_1$ (resp. $\boldsymbol{V}_1$) protíná kolmici vedenou z bodu $\boldsymbol{O}$ k rovině podobnosti $\boldsymbol{\rho}$ ve středu hledaného řešení příslušné Apolloniovy úlohy.

Uvedenou konstrukci můžeme ovšem upravit tak, že využijeme orientovanou sféru $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_i$ (i = 2, 3, 4). Dojdeme tak k bodům $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_3$, $\boldsymbol{P}_4$ s podobnými vlastnostmi jako bod $\boldsymbol{P}_1$. Sobotka přitom ještě dokazuje, že se přímky $\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j$ a $\boldsymbol{S}_i\boldsymbol{S}_j$ (i, j = 1,…, 4, $i \neq j$) protínají ve středu stejnolehlosti $\boldsymbol{S}_{ij}$ orientovaných sfér $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_i$, $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_j$, který leží v rovině podobnosti $\boldsymbol{\rho}$. Tomuto důkazu se zde nebudu věnovat z následujícího důvodu. Sobotka totiž následně uvádí bez důkazu obecnější tvrzení, které je zobecněním výše uvedeného:

„Obecněji jest patrno, je-li $\overline{\boldsymbol{P}_1}$ libovolný bod přímky $\boldsymbol{p}_1$[57] *a sestrojíme-li k čtyřstěnu $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{S}_4$ perspektivný čtyřstěn $\overline{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_4}$, pro $\boldsymbol{\rho}$ jakožto rovinu a pro průsečík $\overline{\boldsymbol{V}}$ přímky $\boldsymbol{S}_1\overline{\boldsymbol{P}_1}$ se $\boldsymbol{z}$ jakožto střed perspektivy*[58]*, že přímky $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$, $\boldsymbol{p}_4$ obsahují vrcholy $\overline{\boldsymbol{P}_2}$, $\overline{\boldsymbol{P}_3}$, $\overline{\boldsymbol{P}_4}$.“*

Tento poznatek využije k důkazu řešení Apolloniovy úlohy, které je v literatuře označováno jako Sobotkovo. Stejné řešení Sobotka v závěru své práce dokáže analyticky, bez nutnosti využít citované tvrzení. Proto nepovažuji za nezbytné, abych se zde zabýval touto částí Sobotkovy práce.

2.4.5 Sobotkovo řešení Apolloniovy úlohy

Uvažujme kartézskou soustavu souřadnic, ve které leží osy $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ v rovině podobnosti $\boldsymbol{\rho}$ a osa $\boldsymbol{z}$ prochází potenčním středem $\boldsymbol{O}$ (přitom je ovšem na rovinu $\boldsymbol{\rho}$ kolmá). Osu $\boldsymbol{x}$ volíme v rovině $\boldsymbol{\rho}$ tak, aby střed $\boldsymbol{S}_1$ ležel v rovině $\boldsymbol{xz}$. Bod $\boldsymbol{O}$ nechť má v této soustavě souřadnice $[0, 0, g]$.

V předchozím textu jsme uvažovali rovinu $\boldsymbol{\pi}_1$, ve které ležel průnik kulové plochy $\boldsymbol{Q}$ a orientované sféry $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_1$. Průsečnici této roviny a roviny $\boldsymbol{xz}$ označíme $\boldsymbol{p}_1$. Průsečík přímky $\boldsymbol{p}_1$ a osy $\boldsymbol{x}$ označíme $\boldsymbol{R}_1$. Tento bod zjevně leží na přímce $\boldsymbol{r}_1$, tj. průsečnici roviny $\boldsymbol{\pi}_1$ a roviny podobnosti $\boldsymbol{\rho}$. V podkapitole 2.4.3 jsme ukázali, že spojnice $\boldsymbol{l}_1$ bodů dotyku $\boldsymbol{U}_1$ a $\boldsymbol{V}_1$ orientovaných sfér $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_1$, $\underline{\boldsymbol{\kappa}}$ a $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_1$, $\underline{\boldsymbol{\kappa}}'$ je kolmá na rovinu $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{r}_1$. Podle věty 2.4.4 leží středy $\boldsymbol{S}$ a $\boldsymbol{S}'$ orientovaných sfér $\underline{\boldsymbol{\kappa}}$ a $\underline{\boldsymbol{\kappa}}'$ na ose $\boldsymbol{z}$. Body $\boldsymbol{U}_1$ a $\boldsymbol{V}_1$, které leží na přímkách $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}$ a $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}'$, tak nutně leží v rovině $\boldsymbol{xz}$. Přímka $\boldsymbol{l}_1$ leží v rovině $\boldsymbol{xz}$ a je přitom kolmá na přímku $\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{S}_1$. Obdobně můžeme ukázat, že spojnice dotykových bodů $\boldsymbol{l}_2$, $\boldsymbol{l}_3$ a $\boldsymbol{l}_4$ jsou kolmé v rovinách $\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{z}$ a $\boldsymbol{S}_4\boldsymbol{z}$ na přímky $\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{R}_2$, $\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{R}_3$ a $\boldsymbol{S}_4\boldsymbol{R}_4$, kde body $\boldsymbol{R}_2$, $\boldsymbol{R}_3$ a $\boldsymbol{R}_4$ jsou určeny obdobně jako bod $\boldsymbol{R}_1$. Ve své práci Sobotka označil $\boldsymbol{F}_i$ průsečík přímky $\boldsymbol{l}_i$[59] a roviny podobnosti $\boldsymbol{\rho}$ a odvodil konstrukci umožňující sestrojit body $\boldsymbol{F}_i$. Můj výklad se od Sobotkova liší pouze ve způsobu určení rovnic přímek $\boldsymbol{l}_1$ a $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{F}_1$.

---

[57] Symbolem $\boldsymbol{p}_1$ označuje Sobotka přímku $\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{V}_1$.

[58] Zobrazení označované jako perspektiva můžeme chápat jako středovou kolineaci se středem $\overline{\boldsymbol{V}}$ a rovinou samodružných bodů $\boldsymbol{\rho}$.

[59] Již víme, že $\boldsymbol{l}_i$ prochází též bodem $\boldsymbol{O}$.

Uvažujme nejprve kružnici $\boldsymbol{q}$, ve které protíná rovina $\boldsymbol{xz}$ kulovou plochu $\boldsymbol{Q}$. Ta má svůj střed v bodě $\boldsymbol{O}$ a poloměr rovný odmocnině z mocnosti $\boldsymbol{p}$ potenčního středu vzhledem ke kulovým plochám $\boldsymbol{\kappa}_i$, $i = 1,\ldots, 4$. Rovnice kružnice $\boldsymbol{q}$ má tvar:

$$x^2 + z^2 - 2gz + g^2 - p = 0, \quad y = 0.$$

Vzhledem k tomu, že kružnice $\boldsymbol{q}$ protíná kružnici $\boldsymbol{k}_1$ ortogonálně, můžeme přímku $\boldsymbol{p}_1$ chápat jako poláru bodu $\boldsymbol{S}_1$ (o souřadnicích $[a_1, b_1, c_1]$, přitom zjevně $b_1 = 0$). Pomocí rovnice kružnice $\boldsymbol{q}$ zapsané v homogenních souřadnicích a příslušné polární bilineární formy můžeme ukázat, že přímka $\boldsymbol{p}_1$ má rovnici:

$$a_1x + c_1z - gz - gc_1 + g^2 - p = 0, \quad y = 0.$$

Bod $\boldsymbol{R}_1$ má pak zjevně souřadnice:

$$\boldsymbol{R}_1[\frac{gc_1 - g^2 + p}{a_1}, 0, 0].$$

Vektor $\overrightarrow{\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{R}_1} = (\frac{gc_1 - g^2 + p - a_1^2}{a_1}, 0, -c_1)$ je normálovým vektorem přímky $\boldsymbol{l}_1$ v rovině $\boldsymbol{xz}$. Rovnice přímky $\boldsymbol{l}_1$ procházející bodem $\boldsymbol{O}[0, 0, g]$ má tvar:

$$\frac{gc_1 - g^2 + p - a_1^2}{a_1}x - c_1z + c_1g = 0, \quad y = 0.$$

Bod $\boldsymbol{F}_1$ má pak souřadnice:

$$\boldsymbol{F}_1[\frac{a_1c_1g}{g^2 + a_1^2 - gc_1 - p}, 0, 0].$$

Uvažujme nyní přímku $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{F}_1$. Ta má rovnici tvaru:

$$c_1(g^2 + a_1^2 - gc_1 - p)(x - a_1) + a_1(2c_1g - g^2 - a_1^2 + p)(z - c_1) = 0, \quad y = 0.$$

Označíme $\boldsymbol{F}$ průsečík přímky $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{F}_1$ a osy $\boldsymbol{z}$. Jeho třetí souřadnice, kterou označíme f, je rovna:

$$f = \frac{c_1^2g}{2c_1g - g^2 - a_1^2 + p}.$$

Pro mocnost p bodu $\boldsymbol{O}$ vzhledem ke kulové ploše $\boldsymbol{\kappa}_1$ platí:

$$p = |\boldsymbol{OS}_1|^2 - r_1^2 = a_1^2 + c_1^2 - 2c_1g + g^2 - r_1^2.$$

Odtud vyplývá:

$$f = \frac{c_1^2 g}{c_1^2 - r_1^2}. \tag{2.4.19}$$

Ve zvolené soustavě souřadnic jsou souřadnice c_i vždy buď +1, nebo –1 násobkem orientovaných vzdáleností středů $\boldsymbol{S}_i$, i = 1, …, 4, od roviny podobnosti $\boldsymbol{\rho}$ tak, jak jsme o ní uvažovali v podkapitole 2.4.2. Podle vztahu (2.4.2) platí:

$$\frac{c_1}{r_1} = \frac{c_i}{r_i}, \quad i = 1,..., 4.$$

Odtud získáme:

$$f = \frac{c_1^2 g}{c_1^2 - r_1^2} = \frac{c_i^2 g}{c_i^2 - r_i^2}, \quad i = 1,..., 4.$$

Vidíme, že všechny čtyři přímky $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{F}_1$,…, $\boldsymbol{S}_4\boldsymbol{F}_4$ procházejí jediným bodem $\boldsymbol{F}$ ležícím na ose z, tj. přímce vedené potenčním středem $\boldsymbol{O}$ kolmo k rovině podobnosti $\boldsymbol{\rho}$. Je též zřejmé, že body $\boldsymbol{O}$ a $\boldsymbol{F}$ leží v téže polorovině s hraniční rovinou $\boldsymbol{\rho}$. Pokud sestrojíme bod $\boldsymbol{F}$, stačí tímto bodem vést spojnice se středy $\boldsymbol{S}_1$,…, $\boldsymbol{S}_4$ daných orientovaných sfér $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_1$,…, $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_4$ a určit jejich průsečíky $\boldsymbol{F}_1$,…, $\boldsymbol{F}_4$ s rovinou podobnosti $\boldsymbol{\rho}$. Spojnice bodů $\boldsymbol{F}_1$,…, $\boldsymbol{F}_4$ s potenčním středem $\boldsymbol{O}$ protínají orientované sféry $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_1$,…, $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_4$ v dotykových bodech příslušné orientované sféry a páru řešení Apolloniovy úlohy v prostoru. Vztah (2.4.19) Sobotka ještě upravil, aby nalezl konstrukci bodu $\boldsymbol{F}$.

Uvažujme bod $\boldsymbol{E}_1$, který je pravoúhlým průmětem bodu $\boldsymbol{S}_1$ do roviny $\boldsymbol{\rho}$. Bod $\boldsymbol{E}_1$ zjevně leží v rovině $\boldsymbol{xz}$ (tj. rovině $\boldsymbol{S}_1 z$). Označili jsme $\boldsymbol{k}_1$ hlavní kružnici, v níž rovina $\boldsymbol{xz}$ protíná orientovanou sféru $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_1$. Vzdálenost bodů $\boldsymbol{E}_1$ a $\boldsymbol{S}_1$ je rovna absolutní hodnotě c_1. Pak je mocnost bodu $\boldsymbol{E}_1$ vzhledem ke kružnici $\boldsymbol{k}_1$ rovna $p' = c_1^2 - r_1^2$. Uvažujme tečny vedené v rovině $\boldsymbol{xz}$ z bodu $\boldsymbol{E}_1$ ke kružnici $\boldsymbol{k}_1$ a označme $\boldsymbol{T}_1$, $\boldsymbol{T}_2$ příslušné body dotyku. Průsečík přímky $\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2$ a přímky $\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{S}_1$ označíme $\boldsymbol{P}_1$. Bod $\boldsymbol{P}_1$ je pólem přímky $\boldsymbol{r}$ vzhledem ke kružnici $\boldsymbol{k}_1$ (též i pólem roviny podobnosti $\boldsymbol{\rho}$ vzhledem ke kulové ploše $\boldsymbol{\kappa}_1$). Třetí souřadnici bodu $\boldsymbol{P}_1$ označíme h_1[60]. Vzdálenost bodů $\boldsymbol{E}_1$ a $\boldsymbol{T}_1$ je rovná odmocnině z p'. Pomocí Euklidovy věty o odvěsně v pravoúhlém trojúhelníku $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{E}_1$ můžeme ukázat, že platí:

$$p' = c_1 h_1.$$

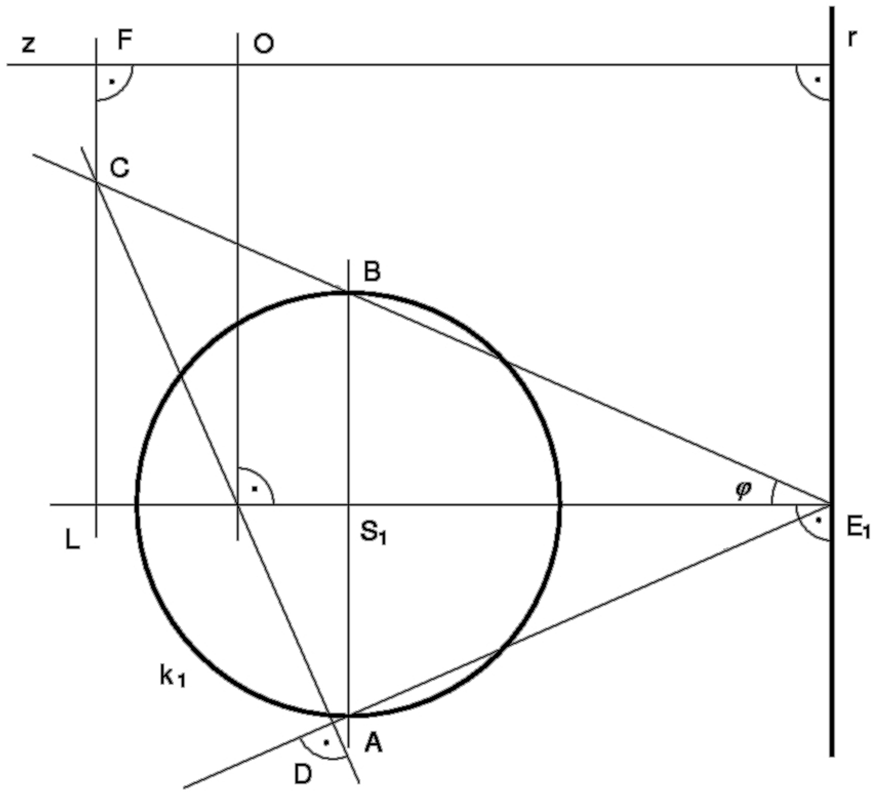
[60] Čísla c_1 a h_1 zjevně buď obě kladná, nebo obě záporná.

Pak můžeme vztah (2.4.19) upravit do tvaru:

$$\frac{f}{g} = \frac{c_1}{h_1}. \tag{2.4.20}$$

Ukážeme si, jak Sobotka vhodnou interpretací vztahu (2.4.20) nalezl jednoduchou konstrukci bodu $\boldsymbol{F}$ (viz obr. 2.4.4). Tuto pasáž budu citovat:

> *„V rovině $\boldsymbol{S_1 z}$ vedeme v $\boldsymbol{k}_1$ průměr $\boldsymbol{AB}$ kolmý ku $\boldsymbol{z}$ a spojíme jeho koncové body $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ s bodem $\boldsymbol{E}_1$; spustíme z bodu $\boldsymbol{O}$ kolmici na $\boldsymbol{E_1 S_1}$ a z paty její kolmici na $\boldsymbol{E_1 A}$, která nechť seče $\boldsymbol{E_1 B}$ v bodě $\boldsymbol{C}$, a jejíž společný bod s $\boldsymbol{E_1 A}$ značíme $\boldsymbol{D}$, aniž bychom jej však při konstrukci použili. Pata kolmice s $\boldsymbol{C}$ na $\boldsymbol{z}$ jest hledaný bod $\boldsymbol{F}$.“*



Obr. 2.4.4

Zdůvodnění konstrukce oproti Sobotkovi pouze mírně rozvedu. Uvažujme, že jsme osu z orientovali tak, že třetí souřadnice f bodu $\boldsymbol{F}$ i třetí souřadnice g bodu $\boldsymbol{O}$ jsou kladná čísla. Označíme $\boldsymbol{L}$ průsečík přímky $\boldsymbol{FC}$ a přímky $\boldsymbol{E_1 S_1}$. Označíme $\boldsymbol{M}$ patu kolmice vedené z bodu $\boldsymbol{O}$ na přímku $\boldsymbol{E_1 S_1}$. Zjevně jsou navzájem rovnoběžné následující přímky: $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{FL}$ i $\boldsymbol{OM}$. Označíme f' třetí souřadnici bodu $\boldsymbol{F}$ sestrojeného výše uvedeným způsobem. Konečně označíme φ velikost úhlu $\boldsymbol{LE_1C}$, která je ovšem stejná jako velikost úhlu $\boldsymbol{S_1E_1A}$. Pak platí:

$$f' = |\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{L}| = |\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{C}|\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{D}|}{\cos 2\varphi}\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{M}|\cos\varphi}{\cos 2\varphi}\cos\varphi =$$

$$= \frac{g\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi} = \frac{g}{1 - tg^2\varphi} = \frac{g}{1 - \frac{r_1^2}{c_1^2}} = \frac{gc_1^2}{c_1^2 - r_1^2}.$$

Vidíme, že $f' = f$. Dokázali jsme tak správnost výše uvedené konstrukce. Citujme nyní Sobotku: „*Tím se provedení problemu dotykových koulí pomocí bodu **F** stává velmi snadným a jednoduchým.*“

Tuto kapitolu bych zakončil následující vlastní úvahou, která doplňuje Sobotkův přístup. Domnívám se, že si nejspíš níže uvedené souvislosti musel uvědomovat i on. Podle Gergonnova řešení Apolloniovy úlohy v rovině (viz např. [2]) prochází spojnice dotykových bodů hledaných řešení a daného cyklu $\underline{\boldsymbol{k}}_1$ pólem $\boldsymbol{P}_1$ osy podobnosti daných tří cyklů vzhledem ke kružnici $\boldsymbol{k}_1$. Není těžké ukázat, že v případě Apolloniovy úlohy v prostoru prochází přímka $\boldsymbol{l}_1$ pólem $\boldsymbol{P}_1$ roviny podobnost $\boldsymbol{\rho}$ vzhledem ke kulové ploše $\boldsymbol{\kappa}_1$. Přímka $\boldsymbol{l}_1$ také prochází bodem $\boldsymbol{O}$. Označíme $\boldsymbol{Z}$ pravoúhlý průmět bodu $\boldsymbol{O}$ do roviny podobnosti $\boldsymbol{\rho}$. Pak se body $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{E}_1$ (ležící v jedné přímce rovnoběžné s osou $\boldsymbol{z}$) promítají z bodu $\boldsymbol{F}_1$ na osu $\boldsymbol{z}$ do bodů $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{Z}$. Z podobnosti trojúhelníků $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{FZF}_1$ (resp. $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{OZF}_1$) plyne:

$$\frac{|\boldsymbol{FZ}|}{|\boldsymbol{OZ}|} = \frac{|\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{E}_1|}{|\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{E}_1|}, \quad \text{tj.} \frac{f}{g} = \frac{c_1}{h_1}.$$

Protože platí:

$$\frac{c_1}{r_1} = \frac{c_i}{r_i}, \quad i = 1,\dots,4,$$

není těžké ukázat, že i pro třetí souřadnice h_i pólu roviny podobnosti $\boldsymbol{\rho}$ vzhledem ke kulové ploše $\boldsymbol{\kappa}_i$ můžeme psát:

$$\frac{c_1}{h_1} = \frac{c_i}{h_i}, \quad i = 1,\dots,4.$$

I takto můžeme tedy ukázat, že přímky $\boldsymbol{F}_i\boldsymbol{S}_i$ procházejí jediným bodem $\boldsymbol{F}$.

2.5 Shrnutí

Přestože jsem se v předchozím textu snažil komentovat Sobotkou volené postupy, chci se v této krátké kapitole všimnout toho, jak se v jeho pracích o Apolloniově problému a příbuzných úlohách naplňují charakteristické rysy jeho díla uvedené v podkapitole 1.5.3.

Náměty tvorby. Výchozí problém těchto prací (tj. Apolloniova úloha v rovině) patří mezi klasické problémy elementární geometrie, který před ním řešila řada matematiků. V knize irského matematika Johna Caseye „*A Treatise on the Analytical Geometry*" (2. rozšířené vydání z roku 1893) nalezneme na stranách 107 až 113 úvahy věnované kružnici, která dané tři kružnice protíná pod zvolenými úhly. Je zde např. odvozena její rovnice vyjádřená determinantem, která připomíná vztah (2.4.9). Důsledkem úvah je též tzv. Caseyova věta, kterou Sobotka odvodil jinak a užil v práci [**S46**]. Na straně 120 nalezneme uplatnění této věty k nalezení rovnice páru cyklů dotýkajících se daných tří cyklů[61]. Zvolený postup je zcela identický s tím, který jsme vyložili v podkapitole 2.1.4.

Sobotka se ve své práci odkazuje na Caseyovou větou, nezmiňuje se však o tom, že jím předložené analytické řešení je totožné s více než 40 let starým řešením Caseyovým. Je možné, že je neznal. Nejsem však schopen podat jednoznačnou odpověď, zdali tomu tak skutečně bylo. Z hlediska Sobotkovy pracovní metody je důležité, že toto analytické řešení dále rozvinul a podal jeho jednoduché konstruktivní vyjádření. Viděli jsme též, že Sobotka v práci [**S48**] algebraickou cestou zdůvodnil prostorovou analogii řešení jiných geometrů (Gergonne, Gaultier, Fouché) založených na ose podobnosti.

Považuji za důležité připomenout, že ač Sobotka vyšel ze známého problému, zpracoval toto téma zcela osobitým způsobem.

Šíře rozhledu. Přestože se jedná o práce z elementární geometrie, uplatnil se i zde kromě syntetických elementárně-geometrických metod i autorův rozhled po dalších disciplínách vyjádřený zejména uplatněním metod analytické geometrie a využitím algebry (např. determinantů). Užívá též vlastností přímkových ploch nebo některých poznatků projektivní geometrie, kterým však dává především metrický význam. Všechny tyto oblasti propojil v jediný souvislý celek.

[61] Výsledek byl původně zveřejněn roku 1866 v práci J. Caseye „*Memoir on the Equations of Circles*" v Proceedings of Royal Irish Academy.

Hloubka prací. Mohli jsme si všimnout, jak se Sobotka nikdy nespokojil s jediným řešením, ale vždy se snažil proniknout hlouběji a nalézt jednodušší řešení.

Zobecňování výsledků. Právě na těchto pracích si uvědomujeme, že jím prováděné zobecnění spočívající v přenesení rovinného problému do jiného prostoru se sice nabízí, ale není vůbec triviální. Na jednu stranu jsme viděli, že řešení pro různé prostory si jsou podobná (výsledkem i metodou), na druhou stranu se přitom musel vyrovnat s mnoha obtížemi.

Konstrukce. Ústředním cílem všech prací bylo nepochybně co nejjednodušší původní konstruktivní řešení.

Kalkul. Viděli jsme, že Sobotka mistrně užíval analytických a algebraických odvození a výpočtů, které následně nápaditě interpretoval v konstruktivním řešení. V uvedených pracích nalezneme též výsledky, které by stačilo pouze trochu doplnit, abychom získali algebraický důkaz řešení jiných autorů, která jsou např. v [2] dokázána synteticky.

Můžeme si přitom uvědomit fakt, že to umožnil právě zvolený analyticko-algebraický kalkul. V Sobotkově době bylo běžné vyjadřovat rovnice geometrických útvarů pomocí determinantů. Na těchto pojednáních si můžeme uvědomit sílu této metody. Čistě formální úpravu jistého determinantu vyvodíme ryze geometrické poznatky, např. zdůvodníme prostorovou obdobu Fouchéova konstruktivního řešení Apolloniovy úlohy v trojrozměrném prostoru. V souvislosti s tím mě napadá, že pokud bychom tato řešení chtěli dokázat užitím analytické geometrie tak, jak se v současnosti vykládá, bylo by takové odvození zahlcené množstvím výpočtů, rovnice uvažovaných útvarů by měly složitý tvar a samotný postup by nebyl ani elegantní, ani jednoduchý.

V souvislosti s tím mi přijde zajímavé, že užitý kalkul obohacuje i tak prostá věc, že se levé strany rovnic geometrický útvarů s nulovou pravou stranou označují jistými symboly. Některé úvahy a výpočty založené na operacích s těmito symboly jsou pak podstatně jednodušší, přitom přinášejí zajímavé výsledky

Drobnokresba. Přestože Apolloniova úloha patří ke klasickým geometrickým problémům, jedná se pouze o drobný problém. To jak ho Sobotka detailně zpracovává dotvrzuje jeho charakteristiku jako „mistra geometrické miniatury“, kterou užil B. Bydžovský.

Tvůrčí fantazie – Umění – Talent. I tato vyjádření Sobotkovy jedinečnosti si můžeme na těchto pojednáních uvědomit. Zdá se mi nepochopitelné a snad až geniální, s jakou fantazií a nápaditostí spěje přes řadu obtíží z výchozího poznatku, vyjádřeného např. nějakým vztahem, ke konečnému konstruktivnímu řešení. Již v podkapitole 1.5.3 jsem uvedl, že mi část práce [**S48**] přišla i krásná. Na podobná místa jsem však v této skupině prací narazil i jinde.

3. Jan Sobotka jako zdroj inspirace

Podněty, které jsem načerpal studiem Sobotkova díla, považuji za stále živé a inspirativní. Nebudu to však ukazovat tak, že bych navázal na nějaký jeho konkrétní výsledek nebo napodoboval některé z jím užitých dílčích metod. Místo toho ukážu, že některé obecné charakteristiky jeho díla, jak jsem je vymezil v podkapitole 1.5.3 a připomenul v kapitole 2.5, mohou obohatit přístupy učitele matematiky i jeho studentů ke geometrickým problémům. Vše ukáži na několika vybraných úlohách, které nepochybně nedosahují úrovně těch, které řešil Sobotka, považuji je však přesto za postačující, protože podnětnost díla Jana Sobotky spočívá zejména v ideové rovině, ve schopnosti obohacovat přístup k matematickým problémům a prohlubovat pedagogickou činnost.

Při studiu Sobotkova díla jsem si uvědomil i jistá poučení obecné charakteru. Současné pojetí matematiky na střední škole je ovlivněno přístupem, který našel své vyjádření v tematickém zpracování učebnic matematiky. Dal by se nazvat přístupem „strukturálním". Dílčí oblasti matematiky jsou představovány jako struktury, které mají vlastní obsah a disponují určitým okruhem úloh a metod jejich řešení. Stejně probíhá i výuka geometrie (viz učebnice Planimetrie, Stereometrie, Goniometrie, Analytická geometrie).

To přináší bezesporu své výhody, má to však i určitý nedostatek. Matematiku bychom neměli vnímat jako studium dílčích matematických struktur, ale spíše jako nástroj k řešení problémů. Není z hlediska kvalitního matematického vzdělávání dobré, aby metoda řešení úlohy byla apriori určena tím, v které kapitole učiva se nachází. V duchu Sobotkova přístupu k řešení problémů by bylo vhodnější snažit se koncipovat školskou matematiku problémově. To ovšem nevylučuje nutnost probírat teoretické úseky matematiky, bylo by ale dobré vidět je především jako metody řešení problému.

Tato myšlenka o středoškolské matematice je stejně platná i pro výuku matematiky na vysoké škole. Pokud zůstanu u geometrie, zde nabývá strukturální přístup vyjádření zejména v zaměření jednotlivých předmětů v průběhu celého studia.

Avšak cílem této práce není předložit koncepční změny ve výuce matematiky na střední škole nebo některé z vysokých škol. Představení matematiky jako nástroje k řešení problému je možné i za současného stavu. V případě geometrie nestačí pouze úlohu jedním způsobem vyřešit. Je třeba snažit se úlohu řešit různými způsoby, hledat inspiraci z jednoho přístupu k řešení úlohy k řešením dalším, spojovat početní řešení s přístupy konstruktivními, hledat řešení jednodušší a všímat si podnětů, které přináší úloha k dalšímu rozvinutí problému, případně k obohacení teorie. Všechny tyto tendence nalézáme v pracích Jana Sobotky.

Viděli jsme, že silným momentem v jeho pracích bylo využití početního řešení a jeho vtipná konstruktivní interpretace. Shodou okolností jsem ve stejné době studoval i skriptum P. Vopěnky „*Analytická geometrie druhé generace*". V úvodu je uvedena úvaha, která rozvíjí podobné téma a podtrhuje tak z obecnějšího hlediska naše úvahy o matematickém vzdělávání.

„„Všechny problémy geometrie lze snadno převést na takové výrazy (termy), k jejichž sestrojení stačí znát pouze délky některých úseček." Vyslovením této teze začíná proslulá Descartova Geometrie, vydaná roku 1637.

Výrazy, o nichž je řeč, jsou algebraické termy (to je jistá slova v abecedě složené z operačních znaků pro sčítání, odčítání, násobení, dělení a odmocňování, dále pak z blíže neurčených konstant a závorek) kopírující vztahy mezi danými a hledanými geometrickými veličinami, přičemž v nich vystupující blíže neurčené konstanty označují délky oněch zmiňovaných výchozích úseček.

Uvedenou tezi pak Descartes odůvodňuje slovy: „… v geometrii, která při nacházení hledaných úseček nemůže postupovat jinak, než že k nim přidává nebo od nich odebírá úsečky jiné; nebo také tak, že vezme jednu úsečku, kterou bude nazývat jednotkou, aby se lépe ukázalo na souvislost s čísly, a kterou lze obvykle vybrat libovolně, a k tomu ještě dvě další, aby se nalezla čtvrtá, která se má k jedné z těchto dvou jako se má druhá k jednotce, což je totéž jako násobení; nebo aby se nalezla čtvrtá, která se má k jedné z těchto dvou tak, jako jednotka k druhé z nich, což vede k dělení; nebo konečně, aby se nalezly mezi jednotkou a jinou úsečkou jedna, dvě, nebo více [což vede k odmocňování; $\frac{1}{x}=\frac{x}{a}$, *pak* $x^2=a$; $\frac{1}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{a}$, *pak* $x^3=a$ *] …"*

Vzápětí poté Descartes ukazuje, jak lze podle návodu zachyceného takovým algebraickým termem, v němž se vyskytují nejvýše druhé odmocniny, sestrojit z daných úseček úsečku hledanou.

Descartův myšlenkový obrat byl dalekosáhlý. Jestliže byl geometrický svět místem, v němž algebraický kalkul hledal oporu pro oprávněnost svých pravidel, tak nyní se stal místem, v němž algebraický kalkul nalezl významné uplatnění.

Vedle oborů čísel (přirozených, racionálních, reálných) se tedy i geometrický svět stal předmětem, na jehož studiu se podílí algebraický kalkul. V Descartově Geometrii byla matematika kalkulací použita ke studiu jednoho z prvních předmětů studia matematiky názoru, jímž je Euklidovský geometrický svět.

Descartovou zásluhou se matematika kalkulací dočkala svého třetího triumfálního úspěchu. Poprvé to bylo tehdy, když člověk znalý indického aritmetického kalkulu hbitě a bezpečně pouhou kalkulací s číslicemi předpověděl výsledek součinu dvou velkých čísel, k němuž se člověk neznalý klopotně dopracovával. Podruhé tehdy, když člověk znalý algebraického kalkulu hbitě a bezpečně pouhou kalkulací se znaky předpověděl řešení složité slovní početní úlohy, k němuž se člověk neznalý dopracoval jen s nesmírnou duševní námahou. ***Potřetí nyní, když člověk znalý algebraického kalkulu a jejího užití v geometrii pouhou kalkulací se znaky hbitě navrhl geometrickou konstrukci požadovaného objektu, jejíž správnost člověk toho neznalý nahlížel jen s velkými obtížemi, pronásledován přitom pocitem, že takovou konstrukci by sám asi nebyl schopen vymyslet,*** “ ([32], str. 5).

Poslední věta výstižně charakterizuje některá ze Sobotkových řešení geometrických problémů.

3.1 K jedné úloze o trojúhelníku

3.1.1 Úvod

Úloha 1: *V trojúhelníku* ***ABC*** *je velikost vnitřního úhlu α dvojnásobkem velikosti vnitřního úhlu β. Určete délku jeho strany a, jsou-li dány délky jeho stran b a c.*

Na této elementární úloze, kterou zařazuji do cvičení z geometrie v učitelském vzdělávání na Univerzitě Hradec Králové, ukáži podnětnost výše uvedených přístupů čerpaných z díla Jana Sobotky.

1. řešení úlohy 1

Předpokládejme, že trojúhelník daných vlastností existuje. Otázkou řešitelnosti se budeme zabývat později. Podle sinové věty platí:

$$\frac{a}{\sin 2\beta} = \frac{b}{\sin \beta}, \text{ odtud plyne: } a = 2b\cos\beta, \text{ tj. } \cos\beta = \frac{a}{2b}.$$

Podle kosinové věty můžeme psát:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 2\beta, \text{ tj. } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc(2\cos^2\beta - 1).$$

Pokud do tohoto vztahu dosadíme výše uvedené vyjádření pro cosβ, získáme rovnost:

$$a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2 c}{b} + 2bc.$$

Po úpravách určíme vztah pro délku strany a ve tvaru:

$$a = \sqrt{b(b+c)}. \qquad (3.1.1)$$

Tento příklad jsme řešili během posledních pěti let. Inspirován Sobotkovou snahou interpretovat konstruktivně výsledky získané užitím kalkulu jsem před třemi lety poprvé upozornil studenty na fakt, že výsledek (3.1.1) můžeme chápat i tak, že by bylo možné pomocí něj sestrojit délku strany a užitím délek stran b a c. Trojúhelník ***ABC*** je tak určen délkami svých stran. Proto by bylo možné i samotnou úlohu 1 zformulovat jinak, jako úlohu na konstrukci trojúhelníka.

Úloha 2: *Sestrojte trojúhelník **ABC**, jsou-li dány délky jeho stran b a c a je-li velikost jeho vnitřního úhlu α dvojnásobkem velikosti vnitřního úhlu β tohoto trojúhelníku.*

Tato úloha nezapadá do běžného rámce konstruktivních úloh o trojúhelníku, které jsou moji studenti navyklí řešit. Osobně považuji za úspěch, pokud jsou schopni vyřešit obtížnější (euklidovsky řešitelné) příklady na konstrukci trojúhelníku, jsou-li zadány tři veličiny z této skupiny: délka strany, délka těžnice, délka výšky, velikost vnitřního úhlu a poloměr kružnice opsané nebo vepsané. Samostatné vyřešení úlohy 2 představuje značný problém pro většinu studentů, které učím. Zkušenost mi ukázala, že ani úlohu 1 samostatně nevyřeší všichni studenti učitelství matematiky. Přesto je podíl těch, kteří by to zvládli zcela sami nebo s drobnou nápomocí, podstatně větší než u úlohy 2. Ukažme, jak může užití výpočtu pomoci při řešení úlohy 2.

3.1.2 Úvahy o řešeních úlohy 1 a 2

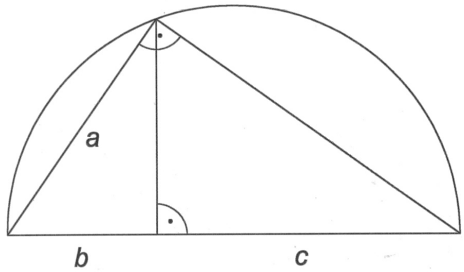
První tři uvedená řešení úlohy vyžadují schopnost zformulovat úlohu 2 do podoby, která je vyjádřena úlohou 1. Jinak řečeno, pokud nás nenapadá, jak trojúhelník sestrojit, zkusíme délku chybějící strany vypočítat. Zjistil jsem diskusí se studenty, že jim tato možnost přeformulovat původní úlohu není vlastní. V několika případech to zdůvodňovali tím, že jsou naučeni, že konstruktivní úlohy se řeší výhradně na základě metod syntetické geometrie a od jisté výpomoci výpočtem byli spíše odrazováni. Avšak nezjistil jsem blíže, v jaké formě bylo toto „nedoporučení" pomoci si početním řešením.

Zdá se mi pochopitelně z metodického hlediska nevhodné vést studenty k výpočtu konkrétní číselné hodnoty míry jisté veličiny (např. délky jisté úsečky, velikosti nějakého úhlu), kterou by posléze použili při konstrukci. Přitom však považuji za přínosné otevřít studentům onen přístup, který nalezneme v pracích Jana Sobotky. Můžeme jim ukázat, že i výsledky získané pomocí výpočtu můžeme vhodně vyložit tak, že se nám odkryje konstruktivní řešení uvažovaného problému. To není ovšem postaveno na určení konkrétního čísla, jež určuje hodnotu hledané veličiny při jisté volbě daných prvků úlohy. Jde o určení vztahu, který při vhodné interpretaci nabízí obecné řešení konstruktivní úlohy.

Tento přístup ke školské geometrii považuji za obohacující. Neměl jsem však zatím možnost vyzkoušet ho plně v praxi.

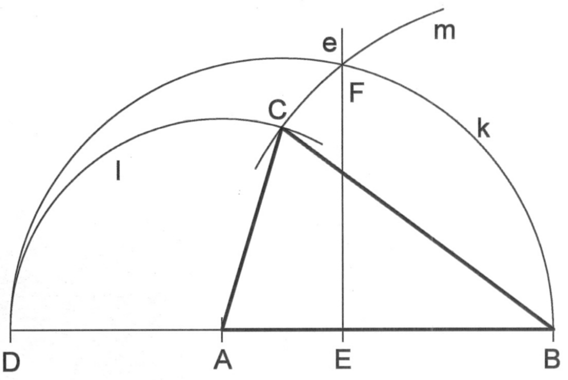
1. řešení úlohy 2

Vyřešme nejprve úlohu 1. Nabízí se délku strany a vyjádřenou vztahem (3.1.1) sestrojit pomocí některé z Euklidových vět, např. užitím věty o odvěsně (viz obr. 3.1.1).



Obr. 3.1.1

Toto řešení mě však ne zcela uspokojovalo, ačkoliv ukazuje, že je možné délku strany a určit konstruktivně. Pomocí takto sestrojené délky již sestrojíme hledaný trojúhelník. Z jakého důvodu jsem nebyl spokojený? Pod vlivem studia Sobotkových prací o řešení Apolloniovy úlohy a příbuzných úloh jsem očekával, že je možné na základě užití výpočtu dospět ke konstrukci, která umožní sestrojit hledaný trojúhelník přímo, bez nutnosti sestrojit pomocnou úsečku o hledané délce a. Tak jsem dospěl k další konstrukci (viz obr. 3.1.2), která využívá opět Euklidovy věty o odvěsně.



Obr. 3.1.2

Sestrojíme úsečku ***AB*** o délce c a na polopřímce ***BA*** bod ***E*** ve vzdálenosti b od bodu ***B***. Dále sestrojíme na polopřímce opačné k polopřímce ***AB*** bod ***D*** ve vzdálenosti b od bodu ***A***. Sestrojíme kružnici ***k*** nad průměrem ***DB*** a v bodě ***E*** vztyčíme kolmici ***e*** k přímce ***AB***. Průsečík přímky ***e*** a kružnice ***k*** označíme ***F***. Zjevně $|\boldsymbol{BF}| = a$. Sestrojíme kružnici ***l*** o středu ***A*** procházející bodem ***D*** (tj. o poloměru b) a kružnici ***m*** o středu ***B*** procházející bodem ***F***. Vrcholem ***C*** hledaného trojúhelníka je průsečík kružnic ***l*** a ***m***, pokud existuje. Otázkou řešitelnosti se budeme zabývat později, souhrnně s ostatními řešeními úlohy 2. Tato konstrukce na mne však působí jistým dojmem vyumělkovanosti. Pustil jsem se proto do dalšího hledání.

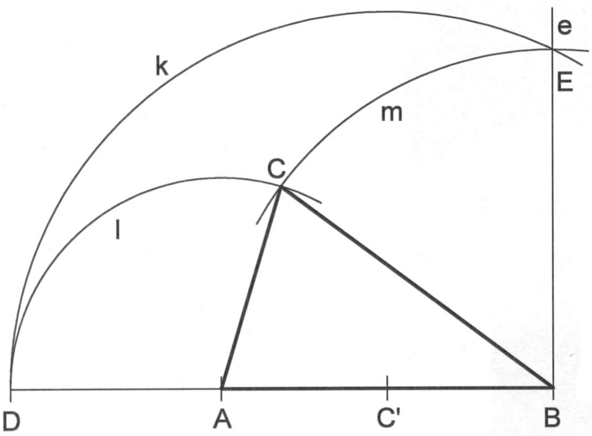
2. řešení úlohy 2

Vztah (3.1.1) nás opravňuje k tomu, abychom chápali úsečku o délce a jako střední geometrickou úměrnou úseček o délkách b a $(b + c)$. V klasické řecké geometrické algebře nacházíme vodítko, že určení střední geometrické úměrné není nutně postaveno na užití Euklidových vět. Upravíme-li vztah (3.1.1), dostaneme:

$$a^2 = b^2 + bc = (b + c/2)^2 - (c/2)^2 .$$

Vidíme, že je možné sestrojit úsečku o délce strany a jako odvěsnu pravoúhlého trojúhelníka o délce druhé odvěsny $c/2$ a přeponě o velikosti $(b + c/2)$. Získáme tak následující konstrukci (viz obr. 3.1.3).

Sestrojíme úsečku ***AB*** o délce c a její střed ***C'***. Na polopřímce opačné k polopřímce ***AB*** sestrojíme bod ***D*** ve vzdálenosti b od ***A***. V bodě ***B*** vztyčíme kolmici ***e*** k přímce ***AB***. Okolo bodu ***C'*** opíšeme kružnici ***k*** procházející bodem ***D***. Označíme ***E*** průsečík přímky ***e*** a kružnice ***k***. Zjevně platí: $|\boldsymbol{BE}| = a$. Sestrojíme kružnici ***l*** o středu ***A*** procházející bodem ***D*** a kružnici ***m*** o středu ***B*** procházející bodem ***E***. Vrchol ***C*** hledaného trojúhelníku ***ABC*** je průsečíkem kružnic ***l*** a ***m***, pokud existuje.



Obr. 3.1.3

3. řešení úlohy 2

Toto řešení mě napadlo až později, když jsem metodami syntetické i analytické geometrie odvodil velice jednoduché 4. řešení úlohy 2. Přesto ho uvádím zde, protože je opět postaveno na úpravách vztahu (3.1.1). Platí:

$$a^2 = b^2 + bc = \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} + \frac{bc}{2} - \frac{c^2}{4} = \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 + b^2 - \frac{b^2}{4} + \frac{bc}{2} - \frac{c^2}{4} =$$

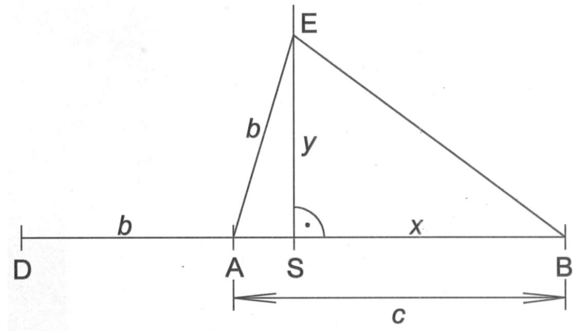
$$= \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 + b^2 - \left(\frac{c-b}{2}\right)^2.$$

Položíme:

$$x = \sqrt{\left(\frac{b+c}{2}\right)^2}, \quad y = \sqrt{b^2 - \left(\frac{c-b}{2}\right)^2}$$

za předpokladu, že výraz pod druhou z odmocnin je kladný. Vidíme, že můžeme délku strany a sestrojit jako přeponu pravoúhlého trojúhelníku o odvěsnách délek x a y. Uvažujme úsečku ***AB*** o délce c a bod ***D*** na opačné polopřímce k polopřímce ***AB*** ve vzdálenosti b od bodu ***A***. Střed úsečky ***BD*** označíme ***S***. Na ose úsečky ***BD*** leží bod ***E*** ve vzdálenosti b od bodu ***A*** (viz obr. 3.1.4).

Zjevně $|SB| = (b + c)/2 = x$, $|AS| = |c - (b + c)/2| = |(c - b)/2|$. Protože je $|AE| = b$, je $|SE| = y$ (bod $\boldsymbol{E}$ tedy existuje, je-li splněn výše uvedený předpoklad), a protože $|SB| = x$ je $|BE| = a$. Neboť $|AE| = b$ a $|BE| = a$, je bod $\boldsymbol{E}$ totožný s vrcholem $\boldsymbol{C}$ hledaného trojúhelníku $\boldsymbol{ABC}$. Odtud již plyne jednoduché řešení úlohy 2.

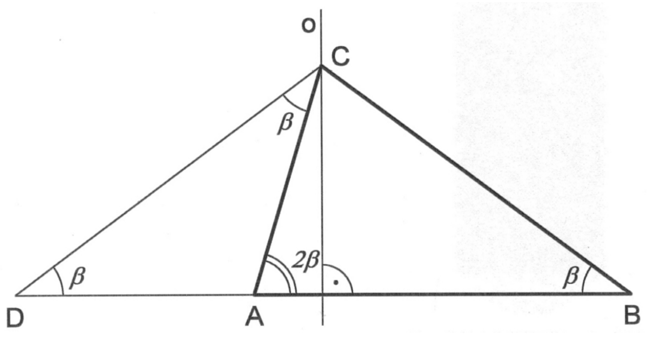


Obr. 3.1.4

4. řešení úlohy 2

K tomuto řešení, ač je ryze syntetické, mě navedly úvahy související s výše uvedeným prvním a druhým řešením. Můžeme si všimnout, že společným rysem obou řešení je užití úsečky **BD** o velikosti ($b + c$). Napadlo mě tedy uvažovat směrem, který je uvedený níže.

Proveďme rozbor úlohy 2. Předpokládejme, že hledaný trojúhelník **ABC** existuje. Na přímce **AB** určíme bod **D** stejně jako v předchozích úvahách (viz obr. 3.1.5). Trojúhelník **ACD** je rovnoramenný se základnou **CD**. Vnitřní úhly trojúhelníka **ACD** při vrcholu **C** a **D** jsou shodné a součet jejich velikostí je roven velikosti vnějšího úhlu trojúhelníka **ACD** při vrcholu **A**, tj. 2β. Odtud vidíme, že úhel **CDA** má velikost β a je tak shodný s úhlem **ABC**. Trojúhelník **BCD** je tudíž rovnoramenný se základnou **BD**. Proto bod **C** leží na ose úsečky **BD**. Odtud plynoucí konstruktivní řešení úlohy 2 je zjevné.



Obr. 3.1.5

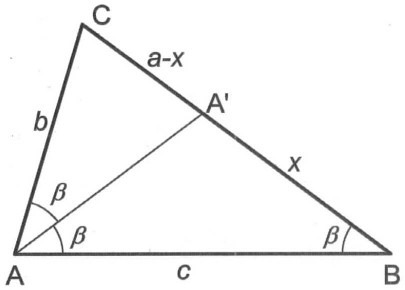
2. řešení úlohy 1

Obvykle jsme řešili úlohu 1 postupem popsaným na začátku kapitoly, avšak jeden ze studentů (Zdeněk Novák) přišel s jiným řešením. Předpokládejme znovu, že existuje trojúhelník, který vyhovuje podmínkám úlohy. Sestrojíme osu vnitřního úhlu při vrcholu ***A*** (viz obr. 3.1.6), která protne stranu ***BC*** v bodě ***A'***. Studenta napadlo využít známého vztahu, že bod ***A'*** dělí stranu ***BC*** na dva úseky, jejichž délky jsou v poměru délek stran trojúhelníku ***ABC*** přilehlých k těmto úsekům. Označíme x délku úsečky ***BA'***. Pak platí:

$$(a-x):x=b:c.$$

Odtud vyplývá:

$$x=\frac{ac}{b+c},\ a-x=\frac{ab}{b+c}.$$



Obr. 3.1.6

Uvažujme trojúhelník ***ABA'***, který je zjevně rovnoramenný se základnou ***AB***. Pak můžeme psát:

$$\cos\beta=\frac{c}{2x}.$$

Protože má úsečka ***AA'*** délku x, platí podle kosinové věty užité na trojúhelník ***AA'C***:

$$(a-x)^2=x^2+b^2-2xb\cos\beta.$$

Dosazením výše uvedených vztahů pro x, $(a-x)$ a $\cos\beta$ získáme rovnost:

$$\left(\frac{ab}{b+c}\right)^2=\left(\frac{ac}{b+c}\right)^2+b^2-bc.$$

Odtud vyplývá:

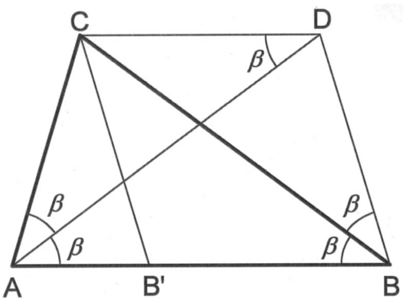
$$\frac{a^2(b^2-c^2)}{(b+c)^2}=b(b-c),\ \text{tj.}\ a^2=b(b+c).$$

Můžeme tak jinou cestou dospět ke vztahu (3.1.1).

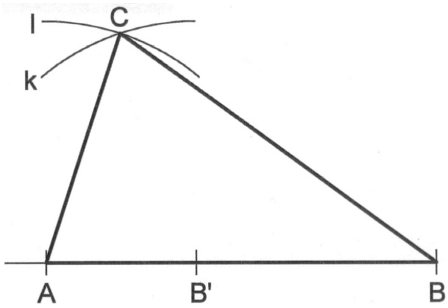
5. řešení úlohy 2

Na výše uvedeném řešení úlohy 1 mě zaujalo nápadité využití vlastnosti osy vnitřního úhlu trojúhelníku ***ABC*** při vrcholu ***A***. Pro objevení následujícího řešení úlohy 2 bylo podstatné, že jsem si uvědomil existenci rovnoramenného trojúhelníku ***ABA'***. Ten je symetrický podle osy úsečky ***AB***. Odtud je již pouhý krůček k myšlence sestrojit v osové souměrnosti podle osy úsečky ***AB*** i obraz bodu ***C***.

Předpokládejme, že hledaný trojúhelník ***ABC*** existuje. Obraz bodu ***C*** v osové souměrnosti podle osy úsečky ***AB*** označíme ***D*** (viz obr. 3.1.7). Je-li $b = c$, je čtyřúhelník ***ABCD*** čtverec. Potom je trojúhelník ***ABC*** rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami ***AB*** a ***AC*** délky b. Jeho konstrukce je zřejmá.



Obr. 3.1.7



Obr. 3.1.8

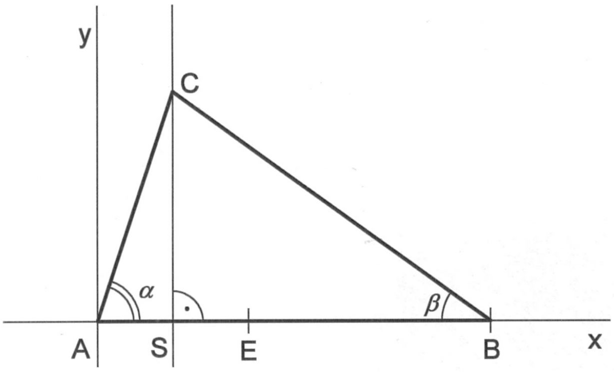
Pokud je $b \neq c$, je čtyřúhelník ***ABCD*** rovnoramenný lichoběžník, jehož úhlopříčky jsou zároveň osami jeho vnitřních úhlů při vrcholech ***A*** a ***B***. Protože jsou úhly ***BAD*** a ***ADC*** shodné, jsou shodné i úhly ***CAD*** a ***ADC***. Trojúhelník ***ACD*** je proto rovnoramenný se základnou ***AD*** a úsečky ***AC*** a ***CD*** jsou shodné. Úloha 2 pak souvisí s elementární úlohou, kdy máme sestrojit lichoběžník, u kterého známe délky všech čtyř stran ($|AB| = c$, $|BD| = |CD| = |AC| = b$). Proto obrázek doplníme o kosočtverec ***B'BDC***.

Tyto úvahy nás opravňují ke konstrukci trojúhelníku ***ABC***, je-li $b \neq c$ (viz obr. 3.1.8). Sestrojíme úsečku ***AB*** o délce c. Na polopřímce ***BA*** sestrojíme bod ***B'*** ve vzdálenosti b od bodu ***B***. Opíšeme okolo bodu ***A***, resp. ***B'***, kružnici ***k***, resp. ***l***, o poloměru b. Jejich průsečíkem je vrchol ***C*** hledaného trojúhelníku ***ABC***.

6. řešení úlohy 2

Zatím se může zdát, že řešení úlohy 2, ke kterým jsme dospěli bezprostředním užitím výpočtu (tj. 1. řešení a 2. řešení), nejsou příliš elegantní a k 3. řešení jsme došli pomocí úprav, které nebyly na první pohled zřejmé. Vlastně nás k tomuto řešení vedla známost elegantnějšího řešení (4. řešení), které bylo možné odvodit metodami syntetické geometrie. Obdobně i k 5. řešení jsme došli syntetickou metodou.

Oproti tomu k nalezení 4. a 5. řešení potřebujeme jistý nápad. Snažil jsem se ukázat, že užití výpočtu může tomuto nápadu dopomoci. V následujícím řešení užijeme metod analytické geometrie. Uvidíme, že zvolený způsob nám umožní nalézt přímo ta konstruktivní řešení, která byla vyložena výše jako 4. a 5. řešení úlohy 2.



Obr. 3.1.9

Předpokládejme, že existuje trojúhelník ***ABC***, který vyhovuje podmínkám úlohy 2. Zvolíme kartézskou soustavu souřadnic tak, že bod ***A*** leží v jejím počátku a bod ***B*** leží v kladné části osy ***x***. Potom pro souřadnice bodů platí: ***A***[0, 0], ***B***[c, 0], souřadnice hledaného bodu ***C*** označíme i a j, tj. ***C***$[i, j]$. Pak platí:

$$\cos\alpha = \frac{i}{b},\ \cos\beta = \frac{c-i}{\sqrt{(c-i)^2 + j^2}}.$$

Protože $\cos^2\beta = (1+\cos\alpha)/2$ a $i^2 + j^2 = b^2$, můžeme psát:

$$\frac{(c-i)^2}{c^2 - 2ci + b^2} = \frac{b+i}{2b}.$$

Odtud vyplývá:

$$2bc^2 - 4bci + 2bi^2 = bc^2 - 2bci + b^3 + c^2 i - 2ci^2 + b^2 i,$$
$$2(b+c)i^2 - (b+c)^2 i + b(c^2 - b^2) = 0,$$
$$2i^2 - (b+c)i + b(c-b) = 0.$$

Pro kořeny této rovnice platí:

$$i_{1,2} = \frac{b+c \pm \sqrt{(b+c)^2 - 8b(c-b)}}{4} = \frac{b+c \pm \sqrt{9b^2 - 6bc + c^2}}{4}$$

Bez ohledu na znaménko výrazu (3*b* – *c*) je hledaná 1. souřadnice rovna některému z těchto dvou (ne nutně různých) čísel:

$$i = \frac{b + c + (3b - c)}{4} = b, \text{ nebo } i = \frac{b + c - (3b - c)}{4} = \frac{c - b}{2}.$$

Protože bod ***C*** neleží na přímce ***AB***, tj. $j \neq 0$, a dále platí $i^2 + j^2 = b^2$, musí být $|i| < b$. K odtud plynoucí podmínce řešitelnosti se vrátíme později. Zatím se zabýváme případem, že hledaný trojúhelník existuje. Vidíme, že hledaná souřadnice *i* bodu ***C*** nemůže být rovna *b*, proto platí:

$$i = \frac{c - b}{2}.$$

Bod ***C*** tak leží na přímce o rovnici $x = \frac{c - b}{2}$. Ta je kolmá k přímce ***AB*** (ose ***x***) a protíná ji v bodě ***S*** o souřadnicích [(*c* – *b*)/2, 0]. Konstrukce trojúhelníka ***ABC*** je zjevná. Stačí sestrojit bod ***E*** o souřadnicích [*c* – *b*, 0], tj. bod, který leží na polopřímce ***BA*** (kde $|AB| = c$) ve vzdálenosti *b* od bodu ***B***. Bod ***S*** je potom středem úsečky ***AE***. Na kolmici k přímce ***AB*** v tomto bodě leží vrchol ***C*** ve vzdálenosti *b* od bodu ***A*** (viz obr. 3.1.9).

Je zjevné, že bod ***E*** užitý v této konstrukci je totožný s bodem ***B'*** užitým v 5. řešení úlohy 2. Právě odvozená konstrukce je tak jen mírnou obměnou 5. řešení. Uvědomme si, že bod ***S*** je současně středem úsečky ***BD*** užité např. ve 4. řešení úlohy 2. Potom jsou konstrukce získané ve 4. a 6. řešení téměř identické. Vidíme tedy, že námi zvolený výpočet více méně mechanickým postupem odkryl řešení, ke kterému bychom jinak potřebovali jistý nápad a dávku geometrické představivosti (viz 4. a 5. řešení). V tom spatřuji velkou sílu a zajímavost snahy nalézt řešení konstruktivní úlohy užitím jistého kalkulu tak, jak to na nepoměrně složitějších úlohách můžeme vidět u Jana Sobotky.

3. řešení úlohy 1

Vztah mezi řešeními úloh 1 a 2 není pouze jednostranný ve smyslu, že řešení úlohy 1 může pomoci při řešení úlohy 2. Nápady vedoucí k odvození řešení úlohy 2 metodami syntetické geometrie mohou pomoci při nalezení elegantního řešení úlohy 1.

Uvažujme nejprve 4. řešení úlohy 2 (viz obr. 3.1.5). Z toho, co jsme ukázali výše, je zjevné, že jsou trojúhelníky ***DBC*** a ***DCA*** podobné. Potom platí:

$$\frac{|\boldsymbol{DC}|}{|\boldsymbol{DA}|} = \frac{|\boldsymbol{DB}|}{|\boldsymbol{DC}|}, \text{ tj. } \frac{a}{b} = \frac{c+b}{a}.$$

Odtud:

$$a = \sqrt{b(b+c)}\,.$$

4. řešení úlohy 1

Vraťme se ještě jednou k 2. řešení úlohy 1. Předpokládejme, že trojúhelník určený podmínkami úlohy existuje. Označili jsme ***A’*** průsečík strany ***BC*** a osy vnitřního úhlu trojúhelníku ***ABC*** při vrcholu ***A*** (viz obr. 3.1.6). Označíme *x*, resp. *y*, vzdálenost bodů ***B*** a ***A’***, resp. ***C*** a ***A’***. Pak jsou trojúhelníky ***ABC*** a ***A’AC*** podobné (shodují se ve dvou vnitřních úhlech). Potom můžeme psát:

$$a : b : c = b : y : x\,.$$

Odtud získáme:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{x}, \text{ tj. } x = \frac{bc}{a}.$$

Dále platí:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{y}, \text{ tj. } y = \frac{b^2}{a}.$$

Proto můžeme psát:

$$a = x + y = \frac{bc + b^2}{a} = \frac{b(b+c)}{a}, \text{ tj. } a = \sqrt{b(b+c)}\,.$$

Tato řešení ilustrují zajímavý jev, který souvisí se „strukturálním“ pojetím matematiky na středních školách a netýká se tak pouze geometrie. Pokud zařadíme příslušnou úlohu do určité oblasti matematiky (v našem případě do trigonometrie, planimetrie, analytická geometrie ...), může se stát, že si uzavíráme cestu k jiným oblastem matematiky, které nám nabízejí podstatně jednodušší řešení. Vraťme se k úloze 1, pokud bychom ji chápali jako jeden z mnoha příkladů z trigonometrie, toto zařazení nás může „tlačit“ k tomu, abychom ji řešili výhradně pomocí jejích metod (viz 1. a částečně 2. řešení úlohy 1). Pokud jsme však při řešení úlohy otevření i pro nápady plynoucí z dalších oblastí geometrie (viz částečně 2. řešení a 3. a 4. řešení úlohy 1), můžeme dojít k jinému řešení a někdy i jednoduššímu.

Základem 2. řešení úlohy 1 byl nápad, který neměl svůj původ ryze v trigonometrii, tj. užití vlastnosti osy úhlu. Ten byl však dále zpracován metodami, které řadíme ve školské matematice do trigonometrie. 4. řešení úlohy 1 ukázalo, že pokud nejsme vázáni na oblast, do které jsme si příklad zařadili, možnosti nabízené úvodními úvahami 2. řešení můžeme zpracovat zcela jiným způsobem a dojít k výsledku jednoduševji. Jak jsme ukázali výše, obdobně lze uvažovat nad úlohou 2 a možnostmi, které se nám otvírají, pokud v ní nevidíme úlohu ryze ze syntetické geometrie.

3.1.3 Otázky řešitelnosti úloh 1 a 2

Z předchozích úvah vyplývá ještě jeden postřeh. Pokud je pro nás cílem úlohy 1 pouhé vyvození vztahu (3.1.1) pro délku strany *a*, docházíme k řešení, které není úplné. Tvar výsledku v nás může vzbuzovat dojem, že délku strany *a* je možné vypočítat pro libovolné délky stran *b* a *c*. To nás může vést ke chybnému závěru, že trojúhelník ***ABC*** existuje pro libovolné hodnoty délek stran *b* a *c*. Oproti tomu ve spojitosti s řešeními úlohy 2 nám dochází, že takový trojúhelník nemusí vždy existovat. Proto jsme při řešení úlohy 1 vždy předpokládali, že takový trojúhelník existuje. Výsledek (3.1.1) je v pořádku, pouze pokud trojúhelník vyhovující podmínkám úlohy existuje. Ke stanovení podmínek řešitelnosti úlohy 1 se vrátíme později, nezávisle na úloze 2. Nyní se podíváme na otázku řešitelnosti úlohy 2 tak, jak by nás k odpovědi vedlo každé ze šesti řešení uvedených v předchozí podkapitole.

1. řešení a 2. řešení využívá vztahu (3.1.1) pro určení délky úsečky *a*. Obě řešení jsou založena na sestrojení úsečky délky $\sqrt{b(b+c)}$ a konstrukci trojúhelníka o stranách délek $\sqrt{b(b+c)}$, *b*, *c*. Pokud takový trojúhelník existuje, jsme si jisti, že je hledaným řešením úlohy 2, protože délky jeho stran jsou takové, jaké by podle (3.1.1) měly být. Pokud však trojúhelník o stranách $\sqrt{b(b+c)}$, *b*, *c* neexistuje, domníváme se, že hledané řešení úlohy 2 neexistuje. Problém je v tom, že vztah (3.1.1) jsme odvodili za předpokladu, že existuje trojúhelník, jež by byl řešením úloh 1 a 2. My však veličinu $\sqrt{b(b+c)}$ používáme i pro hodnoty délek stran *b* a *c*, pro kterou nemusí řešení existovat, tj. v situaci, kdy se zdá, že pro užití veličiny $\sqrt{b(b+c)}$ nemáme žádné oprávnění.

Přesto je úvaha v pořádku. Předpokládejme, že délky stran b a c jsou takové, že trojúhelník ***ABC***, který je řešením úlohy 2 existuje. Pak mají jeho strany délky $\sqrt{b(b+c)}$, b, c. Předpokládejme nyní, že trojúhelník o stranách délek $\sqrt{b(b+c)}$, b, c, neexistuje a přitom existuje trojúhelník, který je řešením úlohy 2 (resp. úlohy 1), potom by ovšem jeho strany měly délky $\sqrt{b(b+c)}$, b, c, což je spor s předpokladem. Proto, jestliže neexistuje trojúhelník délek $\sqrt{b(b+c)}$, b, c, nemůže existovat ani řešení úlohy 2.

Stále však musíme zodpovědět následující otázku. Je každý trojúhelník ***ABC***, délky jehož stran jsou tvaru $a=\sqrt{b(b+c)}$, b, c, takový, že velikost vnitřního úhlu při vrcholu ***A*** je dvojnásobkem velikosti vnitřního úhlu při vrcholu ***B***? Jedině pak máme zaručeno, že trojúhelník sestrojený pomocí postupu navrženého 1. nebo 2. řešením úlohy 2 vyhovuje podmínkám úlohy 2. Podle kosinové věty platí:

$$b^2=c^2+b(b+c)-2c\sqrt{b(b+c)}\cos\beta\,.$$

Odtud získáme:

$$\cos\beta=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b+c}{b}}\,.$$

Ze sinové věty vyplývá:

$$\sin\alpha=\frac{a}{b}\sin\beta=\frac{\sqrt{b(b+c)}}{b}\sin\beta=\sqrt{\frac{b+c}{b}}\sin\beta=2\cos\beta\sin\beta=\sin 2\beta\,.$$

Vidíme, že buď $\alpha = 2\beta$, nebo $\alpha = 180° - 2\beta$. První výsledek ukazuje, že trojúhelník ***ABC*** má požadovanou vlastnost.

Podívejme se nyní na druhý výsledek. Vidíme, že $\alpha + 2\beta = 180°$, proto $\gamma = \beta$. Trojúhelník ***ABC*** je rovnoramenný a $b = c$. Potom ovšem $a=\sqrt{b(b+b)}=b\sqrt{2}$. Jedná se proto o rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník s odvěsnou délky b. V něm je ovšem $\alpha = 90°$ a $\beta = 45°$ a trojúhelník ***ABC*** má tak požadovanou vlastnost.

Teprve nyní vidíme, že trojúhelník ***ABC***, který je řešením úlohy 2, existuje právě tehdy, když existuje trojúhelník o stranách délek $\sqrt{b(b+c)}$, b, c. Ten existuje, právě když jsou splněny všechny tři následující podmínky (trojúhelníková nerovnost):

(A) $\sqrt{b(b+c)}+b>c$, (B) $\sqrt{b(b+c)}+c>b$, (C) $b+c>\sqrt{b(b+c)}$.

Odtud:

(A) $\sqrt{b(b+c)} > c-b$, (B) $\sqrt{b(b+c)} > b-c$, (C) $b+c > \sqrt{b(b+c)}$.

I. Nejprve nechť $c \geq b$. Podmínku (A) můžeme upravit do tvaru $c(3b-c) > 0$. Odtud plyne podmínka řešitelnosti $3b > c$. Podmínka (B) je splněna vždy. Podmínka (C) přechází do tvaru $c(b+c) > 0$ a je splněna vždy.

II. Nechť nyní $c < b$. Podmínka (A) je splněna vždy. Podmínku (B) můžeme vyjádřit i takto: $c(3b-c) > 0$, nerovnost je splněna vždy. Podmínka (C) platí vždy ze stejných důvodů jako v bodě I.

Můžeme tak učinit tento závěr: úloha 2 je řešitelná právě tehdy, když $3b > c$.

Podívejme se nyní, jak nás zbylá čtyři řešení úlohy 2 sice dovedou ke stejnému závěru ohledně řešitelnosti, přitom to však budou činit odlišnými způsoby. V průběhu 3. řešení jsme viděli, že pokud existuje reálné číslo $\sqrt{b^2 - \left(\frac{c-b}{2}\right)^2}$, určuje vzdálenost bodu $\boldsymbol{C}$ od přímky $\boldsymbol{AB}$. Jestliže trojúhelník $\boldsymbol{ABC}$ existuje, je tato odmocnina různá od nuly. Proto požadujeme, aby platilo:

$$b^2 - \left(\frac{c-b}{2}\right)^2 > 0.$$

Odtud získáme:

$$\frac{3b^2}{4} + \frac{bc}{2} - \frac{c^2}{4} > 0,$$
$$3b^2 + 2bc - c^2 > 0,$$
$$(3b-c)(b+c) > 0.$$

Vidíme, že jestliže řešení úlohy 2 existuje, musí platit $3b > c$. Odtud plyne, jestliže $3b \leq c$, neexistuje řešení úlohy 2. Konečně podle úvah, které jsme provedli výše v rámci 3. řešení úlohy 2, jestliže platí $3b > c$, existuje na ose úsečky $\boldsymbol{BD}$ bod $\boldsymbol{C}$ vzdálený b od bodu $\boldsymbol{A}$ a $\sqrt{b(b+c)}$ od bodu $\boldsymbol{B}$. Protože navíc $|\boldsymbol{AB}| = c$, je trojúhelník $\boldsymbol{ABC}$ řešením úlohy 2.

4. řešení úlohy 2 ukazuje, že hledaný trojúhelník ***ABC*** existuje, právě když vrchol ***C*** leží na ose úsečky ***BD*** (o délce $b + c$) ve vzdálenosti b od bodu ***A***, který leží na úsečce ***BD*** ve vzdálenosti b od bodu ***D***.[62] Uvažovaný bod ***C*** existuje právě tehdy, když platí:

$2b > \frac{b+c}{2}$, tj. $3b > c$.

Úloha 2 má proto řešení, právě když $3b > c$.

Podle 5. řešení úlohy 2 platí: hledaný trojúhelník ***ABC*** existuje, právě když existuje buď čtverec o straně b (pokud $b = c$), nebo rovnoramenný lichoběžník ***ABDC*** o stranách délek c, b, b, b (pokud $b \neq c$).[63] Uvedený lichoběžník existuje, právě když součet délek libovolných tří jeho stran je větší než délka zbývající strany. Musí proto platit:

$3b > c$ a $2b + c > b$.

Druhá z nerovností je splněna vždy.

V případě, že $b = c$, je první nerovnost splněna, přitom příslušný čtverec ***ABCD*** vždy existuje. Proto řešení úlohy 2 existuje právě tehdy, když $3b > c$.

V rámci 6. řešení úlohy 2 jsme ukázali, že jestliže trojúhelník ***ABC*** existuje, pak první souřadnice i bodu ***C*** ve zvolené soustavě souřadnic vyhovuje nerovnosti $|i| < b$. Pokud sem dosadíme výsledek odvozený výše, získáme:

$|\frac{c-b}{2}| < b$.

Odtud plyne:

$-2b < c - b < 2b$,

$-b < c < 3b$.

Protože první z nerovností je splněna vždy, platí, že jestliže hledaný trojúhelník ***ABC*** existuje, pak $c < 3b$. Obráceně, pokud $c < 3b$, platí $|i| < b$. Potom je druhá souřadnice j bodu ***C*** (určená

---

[62] Zatím jsme ukázali, že jestliže trojúhelník ***ABC*** je řešením úlohy 2, má vrchol ***C*** uvedenou vlastnost. Není těžké ukázat, že jestliže sestrojíme trojúhelník ***ABC***, jehož vrchol ***C*** má uvedenou polohu vzhledem k úsečce ***BD***, bude tento trojúhelník řešením úlohy 2.

[63] Již dříve jsme ukázali, že pokud je trojúhelník řešením úlohy 2, je možné vytvořit lichoběžník nebo čtverec uvažovaných vlastností. Obráceně můžeme ukázat, že pokud existuje lichoběžník nebo čtverec ***ABDC*** o uvedených délkách stran, je trojúhelník ***ABC*** řešením úlohy 2.

vztahem $j^2 = b^2 - i^2$) reálné číslo různé od nuly. Bod ***C*** tak neleží na přímce ***AB***. Pro velikosti vnitřních úhlů α a β trojúhelníku ***ABC*** platí:

$$\cos\alpha = \frac{i}{b} = \frac{c-b}{2b},$$

$$\cos\beta = \frac{c-i}{\sqrt{c^2+b^2-2ci}} = \frac{c-\frac{c-b}{2}}{\sqrt{c^2+b^2-c(c-b)}} = \frac{c+b}{2\sqrt{b(b+c)}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b+c}{b}}.$$

Dále můžeme psát:

$$\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1 = \frac{b+c}{2b} - 1 = \frac{c-b}{2b} = \cos\alpha\ .$$

Protože α leží v intervalu (0°, 180°), kde je funkce kosinus prostá, musí být nutně velikost úhlu α dvojnásobkem velikosti úhlu β. Trojúhelník ***ABC*** je tedy řešením úlohy 2. Proto je úloha 2 řešitelná, právě když $c < 3b$.

Všimněme si ještě stanovení podmínky řešitelnosti úlohy 1. Pochopitelně výsledek bude stejný jako v případě úlohy 2. Půjde mi spíš o to ukázat, že k němu můžeme dospět jiným způsobem, než jsem uvedl výše u úlohy 2. První způsob, jak lze rozhodnout, kdy je úloha 1 řešitelná, je identický s tím, který jsme užili v případě 1. a 2. řešení úlohy 2. Položíme si otázku, zda skutečně existuje trojúhelník o délce strany *a* námi vypočítané. K odpovědi užijeme opět trojúhelníkovou nerovnost. Celý postup je zřejmý, provedli jsme ho výše.

Napadlo mě však, že zvolený výpočet v případě 1. a 2. řešení úlohy 1 v sobě musí mít ukryté jisté „opravné mechanismy“. Ty nás v rámci užitého postupu mohou upozornit na skutečnost, že pro určité hodnoty délek *b* a *c* není výpočet v pořádku. Vše ukážu na případě řešení z podkapitoly 3.1.1. Zde jsme využili následující vztah:

$$\cos\beta = \frac{a}{2b}.$$

Dále platí $\beta + \alpha < 180°$, tj. $3\beta < 180°$, proto $0° < \beta < 60°$. Odtud $1 > \cos\beta > 0{,}5$. Pokud trojúhelník existuje, platí:

$\frac{\sqrt{b(b+c)}}{2b} > \frac{1}{2}$, tj. $b(b+c) > b^2$, podmínka je splněna pro libovolné hodnoty *b* a *c*.

Dále musí platit:

$\dfrac{\sqrt{b(b+c)}}{2b} < 1$, tj. $b(b+c) < \ 4b^2$, po úpravě $bc < 3b^2$.

Dospěli jsme tak opět k tomu, že jestliže trojúhelník ***ABC***, který je řešením úlohy 1, existuje, musí platit c < 3b. Otázku, zda každý trojúhelník, kde c < 3b a délka strany a je určena vztahem (3.1.1), je řešením úlohy 1, jsme zodpověděli výše metodami trigonometrie.

Obdobným způsobem můžeme zodpovědět otázku řešitelnosti, i pokud se chceme opírat o 2. řešení úlohy 1. Stačí diskutovat přípustné hodnoty vztahu:

$\cos\beta = \dfrac{c}{2x}$, kde $x = \dfrac{ac}{b+c}$.

3. řešení úlohy 1 se opírá o úvahy, které jsou obsahem 4. řešení úlohy 2. Podmínku řešitelnosti bychom odvodili stejně, jak jsme pro toto řešení ukázali výše.

Základem 4. řešení úlohy 1 byla skutečnost, že trojúhelník ***ABA'*** je rovnoramenný (o stranách délek c, x, x). Potom platí:

$2x > c$.

Odtud vyplývá:

$\dfrac{2ac}{b+c} > c,$

$2\sqrt{b(b+c)} > b+c,$

$3b^2 + 2bc - c^2 > 0,$

$(3b-c)(b+c) > 0,$

Z této nerovnosti opět získáme podmínku 3b > c.

Viděli jsme, jak může zvolený postup řešení poměrně elementárních úloh ovlivnit způsob, kterým odkrýváme podmínky řešitelnosti úloh. Považuji za zajímavé, že každá ze zvolených metod nás k témuž cíli vede různými cestami, proto jsem se této otázce věnoval tak zeširoka. Na úplný závěr této kapitoly bych rád ukázal zajímavý trojúhelník, který je řešením úloh 1 a 2 pro jisté hodnoty délek b a c.

Uvažujme, za jakých podmínek je takový trojúhelník rovnoramenný. Protože jsou vnitřní úhly při vrcholech ***A*** a ***B*** různé, jsou různé i délky stran a a b. Mohou nastat pouze dva případy: $b = c$, nebo $a = c$. První možnost jsme již uvažovali, jedná se o rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami délky b, kde $\alpha = 90°$, $\beta = \gamma = 45°$.

Je-li $a = c$, platí:

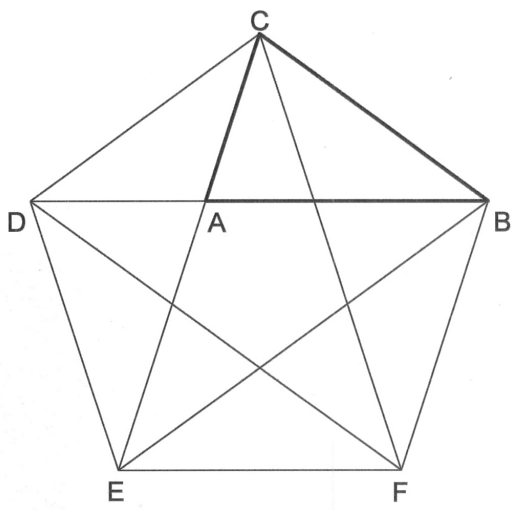
$c^2 = b(c + b)$.

Odtud získáme:

$c : b = (c + b) : c$.

Pak je jistě $c > b$, úsečka o délce $c + b$ je úseky o délkách c a b rozdělena v poměru zlatého řezu. Také platí $\alpha = \gamma = 2\beta$ a odtud vidíme, že $\beta = 180°/5 = 36°$, $\alpha = \gamma = 72°$.

Je tu zřejmá souvislost tohoto trojúhelníku a pravidelného pětiúhelníku (viz obr. 3.1.10). Trojúhelník ***DAC*** je rovnoramenný se základnou ***CD***. Součet velikostí jeho (shodných) vnitřních úhlů při vrcholech ***D*** a ***C*** je roven velikosti vnějšího úhlu při vrcholu ***A***. Proto je velikost úhlu ***BAC*** dvojnásobkem velikosti úhlu ***ADC***, která je rovna velikosti úhlu ***ABC***. Vidíme, že trojúhelník ***ABC*** má tu vlastnost, kterou jsme studovali v úlohách 1 a 2. Protože je čtyřúhelník ***EFBA*** kosočtverec, jsou úsečky ***EF*** a ***AB*** shodné. Shodné jsou i úsečky ***BC*** a ***EF***. Proto je trojúhelník ***ABC*** rovnoramenný se základnou ***AC***. Jedná se tak o trojúhelník podobný s tím, kterému jsme se věnovali v předchozím odstavci. Odtud můžeme jako jistou perličku snadno ukázat, že úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku dělí jeho vnitřní úhly na tři shodné úhly.



Obr. 3.1.10

3.2 Ptolemaiova věta

3.2.1 Úvod

V podkapitole 2.1.2 jsme uvedli jako větu 2.1.1 Ptolemaiovu větu v klasickém znění a její zobecnění ve větě 2.1.2, která pomocí determinantu vyjadřovala vzájemný vztah mezi vzdálenostmi čtyř různých bodů na kružnici. V podkapitole 2.3.2 jsme bez důkazu uvedli větu 2.3.1, kterou můžeme chápat jako analogii věty 2.1.2 v trojrozměrném prostoru a která pomocí jistého determinantu vyjadřuje vzájemný vztah mezi pěti různými body na kulové ploše. Protože jsou věty 2.1.2 a 2.3.1 výchozími body Sobotkových řešení Apolloniovy úlohy a příbuzných úloh, považuji za důležité dokázat jejich platnost.

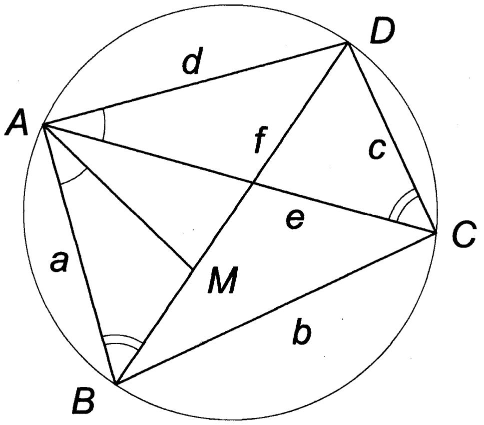
Současně však chci na příkladě těchto vět ilustrovat myšlenky, které jsem rozvedl v kapitole 2.5 a úvodu třetí části. Předchozí dvě úlohy vyjadřovaly inspiraci Sobotkou v tom smyslu, že se u úlohy nespokojíme pouze s jedním způsobem řešení, ale využijeme různých částí geometrie. Viděli jsme, že nám tento přístup umožňuje čerpat podněty z jednoho řešení pro řešení další, že je přínosné spojovat početní s konstruktivním řešením i hledat řešení jednodušší. V této kapitole bude centrem našeho zájmu ukázat, jak zvolený způsob důkazu a případné užití určitého kalkulu ovlivňuje například to, jak je pro tento důkaz důležitý nápad a nakolik stačí pouhé provedení určitých manipulací se symboly v jistém kalkulu. Zajímavé bude též to, že nahlédneme, jak při užití dvou různých kalkulů nám jeden z nich odkryje další možnosti, jak problém rozvíjet, zatímco možnosti dalšího jsou v tomto směru omezené. Také v tomto směru je Sobotka inspirativní, neboť i toho jsme si v jeho pracích mohli všimnout.

Již od 2. století je známa věta, která vyjadřuje vztah mezi délkami stran a úhlopříček tětivového čtyřúhelníku. Připomeňme nejprve znění této věty:

Věta 3.2.1 (Ptolemaiova): *V každém tětivovém čtyřúhelníku je součin délek úhlopříček roven součtu součinů délek protilehlých stran.*

3.2.2 Důkaz využívající podobnosti trojúhelníků

Tento důkaz je postavený na jednoduchých poučkách elementární geometrie – větách o podobnosti trojúhelníků a větě o obvodovém a středovém úhlu. Na druhou stranu vyžaduje nápad, který není nijak samozřejmý. Nalezneme ho např. v [5].



Obr. 3.2.1

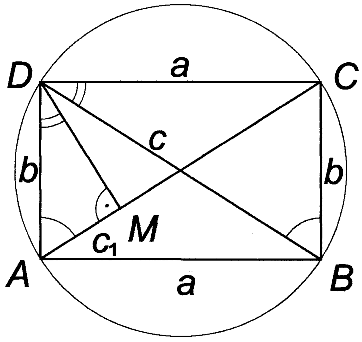
Na úhlopříčce ***BD*** sestrojíme (viz obr. 3.2.1) bod ***M*** tak, aby platilo: $|\angle \boldsymbol{CAD}| = |\angle \boldsymbol{BAM}|$. Dále podle věty o obvodovém úhlu platí: $|\angle \boldsymbol{ABD}| = |\angle \boldsymbol{ACD}|$ (úhly příslušející oblouku ***AD***). Proto je trojúhelník ***ACD*** podobný s trojúhelníkem ***ABM***. Dále jsou si rovny velikosti následujících úhlů: $|\angle \boldsymbol{MAD}| = |\angle \boldsymbol{BAD}| - |\angle \boldsymbol{BAM}| = |\angle \boldsymbol{BAD}| - |\angle \boldsymbol{CAD}| = |\angle \boldsymbol{BAC}|$. Podle věty o obvodovém úhlu platí: $|\angle \boldsymbol{ADB}| = |\angle \boldsymbol{ACB}|$ (úhly příslušející oblouku ***AB***). Proto je trojúhelník ***ACB*** podobný s trojúhelníkem ***ADM***. Z podobnosti uvažovaných dvou dvojic trojúhelníků získáme následující vztahy:

$$\frac{|\boldsymbol{AC}|}{|\boldsymbol{CD}|} = \frac{|\boldsymbol{AB}|}{|\boldsymbol{BM}|}, \text{ tj. } \frac{e}{c} = \frac{a}{|\boldsymbol{BM}|} \quad \text{a dále} \quad \frac{|\boldsymbol{AC}|}{|\boldsymbol{BC}|} = \frac{|\boldsymbol{AD}|}{|\boldsymbol{DM}|}, \text{ tj. } \frac{e}{b} = \frac{d}{|\boldsymbol{DM}|}.$$

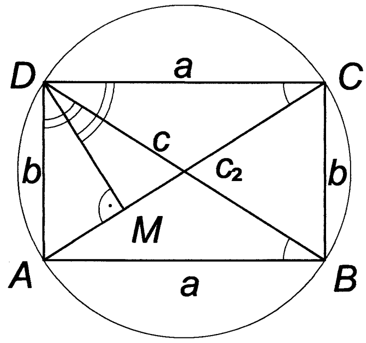
Pokud je dále upravíme, dokážeme tvrzení věty:

$$ac = e|\boldsymbol{BM}| \text{ a } bd = e|\boldsymbol{DM}|; \quad ac + bd = e|\boldsymbol{BM}| + e|\boldsymbol{DM}| = e(|\boldsymbol{BM}| + |\boldsymbol{DM}|) = ef.$$

Uvažujme nyní obdélník ***ABCD*** jako speciální případ tětivového čtyřúhelníku. Sledujme úvahy analogické k výše uvedeným (obr. 3.2.2, 3.2.3). Na úhlopříčce ***AC*** sestrojíme bod ***M*** tak, aby platilo: $|\angle \boldsymbol{BDC}| = |\angle \boldsymbol{ADM}|$. Protože v obdélníku jsou úhly ***DAC*** a ***DBC*** shodné, jsou trojúhelníky ***BDC*** a ***ADM*** podobné. Proto je úsečka ***DM*** kolmá na úhlopříčku ***AC***. Analogickou úvahu je možné provést pro trojúhelníky ***ABD*** a ***MCD***, které jsou také podobné.



Obr. 3.2.2



Obr. 3.2.3

Uvážením uvedených dvou dvojic podobných trojúhelníků získáme následující vztahy:

$\frac{|AC|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|BM|}$, tj. $\frac{c}{a} = \frac{a}{c_1}$ a dále $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|DM|}$, tj. $\frac{c}{b} = \frac{b}{c_2}$.

Pokud je dále upravíme, můžeme psát:

$a^2 = c \cdot c_1$ a dále $b^2 = c \cdot c_2$. Je zřejmé, že tyto vztahy vyjadřují Euklidovy věty o odvěsnách v pravoúhlém trojúhelníku ***ABD***. Budeme postupovat obdobně jako u obecného tětivového čtyřúhelníku, tj. určíme součet součinů délek protilehlých stran:

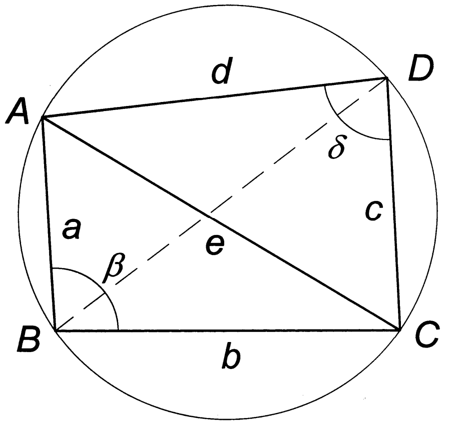
$a \cdot a + b \cdot b = a^2 + b^2 = c \cdot c_1 + c \cdot c_2 = c \cdot (c_1 + c_2) = c^2 = c \cdot c$.

Vidíme, že Ptolemaiova věta pro obdélník přechází ve větu Pythagorovu pro trojúhelník ***ABD***.

Pro celý důkaz byl klíčový nápad o využití jistého bodu M na úhlopříčce tětivového čtyřúhelníku. Na volbu právě tohoto bodu nejsme nijak dopředu „upozorněni“, tento nápad nelze považovat za samozřejmý. Jeho přenesení na obdélník nám ukáže i jeho hlubší smysl, když nahlédneme souvislost Euklidových vět a Pythagorovy věty s Ptolemaiovou větou.

3.2.3 Důkaz využívající vlastnosti tětivového čtyřúhelníku a kosinové věty

Tento důkaz spočívá na následující vlastnosti tětivového čtyřúhelníku: „Čtyřúhelník je tětivový, právě když je součet jeho protilehlých úhlů roven 180°.“ Současně využívá výpočtů postavených na kosinové větě.



Obr. 3.2.4

Vyjádříme pomocí kosinové věty druhou mocninu velikosti úhlopříčky ***AC*** jednak z Δ***ABC***, jednak z Δ***ACD***:

$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta$; $e^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\delta$.

Pokud uvážíme, že $\cos\delta = \cos(180° - \beta) = -\cos\beta$, můžeme z prvého a druhého vztahu vyjádřit hodnotu kosinu úhlu β:

$$\cos\beta = \frac{a^2 + b^2 - e^2}{2ab} = \frac{e^2 - c^2 - d^2}{2cd}.$$

Úpravou tohoto vztahu získáme:

$$a^2cd + b^2cd + abc^2 + abd^2 = e^2(ab + cd),$$

$$ac(ad + bc) + bd(ad + bc) = e^2(ab + cd),$$

$$(ac + bd)(ad + bc) = e^2(ab + cd),$$

$$e^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{(ab + cd)}.$$

Zcela analogicky můžeme pro druhou mocninu velikosti úhlopříčky ***BD*** psát:

$$f^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{(ad + bc)}.$$

Poslední dva vztahy vynásobíme:

$e^2 f^2 = (ac + bd)^2$, proto též platí: $ef = ac + bd$.

I zde má své nezastupitelné místo nápad (vyjádření velikosti úhlopříčky ze dvou trojúhelníků a uvědomění si vztahu mezi kosiny protilehlých úhlů). Ten je však narozdíl od toho z předchozí podkapitoly více nasnadě. Pokusíme se dále srovnat oba tyto důkazy. První využívá poměrně jednoduchých poznatků, je však potřeba vytvořit na první pohled ne zcela zřejmým způsobem dva podobné trojúhelníky. To vyžaduje nápad, který není vůbec triviální. Oproti tomu druhý důkaz využívá složitějších poznatků a vyžaduje zvládnutí úprav algebraických výrazů, ale samotný výpočet je pak spíše mechanický.

Na příkladě těchto dvou důkazů si uvědomujeme skutečnost, která má v matematice obecnější platnost. Často užití „mocnějšího aparátu" umožňuje snížit závislost nějaké úvahy na netriviálních nápadech. Vlastní úvaha se potom převážně odehrává v rovině aplikací jistých naučených algoritmů příslušné části matematiky. Může se též stát, že „mocnější aparát" umožňuje objevení dalších souvislostí, rozvoj příslušné matematické teorie atd. Konečně poznamenejme, že příslušný „aparát" je nezřídka jistým „kalkulem". Tento pojem můžeme dokreslit následující citací:

> „*... matematika kalkulací je metoda předpovídání pomocí formálních kalkulů. Přitom formálním kalkulem rozumíme hru se znaky prováděnou podle nějakých pevně stanovených pravidel,*" ([32], str. 6).

K významu matematiky kalkulací uvádí P. Vopěnka též toto:

> „*Užitečnost a síla matematiky kalkulací jakožto metody je v každém zvláštním případě jejího užití rozhodujícím způsobem závislá na volbě příhodného kalkulu, tedy na něčem, co matematikou v pravém smyslu slova ještě není, co však lze nazvat protomatematikou, neboť to vlastní matematiku předchází.*
>
> ...
>
> *Vhodný kalkulus musí se studovaným předmětem ladit, vyzdvihovat podstatné a tlumit okrajové, být elegantní a tíhnout k jednoznačné průzračnosti, ne však mělké, ale hluboké a prozřetelné. Krátce řečeno protomatematika není ani věda, ani metoda; je to umění, a to umění nad jiné obtížné, což je patrno již z toho, že mezi všemi ostatními uměními se může honosit zdaleka nejmenším množstvím hodnotných uměleckých děl.*
>
> *Matematika kalkulací ovšem neslouží jen k naplňování záměrů té vědy, která ji přijala za svoji metodu, ale často sama této vědě stanovuje nové úkoly a problémy. Používaný kalkulus se totiž může takříkajíc hodit i na něco, co ve*

studovaném předmětu bylo dosud skryto, neboť dosavadními metodami to bylo obtížně dostupné. Tak například při studiu rovinných křivek se zprvu geometrie zabývala kuželosečkami, a pak ještě některými speciálními křivkami ... Algebraický kalkul užitý v geometrii však přirozeným způsobem zaměřil pozornost geometrů též na algebraické křivky vyšších stupňů.

Ke studiu daného předmětu mohou být vhodné různé kalkuly, přičemž každý z nich odráží jiný přístup k tomuto předmětu.

...

Týž kalkul může být užitečný i ke studiu různých předmětů a zprostředkovávat tak podobnost mezi nimi, která často při povrchním pohledu nemusí být zřejmá. To jednak umožňuje čerpat podněty ke studiu jednoho z těchto předmětů ze studia druhého, jednak z nich odlučovat – to je abstrahovat – co je pro ně z hlediska tohoto kalkulu společné, tedy vytvářet abstraktní struktury a rozvíjet abstraktní matematiku,“ ([32], str. 6 – 7).

Vrátíme se nyní od těchto hlubokých myšlenek zpět k našemu původnímu problému. Přitom si v dalším textu ukážeme, že pokud použijeme vhodný kalkul („aparát ještě mocnější“), jsme schopni nejen dokázat Ptolemaiovu větu, ale nalézt i její prostorovou modifikaci pro pět bodů ležících na kouli.

3.2.4 Důkaz využívající teorie determinantů a matic

A. Laplaceova věta

Základem našich úvah bude tato věta:

Věta 3.2.2 (Laplaceova): *Determinant se rovná součtu součinů, které dostaneme, když násobíme každý subdeterminant r-tého stupně vzatý z určitých r řad jeho doplňkem.*

Tuto větu ponecháme bez důkazu. Můžeme ho nalézt v [33]. Připomeňme pojem doplňku subdeterminantu stupně r. Z determinantu stupně n vybereme r řádků označených indexy $i_1 < i_2 < \ldots < i_r, 1 \le i_k \le n, k = 1,\ldots,r$ a r sloupců označených $j_1 < j_2 < \ldots < j_r, 1 \le j_l \le n$, $l = 1,\ldots,r$. Prvky společné těmto řádkům a sloupcům tvoří subdeterminant řádu r. Označíme jej $M^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_r}$. Prvky společné zbylým $n - r$ řádkům a sloupcům tvoří subdeterminant, který budeme značit $A^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_r}$. Doplňkem $M^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_r}$ budeme rozumět $\boldsymbol{A}^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_r} = (-1)^{i_1+\dots+i_r+j_1+\dots+j_r} A^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_r}$.

Speciálním důsledkem věty 3.2.2 pro $r = 1$ je známý rozvoj determinantu podle prvků určité řady. Dalším důsledkem je následující věta:

Věta 3.2.3: *Jestliže r řádků determinantu obsahuje v n – r sloupcích samé nuly, je determinant roven součinu subdeterminantu, sestaveného z těchto r řádků a těch r sloupců, jež neobsahují samé nuly, s jeho doplňkem. Jestliže jsou samé nuly ve více než n – r sloupcích, je determinant roven nule.*

Označme M subdeterminant, který je obsahem prvního tvrzení, a jeho doplněk $\boldsymbol{A}$. Rozvoj determinantu podle r sloupců obsahujících M tvoří člen $M\cdot\boldsymbol{A}$ a dále subdeterminanty vzniklé náhradou alespoň jednoho řádku M násobené svými doplňky. Tyto doplňky se liší od $\boldsymbol{A}$ alespoň v jednom řádku. Ten je nahrazen řádkem obsahujícím samé nuly, tj. oněch $n - r$ nul nacházejících se v řádku, který jsme v M vynechali. Proto jsou tyto doplňky rovny nule a rozvoj determinantu obsahuje pouze člen $M\cdot\boldsymbol{A}$. Pokud jsou navíc samé nuly ve více než $n - r$ sloupcích, obsahuje M alespoň jeden sloupec samých nul. Proto $M = 0$ a tedy i determinant je roven nule.

B. Determinant součinu zvláštního typu matic

Uvedený postup můžeme nalézt též v [33]. Nechť jsou dány dvě matice ($\boldsymbol{A}$ typu n, m a $\boldsymbol{B}$ typu m, n).

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Jejich součinem je matice $\boldsymbol{C}$ řádu n.

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}, \quad \text{kde } c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{im}b_{mj}.$$

Budeme studovat determinant D řádu $m + n$.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{vmatrix}$$

Tento determinant upravíme takto: k (m + 1)-mu sloupci přičteme m prvních sloupců násobených po řadě $b_{11}, b_{21}, \dots, b_{m1}$, k ($m$ + j)-tému sloupci přičteme prvních m sloupců násobených po řadě $b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{mj}$.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\dots+a_{1m}b_{m1} & \dots & a_{11}b_{1n}+a_{12}b_{2n}+\dots+a_{1m}b_{mn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} & a_{n1}b_{11}+a_{n2}b_{21}+\dots+a_{nm}b_{m1} & \dots & a_{n1}b_{1n}+a_{n2}b_{2n}+\dots+a_{nm}b_{mn} \\ -1 & \cdots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Což můžeme psát:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} & c_{n1} & \dots & c_{nn} \\ -1 & \cdots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Vidíme, že m řádků determinantu D obsahuje $(m + n) - m = n$ sloupců samých nul, podle věty 3.2.3 je tedy:

$$D=(-1)^{(n+1)+(n+2)+\dots+(n+m)+1+2+\dots+m}\begin{vmatrix} -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^{mn+m(m+1)}\cdot(-1)^m\begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{(n+1)m}\cdot(-1)^{(m+1)m}\left|c_{ij}\right|=(-1)^{(n+1)m}\left|c_{ij}\right|$$

Odtud vidíme, že determinant matice $\boldsymbol{C}$ je:

$$\det \boldsymbol{C} = (-1)^{(n+1)m} D$$

Jestliže se vrátíme k původnímu zápisu determinantu D, všimneme si, že pokud $n > m$, je v n řádcích determinantu n sloupců samých nul. Protože $n > (n + m) - n = m$, je podle věty 3 determinant $D = 0$.

Věta 3.2.4: *Nechť jsou dány matice A typu n,m a B typu m, n. Pak determinant matice AB je roven nule, jestliže n > m.*

C. Geometrická aplikace – odvození Ptolemaiovy věty

Uvažujme obdobně jako v [33] v rovině dvě soustavy n bodů $\{\boldsymbol{X}_1,\dots,\boldsymbol{X}_n\}$ a $\{\boldsymbol{X}'_1,\dots,\boldsymbol{X}'_n\}$. Zvolíme též jistou kartézskou soustavu souřadnic. Označme x_i, y_i (resp. x'_i, y'_i) souřadnice bodu $\boldsymbol{X}_i$ (resp. $\boldsymbol{X}'_i$), $i = 1,\dots, n$. Vytvoříme dvě matice:

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2x'_1 & -2x'_2 & \cdots & -2x'_n & 0 \\ -2y'_1 & -2y'_2 & \dots & -2y'_n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Součin těchto matic bude matice $\boldsymbol{G} = (g_{ij})$. Přitom platí:

$$g_{ij} = x_i(-2x'_j) + y_i(-2y'_j) + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = -2(x_i x'_j + y_i y'_j); \quad i, j = 1,\dots,n,$$

$$g_{n+1,j} = 0\cdot(-2x'_j) + 0\cdot(-2y'_j) + 0\cdot 0 + 1\cdot 1 = 1; \quad j = 1,\dots,n,$$

$$g_{i,n+1} = x_i \cdot 0 + y_i \cdot 0 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0 = 1; \quad i = 1,\dots,n,$$

$$g_{n+1,n+1} = 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 0 = 0.$$

Proto je determinant matice $\boldsymbol{G}$ ve tvaru:

$$G = \det \boldsymbol{G} = \begin{vmatrix} -2(x_1x'_1 + y_1y'_1) & \dots & -2(x_1x'_n + y_1y'_n) & 1 \\ \vdots & -2(x_ix'_j + y_iy'_j) & \vdots & \vdots \\ -2(x_nx'_1 + y_ny'_1) & \dots & -2(x_nx'_n + y_ny'_n) & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Násobme poslední řádek $(x_i^2 + y_i^2)$ (resp. poslední sloupec $(x_j'^2 + y_j'^2)$) a přičtěme ho k *i*-tému řádku (resp. k *j*-tému sloupci), *i*, *j* = 1,…, *n*. Hodnota determinantu se nezmění a jeho prvek v *i*-tém řádku a *j*-tém sloupci je:

$$-2(x_i x_j' + y_i y_j') + (x_i^2 + y_i^2) + (x_j'^2 + y_j'^2) = (x_i - x_j')^2 + (y_i - y_j')^2$$

Tento výraz je roven druhé mocnině vzdálenosti bodů X_i, X_j', tu označíme d_{ij}. Potom platí:

$$G = \begin{vmatrix} d_{11}^2 & d_{12}^2 & \dots & d_{1n}^2 & 1 \\ d_{21}^2 & d_{22}^2 & \dots & d_{2n}^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_{n1}^2 & d_{n2}^2 & \dots & d_{nn}^2 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Věta 3.2.5: *Nechť jsou v rovině dány dvě soustavy o n bodech. Pak pro jejich vzájemné vzdálenosti* d_{ij} *(tj. vzdálenost i-tého bodu první soustavy a j-tého bodu druhé soustavy) platí:*

$$G = \begin{vmatrix} d_{11}^2 & d_{12}^2 & \dots & d_{1n}^2 & 1 \\ d_{21}^2 & d_{22}^2 & \dots & d_{2n}^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_{n1}^2 & d_{n2}^2 & \dots & d_{nn}^2 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \textit{jestliže } n \geq 4.$$

Důkaz vychází přímo z věty 3.2.4. Pokud je $n \geq 4$, je *G* determinantem součinu matice typu *n* + 1, 4 a typu 4, *n* + 1. Protože *n* + 1 > 4, je *G* = 0. Následující dvě tvrzení nalezneme v [33] jako jedny z příkladů, řešení není rozvedeno.

Věta 3.2.6: *Mějme v rovině dáno n bodů,* $n \geq 4$. *Pak pro jejich vzájemné vzdálenosti platí:*

$$\begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & \dots & d_{1n}^2 & 1 \\ d_{12}^2 & 0 & \dots & d_{2n}^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_{1n}^2 & d_{2n}^2 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Tvrzení této věty je přímým důsledkem věty 3.2.5, pokud *i*-tý bod první soustavy ztotožníme s *i*-tým bodem druhé soustavy.

Věta 3.2.7: *Mějme dány v rovině 4 body ležící na kružnici, pak pro jejich vzájemné vzdálenosti platí:*

$$\begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 \\ d_{12}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ d_{13}^2 & d_{23}^2 & 0 & d_{34}^2 \\ d_{14}^2 & d_{24}^2 & d_{34}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Označíme prvky tohoto determinantu P. Doplníme čtyři dané body o střed kružnice, na které tyto body leží. Pro danou čtveřici i pro danou pětici platí věta 6. Pokud označíme $d_{01}, d_{02}, d_{03}, d_{04}$ vzdálenosti daných bodů kružnice od jejího středu, které jsou ovšem rovny poloměru r kružnice, můžeme provést následující úpravy.

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & d_{01}^2 & d_{02}^2 & d_{03}^2 & d_{04}^2 & 1 \\ d_{01}^2 & 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 & 1 \\ d_{02}^2 & d_{12}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 & 1 \\ d_{03}^2 & d_{13}^2 & d_{23}^2 & 0 & d_{34}^2 & 1 \\ d_{04}^2 & d_{14}^2 & d_{24}^2 & d_{34}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & r^2 & r^2 & r^2 & r^2 & 1 \\ r^2 & \ddots & & & & 1 \\ r^2 & & P & & & 1 \\ r^2 & & & \ddots & & 1 \\ r^2 & & & & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -r^2 & r^2 & r^2 & r^2 & r^2 & 1 \\ 0 & \ddots & & & & 1 \\ 0 & & P & & & 1 \\ 0 & & & \ddots & & 1 \\ 0 & & & & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -2r^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & & & & 1 \\ 0 & & P & & & 1 \\ 0 & & & \ddots & & 1 \\ 0 & & & & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2r^2 \begin{vmatrix} \ddots & & & & 1 \\ & P & & & 1 \\ & & \ddots & & 1 \\ & & & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \ddots & & & & 1 \\ & P & & & 1 \\ & & \ddots & & 1 \\ & & & \ddots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2r^2 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} \ddots & & & \\ & P & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 \\ d_{12}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ d_{13}^2 & d_{23}^2 & 0 & d_{34}^2 \\ d_{14}^2 & d_{24}^2 & d_{34}^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Tím je věta 3.2.7 dokázána. V podkapitole 2.1.2 jsme ukázali souvislost této věty (tam označené jako věta 2.1.2) a Ptolemaiovy věty v tradičním znění.

V následující části ještě vyvodíme modifikaci Ptolemaiovy věty pro pět bodů na kouli. Postup je obdobný výše uvedenému rovinnému případu, proto odvození pouze naznačím. Snažím se, aby vynikla podobnost s výše uvedenými tvrzeními. Tomu je uzpůsobeno i číslování vět, takže věta 3.2.5* je prostorovou analogií k větě 3.2.5, atd. Bylo by ovšem možné obdobně uvažovat i v případě n-rozměrného euklidovského prostoru.

D. Modifikace Ptolemaiovy věty pro pět bodů na kouli

Uvažujme v trojrozměrném euklidovském prostoru dvě soustavy n bodů $\{\boldsymbol{X}_1,\dots,\boldsymbol{X}_n\}$ a $\{\boldsymbol{X}'_1,\dots,\boldsymbol{X}'_n\}$. Zvolíme též jistou kartézskou soustavu souřadnic. Označíme x_i, y_i, z_i (resp. x'_i, y'_i, z'_i) souřadnice bodu $\boldsymbol{X}_i$ (resp. $\boldsymbol{X}'_i$), $i = 1,\dots, n$ a budeme uvažovat matice:

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & z_n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2x'_1 & -2x'_2 & \dots & -2x'_n & 0 \\ -2y'_1 & -2y'_2 & \dots & -2y'_n & 0 \\ -2z'_1 & -2z'_2 & \dots & -2z'_n & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Analogicky jako pro rovinu dospějeme k následujícím větám.

Věta 3.2.5*: *Nechť jsou v prostoru dány dvě soustavy o n bodech. Pak pro jejich vzájemné vzdálenosti d_{ij} (tj. vzdálenost i-tého bodu první soustavy a j-tého bodu druhé soustavy) platí:*

$$G = \begin{vmatrix} d_{11}^2 & d_{12}^2 & \dots & d_{1n}^2 & 1 \\ d_{21}^2 & d_{22}^2 & \dots & d_{2n}^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_{n1}^2 & d_{n2}^2 & \dots & d_{nn}^2 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \textit{jestliže } n \ge 5.$$

Věta 3.2.6*: *Mějme v prostoru dáno n bodů, $n \ge 5$. Pak pro jejich vzájemné vzdálenosti platí:*

$$\begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & \dots & d_{1n}^2 & 1 \\ d_{12}^2 & 0 & \dots & d_{2n}^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_{1n}^2 & d_{2n}^2 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Věta 3.2.7*: *Mějme dáno v prostoru 5 bodů ležících na kouli, pak pro jejich vzájemné vzdálenosti platí:*

$$\begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 & d_{15}^2 \\ d_{12}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 & d_{25}^2 \\ d_{13}^2 & d_{23}^2 & 0 & d_{34}^2 & d_{35}^2 \\ d_{14}^2 & d_{24}^2 & d_{34}^2 & 0 & d_{45}^2 \\ d_{15}^2 & d_{25}^2 & d_{35}^2 & d_{45}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

Tato věta je prostorovou analogií Ptolemaiovy věty a je totožná s větou 2.3.1. V podkapitole 2.3.2 jsme uvedli rozvoj výše uvedeného determinantu. Neumím následující domněnku dokázat, ale skutečnost, že determinant ve větě 3.2.7* se mi nepodařilo pomocí matematického softwaru (MuPAD) rozložit na součin (na rozdíl od determinantu ve větě 3.2.7), mě vede k závěru, že to nejspíš ani možné není. Proto je patrně nemožné nalézt nějaké jiné vyjádření pro zobecnění Ptolemaiovy věty pro body na kouli, které by nevyužívalo řeči determinantů a bylo by stejně názorné jako klasická formulace Ptolemaiovy věty pro tětivový čtyřúhelník v rovinném případě.

3.3 Další úlohy

3.3.1 Úvod

Myšlenky o podnětnosti metod, které můžeme nalézt v díle Jana Sobotky, dokreslíme i na řešeních následující úlohy.

Úloha 3: *V rovině jsou dány libovolné dva přímo podobné rovnostranné trojúhelníky* ***ABC*** *a* ***A'B'C'***. *Označíme* $\boldsymbol{A_0}$, $\boldsymbol{B_0}$, $\boldsymbol{C_0}$ *po řadě středy úseček* ***AA'***, ***BB'***, ***CC'***. *Dokažte: Body* $\boldsymbol{A_0}$, $\boldsymbol{B_0}$, $\boldsymbol{C_0}$ *buď všechny splývají, nebo je trojúhelník* $\boldsymbol{A_0B_0C_0}$ *rovnostranný.*

V dalším textu uvedeme pět jejích řešení, první dvě jsou postavená na využití následujícího poznatku.

Tvrzení 3.3.1: *V rovině jsou dány libovolné dva přímo podobné rovnostranné trojúhelníky* ***ABC*** *a* ***A'B'C'***. *Odchylky dvojic vektorů (volných) určených orientovanými úsečkami* $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ a $\overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$ a $\overrightarrow{\boldsymbol{A'C'}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}$ a $\overrightarrow{\boldsymbol{B'C'}}$ *se navzájem rovnají.*

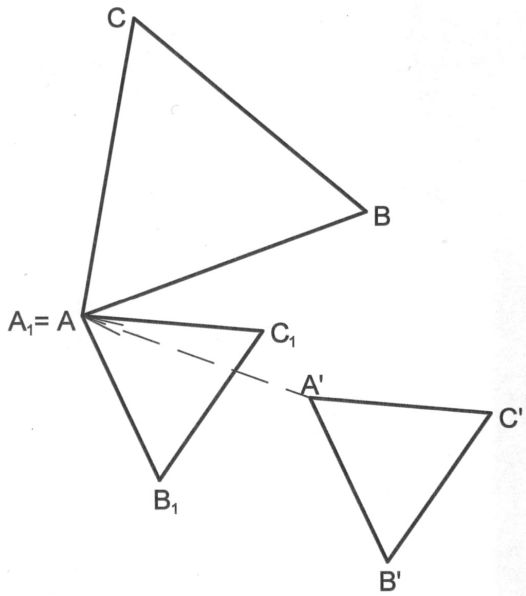
Důkaz I:

V dalším textu budeme symbolu $\overrightarrow{XY}$ užívat jak pro příslušnou orientovanou úsečku (vázaný vektor), tak pro volný vektor, který je jí určený. Trojúhelník ***A'B'C'*** převedeme v posunutí o vektor $\overrightarrow{A'A}$ na trojúhelník $A_1B_1C_1$. Přitom zjevně $A_1 = A$. Protože jsou trojúhelníky ***ABC*** a ***A'B'C'*** přímo podobné a trojúhelníky ***A'B'C'*** a AB_1C_1 přímo shodné, jsou trojúhelníky ***ABC*** a AB_1C_1 přímo podobné (viz obr. 3.3.1). Pro velikosti orientovaných úhlů proto platí:

$$|C\hat{A}B| = |C_1\hat{A}B_1|.$$

Odtud vyplývá:

$$|B\hat{A}B_1| = |B\hat{A}C_1| + |C_1\hat{A}B_1| = |B\hat{A}C_1| + |C\hat{A}B| = |C\hat{A}C_1|.$$



Obr. 3.3.1

Vidíme, že dvojice volných vektorů $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{AC}$ a $\overrightarrow{AC_1}$ mají stejnou odchylku. Protože orientované úsečky $\overrightarrow{AB_1}$ a $\overrightarrow{A'B'}$, resp. $\overrightarrow{AC_1}$ a $\overrightarrow{A'C'}$ určují stejný volný vektor, mají dvojice volných vektorů $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{AC}$ a $\overrightarrow{A'C'}$ stejnou odchylku. Analogicky ukážeme, že mají stejnou odchylku i dvojice volných vektorů $\overrightarrow{BA}$ a $\overrightarrow{B'A'}$, $\overrightarrow{BC}$ a $\overrightarrow{B'C'}$. Protože mají zjevně dvojice volných vektorů $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{BA}$ a $\overrightarrow{B'A'}$ navzájem si rovné odchylky, platí tvrzení 3.3.1.

Důkaz II:

Nechť je v rovině dána kartézská soustava souřadnic. Uvážíme reprezentaci komplexního čísla $x + iy$ bodem v rovině, jež má v dané kartézské soustavě souřadnice $[x, y]$. Obráceně můžeme každému bodu $\boldsymbol{X}[x, y]$ v rovině přiřadit komplexní číslo $x + iy$ (budeme ho značit symbolem $\boldsymbol{x}$), resp. každému volnému vektoru $\vec{u}(u, v)$ číslo $u + iv$ (označíme ho symbolem $\boldsymbol{u}$). Číslo $\boldsymbol{u}$ současně reprezentuje koncový bod umístění volného vektoru $\vec{u}$ s počátečním bodem v počátku soustavy souřadnic. Volné vektory $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{A'C'}}$ nechť reprezentují po řadě komplexní čísla $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c'}$, $\boldsymbol{b'}$. Protože jsou tato komplexní čísla nenulová, zjevně existují nenulová komplexní čísla k a k' taková, že platí:

$\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b'} = k'\boldsymbol{c'}$.

Víme, že násobení komplexního čísla x, které reprezentuje v Gaussově rovině bod $\boldsymbol{X}$, komplexním číslem $y = |y|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ interpretujeme jako otočení bodu $\boldsymbol{X}$ okolo počátku o úhel φ složené se stejnolehlostí se středem v počátku a koeficientem $|y|$. Potom zjevně platí:

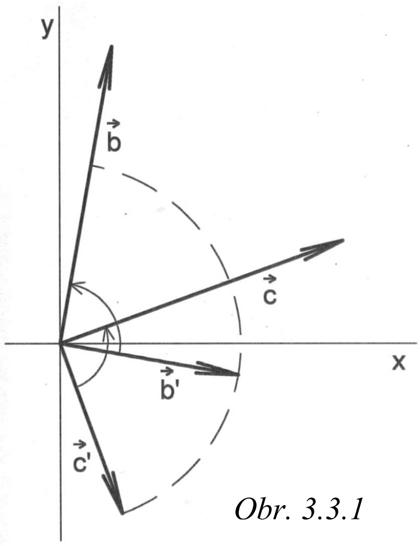
$$k = \frac{|\boldsymbol{AC}|}{|\boldsymbol{AB}|}(\cos|\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{C}| + i\sin|\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{C}|),\ k' = \frac{|\boldsymbol{A'C'}|}{|\boldsymbol{A'B'}|}(\cos|\boldsymbol{B'}\hat{\boldsymbol{A'}}\boldsymbol{C'}| + i\sin|\boldsymbol{B'}\hat{\boldsymbol{A'}}\boldsymbol{C'}|).$$

Protože jsou trojúhelníky $\boldsymbol{ABC}$ a $\boldsymbol{A'B'C'}$ přímo podobné platí $k = k'$. Odtud plyne:

$$\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b'}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{c'}}.$$

Vidíme, že existuje nenulové komplexní číslo m takové, že platí:

$\boldsymbol{b} = m\boldsymbol{b'}$, $\boldsymbol{c} = m\boldsymbol{c'}$.



Obr. 3.3.1

Pokud uvážíme taková umístění volných vektorů $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{A'C'}}$, jichž počáteční bod je vždy v počátku, můžeme tento vztah interpretovat tak, že koncové body těchto umístění volných vektorů $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ a $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$ jsou obrazy koncových bodů těchto umístění volných vektorů $\overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}}$ a $\overrightarrow{\boldsymbol{A'C'}}$ v témže zobrazení složeném z jistého otočení a stejnolehlosti s týmž středem (viz obr. 3.3.2). Zjevně potom platí, že dvojice volných vektorů

$\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{AC}$ a $\overrightarrow{A'C'}$ mají stejnou odchylku. Podobně jako v prvním důkazu tvrzení 3.3.1 můžeme ukázat, že tutéž odchylku mají i volné vektory $\overrightarrow{BC}$ a $\overrightarrow{B'C'}$.

Viděli jsme, že oba důkazy využívaly pouze skutečnosti, že jsou trojúhelníky ***ABC*** a ***A'B'C'*** přímo podobné (tj. nemusely být nutně rovnostranné). Tvrzení 3.3.1 proto platí i v případě libovolných dvou přímo podobných trojúhelníků. Bez důkazu uveďme, že obdobné tvrzení pro nepřímo podobné (obecné, rovnoramenné i rovnostranné) trojúhelníky neplatí. V dalším textu označíme symbolem δ společnou odchylku tří dvojic volných vektorů uvažovaných v tvrzení 3.3.1, pod pojmem vektor bude vždy myšlen volný vektor.

3.3.2 Řešení úlohy 3

1. řešení úlohy 3

V libovolné lineární soustavě souřadnic můžeme vyjádřit body A_0, B_0, C_0 ve tvaru:

$$A_0 = \frac{A + A'}{2},\ B_0 = \frac{B + B'}{2},\ C_0 = \frac{C + C'}{2}.$$

Odtud plyne:

$$\overrightarrow{A_0B_0} = B_0 - A_0 = \frac{B + B'}{2} - \frac{A + A'}{2} = \frac{1}{2}((B - A) + (B' - A')) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'}).$$

Označme:

$$k = \frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|A'C'|}{|AC|} = \frac{|B'C'|}{|BC|}.$$

Pro vzdálenost bodů A_0, B_0 platí:

$$\begin{aligned}4|A_0B_0|^2 &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'B'} + 2\,\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A'B'} = \\ &= |AB|^2 + |A'B'|^2 + 2|AB||A'B'|\cos\delta = |AB|^2 + k^2|AB|^2 + 2k|AB|^2\cos\delta = \\ &= (1 + k^2 + 2k\cos\delta)|AB|^2.\end{aligned}$$

Uvážíme kvadratickou funkci $f(k) = k^2 + 2k\cos\delta + 1,\ k \in (0, \infty)$. Diskriminant rovnice $f(k) = 0$ je roven:

$$D = 4\cos^2\delta - 4 = 4(\cos^2\delta - 1) = -4\sin^2\delta.$$

Vidíme, že pro $\delta \neq 0°$ a $\delta \neq 180°$ je $f(k)$ vždy kladná. Pro $\delta = 0°$ by jediným kořenem rovnice $f(k) = 0$ bylo číslo -1, které nenáleží definičnímu oboru funkce f. Proto je $f(k)$ opět vždy kladná. Pro $\delta = 180°$ je $f(1) = 0$, jinak je funkce $f(k)$ kladná. Vidíme, že vzdálenost bodů $\boldsymbol{A}_0$ a $\boldsymbol{B}_0$ je nenulová až na případ, kdy $k = 1$ a $\delta = 180°$.

Obdobně můžeme odvodit i vzdálenosti bodů $\boldsymbol{A}_0$, $\boldsymbol{C}_0$ a $\boldsymbol{B}_0$, $\boldsymbol{C}_0$. Vzhledem k tvrzení 3.3.1 platí:

$$\frac{|\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B}_0|}{|\boldsymbol{AB}|} = \frac{|\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{C}_0|}{|\boldsymbol{AC}|} = \frac{|\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{C}_0|}{|\boldsymbol{BC}|} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + k^2 + 2k\cos\delta}.$$

Vidíme, že buď body $\boldsymbol{A}_0$, $\boldsymbol{B}_0$, $\boldsymbol{C}_0$ splývají, nebo jsou všechny tři různé a trojúhelníky $\boldsymbol{ABC}$ a $\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{C}_0$ jsou podobné. Proto je i druhý z nich rovnostranný.

2. řešení úlohy 3

Označíme a, resp. a', délku stran rovnostranného trojúhelníku $\boldsymbol{ABC}$, resp. $\boldsymbol{A'B'C'}$. Podobně jako v 1. řešení úlohy 3 můžeme odvodit:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B}_0} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}}).$$

Předpokládejme, že $\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{B}_0$. Pak ovšem $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}}$. Vidíme, že trojúhelníky $\boldsymbol{ABC}$ a $\boldsymbol{A'B'C'}$ jsou shodné, potom s ohledem na tvrzení 3.3.1 platí $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{A'C'}}$. Protože zjevně platí, že $\overrightarrow{\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{C}_0} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\boldsymbol{AC}} + \overrightarrow{\boldsymbol{A'C'}}) = \vec{o}$, vidíme, že $\boldsymbol{C}_0 = \boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{B}_0$.

Nyní nechť $\boldsymbol{A}_0 \neq \boldsymbol{B}_0$. Pak platí, že $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \neq -\overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}}$. Označíme $\boldsymbol{S}$ střed úsečky $\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B}_0$. V libovolné lineární soustavě souřadnic můžeme bod S vyjádřit ve tvaru:

$$\boldsymbol{S} = \frac{\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{B}_0}{2} = \frac{\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A'} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{B'}}{4}.$$

Pro vektor $\overrightarrow{\boldsymbol{SC}_0}$ platí:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{SC}_0} = \boldsymbol{C}_0 - \boldsymbol{S} = \frac{\boldsymbol{C} + \boldsymbol{C'}}{2} - \frac{\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A'} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{B'}}{4} = \frac{2\boldsymbol{C} + 2\boldsymbol{C'} - (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A'} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{B'})}{4} =$$
$$= \frac{(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{C} - \boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{C'} - \boldsymbol{A'}) + (\boldsymbol{C'} - \boldsymbol{B'})}{4} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{\boldsymbol{AC}} + \overrightarrow{\boldsymbol{BC}} + \overrightarrow{\boldsymbol{A'C'}} + \overrightarrow{\boldsymbol{B'C'}}).$$

Předpokládejme, že vektor $\overrightarrow{\boldsymbol{SC}_0}$ je nulový. Pak můžeme psát, pokud označíme ***K*** (resp. ***K'***) střed úsečky ***AB*** (resp. ***A'B'***):

$$\vec{o} = \overrightarrow{\boldsymbol{CA}} + \overrightarrow{\boldsymbol{CB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{C'A'}} + \overrightarrow{\boldsymbol{C'B'}} = 2\overrightarrow{\boldsymbol{CK}} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{C'K'}}, \text{ tj. } \overrightarrow{\boldsymbol{CK}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{C'K'}}.$$

Trojúhelníky ***ACK*** a ***A'C'K'*** jsou vždy přímo podobné. Vidíme, že úsečky ***CK*** a ***C'K'*** jsou shodné. Proto jsou uvažované trojúhelníky přímo shodné a podle tvrzení 3.3.1 platí $\overrightarrow{\boldsymbol{AK}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{A'K'}}$. Pak můžeme psát:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = 2\overrightarrow{\boldsymbol{AK}} = -2\overrightarrow{\boldsymbol{A'K'}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}}.$$

Což je ve sporu s předpokladem, že $\boldsymbol{A}_0 \neq \boldsymbol{B}_0$. Proto jsou vektory $\overrightarrow{\boldsymbol{SC}_0}$ a $\overrightarrow{\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B}_0}$ nenulové. Ukážeme, že jsou na sebe kolmé.

Uvážíme násobek skalárního součinu vektorů $\overrightarrow{\boldsymbol{SC}_0}$ a $\overrightarrow{\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B}_0}$:

$$\begin{aligned}
8\overrightarrow{\boldsymbol{SC}_0} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B}_0} &= (\overrightarrow{\boldsymbol{AC}} + \overrightarrow{\boldsymbol{BC}} + \overrightarrow{\boldsymbol{A'C'}} + \overrightarrow{\boldsymbol{B'C'}}) \cdot (\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{AC}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{AC}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}} + \overrightarrow{\boldsymbol{BC}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + \\
&+ \overrightarrow{\boldsymbol{BC}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}} + \overrightarrow{\boldsymbol{A'C'}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{A'C'}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}} + \overrightarrow{\boldsymbol{B'C'}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{B'C'}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}} = \overrightarrow{\boldsymbol{AC}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{AC}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}} - \\
&- \overrightarrow{\boldsymbol{BC}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{BA}} + \overrightarrow{\boldsymbol{BC}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}} + \overrightarrow{\boldsymbol{A'C'}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{A'C'}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}} + \overrightarrow{\boldsymbol{B'C'}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} - \overrightarrow{\boldsymbol{B'C'}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{B'A'}} = \\
&= a^2 \cos 60° + \overrightarrow{\boldsymbol{AC}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}} - a^2 \cos 60° + \overrightarrow{\boldsymbol{BC}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}} + \overrightarrow{\boldsymbol{A'C'}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + a'^2 \cos 60° + \overrightarrow{\boldsymbol{B'C'}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} - \\
&- a'^2 \cos 60° = \overrightarrow{\boldsymbol{AC}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}} + \overrightarrow{\boldsymbol{BC}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}} + \overrightarrow{\boldsymbol{A'C'}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{B'C'}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \\
&= (\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{BC}}) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}} + \overrightarrow{\boldsymbol{BC}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}} + \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{A'C'}} + \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \cdot (\overrightarrow{\boldsymbol{B'A'}} + \overrightarrow{\boldsymbol{A'C'}}) = \\
&= 2\,\overrightarrow{\boldsymbol{BC}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}} + 2\,\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{A'C'}} + \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \cdot (\overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}} + \overrightarrow{\boldsymbol{B'A'}}) = 2\,(\overrightarrow{\boldsymbol{BC}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}} + \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{A'C'}}) = \\
&= 2(\overrightarrow{\boldsymbol{BC}} \cdot (\overrightarrow{\boldsymbol{A'C'}} + \overrightarrow{\boldsymbol{C'B'}}) + (\overrightarrow{\boldsymbol{AC}} + \overrightarrow{\boldsymbol{CB}}) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{A'C'}}) = 2(\overrightarrow{\boldsymbol{AC}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{A'C'}} + \overrightarrow{\boldsymbol{BC}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{C'B'}} + (\overrightarrow{\boldsymbol{BC}} + \overrightarrow{\boldsymbol{CB}}) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{A'C'}}) = \\
&= 2(\overrightarrow{\boldsymbol{AC}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{A'C'}} - \overrightarrow{\boldsymbol{BC}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{B'C'}})
\end{aligned}$$

Potom podle tvrzení 3.3.1 platí:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{SC}_0} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B}_0} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{\boldsymbol{AC}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{A'C'}} - \overrightarrow{\boldsymbol{BC}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{B'C'}}) = \frac{1}{4}(aa' \cos\delta - aa' \cos\delta) = 0$$

Vidíme, že těžnice $\boldsymbol{SC}_0$ je kolmá na stranu $\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B}_0$. Proto je trojúhelník $\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{C}_0$ rovnoramenný se základnou $\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B}_0$. Analogicky můžeme ukázat, že trojúhelník $\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{C}_0$ je rovnoramenný se základnou $\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{C}_0$, resp. $\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{C}_0$. Tím jsme dokázali, že je i rovnostranný.

3. řešení úlohy 3

Velice jednoduché řešení získáme, pokud využijeme reprezentace bodů v rovině komplexními čísly (viz důkaz II tvrzení 3.3.1). Nechť komplexní čísla ***a***, ***b***, ***c***, ***a'***, ***b'***, ***c'*** reprezentují po řadě vrcholy $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{A'}$, $\boldsymbol{B'}$, $\boldsymbol{C'}$ daných trojúhelníků. Pak zjevně uvažované body $\boldsymbol{A}_0$, $\boldsymbol{B}_0$, $\boldsymbol{C}_0$ reprezentují po řadě komplexní čísla:

$$\boldsymbol{a}_0 = \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}'}{2},\ \boldsymbol{b}_0 = \frac{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}'}{2},\ \boldsymbol{c}_0 = \frac{\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}'}{2}.$$

Uvážíme dvě komplexní čísla k a k' taková, že platí:

$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a} = k(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$ a současně $\boldsymbol{c}'-\boldsymbol{a}' = k'(\boldsymbol{b}'-\boldsymbol{a}')$.

Vzhledem k výše uvedené geometrické interpretaci komplexních čísel můžeme psát:

$$k = \frac{|\boldsymbol{AC}|}{|\boldsymbol{AB}|}(\cos|\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{C}| + i\sin|\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{C}|),\ k' = \frac{|\boldsymbol{A}'\boldsymbol{C}'|}{|\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'|}(\cos|\boldsymbol{B}'\hat{\boldsymbol{A}}'\boldsymbol{C}'| + i\sin|\boldsymbol{B}'\hat{\boldsymbol{A}}'\boldsymbol{C}'|).$$

Tato čísla jsou nenulová. Protože je vždy $\sin|\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{C}| \neq 0$ i $\sin|\boldsymbol{B}'\hat{\boldsymbol{A}}'\boldsymbol{C}'| \neq 0$, nejsou ani reálná.

Trojúhelníky $\boldsymbol{ABC}$ a $\boldsymbol{A'B'C'}$ jsou podobné právě tehdy, když se shodují v jednom úhlu a mají stejný poměr délek stran přilehlých k tomuto úhlu. Jsou-li trojúhelníky přímo podobné, platí pro velikosti orientovaných úhlů: $|\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{B}'\hat{\boldsymbol{A}}'\boldsymbol{C}'|$. Jsou-li podobné nepřímo, platí pro velikosti orientovaných úhlů: $|\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{C}| = -|\boldsymbol{B}'\hat{\boldsymbol{A}}'\boldsymbol{C}'|$. Uvažované trojúhelníky jsou přímo, resp. nepřímo, podobné, právě když se čísla k a k' rovnají, resp. jsou komplexně sdružená. V případě přímo podobných rovnostranných trojúhelníků platí:

$$k = k' = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Potom můžeme také psát:

$$\boldsymbol{c}_0 - \boldsymbol{a}_0 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}'-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}') = \frac{1}{2}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{c}'-\boldsymbol{a}') = \frac{1}{2}k(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}k(\boldsymbol{b}'-\boldsymbol{a}') = \frac{1}{2}k(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}'-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}') =$$
$$= k(\boldsymbol{b}_0 - \boldsymbol{a}_0)$$

Pokud $\boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{b}_0$, tj. $\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{B}_0$, musí platit, že i $\boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{c}_0$, tj. $\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{C}_0$. Pokud $\boldsymbol{A}_0 \neq \boldsymbol{B}_0$, je i $\boldsymbol{C}_0 \neq \boldsymbol{A}_0$. Protože číslo k není reálné, neleží body $\boldsymbol{A}_0$, $\boldsymbol{B}_0$, $\boldsymbol{C}_0$ v jedné přímce a tvoří tak vrcholy jistého trojúhelníku. Vidíme, že jsou potom přímo podobné všechny tři trojúhelníky $\boldsymbol{ABC}$, $\boldsymbol{A'B'C'}$ a $\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{C}_0$. I poslední trojúhelník je tedy rovnostranný.

4. řešení úlohy 3

Při tomto řešení využijeme následující větu.

Věta 3.3.2: *Libovolná přímá, resp. nepřímá, podobnost roviny má ve zvolené kartézské soustavě souřadnic analytické vyjádření tvaru:*

$$x' = ax - by + c,\ y' = bx + ay + d, \qquad (3.3.1)$$

resp.

$$x' = ax + by + c,\ y' = bx - ay + d, \qquad (3.3.2)$$

kde alespoň jedno z čísel a, b je nenulové

Důkaz:

Uvažovaná podobnost je vždy afinním zobrazením. Její analytické vyjádření má proto tvar:

$$x' = ax + ey + c,\ y' = bx + fy + d.$$

Uvážíme matici A toho zobrazení:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ e & f \end{pmatrix}.$$

Protože se jedná o podobnost, je součin této matice a matice k ní transponované kladným násobkem jednotkové matice, tj.:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} = \begin{pmatrix} a & b \\ e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & e \\ b & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ae + bf \\ ae + bf & e^2 + f^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2 & 0 \\ 0 & k^2 \end{pmatrix}.$$

Musí tedy platit:

$$a^2 + b^2 = k^2,\ ae + bf = 0,\ e^2 + f^2 = k^2.$$

Předpokládejme, že koeficient a je nenulový. Z druhé rovnice vyjádříme koeficient e a dosadíme ho do třetí rovnice:

$$\frac{b^2 f^2}{a^2} + f^2 = k^2, \text{ tj.} (b^2 + a^2) f^2 = a^2 k^2.$$

Srovnáním s rovnicí $a^2 + b^2 = k^2$ snadno nahlédneme, že $f^2 = a^2$, tj. $f = \pm a$. Dále platí:

$$e = -\frac{bf}{a} = -\frac{b(\pm a)}{a} = \mp b.$$

Pokud by byl koeficient a nulový, musí platit:

$$b^2 = k^2, bf = 0, e^2 + f^2 = k^2.$$

Z první rovnice plyne, že koeficient b je nenulový. Z druhé rovnice proto vyplývá, že koeficient f je roven nule. Konečně z třetí rovnice vidíme, že $e^2 = k^2 = b^2$. I v tomto případě platí výše odvozené vztahy. Proto je vždy buď $f = a$ a $e = -b$, nebo $f = -a$ a $e = b$. První možnost odpovídá vyjádření (3.3.1), druhá vyjádření (3.3.2).

V případě zobrazení určeného předpisem (3.3.1) (resp. (3.3.2)) je $\det \boldsymbol{A} = a^2 + b^2 > 0$ (resp. $\det \boldsymbol{A} = -a^2 - b^2 < 0$). Jedná se proto o přímou (resp. nepřímou) podobnost.

Již bez důkazu uvedeme, že platí i věta obrácená k větě 3.3.2, tj. že každé zobrazení roviny na sebe s analytickým vyjádřením tvaru (3.3.1), resp. (3.3.2), je přímá, resp. nepřímá, podobnost.

Při vlastním řešení úlohy 3 využijeme známého (viz např. [35], str. 42) faktu, že trojúhelníkem ***ABC*** a s ním podobným trojúhelníkem ***A'B'C'*** je určena právě jedna podobnost roviny. V našem případě určují dané rovnostranné trojúhelníky, které jsou přímo podobné, přímou podobnost, kterou označíme p. Ve zvolené kartézské soustavě souřadnic má podle věty 3.3.2 analytické vyjádření zobrazení p tvar:

$$x' = ax - by + c,$$
$$y' = bx + ay + d.$$

Uvážíme nyní zobrazení f, které libovolnému bodu $\boldsymbol{X}$ roviny přiřadí střed $\boldsymbol{X}_0$ úsečky $\boldsymbol{X}p(\boldsymbol{X})$. Ve zvolené kartézské soustavě souřadnic nechť $\boldsymbol{X}[x, y]$ a $\boldsymbol{X}_0[x_0, y_0]$. Pak platí:

$$x_0 = \frac{x + x'}{2} = \frac{x + ax - by + c}{2},\ y_0 = \frac{y + y'}{2} = \frac{y + bx + ay + d}{2}.$$

Vidíme, že analytické vyjádření zobrazení f má tvar:

$$x_0 = \frac{a+1}{2}x - \frac{b}{2}y + \frac{c}{2},$$
$$y_0 = \frac{b}{2}x + \frac{a+1}{2}y + \frac{d}{2}.$$

Pokud je $a = -1$ a $b = 0$, přiřadí zobrazení f libovolnému bodu roviny bod o souřadnicích $[c/2, d/2]$. Proto body $\boldsymbol{A}_0$, $\boldsymbol{B}_0$, $\boldsymbol{C}_0$ splývají. Analytické vyjádření podobnosti p má přitom tvar:

$$x' = -x + c,$$
$$y' = -y + d.$$

Jedná se o středovou souměrnost se středem o souřadnicích [c/2, d/2]. Tento případ proto nastane právě tehdy, když je trojúhelník ***A'B'C'*** obrazem trojúhelníku ***ABC*** v jisté středové souměrnosti.

Jestliže platí, že $a \neq 1$ nebo $b \neq 0$, je analytické vyjádření zobrazení f zjevně ve tvaru rovnosti (3.3.1), proto musí být zobrazení f přímá podobnost. Toto zobrazení přiřadí trojúhelníku ***ABC*** trojúhelník $\boldsymbol{A_0B_0C_0}$, který je s ním podobný, tudíž je rovnostranný.

5. řešení úlohy 3

V tomto řešení využijeme skutečnosti, že libovolná přímá podobnost roviny je jednoznačně určena úsečkou ***XY*** a jejím obrazem ***X'Y'*** (důkaz viz např. [35], str. 152). V případě, že jsou (resp. nejsou) tyto úsečky shodné, je uvažované zobrazení přímá shodnost (resp. přímá vlastní podobnost). Uvažujme nyní přímou podobnost p, která je určena úsečkou ***AB*** a úsečkou ***A'B'*** jako jejím obrazem. Obrazem trojúhelníku ***ABC*** v zobrazení p je trojúhelník ***A'B'C''***, který je opět rovnostranný a přímo podobný s trojúhelníkem ***ABC***. Proto musí být nutně ***C'*** = ***C''***. Je tak úsečkou ***AC*** a úsečkou ***A'C'*** jako jejím obrazem určena opět podobnost p.

1. Přímky ***AB*** a ***A'B'*** jsou rovnoběžné nebo splývající a úsečky ***AB*** a ***A'B'*** jsou shodné.

Uvažovaná přímá podobnost p je přímou shodností. Jestliže jsou orientované úsečky $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ a $\overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}}$ souhlasně orientované, je zobrazení p zjevně posunutí o vektor $\overrightarrow{\boldsymbol{AA'}}$. Protože v tomto posunutí přejde i bod ***C*** do bodu ***C'***, platí, že $\overrightarrow{\boldsymbol{AA'}} = \overrightarrow{\boldsymbol{BB'}} = \overrightarrow{\boldsymbol{CC'}}$. Odtud plyne:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AA_0}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\boldsymbol{AA'}},\ \overrightarrow{\boldsymbol{BB_0}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\boldsymbol{BB'}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\boldsymbol{AA'}},\ \overrightarrow{\boldsymbol{CC_0}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\boldsymbol{CC'}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\boldsymbol{AA'}}.$$

Trojúhelník $\boldsymbol{A_0B_0C_0}$ je tak obrazem trojúhelníku ***ABC*** v posunutí o vektor $\frac{1}{2}\overrightarrow{\boldsymbol{AA'}}$. Je proto také rovnostranný.

Nyní nechť jsou orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{A'B'}$ nesouhlasně orientované. Potom určují orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{B'A'}$ týž volný vektor, tj. jsou ekvipolentní[64]. Proto mají úsečky ***AA'*** a ***BB'*** společný střed. Uvažovaná přímá shodnost *p* je tedy zjevně středová souměrnost, která převede body ***A***, ***B*** po řadě na body ***A'***, ***B'***. V témž zobrazení je bod ***C'*** obrazem bodu ***C***. Potom zjevně platí, že $A_0 = B_0 = C_0$.

2. Přímky ***AB*** a ***A'B'*** jsou rovnoběžné nebo splývající a úsečky ***AB*** a ***A'B'*** nejsou shodné.

Sestrojíme dvě kružnice $m(A, |AB|)$ a $n(A', |A'B'|)$. Protože mají tyto kružnice různé poloměry existují právě dvě stejnolehlosti, které kružnici ***m*** převedou na kružnici ***n***. Z nich však pouze jedna převede úsečku ***AB*** na úsečku ***A'B'***. Jestliže jsou orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{A'B'}$ souhlasně (resp. nesouhlasně) orientované, je uvažovanou přímou podobností *p* ta stejnolehlost, jež má střed ***S*** ve vnějším (resp. vnitřním) středu stejnolehlosti kružnic ***m*** a ***n*** a jejíž koeficient *k* je kladný (resp. záporný). Obrazem bodu ***C*** v této stejnolehlosti je ovšem bod ***C'***.

Nyní nechť je koeficient stejnolehlosti *k* kladný. Body ***A*** a ***A'*** leží na téže polopřímce s hraničním bodem ***S***. Pak platí:

$$|SA_0| = \frac{|SA| + |SA'|}{2} = \frac{|SA| + k|SA|}{2} = \frac{k+1}{2}|SA|.$$

Protože bod A_0 leží na polopřímce ***SA***, je obrazem bodu ***A*** ve stejnolehlosti se středem v bodě ***S*** a koeficientem $\frac{k+1}{2}$. Obdobně můžeme ukázat, že i body B_0 a C_0 jsou obrazy bodů ***B*** a ***C*** v téže stejnolehlosti. Trojúhelník $A_0B_0C_0$ je proto podobný s trojúhelníkem ***ABC***, je tedy rovnostranný.

Nyní nechť je koeficient *k* záporný. Body ***A*** a ***A'*** leží na opačných polopřímkách s hraničním bodem ***S***. Pak platí:

$$|SA_0| = \left|\frac{|SA| - |SA'|}{2}\right| = \left|\frac{|SA| - |k|\ |SA|}{2}\right| = \frac{|k+1|}{2}|SA|.$$

[64] Dvě orientované úsečky $\overrightarrow{EF}$ a $\overrightarrow{GH}$ jsou ekvipolentní, pokud mají úsečky ***EH*** a ***FG*** společný střed.

Je-li koeficient k větší (resp. menší) než -1, je $|SA| > |SA'|$ (resp. $|SA| < |SA'|$) a bod A_0 leží na polopřímce SA (resp. na polopřímce opačné k polopřímce SA). Protože je přitom $k + 1$ kladné (resp. záporné), je zjevně bod A_0 obrazem bodu A ve stejnolehlosti se středem v bodě S a koeficientem $\frac{k+1}{2}$. Trojúhelník $A_0B_0C_0$ je obrazem trojúhelníku ABC v této stejnolehlosti, je proto rovnostranný.

3. Přímky AB a $A'B'$ jsou různoběžné.

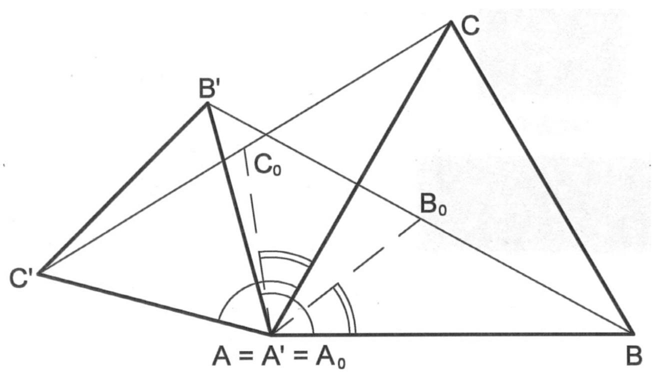
3a. Uvážíme nejprve případ, že $A = A'$ (viz obr. 3.3.3). Obdobně jako v důkazu I tvrzení 3.3.1 můžeme ukázat, že úhly BAB' a CAC' jsou shodné a souhlasně orientované. Protože je navíc úsečka AB (resp. AB') shodná s úsečkou AC (resp. AC'), jsou trojúhelníky ABB' a ACC' přímo shodné. Úsečky AB_0 a AC_0 jsou odpovídající si těžnice těchto trojúhelníků, které jsou shodné, a navíc platí pro velikosti orientovaných úhlů:

$$|B\hat{A}B_0| = |C\hat{A}C_0|.$$

Odtud vyplývá:

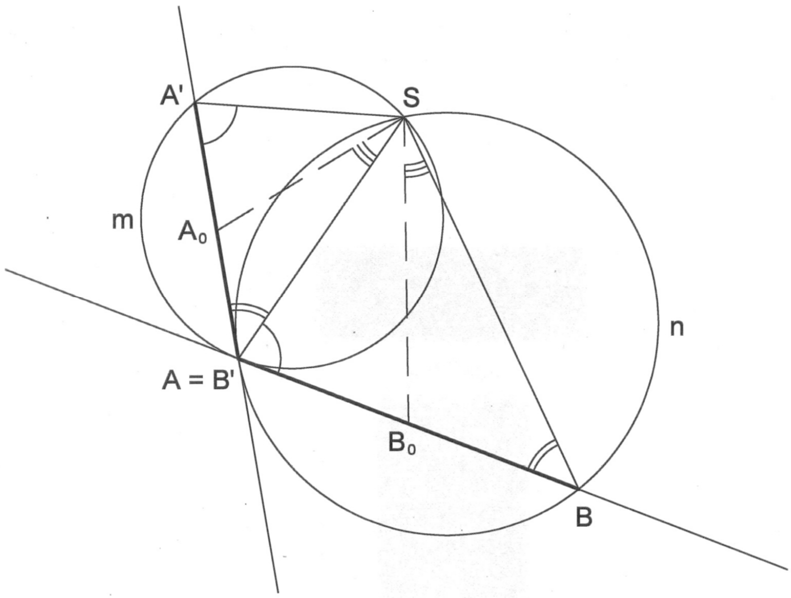
$$|B_0\hat{A}C_0| = |B_0\hat{A}B| + |B\hat{A}C_0| = |C_0\hat{A}C| + |B\hat{A}C_0| = |B\hat{A}C|.$$

Protože $A_0 = A$, jsou úsečky A_0B_0 a A_0C_0 shodné a svírají úhel o velikosti 60°, trojúhelník $A_0B_0C_0$ je tak rovnostranný. Obdobně můžeme postupovat v případě, že $B = B'$, nebo $C = C'$.



Obr. 3.3.3

3b. Nechť ***A*** = ***B'*** (viz obr. 3.3.4). Sestrojíme kružnici ***m*** (resp. ***n***), která prochází body ***A*** a ***A'*** (resp. ***B*** a ***B'***) a dotýká se přímky ***AB*** (resp. ***A'B'***). Takové kružnice nutně existují[65]. Kdyby se kružnice ***m*** a ***n*** dotýkaly, byl by nutně bod ***A*** = ***B'*** bodem dotyku a přímka ***AB*** = ***A'B'*** jejich společná tečna. Incidence těchto přímek je však ve sporu s předpokladem, že jsou různoběžné. Kružnice ***m*** a ***n*** se tak protínají ještě v bodě ***S*** různém od ***A*** = ***B'***. Kružnice ***m*** leží v uzavřené polorovině ***ABA'*** a kružnice ***n*** leží v uzavřené polorovině ***A'B'B***. Bod ***S*** musí nutně ležet v průniku těchto polorovin, tj. konvexním úhlu ***BAA'***. Kdyby bod ***S*** ležel např. na rameni ***AB***, protínala by kružnice ***m*** toto rameno v bodě ***S*** různém od ***A***, kterým též prochází. To je ve sporu se skutečností, že přímka ***AB*** je tečnou kružnice ***m***. Obdobně můžeme ukázat, že bod ***S*** neleží ani na rameni ***AA'***. Bod ***S*** je proto vnitřním bodem uvažovaného konvexního úhlu.



Obr. 3.3.4

Body ***A'*** a ***B*** tak leží v opačných otevřených polorovinách s hraniční přímkou ***AS***. Proto je $\angle$***SB'B*** (resp. $\angle$***SAA'***) úsekovým úhlem příslušným k obvodovému úhlu ***SA'A*** (resp. ***SBB'***), které jsou tudíž shodné. Vidíme, že trojúhelníky ***SAA'*** a ***SBB'*** jsou podobné. Odtud plyne, že jsou i úhly ***ASA'*** a ***BSB'*** shodné. Je navíc zjevné, že orientované úhly $\widehat{ASA'}$ a $\widehat{BSB'}$ jsou souhlasně orientované. Otočíme bod ***A*** okolo bodu ***S*** o orientovaný úhel velikosti $|\widehat{ASA'}|$ do bodu A_1 na polopřímce ***SA'***. Potom bod ***B*** přejde v témže otočení (označíme ho *r*) do bodu B_1 na polopřímce ***SB'***. Dále platí:

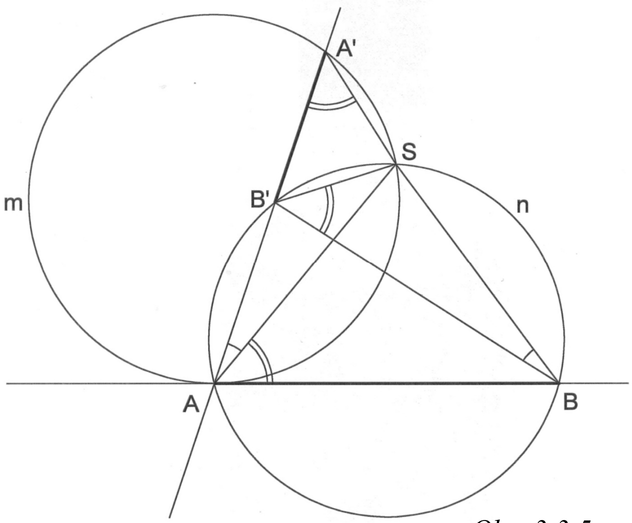
[65] Protože mají přímky ***AB*** a ***A'B'*** jediný společný bod ***A*** = ***B'***, neleží bod ***A'*** (nutně různý od ***B'***) na přímce ***AB***. Kružnice ***m*** proto vždy existuje. Obdobně můžeme ukázat i existenci kružnice ***n***.

$$\frac{|SA'|}{|SA_1|} = \frac{|SA'|}{|SA|} = \frac{|SB'|}{|SB|} = \frac{|SB'|}{|SB_1|}.$$

Existuje zobrazení h, které úsečku A_1B_1 zobrazí na $A'B'$. Pokud $A_1 \neq A'$, je zobrazení h stejnolehlost se středem v bodě S. Pokud $A_1 = A'$, je h identita. Přímá podobnost p, která převede úsečku AB na úsečku $A'B'$, existuje právě jedna. Protože tuto vlastnost má i složené zobrazení hr (které je také přímé), je zobrazení p buď otočením r, nebo otočením r složeným se stejnolehlostí h o témže středu. Otočení r není jistě identitou, proto je bod S jediným samodružným bodem přímé podobnosti p.

Viděli jsme, že trojúhelníky SAA' a SBB' jsou přímo podobné. Musí být tedy přímo podobné i trojúhelníky SAA_0 a SBB_0. Pak platí, že $|A\hat{S}A_0| = |B\hat{S}B_0|$. Obdobně jako v předchozím odstavci můžeme ukázat, že úsečka AB přejde v úsečku A_0B_0 v zobrazení p_0, které je složením otočení r_0 okolo bodu S o orientovaný úhel velikosti $|A\hat{S}A_0|$ a zobrazení h_0. To je buď stejnolehlostí se středem S a koeficientem $|SA_0|/|SA|$ (pokud $|SA_0| \neq |SA|$), nebo identitou (když $|SA_0| = |SA|$). Obdobně můžeme postupovat, i pokud $B = A'$.

3c. Nechť se přímky AB a $A'B'$ protnou v bodě A, přitom $A \neq A'$ a $A \neq B'$. Sestrojíme kružnici m, která prochází body A a A' a dotýká se přímky AB. Sestrojíme kružnici n, která prochází body A, B a B'. Obě kružnice vždy existují[66] a procházejí bodem A. Kdyby se v něm dotýkaly, byla by přímka AB jejich společnou tečnou, což je ve sporu s předpokladem, že bod B různý od A leží na kružnici n. Existuje proto vždy druhý průsečík S kružnic m a n (viz obr. 3.3.5).

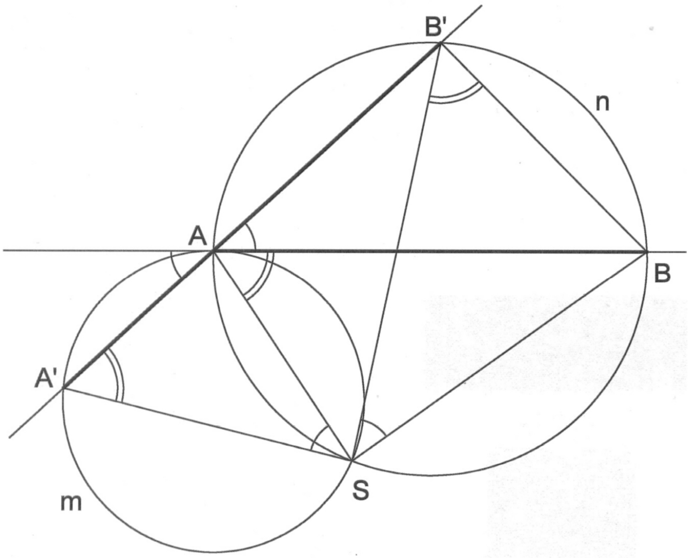


Obr. 3.3.5

Obvodové úhly $B'AS$ a $B'BS$ (resp. BAS a $BB'S$) jsou shodné. Úhel BAS je současně úsekovým úhlem příslušným k obvodovému úhlu $AA'S$, které jsou také shodné. Vidíme, že trojúhelníky SAA' a

[66] Protože mají přímky AB a $A'B'$ jediný společný bod A, neleží body A' ani B' (podle předpokladu různé od A) na přímce AB. Kružnice m proto vždy existuje. Body A, B, B' nejsou kolineární, a proto existuje kružnice n.

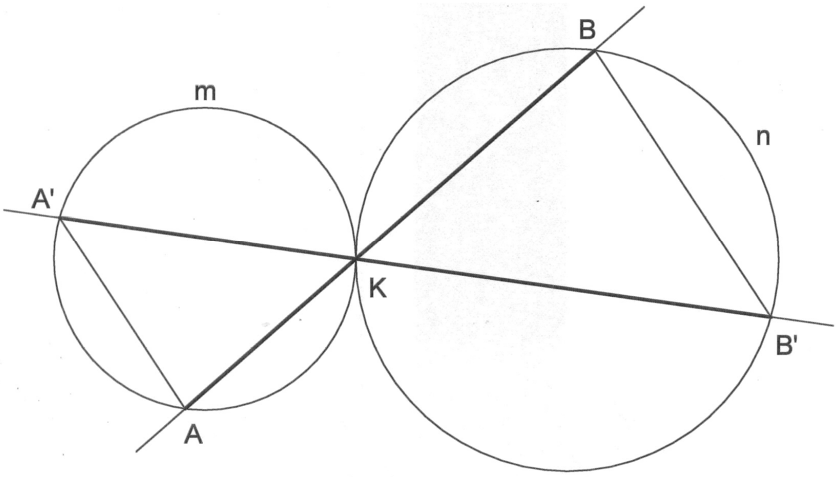
SBB' jsou přímo podobné. Při těchto úvahách jsme se opírali o obrázek, který již zachycuje jednu konkrétní situaci. Uvážíme jinou vzájemnou polohu úseček ***AB*** a ***A'B'*** (viz obr. 3.3.6). Pomocí úvah založených opět na vhodném užití obvodových a úsekových úhlu, které nebudeme rozvádět, můžeme ukázat, že jsou trojúhelníky ***SAA'*** a ***SBB'*** přímo podobné. Vidíme však, že vztahy, které platily v obr. 3.3.5, není možné přenést do obr. 3.3.6. Tím se tento případ (3c.) odlišuje od předchozí možnosti (3b.), kde existovalo jediné obecné řešení.



Obr. 3.3.6

Považuji za zbytečné procházet zde další možnosti. Zjevně by stačilo doplnit příslušný obrázek o strany trojúhelníků ***SAA'*** a ***SBB'*** a všimnout si vztahů mezi jednotlivými úhly. Očekávaným výsledkem bude opět zjištění, že jsou tyto trojúhelníky přímo podobné. Přísně vzato však přestávají být naše úvahy v tuto chvíli důkazem, stávají se spíše oporou pro naše přesvědčení, že v každém dílčím případě platí tento poznatek o přímé podobnosti jistých trojúhelníků. Obdobně můžeme postupovat, i pokud se přímky ***AB*** a ***A'B'*** protínají v bodě ***B***, resp. ***A'***, resp. ***B'***, a přitom jsou všechny čtyři body navzájem různé.

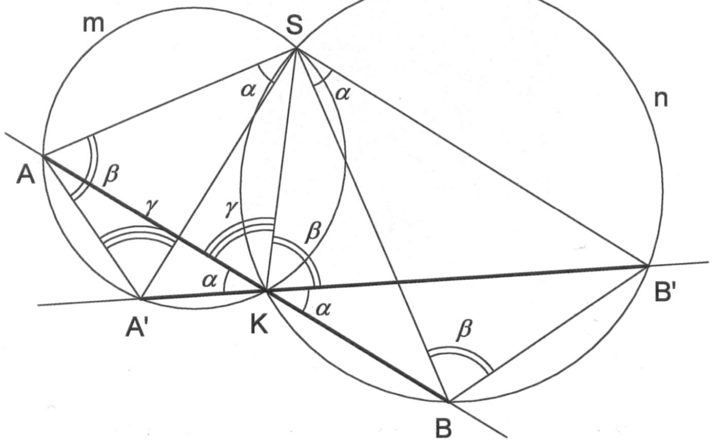
3d. Přímky ***AB*** a ***A'B'*** se protínají v dalším bodě ***K*** různém od bodů ***A***, ***B***, ***A'***, ***B'***. Protože jsou body ***A***, ***A'***, ***K*** (resp. ***B***, ***B'***, ***K***) nekolineární, můžeme sestrojit kružnici ***m*** (resp. ***n***), která jimi prochází. Kružnice ***m***, ***n*** mají jistě společný bod ***K***, nejprve uvážíme případ, že se v něm dotýkají (viz obr. 3.3.7). Bod ***K*** je středem stejnolehlosti *h'*, která kružnici ***m*** zobrazí na ***n***. Přitom je zjevně bod ***B*** (resp. ***B'***) obrazem bodu ***A*** (resp. ***A'***) v *h'*. Trojúhelník ***AA'K*** přejde ve stejnolehlosti *h'* na trojúhelník ***BB'K***. Pokud položíme ***S*** ≡ ***K***, vidíme, že trojúhelníky ***SAA'*** a ***SBB'*** jsou přímo podobné.



Obr. 3.3.7

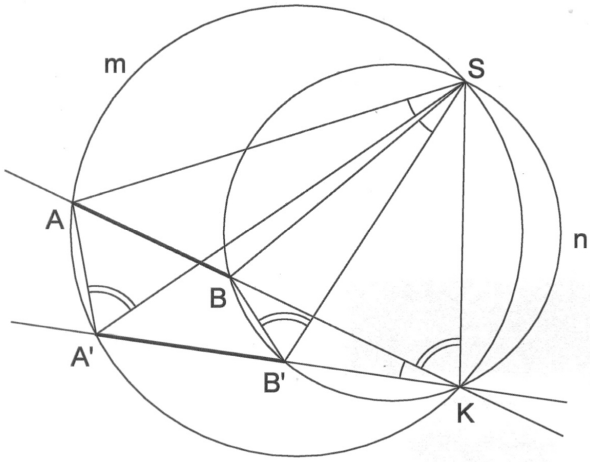
Nechť se kružnice $\boldsymbol{m}$ a $\boldsymbol{n}$ protnou kromě bodu $\boldsymbol{K}$ ještě v dalším bodě $\boldsymbol{S}$ (viz obr. 3.3.8). Platí:

$$|\angle \boldsymbol{ASA'}| = |\angle \boldsymbol{AKA'}| = |\angle \boldsymbol{BKB'}| = |\angle \boldsymbol{BSB'}| = \alpha, |\angle \boldsymbol{SBB'}| = |\angle \boldsymbol{SKB'}| = \beta,$$
$$|\angle \boldsymbol{AA'S}| = |\angle \boldsymbol{AKS}| = \gamma, |\angle \boldsymbol{AKB}| = \alpha + \beta + \gamma = 180°, |\angle \boldsymbol{SAA'}| = 180° - \alpha - \gamma = \beta.$$



Obr. 3.3.8

Vidíme, že jsou i v tomto případě trojúhelníky ***SAA'*** a ***SBB'*** přímo podobné. I zde dochází k podobné situaci jako v případě 3c. Pokud by byly úsečky ***AB*** a ***A'B'*** uspořádány jinak (viz obr. 3.3.9), dokážeme podobnost uvažovaných trojúhelníků jinak. Vhodným využitím shodnosti obvodových úhlů bychom byli schopni tento vztah dokázat i pro další možná uspořádání.



Obr. 3.3.9

Podobně jako v případě 3b. můžeme i pro možnosti 3c. a 3d. ze skutečnosti, že jsou trojúhelníky ***SAA'*** a ***SBB'*** přímo podobné, dokázat, že bod ***S*** je jediným samodružným bodem přímé podobnosti *p*, která úsečku ***AB*** zobrazí na ***A'B'***. Stejně můžeme ukázat, že úsečka $\boldsymbol{A_0B_0}$ je obrazem úsečky ***AB*** v zobrazení p_0, které je složením otočení r_0 okolo bodu ***S*** o orientovaný úhel velikosti $|\widehat{ASA_0}|$ a zobrazení h_0. To je buď stejnolehlostí se středem ***S*** a koeficientem $|SA_0|/|SA|$ (pokud $|SA_0| \neq |SA|$), nebo identitou (když $|SA_0| = |SA|$).

Uvážíme nyní úsečky ***AC*** a ***A'C'***. Předpokládejme, že ***A*** ≠ ***A'*** a ***C*** ≠ ***C'*** (opačný případ jsme již vyřešili v 3a.). Pak můžeme v závislosti na vzájemné poloze těchto úseček postupovat stejně, jak bylo uvedeno výše v 3b. až 3d. Nalezneme přitom bod ***S'***, který je jediným samodružným bodem přímé podobnosti, která zobrazí úsečku ***AC*** na úsečku ***A'C'***. V úvodu tohoto řešení úlohy 3 jsme ukázali, že toto zobrazení je opět přímá podobnost *p* (určená úsečkami ***AB*** a ***A'B'***). Vidíme, že bod ***S'*** je totožný s bodem ***S***. Pak musí být i zobrazení, které převede úsečku ***AC*** na $\boldsymbol{A_0C_0}$, zjevně rovné tomu, které zobrazí úsečku ***AB*** na $\boldsymbol{A_0B_0}$ a které jsme popsali v předchozím odstavci. To je složením otočení a stejnolehlosti nebo identity, tj. přímou podobností. Protože je trojúhelník $\boldsymbol{A_0B_0C_0}$ obrazem trojúhelníku ***ABC*** v tomto zobrazení, musí být tyto trojúhelníky (přímo) podobné. Trojúhelník $\boldsymbol{A_0B_0C_0}$ je tak rovnostranný.

3.3.3 Související úvahy a úlohy

Těchto pět řešení vhodně ilustruje naše úvahy z úvodních dvou kapitol této části práce. Můžeme vidět, že při řešení jednoho dílčího, úzce zaměřeného problému můžeme využít poznatků z různých oblastí matematiky. Právě úlohy tohoto typu mohou nalézt uplatnění při snaze vyučovat matematiku problémově. V podobě, jak je úloha 3 zformulována, bychom ji nejspíš zařadili do elementární geometrie. Viděli jsme však, že samotné syntetické řešení (viz 5. řešení) je sice jednoduché, ale přitom poměrně zdlouhavé, navíc je neúplné a vyžaduje nápady, které nejsou triviální. Oproti tomu ostatní řešení byla mnohem kratší, bez příslušných komentářů by se dala provést na několika řádcích. Můžeme si na nich znovu uvědomit význam matematiky kalkulací. Tato čtyři řešení byla přitom postavena na výpočtech, ve kterých nalézají uplatnění různé oblasti matematiky – teorie komplexních čísel, analytická teorie zobrazení v afinních a euklidovských prostorech, analytická geometrie postavená na užití vektorů. Ty bývají při strukturálním pojetí matematiky vyučovány izolovaně jako uzavřené struktury. Při řešení úlohy 3 se tyto různé matematické teorie setkávají jako užitečné nástroje řešení jediného problému.

Uvedli jsme též, že pokud se snažíme úlohu řešit různými způsoby, můžeme hledat inspiraci z jednoho přístupu k řešení úlohy k řešením dalším. Zde se zmíníme o několika takových podnětech. V 1. řešení úlohy 3 jsme užitím skalárního součinu ukázali, že vzájemné vzdálenosti bodů $\boldsymbol{A}_0$, $\boldsymbol{B}_0$, $\boldsymbol{C}_0$ a příslušné vzdáleností bodů $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ jsou ve stejném poměru. Klíčové přitom bylo užití tvrzení 3.3.1. To se mi však dařilo dokázat pouze „synteticky“, úvahami o velikostech orientovaných úhlů (viz důkaz I). Říkal jsem si, že pokud by se mi toto tvrzení podařilo dokázat „analyticky“, mohl bych tento výpočet zařadit přímo do 1. řešení. Snažil jsem se proto různými způsoby upravovat vztahy mezi vektory určenými vrcholy podobných trojúhelníků $\boldsymbol{ABC}$ a $\boldsymbol{A'B'C'}$. Takto se mi však tvrzení 3.3.1 nedařilo dokázat, přesto jakýmsi vedlejším produktem těchto „her s vektory“ bylo 2. řešení úlohy 3. Uvědomil jsem si, že narážím na tento problém: jak pro dvě dvojice vektorů vyjádřit v jediném vztahu to, že mají stejnou odchylku a stejný poměr velikostí? Nakonec jsem tyto snahy vzdal. Současně jsem si však uvědomil možnost vyjádřit tuto skutečnost pomocí komplexních čísel. Výsledkem byl jak důkaz II tvrzení 3.3.1, tak 3. řešení úlohy 1, které dokonce užití tohoto tvrzení vůbec nevyžaduje.

Nezávisle na těchto úvahách jsem si uvědomil, že trojúhelníky uvažované v úloze 3 určují přímé podobné zobrazení. Tak vzniklo 4. řešení postavené na analytické teorii afinních a podobných zobrazení. To mě následně podnítilo k tomu, abych zkusil syntetické řešení nalézt pomocí syntetické teorie podobných zobrazení, zejména pak užitím konstrukce samodružného bodu přímé vlastní podobnosti (viz [35], str. 154 – 155). To vedlo k 5. řešení, na kterém jsem si uvědomil poprvé, že body $\boldsymbol{A}_0$, $\boldsymbol{B}_0$, $\boldsymbol{C}_0$ mohou i splynout. Toto zjištění ovšem způsobilo, abych se zpětně vrátil k předchozím řešením a uvědomil si, že i ona vedou mj. k tomuto speciálnímu výsledku. Nejenže jedno řešení může být inspirací pro další, ale také může poskytovat zpětnou vazbu jiným řešením.

Tato řešení přinášejí i podněty k dalšímu rozvinutí problému. Již v souvislosti s tvrzením 3.3.1 jsme učinili poznámku, že toto tvrzení neplatí pouze pro dva souhlasně orientované rovnostranné trojúhelníky, ale i pro libovolné dva přímo podobné trojúhelníky. Viděli jsme, že pouze 2. řešení bylo postavené na využití poznatků, které platí pouze pro rovnostranný trojúhelník (libovolná těžnice je kolmá na příslušnou stranu). V ostatních čtyřech řešeních bylo klíčové ukázat, že trojúhelník $\boldsymbol{A_0B_0C_0}$ (pokud existuje) je podobný s trojúhelníkem $\boldsymbol{ABC}$. Nabízí se možnost zformulovat úlohu 3 v obecnější podobě.

Úloha 4: *V rovině jsou dány libovolné dva přímo podobné trojúhelníky* ***ABC*** *a* ***A'B'C'****. Označíme* $\boldsymbol{A_0}$*,* $\boldsymbol{B_0}$*,* $\boldsymbol{C_0}$ *po řadě středy úseček* ***AA'****,* ***BB'****,* ***CC'****. Dokažte: Body* $\boldsymbol{A_0}$*,* $\boldsymbol{B_0}$*,* $\boldsymbol{C_0}$ *buď všechny splývají, nebo je trojúhelník* $\boldsymbol{A_0B_0C_0}$ *podobný s trojúhelníkem* ***ABC****.*

První, třetí a čtvrté řešení úlohy 3 je zjevně možné použít beze změny i při řešení této úlohy. V případě pátého řešení stačí upravit pouze část 3a. V tomto případě nemusí být trojúhelníky ***ACC'*** a ***ABB'*** přímo shodné, jsou však vždy přímo podobné.

Můžeme si také uvědomit, že za body $\boldsymbol{A_0}$, $\boldsymbol{B_0}$, $\boldsymbol{C_0}$ nemusíme nutně volit středy úseček ***AA'***, ***BB'***, ***CC'***, stačilo by, aby je dělily v témže poměru.

Úloha 5: *V rovině jsou dány libovolné dva přímo podobné trojúhelníky* ***ABC*** *a* ***A'B'C'*** *tak, aby* $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{A'}$*,* $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B'}$*,* $\boldsymbol{C} \neq \boldsymbol{C'}$*. Nechť je dáno reálné číslo* λ *různé od 0 a od 1. Uvažujme body* $\boldsymbol{A_0}$*,* $\boldsymbol{B_0}$*,* $\boldsymbol{C_0}$ *takové, že pro dělící poměry platí* $(\boldsymbol{AA'A_0}) = (\boldsymbol{BB'B_0}) = (\boldsymbol{CC'C_0}) = \lambda$*. Dokažte: Body* $\boldsymbol{A_0}$*,* $\boldsymbol{B_0}$*,* $\boldsymbol{C_0}$ *buď všechny splývají, nebo je trojúhelník* $\boldsymbol{A_0B_0C_0}$ *podobný s trojúhelníkem* ***ABC****.*

Uvažujme na libovolné přímce ***XX'*** bod $\boldsymbol{X_0}$ takový, že $(\boldsymbol{XX'X_0}) = \lambda$. Pak je $\overrightarrow{\boldsymbol{XX}_0} = \lambda\, \overrightarrow{\boldsymbol{X'X}_0}$, tj. $\boldsymbol{X}_0 - \boldsymbol{X} = \lambda(\boldsymbol{X}_0 - \boldsymbol{X}')$. V libovolné lineární soustavě souřadnic platí:

$$\boldsymbol{X}_0 = \frac{\boldsymbol{X} - \lambda\, \boldsymbol{X}'}{1-\lambda}. \tag{3.3.3}$$

Na základě tohoto vztahu můžeme snadno obměnit první řešení úlohy 3. Můžeme psát:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B}_0} = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} - \lambda\, \overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}}}{1-\lambda}.$$

Odtud plyne:

$$\left|\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B}_0\right|^2 = \frac{\lambda^2 k^2 - 2k\lambda\cos\delta + 1}{(1-\lambda)^2}\left|\boldsymbol{AB}\right|^2, \text{ kde } k = \frac{\left|\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'\right|}{\left|\boldsymbol{AB}\right|}.$$

Obdobný vztah můžeme odvodit i pro vzdálenosti $\left|\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{C}_0\right|$ a $\left|\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{C}_0\right|$. Pak jsou buď všechny tři vzdálenosti nenulové a trojúhelníky $\boldsymbol{ABC}$ a $\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{C}_0$ musí být podobné, nebo všechny tři body $\boldsymbol{A}_0$, $\boldsymbol{B}_0$, $\boldsymbol{C}_0$ splynou. K tomu dojde pouze ve dvou případech: buď $\delta = 0°$ a $\lambda = 1/k$, nebo $\delta = 180°$ a $\lambda = -1/k$. K první (resp. druhé) možnosti dojde právě tehdy, když je λ kladné (resp. záporné) a trojúhelník $\boldsymbol{A'B'C'}$ je obrazem trojúhelníku $\boldsymbol{ABC}$ v jisté stejnolehlosti se středem $\boldsymbol{S}$ a koeficientem $1/\lambda$. Přitom zjevně $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{B}_0 = \boldsymbol{C}_0$.

Podobně snadno můžeme s využitím vztahu (3.3.3) obměnit i třetí a čtvrté řešení úlohy 3. Také páté řešení této úlohy lze jednoduše upravit a získat tak další řešení úlohy 5. Postup řešení užitý ve 4. řešení nás může navést k jednoduchému řešení ještě obecnější úlohy.

Úloha 6: *V rovině jsou dány libovolné dva přímo podobné n-úhelníky* $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2...\boldsymbol{A}_n$ *a* $\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2...\boldsymbol{B}_n$ *tak, aby* $\boldsymbol{A}_1 \neq \boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{A}_2 \neq \boldsymbol{B}_2$, ... , $\boldsymbol{A}_n \neq \boldsymbol{B}_n$. *Nechť je dáno reálné číslo λ různé od 0 a od 1. Uvažujme body* $\boldsymbol{C}_1$, $\boldsymbol{C}_2$, ... , $\boldsymbol{C}_n$ *takové, že pro dělící poměry platí* $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{C}_1) = (\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{C}_2) = ... = (\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{B}_n\boldsymbol{C}_n) = \lambda$. *Dokažte: Body* $\boldsymbol{C}_1$, $\boldsymbol{C}_2$, ... , $\boldsymbol{C}_n$ *buď všechny splývají, nebo je n-úhelník* $\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2...\boldsymbol{C}_n$ *podobný s n-úhelníkem* $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2...\boldsymbol{A}_n$.

Body $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ (resp. $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{B}_3$) jsou zjevně nekolineární. Trojúhelníky $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3$ a $\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{B}_3$ jsou přímo podobné. Existuje právě jedna přímá podobnost p, která první trojúhelník převede na druhý. Pak ovšem musí být i n-úhelník $\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2...\boldsymbol{B}_n$ obrazem n-úhelníku $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2...\boldsymbol{A}_n$ v zobrazení p. Analytické vyjádření podobnosti p je ve tvaru (3.3.1). Uvážíme zobrazení p_0, které libovolnému bodu roviny $\boldsymbol{X}$ přiřadí bod $\boldsymbol{X}_0$ takový, že buď $\boldsymbol{X}_0 = \boldsymbol{X}$ (pokud $\boldsymbol{X} = p(\boldsymbol{X})$), nebo $(\boldsymbol{X}p(\boldsymbol{X})\boldsymbol{X}_0) = \lambda$ (je-li $\boldsymbol{X} \neq p(\boldsymbol{X})$). Pak zjevně platí:

$$\boldsymbol{X}_0 = \frac{\boldsymbol{X} - \lambda\, p(\boldsymbol{X})}{1-\lambda}.$$

Analytické vyjádření zobrazení p_0 má tvar:

$$x_0 = \frac{x - \lambda\,(ax - by + c)}{1-\lambda} = \frac{1-\lambda a}{1-\lambda}x + \frac{\lambda b}{1-\lambda}y - \frac{\lambda c}{1-\lambda},$$

$$y_0 = \frac{y - \lambda\,(bx + ay + d)}{1-\lambda} = -\frac{\lambda b}{1-\lambda}x + \frac{1-\lambda a}{1-\lambda}y - \frac{\lambda d}{1-\lambda}.$$

Zjevně je obrazem n-úhelníku $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2...\boldsymbol{A}_n$ v zobrazení p_0 n-úhelník $\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2...\boldsymbol{C}_n$. Přitom je zobrazení p_0 buď podle věty obrácené k větě 3.3.2 přímá podobnost ($\lambda a \neq 1$ nebo $b \neq 0$), nebo zobrazení, které všechny body roviny zobrazí na jediný bod ($\lambda a = 1$ a zároveň $b = 0$). Proto buď musí být n-úhelníky $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2...\boldsymbol{A}_n$ a $\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2...\boldsymbol{C}_n$ přímo podobné, nebo platí $\boldsymbol{C}_1 = \boldsymbol{C}_2 = ... = \boldsymbol{C}_n$.

Tuto úlohu bychom však mohli vyřešit i vhodnou úpravou prvního, třetího nebo pátého řešení úlohy 3.

Můžeme se ptát, jestli podobnou vlastnost mají i nepřímo podobné n-úhelníky. Vše si ukážeme na případě dvou nepřímo podobných trojúhelníků a středů příslušných úseček.

Úloha 7: *V rovině jsou dány libovolné dva nepřímo podobné trojúhelníky **ABC** a **A'B'C'**. Označíme $\boldsymbol{A}_0$, $\boldsymbol{B}_0$, $\boldsymbol{C}_0$ po řadě středy úseček **AA'**, **BB'**, **CC'**. Rozhodněte, zda následující tvrzení platí: Body $\boldsymbol{A}_0$, $\boldsymbol{B}_0$, $\boldsymbol{C}_0$ buď všechny splývají, nebo je trojúhelník $\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{C}_0$ rovnostranný.*

1. řešení úlohy 7

Ukázali jsme (viz 3. řešení úlohy 3), že trojúhelníky ***ABC*** a ***A'B'C'*** jsou nepřímo podobné právě tehdy, když pro komplexní čísla ***a***, ***b***, ***c***, ***a'***, ***b'***, ***c'*** (reprezentující jednotlivé vrcholy) existují dvě nenulová komplexně sdružená čísla k a $\bar{k}$ taková, že platí:

$$\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a} = k(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}),\ \boldsymbol{c}' - \boldsymbol{a}' = \bar{k}(\boldsymbol{b}' - \boldsymbol{a}').$$

Přitom nejsou čísla k a $\bar{k}$ reálná (to by body ***A***, ***B***, ***C*** (resp. ***A'***, ***B'***, ***C'***) byly kolineární), musí být proto nutně různá. Pro komplexní čísla $\boldsymbol{a}_0$, $\boldsymbol{b}_0$, $\boldsymbol{c}_0$, která reprezentují body $\boldsymbol{A}_0$, $\boldsymbol{B}_0$, $\boldsymbol{C}_0$ platí:

$$\boldsymbol{c}_0 - \boldsymbol{a}_0 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{c}' - \boldsymbol{a}') = \frac{1}{2}k(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}\bar{k}(\boldsymbol{b}' - \boldsymbol{a}'). \qquad (3.3.4)$$

Předpokládejme nejprve, že $\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{B}_0$, tj. $\boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{b}_0$. Pak ovšem platí $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}'$, tj. $\boldsymbol{b}' - \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$. Pak můžeme vztah (3.3.4) upravit do tvaru:

$$\boldsymbol{c}_0 - \boldsymbol{a}_0 = \frac{1}{2}k(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) - \frac{1}{2}\bar{k}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) = \frac{1}{2}(k - \bar{k})((\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}).$$

Protože $k \neq \bar{k}$ a $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$, musí být nutně $\boldsymbol{c}_0 - \boldsymbol{a}_0 \neq 0$, tj. $\boldsymbol{A}_0 \neq \boldsymbol{C}_0$. Podobně můžeme postupovat, i pokud by bylo $\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{C}_0$ nebo $\boldsymbol{B}_0 = \boldsymbol{C}_0$. Vidíme, že nikdy nemůže nastat možnost, že by $\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{B}_0 = \boldsymbol{C}_0$.

Nyní nechť $\boldsymbol{A}_0 \neq \boldsymbol{B}_0 \neq \boldsymbol{C}_0$. Předpokládejme, že jsou trojúhelníky $\boldsymbol{ABC}$ a $\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{C}_0$ přímo (resp. nepřímo) podobné. Potom musí platit:

$$\boldsymbol{c}_0 - \boldsymbol{a}_0 = k(\boldsymbol{b}_0 - \boldsymbol{a}_0) = \frac{1}{2}k(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}k(\boldsymbol{b}' - \boldsymbol{a}')$$
$$(\text{resp.}\, \boldsymbol{c}_0 - \boldsymbol{a}_0 = \bar{k}(\boldsymbol{b}_0 - \boldsymbol{a}_0) = \frac{1}{2}\bar{k}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}\bar{k}(\boldsymbol{b}' - \boldsymbol{a}')).$$

Porovnáním se vztahem (3.3.4) zjistíme, že v obou případech by muselo být $k = \bar{k}$, což je ve sporu s naším výše učiněným závěrem, že nutně musí být $k \neq \bar{k}$. Vidíme, že nikdy nemůže nastat ani možnost, že by trojúhelníky $\boldsymbol{ABC}$ a $\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{C}_0$ byly podobné.

2. řešení úlohy 7

Trojúhelníky $\boldsymbol{ABC}$ a $\boldsymbol{A'B'C'}$ je určena právě jedna nepřímá podobnost, kterou označíme n. Ve zvolené kartézské soustavě souřadnic má podle věty 3.3.2 analytické vyjádření zobrazení n tvar:

$$x' = ax + by + c,$$
$$y' = bx - ay + d.$$

Uvážíme nyní zobrazení n_0, které libovolnému bodu $\boldsymbol{X}$ roviny přiřadí střed $\boldsymbol{X}_0$ úsečky $\boldsymbol{X}n(\boldsymbol{X})$. Ve zvolené kartézské soustavě souřadnic nechť $\boldsymbol{X}[x, y]$ a $\boldsymbol{X}_0[x_0, y_0]$. Pak platí:

$$x_0 = \frac{x + x'}{2} = \frac{x + ax + by + c}{2},\ y_0 = \frac{y + y'}{2} = \frac{y + bx - ay + d}{2}.$$

Vidíme, že analytické vyjádření zobrazení n_0 má tvar:

$$x_0 = \frac{1+a}{2}x + \frac{b}{2}y + \frac{c}{2},$$
$$y_0 = \frac{b}{2}x + \frac{1-a}{2}y + \frac{d}{2}. \tag{3.3.5}$$

Takové zobrazení je vždy afinní. Obrazem bodů $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ v n_0 jsou body $\boldsymbol{A}_0$, $\boldsymbol{B}_0$, $\boldsymbol{C}_0$. Přitom víme, že libovolné afinní zobrazení v rovině je jednoznačně určeno obrazy tří nekolineárních bodů. Proto je zobrazení n_0 jediné afinní zobrazení, které bodům $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ přiřadí body $\boldsymbol{A}_0$, $\boldsymbol{B}_0$, $\boldsymbol{C}_0$.

Vraťme se k rovnici (3.3.5). Předpokládejme nejprve, že $b \neq 0$. Pak jistě zobrazení n_0 nepřiřadí všem bodům roviny jediný bod, toto zobrazení není podle věty obrácené k větě 3.3.2 ani přímá podobnost. Nepřímou podobností by mohlo být podle téže věty právě tehdy, když by platilo: $1 + a = -(1 - a)$. Tato možnost nemůže také nikdy nastat. Nechť nyní $b = 0$. Zobrazení n_0, by přiřadilo každému bodu roviny týž bod, právě když by $1 + a = 0$ a současně $1 - a = 0$. To však není možné. Uvažované zobrazení by bylo nepřímá podobnost právě tehdy, když $1 + a = -(1 - a)$. Ani tato možnost nikdy nenastane. Konečně n_0 by bylo přímá podobnost, právě když $1 + a = 1 - a$, tj. $a = 0$. Pak by ovšem $a = b = 0$ a zobrazení n by každému bodu roviny přiřadilo stejný bod, což je ve sporu s předpokladem, že n je nepřímá podobnost. Vidíme, že zobrazení n_0 není podobné, ani nezobrazuje všechny body roviny do jediného bodu.

Předpokládejme nejprve, že jsou trojúhelníky $\boldsymbol{ABC}$ a $\boldsymbol{A_0B_0C_0}$ podobné, pak by jimi byla určena jistá podobnost, tj. jisté afinní zobrazení. Současně víme, že jediné afinní zobrazení určené těmito trojúhelníky je zobrazení n_0, které není podobností, dospěli jsme tak ke sporu. Nyní předpokládejme, že $\boldsymbol{A_0} = \boldsymbol{B_0} = \boldsymbol{C_0}$. Není těžké ukázat, že afinní zobrazení určené nekolineárními body $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ a body $\boldsymbol{A_0} = \boldsymbol{B_0} = \boldsymbol{C_0}$, musí na $\boldsymbol{A_0}$ zobrazit libovolný bod roviny[67]. Na druhou stranu je n_0 jediné afinní zobrazení určené těmito body, to však nepřiřazuje všem bodům roviny stejný bod. Opět jsme dospěli ke sporu. Vidíme, že ani jedna z možností uvedených v zadání úlohy 7 nemůže nikdy nastat.

[67] Využijeme následující definice. Řekneme, že zobrazení f roviny $\boldsymbol{\rho}$ do téže roviny je afinní, jestliže libovolné tři různé kolineární body $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{Z}$ zobrazí buď do jediného bodu, nebo jsou všechny tři body $f(\boldsymbol{X})$, $f(\boldsymbol{Y})$, $f(\boldsymbol{Z})$ různé a platí: $(\boldsymbol{XYZ}) = (f(\boldsymbol{X})f(\boldsymbol{Y})f(\boldsymbol{Z}))$. Podle této definice musí být obrazem libovolného bodu na přímkách $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{AC}$, $\boldsymbol{BC}$ bod $\boldsymbol{A_0}$. Pokud bod $\boldsymbol{X}$ neleží na těchto přímkách, můžeme jím vždy vést přímku, která protne např. přímku $\boldsymbol{AB}$ v bodě $\boldsymbol{D}$ a přímku $\boldsymbol{AC}$ v bodě $\boldsymbol{E}$. Protože obrazem bodů $\boldsymbol{D}$ i $\boldsymbol{E}$ je bod $\boldsymbol{A_0}$, musí se na něj zobrazit podle definice i bod $\boldsymbol{X}$.

4. Závěr

V úvodu práce jsem si vytyčil za cíl ukázat, že dílo Jana Sobotky je pro učitele matematiky i po téměř sto letech stále živé a inspirativní.

Považuji za důležité, aby vyučování matematiky nebylo postaveno výhradně na strukturálním pojetí, tj. prezentaci různých oblastí matematiky jako uzavřených struktur, ale aby zde nalezl své významné místo i problémový přístup. Z tohoto hlediska na mne působily vlivy studia Sobotkova díla velice silně. Za podnětné považuji některé charakteristické rysy jeho prací, které jsem postihl v deseti aspektech: náměty tvorby, šíře rozhledu, hloubka prací, zobecňování výsledků, konstrukce, kalkul, drobnokresba, tvůrčí fantazie, umění a talent.

Z jeho díla můžeme však čerpat i další podněty pro naše vnímání matematiky. To, co je implicitně obsaženo v Sobotkově díle, se pokusím vyjádřit explicitně. Tím přirozeně mohu názory na problematiku poněkud deformovat, jsem však přesvědčen, že se neodchýlím od ducha vnímání matematiky Janem Sobotkou.

Poučení ze Sobotkova díla

1. ***Matematika je řešení problémů***. Tato formulace není přirozeně definicí matematiky, je pouze metaforou, která zdůrazňuje ten rys matematiky, který považoval Jan Sobotka za podstatný. Není bez zajímavosti, že tuto myšlenku explicitně vyjádřil sto let po Sobotkovi americký matematik Paul Halmos ([37]).

2. ***Při řešení problémů hrají podstatnou roli různé reprezentace pojmů***. Reprezentace pojmu je explicitním vyjádřením určitého pohledu na problematiku, různost pohledů může být přirozenou cestou k úspěchu při hledání souvislostí, vztahů a postupů. Zde Sobotka využívá snad všechny tehdy známé reprezentace, zejména algebraické a analytické.

3. ***Nejdůležitější reprezentace jsou „produktivní“***. Takovéto reprezentace umožňují vypočítat to, co mnohdy jen tušíme. Kalkuly dovolují převést část řešení problému na problém rutinní. Na tuto stránku matematiky upozorňuje např. Petr Vopěnka.

4. ***Řešení problémů je účelné dovést k „definitivním" výsledkům***. Toto hledisko je důležité zejména pro aplikace matematiky. K řešení téhož problému je účelné se vracet, s cílem nalézt lepší řešení.

5. ***Matematika by neměla být zatěžována přílišným formalismem***. Porozumění pojmu je důležitější než jeho formální definice.

6. ***Pojmy a postupy matematiky vykazují jistou eleganci, harmonie matematických výsledků je důležitou složkou matematiky***.

7. ***Jednotlivé matematické disciplíny spolu úzce souvisejí a jejich „interakce" při řešení problémů je plodná, někdy dokonce nezastupitelná***. Tento rys matematiky je zcela moderní a je velmi vzdálen častému „školskému" přístupu k matematice.

8. ***Přes výraznou roli problémů je nutno vidět matematiku jako systém logicky uspořádaný***.

9. ***Mimořádnou pozornost je nutno věnovat matematickému vzdělávání, zejména vzdělávání geometrickému***. Není pochyb o tom, že tento požadavek je i dnes velmi aktuální.

10. ***Matematika je příjemná a užitečná lidská činnost***.

Matematika v Sobotkově pojetí je v naznačeném smyslu inspirativní pro současnost. To je mé přesvědčení.

Literatura

[1] Sobotka, J., *O některých relacích metrických a jejich užití k analytickému řešení problému Apollonického*, ČPMF, 41 (1912), 487-500

[2] Holubář, J., *O methodách rovinných konstrukcí (úloha Apolloniova a úlohy příbuzné)*, JČMF, Praha, 1949

[3] Zuščák, T., *Sobotkovo řešení Apolloniovy úlohy*, Matematika v proměnách věků II, Prometheus, Praha, 2001, 203-217

[4] Seifert, L., *Cyklografie*, JČMF, Praha, 1949

[5] Kuřina, F., *Deset pohledů na geometrii*, MÚ AV ČR, Praha, 1996

[6] Sobotka, J., *K analytickému řešení problému Apollonického na kouli*, Rozpr., 21 (1912), číslo 7

[7] Burešová, J., Vospěl, Z., *Sférická trigonometrie*, ČVUT, Praha, 1989

[8] Kůst, J., *Sférická triginometrie*, SPN, Praha, 1964

[9] Havlíček, K., *Úvod do projektivní geometrie kuželoseček*, SNTL, Praha, 1956

[10] Nádeník, Z., *Geometrie v 16. a 17. století*, Matematika v 16. a 17. století, Prometheus, Praha, 1999

[11] Sobotka, J., *Analytické úvahy o koulích dotýkajících se čtyř daných koulích*, Rozpr., 21 (1912), číslo 9

[12] Klapka, J., *Jak se studují geometrické útvary v prostoru*, I. část, JČMF, Praha, 1947

[13] Klapka, J., *Jak se studují geometrické útvary v prostoru*, II. část, JČMF, Praha, 1947

[14] Sobotka, J., *Dodatky k analytickým úvahám o kružnicích a koulích Apolloniových a isogonálních*, Rozpr., 21 (1912), číslo 12

[15] Kadeřávek, F., *Jan Sobotka, profesor matematiky na universitě Karlově, šedesátníkem*, ČPMF, 52 (1923), 1 – 9

[16] Vorovka, K., *Sobotkovy názory didaktické*, ČPMF, 52 (1923), 9 – 11

[17] Bydžovský, B., *Jan Sobotka*, ČAVU, Praha, 1932

[18] Vyčichlo, F. a kol, *Studium a hodnocení díla prof. J. Sobotky*, Praha, 1958, rozmnoženo

[19] Urban, A., *O životě a díle profesora Jana Sobotky*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, 7 (1962), 355 – 359

[20] Urban, A., Vančura, Z., *Sté výročí narození profesora Jana Sobotky*, Časopis pro pěstování matematiky, 87 (1962), 382 – 386

[21] Urban, A., *Prof. PhDr. h. c. Jan Sobotka*, Matematika ve škole, 12 (1961–62), 623 – 626

[22] Kotyk, J., *Za prof. dr. Janem Sobotkou*, Rozhledy matematicko-fyzikální, 41 (1962), 42 – 44

[23] Folta, J., *Česká geometrická škola: historická analýza*, Academia, Praha, 1982

[24] Kadeřávek, F., Kounovský, Klíma, *Deskriptivní geometrie*, I. díl, JČMF, Praha, 1950

[25] Sklenáriková, Z., Pémová, Z., *Pohlkeho veta a jej význam v didaktike matematiky*, přístup z internetové adresy: www.sccg.sk/~kg/pemova/

[26] *Oborové encyklopedie – aplikovaná matematika, I. A až L*, SNTL, Praha, 1977

[27] Sobotka, J., *Poznámka ku známé jedné větě geometrické*, ČPMF, 16 (1887), str. 231 – 235

[28] http://www.math.muni.cz/math/biografie/jan_sobotka.html

[29] Kline, M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, 1990

[30] Bydžovský, B., *Úvod do algebraické geometrie*, Praha, JČMF, 1948

[31] Casey, J., *A Treatise on the Analytical Geometry*, Dublin University Press, Dublin, 1893

[32] Vopěnka, P., *Analytická geometrie druhé generace*, PdF UJEP, Ústí nad Labem, 1998

[33] Bydžovský, B., *Základy teorie determinantů a matic a jejich užití*, JČMF, Praha, 1930

[34] Šik, F., *Lineární algebra*, MU, Brno, 1998

[35] Kuřina, F., *Deset geometrických transformací*, Prometheus, Praha, 2002

[36] Kadeřávek, F., *Úvod do dějin rýsování a zobrazovacích nauk*, Nakl. ČSAV, Praha, 1954

[37] Halmos, P., R., *The Hearth of Mathematics*, český překlad, Pokroky MFI, 1982, číslo 5

[38] Třeštík, D., *Češi a dějiny v postmoderním očistci*, NLN, Praha, 2005

[39] Sobotka, J., *Deskriptivní geometrie promítání parallelního*, JČMF, Praha, 1906

[40] Boušková, H., *Život a dílo Jana Sobotky*, diplomová práce MFF UK (vedoucí J. Bečvář), Praha, 1995

[41] Hlavatý, V., *Úvod do neeuklidovské geometrie*, JČMF, Praha, 1926

[42] http://www.wikipedia.cz

Příloha 1 – Seznam vědeckých prací Jana Sobotky

ČPMF	Časopis pro pěstování matematiky a fyziky
Sitz.	Sitzungsberichte vídeňské akademie (Wiener Berichte)
MMP	Monatshefte für Mathematik und Physik
Zprávy	Zprávy Královské české Společnosti nauk
Rozp.	Rozpravy II. třídy České akademie věd a umění
Bul. int.	Bulletin international
Almanach	Almanach České Akademie

[**S1**] *Poznámka ku známé jedné větě geometrické*, ČPMF 16 (1887), 231 – 235

[**S2**] *Über Krümmung und Indicatricen der Helikoide*, Sizt. 101 (1892), 899 – 919

[**S3**] *Einige Constructionen bezüglich der Schraubungsflächen*, Sitz. 102 (1893), 1204 – 1240

[**S4**] *Über developpable Berührungsfächen an windschiefe Helikoide*, MMP 4 (1893), 59 – 78

[**S5**] *Zur Konstruktion der Oskulationshyperboloide windschiefer Flächen*, Zprávy (1893), č. XIV, 1 – 16

[**S6**] *Über Berührungskurven der Schraubungsregelflächen mit unschriebenen Cylinderflächen*, Zprávy (1983), č. XXII, 1 – 38

[**S7**] *Beitrag zur Konstruktion von umgeschriebenen Developpablen 1. an Flächen 2. Grades, 2. an Rotationsflächen*, Zprávy (1893), č. II, 1 – 16

[**S8**] *Construction von hyperosculierenden Kugeln der cubischen Raumcurven*, MMP 5 (1894), 349 – 366

[**S9**] *Einige Krümmungs-Halbmesser-Eigenschaften der Kegelschnitte*, Zprávy (1894), č. XLII, 1 – 9

[**S10**] *Beitrag zur Construction von Krümmungskugeln an Raumcurven*, Sitz. 104 (1895), 144 – 168

[**S11**] *Über einige Aufgaben aus der Arithmographie*, článek do programu reálky ve 4. vídeňském okresu (1895)

[**S12**] *Einige Constructionen bezüglich der Schnittkurven von Umdrehungsflächen mit Ebenen*, Sitz. 105 (1896), 371 – 388

[**S13**] *Eine Aufgabe aus der Geometrie der Bewegung und ihr Zuasmmenhang mit einigen cyklometrischen Aufgaben*, MMP 7 (1896), 347 – 369

[**S14**] *Beitrag zur infinitesimalen Geometrie der Integralcurven*, Sitz. 107 (1898), 569 – 623

[**S15**] *Zur Infinitesimalgeometrie einiger Plancurven*, Zprávy (1898), č. XXVI, 1 – 38

[**S16**] *Zur Perspektive des Kreises*, MMP 10 (1899), 289 – 302

[**S17**] *Beitrag zur Perspektive des Kresises und anschliessend zur Construkction der Axen und Kreisschnitte für Flächen zweiten Grades*, Sitz. 109 (1900), 583 – 614

[**S18**] *Zur rechnerischen Behandlung der Axonometrie*, zprávy (1900), č. XXXIII, 1 – 20

[**S19**] *Axonometrische Dartellungen aus ywek Rissen und Koordinaten-Transformationen*, Zprávy (1901), č. XXXV, 1 – 27

[**S20**] *Některé konstrukce axonometrické*, Věstník III. sjezdu českých přírodozpytců a lékařů (1900), 169 – 170

[**S21**] *Příspěvek k sestrojování kuželoseček dvojnásobně se dotýkajících*, ČPMF 32 (1902), 1 – 8

[**S22**] *Úvahy o grafickém integrování differenciálních rovnic, hlavně lineárných 1. řádu*, ČPMF 31 (1902), 10 – 23, 97 – 105, 177 – 188, 265 – 273

[**S23**] *Zur Konstruktion von Krümmungskreisen und Axen bei Kegelschnitten, welche durch fünf Punkte oder fünf Tangenten gegeben sind*, Zprávy (1902), č. VI, 1 – 19

[**S24**] *Zur Krümmung der Kegelschnittevoluten und Konstruktion des Kegelschnittes durch fünf benachbarte Punkte*, Zprávy (1902), č. XVII, 1 – 15

[**S25**] *O n-úhelnících a n-stranech v poloze perspektivní a o konfiguraci rovinné soustayv sil v rovnováze*, Rozp. 11 (1902), č. 1, 1 – 19

[**S26**] *Zum Normalenproblem der Kegelschnitte*, Sitz. 112 (1903), 1009 – 1035

[**S27**] *Zu den quadratischen Lösungen des Normalenproblems von Kegelschnitten*, Zprávy (1903), č. VII, 1 – 12

[**S28**] *Über das einer Fläche 2. Grades umschriebene Viereck*, Zprávy (1903), č. XXXIV, 1 – 18

[**S29**] *Zur Konstruktion von Oskulationshyperboloiden an windschiefe Flächen*, Zprávy (1903), č. XXXV, 1 – 11

[**S30**] *Über n-ecke und n-seite in perspektiver Lage und über die Configuration eines im Gleichgevichte befindlichen ebenen Kräftesystems*, Bul. int. 7 (1903), 59 73 [překlad článku S25]

[**S31**] *O čtyřúhelníku ploše 2. stupně opsaném*, ČPMF 33 (1904), 2 – 9

[**S32**] *Poznámky k centrálnému promítání koule*, ČPMF 33 (1904), 117 – 122

[**S33**] *Zur Ermittelung der Krümmung eines durch Punkte oder Tangenten gegebenen Kegelschnittes*, Zprávy (1904), č. XXXII, 1 – 18

[**S34**] *Zur konstruktiven Auflösung der Glechungen 2., 3. und 4. Grades*, Zprávy (1904), č. XXXIII, 1 – 29

[**S35**] *Příspěvek ku grafickému řešení rovnic 2., 3. a 4. stupně*, ČPMF 34 (1905), 1 – 5, 97 – 105

[**S36**] *Deskriptivní geometrie promítání parallelního*, Jednota českých matematiků a Česká Matice technická, sborník X (1906)

[**S37**] *Betrachtungen zur Konstruktion von Kegelschnitten aus teilweise imaginären Elementen*, Zprávy (1907), č. XX, 1 – 18

[**S38**] *Zur Konstruktion der Oskulationshyperboloide von Regelflächen*, Zprávy (1907), č. XXI, 1 – 13

[**S39**] *O vytvořování ploch druhého stupně, I. Vytvoření Mac-Cullagh-ovo*, Rozp. 18 (1909), č. 6, 1 – 21

[**S40**] *O vytvořování ploch druhého stupně, II. Souvislost vytvoření dle Mac-Cullagha s vytvořením Jacobi-ho*, Rozp. 18 (1909), č. 36, 1 – 14

[**S41**] *Differenciální geometrie: 1. Křivky rovinné*, 543 stran (1909), *2. Křivky prostorové, plochy v souřadnicích pravoúhlých*, 484 stran (1914), *3. Parametrické vyjádření ploch, útvary přímkové*, 506 stran (1914), nákladem JČMF v Praze

[**S42**] *O vytvořování ploch druhého stupně. Dvě sdělení. III. Přechod od Jacobi-ho vytvoření k větě Ivory-ho*. Rozp 19 (1910), č. 18, 1 – 31

[**S43**] *Věta Ivory-ho a některé její důsledky*, Rozp. 19 (1910), č. 20, 1 – 27

[**S44**] *Konstrukce týkající se křivosti plochy v daném bodě*, Rozp. 19 (1910), č. 58, 1 – 26

[**S45**] *Řešení úloh 3. a 4. stupně pomocí pohyblivého pravého úhlu*, ČPMF 40 (1911), 129 – 142

[**S46**] *O některých relacích metrických a jejich užití k analytickému řešení problému Apollonického*, ČPMF 41 (1912), 487 – 500

[**S47**] *K analytickému řešení problému Apollonického na kouli*, Rozp. 21 (1912), č. 7, 1 – 9

[**S48**] *Dodatky k analytickým úvahám o kružnicích a koulích Apolloniových a isogonálních*, Rozp. 21 (1912), č. 12, 1 – 10

[**S49**] *Analytické úvahy o koulích, dotýkajících se čtyř daných koulí*, Rozp. 21 (1912), č. 9, 1 – 16

[**S50**] *K Joachimsthalovu řešení problemu normal*, Rozp. 21 (1912), č. 13, 1 – 15

[**S51**] *K problemu normal při ellipse a hyperbole*, Rozp. 21 (1912), č. 20, 1 – 15

[**S52**] *Analytische Betrachtungen über Kugeln, welche vier gegebene Kugeln berühren*, Bul. int. 17 (1912), 142 – 159 [překlad článku S49]

[**S53**] *Konstrukzionen die Krümmung einer Fläche in einem Punkte betreffend*, Bul. int. 17 (1912), 220 – 248 [překlad článku S44]

[**S54**] *Zur Joachimsthalschen Lösung des Normalenproblems*, Bul. int. 17 (1912), 308 – 232 [překlad čláku S50]

[**S55**] *Zur analytischen Lösung des Apollonischen Problems auf der Kugel*, Bul. int. 17 (1912), 177 – 186 [překlad článku S47]

[**S56**] *Zur analytischen Behandlung von Apollonischen und isogonalen Kreisen und Kugeln*, Bul. int. 17 (1912), 196 – 207 [překlad článku S48]

[**S57**] *O jistém minimu při osmistěnu*, Rozp. 22 (1913), č. 25, 1 – 8

[**S58**] *Druh trojúhelníků maximálních a minimálních danému trojúhelníku opsaných neb vepsaných*, Rozp. 22 (1913), č. 33, 1 – 17

[**S59**] *Vyjádření obsahu libovolného čtyřstěnu se zřetelem na jeho maximum nebo minimum*, Rozp. 22 (1913), č. 34, 1 – 25

[**S60**] *Extremy mnohoúhelníků vepsaných*, Rozp. 22 (1913), č. 37, 1 – 28

[**S61**] *Zum Normalenproblem der Ellipse und Hyperbol*, Bul. int. 18 (1913), 1 – 17 [překlad článku S51]

[**S62**] *Eine Minimumseigenschaft des Oktaeders*, Bul. int. 18 (1913), 206 – 214 [překlad článku S57]

[**S63**] *Eine besondere Art von einem gegebenen Dreieck ein- oder umgeschriebenen extrémem Dreiecken*, Bul. int. 18 (1913), 243 – 261 [překlad článku S58]

[**S64**] *Inhaltsbestimmung eines Vierseites mit Rücksicht auf sein Maximum oder Minimum*, Bul. int. 18 (1913), 262 – 289 [překlad článku S59]

[**S65**] *Über extréme eingeschriebene Vielecke*, Bul. int. 18 (1913), 290 – 320 [překlad článku S 60]

[**S66**] *Poznámka o jisté vlastnosti křivek prostorových*, ČPMF 43 (1914), 359 – 363

[**S67**] *Některé potenční vlastnosti ploch druhého stupně*, Rozp. 23 (1914), č. 17, 1 – 32 + str. 125

[**S67–JA**] *O pojmu potencie s odzirom na površinu 2. stepena*, Rada Jugoslavenske akademije zosnosti i umjetnosti 204 (1914), 76 – 81

[**S68**] *O zvláštním způsobu určení kuželů a několik příslušných úloh cyklografických*, Rozp. 23 (1914), č. 36, 1 – 19

[**S69**] *Konstrukce oskulačních rovin některých křivek a několik deskriptivně geometrických applikací*, Rozp. 23 (1914), č. 41, 1 – 36

[**S70**] *Prostorová obdoba Steinerovy paraboly*, Rozp. 23 (1914), č. 47, 1 – 18

[**S71**] *Einige Potenzeigenschaften bei Flächen zweiter Ordnung*, Bul. int. 19 (1914), 212 – 246 [překlad článku S67]

[**S72**] *Über eine besondere Bestimmungsart von Kegeln und einige damit zusammenhängende zyklogarphische Aufgaben*, Bul. int. 19 (1914), 286 – 307 [překlad článku S68]

[**S73**] *Das räumliche Analogon der Steiner´schen Parabel*, Bul. int. 19 (1914), 330 – 350 [překlad článku S70]

[**S74**] *Konstruktion von Schmiegungsebenen an gewisse Kurven mit einigen darstellend geoemtrischen Anwendungen*, Bul. int. 19 (1914), 357 – 396 [překlad článku S69]

[**S75**] Předmluva: *Die Lehrbücher für Mathematik, Darstellende Geometrie u. Physik an den Mittelschulen mit böhmischer Unterrichtsspache*, Berichte über den mathematischen Unterricht in Österreich, 13. sešit sborníku (1914)

[**S76**] *Ke konstrukci rovnoosé hyperboly ze čtyř imaginárních bodů nebo tečen a o jedné vlastnosti svazku kuželoseček*, Rozp. 24 (1915), č. 14, 1 – 6

[**S77**] *Věta Feuerbachova a její zevšeobecnění*, Slavnostní spis II. tř. Č. A. k 70. narozeninám Dra. K. Vrby, 1915, č. 20, 1 – 21

[**S78**] *Zur Konstruktion einer gleichseitigen Hyperbol aus vier imaginären Punkten oder Tangenten und eine Eigenschaft der Kegelschnittbüschels*, Bul. int. 20 (1915), 161 – 166 [překlad článku S76]

[**S79**] *O konstrukci plochy druhého stupně z devíti bodů*, Rozp. 25 (1916), č. 48, 1 – 13

[**S80**] *K sestrojování kuželoseček z bodů imaginárních*, Rozp. 25 (1916), č. 49, 1 – 7

[**S81**] *Zur Konstruktion einer Fläche 2. Ordnung aus neun Punkten*, Bul. int. 21 (1916), 113 – 128 [překlad článku S79]

[**S82**] *Zur Konstruktion von Kegelschnitten aus imaginären Punkten*, Bul. int. 21 (1916), 129 – 138 [překlad článku S80]

[**S83**] *O Steinerově větě o kružnicích křivosti kuželosečky a některých jejích vztazích k problému normál*, Rozp. 26 (1917), č. 55, 1 – 18

[**S84**] *O křivosti centricky kollineárných křivek v rovině*, Rozp. 27 (1918), č. 31, 1 – 11

[**S85**] *O souvislosti křivky s křivostí jejího průměru a o několika vztazích příbuzných*, Rozp. 27 (1918), č. 35, 1 – 13

[**S86**] *O křivosti křivek algebraických*, Rozp. 27 (1918), č. 39, 1 – 8

[**S87**] *Úvahy o křivosti kuželoseček*, Rozp. 28 (1919), č. 3, 1 – 10

[**S88**] *Zvláštní vztahy středů křivosti kuželosečky*, Rozp. 28 (1919),. Č. 9, 1 – 6

[**S89**] *Kružnice a kuželosečky, které danou kuželosečku oskulují*, Rozp. 28 (1919), č. 13, 1 – 10

[**S90**] *O křivosti plochy řádu vyššího v obyčejném bodě*, Rozp. 29 (1920), č. 20, 1 – 13

[**S91**] *Ke křivosti druhého řádu dané plochy*, Rozp. 29 (1920), č. 27, 1 – 9

[**S92**] *Über einen Steinerschen Satz, die Krümmungskreise eines Kegelschnittes betreffend, und einige Beziehungen desselben zum Normalenproblem*, Bul. int. 22 (1920), 130 – 149 [překlad článku S83]

[**S93**] *Über den usammenhang der Krümmung einer Kurve mit unrer Projektion und einige damit verwandte Beziehungen*, Bul. int. 22 (1920), 160 – 174 [překlad článku S85]

[**S94**] *Zur Krümmung zentrisch kollinearer Kurven in der Ebene*, Bul. int. 22 (1920), 177 – 188 [překlad článku S84]

[**S95**] *Zur Krümming algebraischer Kurven*, Bul. int. 22 (1920), 217 – 225 [překlad článku S86]

[**S96**] *Einige spezielle Beziehungen der Krümmungsmittelpunkte eines Kegelschittes*, Bul. int. 22 (1920), 200 – 205 [překlad článku S 88]

[**S97**] *Kegelschnitte und Kroise, welche einen gegebenen Kegelschnitt oskulieren*, Bul. int. 22 (1920), 106 – 216 [překlad článku S89]

[**S98**] *Betrachtungen zur Krümmung der Kegelschnitte*, Bul. int. 22 (1920), 189 – 199 [překlad článku S87]

[**S99**] *Sur la deuxieme indicatrice, d´une surfaces en un point ordinare*, Comptes rendus du Congres International des mathematiciens, Starsbourg 1920, 1 – 4

[**S100**] *O druhé indikatrix plochy v obyčejném bodě*, Rozp. 30 (1921), č. 4, 1 – 10

[**S101**] *Ke dvěma důkazům věty Feuerbachovy*, Rozp. 31 (1922), č. 2, 1 – 12

[**S102**] *Souvislost věty Feuerbachovy s rovnoramennou hyperbolou*, Rozp. 31 (1922), č. 7, 1 – 11

[**S103**] *Ke konstrukci kuželosečky oskulační křivky rovinné*, Rozp. 31 (1922), č. 18, 1 – 5

[**S104**] *O přímkách sdružených komplexu tetraedrálního*, Rozp. 32 (1932), č. 10, 1 – 12

[**S105**] *Příspěvek ke konstrukcích věty Pohlkeovy*, Rozp. 32 (1923), č. 32, 1 – 8

[**S106**] *Sur deux démonstrations du théoreme de Feuerbach*, Bul. int. 23 (1923), 242 – 255 [překlad článku S101]

[**S107**] *La rapport du théoreme de Feuerbach avec l´hyperbole équilatere*, Bul. int. 23 (1923), 256 – 266 [překlad článku S102]

[**S108**] *Několik důkazů o konstrukci věty Pohlkeovy*, ČPMF 53 (1924), 191 – 203

[**S109**] *Über die Schwarz´sche Verallgemeinerung des Satzes von Pohlke*, Zprávy (1924), č. XVII, 1 – 10

[**S110**] *Beiträge zu den Konstruktionen in schiefer Achsonometrie*, Zprávy (1924), č. XVIII, 1 – 16

[**S111**] *K metrickým vztahům parallelních průmětů ploch 2. stupně*, Rozp. 33 (1924), č. 2, 1 – 8

[**S112**] *Souvislost Pelzova zobrazení ploch 2. stupně se šikmou axonometrií*, Rozp. 33 (1924), č. 3, 1 – 18

[**S113**] *O jistém parametrickém vyjádření kuželoseček a jeho použití k odvození některých vět a konstrukcí vztahujících se ke kuželosečkám a racionálním křivkám řádu 4.*, Rozp. 33 (1924), č. 31, 1 – 12

[**S114**] *K některým konstrukcím kuželoseček, jejichž určující útvary nejsou reálné*, ČPMF 54 (1925), 331 – 228 [k článku připojeno resumé]

[**S115**] *Zur Tangentenkonstrukzion der Selbstschattengrenze von Kegelflächen*, Zprávy (1922), č. IV, 1 – 11

[**S116**] *Zevšeobecnění dvou vět Joachimsthalových*, Rozp. 34 (1925), č. 1, 1 – 4

[**S117**] *Příspěvek ke konstrukcím kubickým a bikvadratickým*, Rozp. 34 (1925), č. 3, 1 – 12

[**S118**] *O axonometrických osách v šikmém promítání pro daný poměr jejich délek*, Rozp. 34 (1925), č. 7, 1 – 12

[**S119**] *K sestrojení prostorové křivky řádu 3., řádu 4. prvého druhu a plochy druhého stupně z největšího možného počtu daných bodů sdruženě imaginárních*, Rozp. 34 (1925), č. 13, 1 – 10

[**S120**] *Sur des relations métriques concernant les projections paralléles des quadriques*, Bul. int. 25 (1925), 8 – 16 [překlad článku S111]

[**S121**] *Sur les rapports entrée la représentation des quadriques de Pelz et l´axonométrie clinogonale*, Bul. int. 25 (1925), 90 – 98

[**S122**] *Note sur la construction de la conique osculatrice d´une courbe plane*, Bul. int.25 (1925), 209 – 214

[**S123**] *Droites conjuguées du complexe tétraédral*, Bul. int. 25 (1925), 242 – 252 [překlad článku S104]

[**S124**] *Sur une certaine expression paramétrique des coniques et son application a la déduction de quelques théoremes et constructions se rapportants aux coniques et aux courbes rationnelles du quatrieme ordre*, Bul. int. 25 (1925), 355 – 369 [překlad článku S113]

[**S125**] *Une généralisation de deux théoremes de Joachimsthal*, Bul. int. 26 (1925), 8 – 10 [překlad článku S116]

[**S126**] *Contribution aux construcitons cubiques et biquadratiques*, Bul. int. 26 (1925), 74 – 86 [překlad článku S117]

[**S127**] *Sur la construction de la courbe gauche du 3. ordre, de la courbe gauche du 4. ordre et de la premiere especes et de la surface du second degré au moyen du plus grand nombre possible de points imaginaires conjugués*, Bul. int. 26 (1925), 146 – 156 [překlad článku S119]

[**S128**] *Sur les axes axonometriques dans la projection clinogonale, le rapport de leurs longueurs étant donné*, Bul. int. 26 (1925), 226 – 238 [překlad článku S118]

[**S129**] *Poznámka o involuci bikvadratické*, ČPMF 55 (1926), 242 – 244 [k článku připojeno resumé]

[**S130**] *Hartova věta a její zevšeobecnění (část prvá)*, Rozp. 35 (1926), č. 1, 1 – 8

[**S131**] *O souvislosti čtyř bisekant prostorové kubiky*, Rozp. 35 (1926), č. 4, 1 – 4

[**S132**] *O polárních vlastnostech jistých systémů kuželoseček (I)*, Rozp. 35 (1926), č. 5, 1 – 13

[**S133**] *O polárních vlastnostech jistých systémů kuželoseček (II)*, Rozp. 35 (1926), č. 9, 1 – 24

[**S134**] *Sur les propriétés polaires de ceratins systémes de coniques (I)*, Bul. int. 27 (1926), 385 – 398 [překlad článku S132]

[**S135**] *Sur les propriétés polaires de certains systemes de coniques (II)*, Bul. int. 27 (1926), 399 – 425 [překlad článku S133]

[**S136**] *Sur une relation entre quatre sécantes doubles d´une cubique gauche*, Bul. int. 27 (1926), 500 – 503 [překlad článku S131]

[**S137**] *Sur théoréme de Hart et sa généralisation (1. partie)*, Bul. int. 27 (1926), 460 – 469 [překlad článku S130]

[**S138**] *O vzájemných vztazích úplných čtyřrohů a čtyřstranů*, Rozp. 36 (1927), č. 31, 1 – 11

[**S139**] *Sur les rapports entre les quadrangles et quadrilateres complets*, Bul. int. 28 (1927), 264 – 276 [překlad článku S138]

[**S140**] *K jedné větě Petrově o racionálních křivkách třetího řádu*, ČPMF 58 (1929), 104 – 111 [k článku připojeno resumé]

[**S141**] *Zur Darstellung sphärischer Dreiecke durch Kreisvierecke*, Zprávy (1929), č. II, 1 – 14

[**S142**] *Einige Bemerkungen zur Theorie der elementaren Konstruktionen*, Zprávy (1929), č. IX, 1 – 10

[**S143**] *Contribution a la théorie des propriétés focales des coniques et sur quelques protriétés corrélatives*, Rozp. 38 (1929), č. 22, 1 – 13

[**S144**] *K analytickému řešení zevšeobecněného problému Apolloniova*, Rozp. 39 (1929), č. 23, 1 – 26

[**S145**] *Contribution á la solutin analytique de probleme d´Apollonius généralisé*, Bul. int. 30 (1929), 316 – 345 [překlad článku S144]

[**S146**] *Poznámka k základním vztahům souřadnic projektivních*, ČPMF 59 (1930), 87 – 93 [k článku připojeno resumé]

[**S147**] *Zevšeobecnění promítání cyklografického a stereografického*, Rozp. 40 (1930), č. 15, 1 – 37

[**S148**] *Sur une généralisation de la projection cyclographique et stéréographique*, Bul. int. 31 (1930), 180 – 220 [překlad článku S147]

[**S-rec149**] *Čeněk Nevečeřel: Příspěvek k rovnoběžnému osvětlení rotačních ploch 2. stupně v centrálné projekci*, ČPMF 33 (1904), Věstník literární, 527 – 528

Příloha 2 – Stručný obsah původních vědeckých prací Jana Sobotky

A. Deskriptivní geometrie

V pracích [**S3**], [**S4**], [**S6**] Sobotka studoval šroubové plochy. Ústředním tématem jsou konstrukce spjaté s opsanými rozvinutelnými plochami, zejména příslušnými dotykovými křivkami. Zaměřil se i na konkrétní typy opsaných rozvinutelných ploch – jsou jimi v [**S4**] např. kuželová a v [**S6**] válcová plocha. Ukazuje se souvislost studovaného problému s konstrukcí obrysu šroubové plochy (řešeno v [**S3**]), případně rovnoběžným ([**S6**]) nebo středovým osvětlením. Šroubovým plochám je věnován i článek [**S2**], který zmíníme i v souvislosti s pracemi z diferenciální geometrie. V centru pozornosti jsou problémy spojené s křivostí šroubové plochy, výsledky mj. aplikuje v konstrukcích spjatých s opsanými rozvinutelnými plochami. K této skupině prací můžeme přiřadit i statě [**S7**] a [**S115**]. V první z nich hledal konstrukci dotykové křivky kvadriky a rozvinutelné plochy. Ve druhé, která vznikla s odstupem více než 30 let, konstruoval tečny meze vlastního stínu přímkové plochy.

Již na těchto pracích si můžeme všimnout jistých rysů, které jsou charakteristické i pro další Sobotkovy vědecké práce. Sobotka navázal na práce geometrů[68], kteří řešili podobný problém před ním. Přitom nalezl konstrukce, které jsou jednodušší než u jeho předchůdců, odvodil jinak jejich konstrukce nebo řešil problém obecněji (např. v [**S7**] uvažoval středové i nestředové kvadriky). Konečně pro odvození některých svých konstruktivních výsledků občas užil výpočtu.

Článkem [**S5**] začal Sobotkův zájem o sestrojení oskulačního hyperboloidu přímkové plochy, který se jí dotýká podél její povrchové přímky. S odstupem deseti, resp. čtrnácti let se k problematice vrátil v [**S29**], resp. [**S38**]. Přitom navázal na Ed. Weyra a J. Šolína. Východiskem úvodní práce je následující věta dokázaná J. Šolínem:

> „*Jestliže se dvě zborcené kvadriky dotýkají podél společné přímky **p** a jestliže bodem **A** této přímky prochází rovina **α**, která obě plochy protíná v jednoduchých kuželosečkách, jež se v bodě **A** oskulují, pak obě kvadriky se v bodě **A** oskulují; bodem **A** prochází další přímka společná oběma kvadrikám,*“ ([18], str. 12).

[68] Např. u [**S4**] T. Schmid, u [**S6**] Burmester a T. Schmid, u [**S7**] W. Fiedler, Ch. Wiener, Burmester, Dunasme, Pelz,

Souhrnně můžeme říci, že práce jsou bohaté na výsledky, každá z nich přináší vždy další nové konstrukce i myšlenkové postupy, kterými k nim spěje. Problém řešil pro různé způsoby zadání přímkové plochy, kterou chceme oskulovat. Lze prohlásit, že se mu podařilo tuto oblast zpracovat takřka beze zbytku. Věnoval se i různým speciálním přímkovým plochám.

Souvislosti s touto problematikou můžeme nalézt i v dalších pracích. V [**S4**] nalezneme konstrukci oskulačního hyperboloidu v bodě zborcené šroubové plochy. Svých výsledků užil např. v práci [**S69**] (viz níže) nebo [**S115**].

Další skupinou vědeckých statí je ta, ve které se věnoval kosoúhlé axonometrii. Tou se Sobotka zabýval nejprve v letech 1900 až 1901 ([**S18**], [**S19**] a [**S20**]) a později v období 1923 až 1925 ([**S105**], [**S108**], [**S109**], [**S110**] a [**S118**]).

V [**S18**] odvodil konstrukce směru promítání a určení skutečné velikosti úsečky. Zajímavá je zvolená metoda. Sobotka vyšel z jisté relace, která byla uveřejněna v jedné učebnici jako součást řešení jisté ne zcela podstatné úlohy[69]. Z ní algebraickou cestou došel k řadě výsledků, které nakonec interpretoval tak, aby obdržel hledané konstrukce. Ústředním tématem [**S19**] jsou „*základní konstrukce v kosoúhlé axonometrii, které umožňují přechod k jistým způsobem přiřazené Mongeově projekci a naopak,*“ ([18], str. 37). Je zde mimo jiné řešena tato základní úloha. Jsou dány axonometrické obrazy shodných a navzájem kolmých úseček $\boldsymbol{O_kA_k}$, $\boldsymbol{O_kB_k}$, $\boldsymbol{O_kC_k}$ (tím je dán ovšem i osový kříž), máme „*sestrojit axonometrické obrazy z daných pravoúhlých průmětů v Mongeově projekci a naopak,*“ ([18], str. 37). Zde předložená dvě řešení můžeme najít např. v [24] jako první a druhou Sobotkovu konstrukci. V závěru práce [**S20**] Sobotka poprvé ukázal souvislost kosoúhlého promítání a komplexních čísel.

Ve druhém období věnovaném kosoúhlé axonometrii můžeme vysledovat Sobotkův zvýšený zájem o větu Pohlkeovu[70]. Ta tvrdí, že libovolné tři úsečky ***O'X'***, ***O'Y'***, ***O'Z'*** v rovině, kde nejvýše tři z bodů ***O'***, ***X'***, ***Y'***, ***Z'*** leží v jedné přímce, můžeme chápat jako rovnoběžné průměty tří navzájem kolmých shodných úseček ***OX***, ***OY***, ***OZ***. Více informací o historii této věty a o některých z jejích důkazů můžeme nalézt v [25]. Při řešeních základních úloh kosoúhlé axonometrie (např. určení směru promítání, stanovení skutečné velikosti

---

[69] „*Výchozím vztahem celé práce, k němuž se všechny úvahy neustále vracejí, je velmi elementární výsledek, který autor převzal z tehdy nedávno vydané učebnice Rohn-Papperitzovy. V této učebnici vyskytuje se podružně při řešení úlohy, zobrazit v Mongeově projekci krychli, jsou-li dány délky pravoúhlých průmětů 3 sousedních hran, relace ...,*“ ([18], str. 33), ... mezi délkou hrany krychle a vzdálenostmi tří vrcholů, které sousedí s dalším vrcholem krychle, od libovolné roviny procházející tímto čtvrtým vrcholem.

[70] K. Pohlke (1810 – 1876) – profesor deskriptivní geometrie na technické vysoké škole v Berlíně-Charlottenburgu.

úsečky) založených na této větě se ukazuje účelné sestrojit průmět kulové plochy se středem v počátku soustavy souřadnic (více viz např. [24]).

Sobotka jednak předložil další důkazy Pohlkeho věty ([**S105**], [**S108**] – zde jsou dokonce uvedeny čtyři), dále se věnoval zjednodušení konstrukcí založeným na této větě ([**S105**], [**S109**], okrajově též [**S112**] – viz níže). V práci [**S118**] řešil úlohu, kdy máme sestrojit v rovině body ***O***, ***X***, ***Y***, ***Z*** tak, aby délky úseček ***OX***, ***OY***, ***OZ*** byly v daném poměru[71] a tyto úsečky byly rovnoběžnými průměty navzájem kolmých shodných úseček ***(O)(X)***, ***(O)(Y)***, ***(O)(Z)*** dané délky *d*. Příslušná konstruktivní řešení odvodil analyticky. Z rámce vybočuje článek [**S110**], kde řešil některé úlohy (určení skutečné velikosti úhlu, nanesení úsečky dané délky na danou přímku, obrys rotačních ploch) v kosoúhlé axonometrii, přitom využil Mongeovu projekci přiřazenou k axonometrii tak, jak to učinil již v práci [**S19**].

Dále si všimněme poměrně různorodých prací, ve kterých se Sobotka věnoval různým konstruktivním úlohám zaměřeným na kvadriky. V [**S17**] řešil mimo jiné konstrukci os kvadratické plochy, je-li vyrýsována alespoň jedna její kuželosečka. Nezávisle na poloze kvadriky k průmětnám určuje roviny jejích kruhových řezů. V [**S32**] sestrojuje obrys průmětu kulové plochy ve středovém promítání bez ohledu na to, zda se jedná o elipsu, hyperbolu, nebo parabolu. V práci [**S70**] si všímal prostorové obdoby Steinerovy paraboly[72], kterou nazval Steinerův paraboloid. Poté, co vyšetřil některé jeho vlastnosti, ukázal jeho použitelnost v některých konstrukčních úlohách (např. řez plochy 2. stupně rovinou, určení os středové kvadriky aj.). V pojednáních [**S111**], [**S112**] se zabýval konstrukcí obrysu průmětu kvadriky v rovnoběžném promítání. V případě středových kvadrik využil v obou pracích průmětů sdružených poloměrů kvadratické plochy. V práci [**S112**] se navíc věnoval i nestředovým kvadrikám. Společným rysem obou prací je odvození hledané konstrukce pomocí metrických vztahů. V závěru [**S112**] Sobotka použil své výsledky pro určení obrysu průmětu kulové plochy. Toto řešení osobně považoval za nejjednodušší. Nabízí se zjevné uplatnění v kosoúhlé axonometrii.

---

[71] Řeší nejprve pro izometrii (tj. $|\boldsymbol{OX}|=|\boldsymbol{OY}|=|\boldsymbol{OZ}|$), poté pro dimetrii ($|\boldsymbol{OX}|=a$, $|\boldsymbol{OY}|=|\boldsymbol{OZ}|=b$) a nakonec pro trimetrii ($|\boldsymbol{OX}|=a$, $|\boldsymbol{OY}|=b$, $|\boldsymbol{OZ}|=c$).

[72] J. Steiner (1796 – 1863) – profesor geometrie na berlínské univerzitě. Steinerova parabola – pojem souvisí s následující větou. „*Tečna a normála kuželosečky v libovolném jejím bodě **P** a obě osy kuželosečky jsou tečnami paraboly, která se dotýká normály ve středu křivosti kuželosečky pro bod **P** a tečny v pólu normály* [vzhledem] *ke kuželosečce,*“ ([18], str. 130). Obecnější věta zní: „*Otáčí-li se v rovině kuželosečky přímka **p** kolem pevného bodu **P**, obalují kolmé polárně sdružené přímky (vůči jednotlivým polohám) parabolu ..., která se dotýká os kuželosečky i obou kolmých přímek, jdoucích bodem **P** a polárně sdružených,*“ ([18], str. 130). Při stanovení prostorové analogie můžeme příslušně modifikovat tuto obecnější větu.

Konečně tu máme skupinu prací, které není možné přiřadit k výše uvedeným. V [**S8**] se věnoval hyperoskulační kouli prostorové křivky 3. stupně (tj. kouli, která má s křivkou styk 3. řádu). Na tuto práci navázal v [**S10**], kde odvozuje konstrukci oskulační koule v bodě prostorové křivky, kterou následně aplikoval na křivky 3. stupně a 4. stupně 1. druhu. Sestrojoval též křivku 3. stupně, která má s prostorovou křivkou styk alespoň 3. řádu. V [**S12**] rozvinul zcela původní metodu pro určení rovinného řezu jistých rotačních ploch[73]. Plochu chápal jako obálku kulových ploch a příslušný rovinný řez je pak obálkou kružnic, v nichž rovina řezu protíná tyto kulové plochy. V práci [**S25**] se ukazuje Sobotkův zájem o otázku konfigurací[74], kterou sice nerozvíjel v žádném dalším článku, ale do své učebnice deskriptivní geometrie zařadil část věnovanou této oblasti.

V práci [**S68**] převedl Sobotka jistou konstruktivní úlohu[75] v prostoru užitím cyklografické projekce na rovinnou úlohu o cyklech[76], kterou řeší metodami jak algebraickými, tak ryze geometrickými. Posléze řeší podobnou úlohu o orientovaných sférách v prostoru. V tomto článku mě zaujala příbuznost řešeného problému s okruhem prací, kterých si všímám ve 2. části (Apolloniova úloha). To, že se Sobotka více zajímal o cyklografickou projekci a její užití při řešení úloh, můžeme dokumentovat i tím, že se jí věnuje i ve své učebnici deskriptivní geometrie. Můžeme vidět i jistou souvislost s jeho poslední prací [**S147**]. Zde Sobotka zobecnil cyklografickou[77] a stereografickou[78] projekci a následně ukázal použitelnost těchto zobecnění při řešení některých úloh (např. Apolloniovy úlohy v trojrozměrném prostoru). Ve stati [**S16**] řešil dvě úlohy, při jejichž řešení využil středového promítání kružnice. Jedna z úloh má jistou souvislost s vlastností stereografické

---

[73] *„... ačkoliv R. Mehmke ve svém příspěvku, ve kterém rozvíjí obecně tuto metodu, poznamenává, že nenašel v literatuře nic obdobného. Uvedený článek byl uveřejněn v Zeitschrift f. Math. u. Phys. až v roce 1901, tedy 5 let po uveřejnění Sobotkovy práce,*“ ([18], str. 26).

[74] *„... v klasické lit. o projektivní geometrii se názvu ... používá pro takovou množinu n bodů a m přímek projektivní roviny, kde každým bodem konfigurace prochází $\mu > 2$ konfiguračních přímek a na každé přímce konfigurace leží $\nu > 2$ bodů konfigurace. Typ konfigurace se obv. značí (n_ν, m_μ),*“ ([26]).

[75] Má se sestrojit rotační kuželová plocha s osou daného směru, která prochází danými čtyřmi body.

[76] K daným čtyřem cyklům sestrojte úměrným zvětšením poloměrů soustředné cykly tak, aby existoval cyklus, který se jich dotýká.

[77] Cyklografická projekce trojrozměrného prostoru do jisté roviny $\boldsymbol{\alpha}$ přiřazuje bodu $\boldsymbol{A}$ v trojrozměrném prostoru cyklus ležící v rovině $\boldsymbol{\alpha}$, jehož střed je pravoúhlým průmětem bodu $\boldsymbol{A}$ do roviny $\boldsymbol{\alpha}$ a jehož poloměr je v absolutní hodnotě roven vzdálenosti bodu $\boldsymbol{A}$ a roviny $\boldsymbol{\alpha}$. Body v témže poloprostoru (resp. opačných poloprostorech) s hraniční rovinou $\boldsymbol{\alpha}$ se promítají na souhlasně (rep. nesouhlasně) orientované cykly. Analogicky můžeme v zobecněné cyklografické projekci bodům čtyřrozměrného prostoru přiřadit orientované sféry v trojrozměrném prostoru.

[78] Uvažujme kulovou plochu $\boldsymbol{\kappa}$, rovinu $\boldsymbol{\alpha}$, která se jí dotýká v bodě $\boldsymbol{A}$, a bod $\boldsymbol{B}$ souměrně sdružený s bodem $\boldsymbol{A}$ podle středu plochy $\boldsymbol{\kappa}$. Stereografická projekce je středové promítání (o středu $\boldsymbol{B}$) ze sféry $\boldsymbol{\kappa}$ na rovinu $\boldsymbol{\alpha}$. Přitom platí, že obrazem kružnice je opět kružnice. Zobrazení inverzní k tomuto promítání přiřadí libovolné kružnici $\boldsymbol{k}$ v rovině $\boldsymbol{\alpha}$ kružnici $\boldsymbol{l}$ na kulové ploše $\boldsymbol{\kappa}$. Můžeme také kružnici $\boldsymbol{k}$ jednoznačně přiřadit jistou rovinu trojrozměrného prostoru, totiž tu, v níž leží kružnice $\boldsymbol{l}$. Analogicky Sobotka ukazuje, že je možné jakékoli sféře v trojrozměrném prostoru přiřadit jednoznačně jistou nadrovinu čtyřrozměrného prostoru.

projekce (obrazem kružnice je opět kružnice). Na závěr můžeme uvést pojednání [**S69**], kde vyšetřuje křivost plochy, která vznikne pohybem tečny dané válcové plochy (kolmé na její povrchové přímky) podél dané křivky. Při řešení užívá svých výsledků o oskulačních hyperboloidech přímkových ploch. V závěru nalezneme aplikaci v oblasti, které se věnoval ve svých dřívějších pracích – určuje dotykovou křivku opsané rozvinutelné plochy a rotační nebo šroubové plochy.

B. Kvadratické útvary

Všimněme si opět nejprve těch prací, které můžeme seskupit do tematicky příbuzných celků. Můžeme tak např. vysledovat zvýšený Sobotkův zájem o konstrukci středu křivosti, příp. oskulační kružnice v bodě regulární kuželosečky. Souhrnně můžeme říci, že v popředí jeho zájmu jsou především konstruktivní řešení této úlohy při jistém určení kuželosečky danými prvky. V souvislosti s prací [**S70**] jsme v poznámce 72 uvažovali tzv. Steinerovu parabolu (též Steiner-Pelzova p.) v kontextu příslušných vět. V [**S9**] na základě těchto vět např. odvodil pro kuželosečku danou třemi body a tečnou v dalším bodě ***P*** konstrukci středu křivosti v bodě ***P***. V [**S23**] na výsledky tohoto pojednání navázal tak, že je dualizoval a řešil potom např. úlohu, kdy pro kuželosečku danou třemi tečnami a další tečnou v bodě ***P*** konstruoval střed křivosti v bodě ***P***. Naprostá většina výsledků [**S9**] platí pouze pro středové kuželosečky. Oproti tomu v [**S23**] se zabýval nejen jimi, ale též parabolou. K oběma pracím se Sobotka vrátil v [**S33**], kdy výše zmiňované úlohy řešil nejprve analyticky, a poté odvozené výrazy interpretoval konstruktivně. Později se k tématu znovu vrátil v [**S87**] a [**S89**], kde řešil pokaždé jinak, ale stále syntetickou metodou, opět tytéž úlohy jako v [**S9**] a [**S23**] společně s dalšími (např. je-li kuželosečka dána polárním trojúhelníkem a tečnou v bodě ***P***)[79]. Konečně v práci [**S88**] z téhož roku se na tento problém díval z analytického hlediska a navázal přitom na [**S33**].

Do této skupiny můžeme zařadit ještě další tři pojednání, která s předchozími bezprostředně nesouvisejí. V [**S24**] pokračoval ve výsledcích Maclaurina a Mannheima[80] a

[79] V [**S89**] řeší též úlohu: Sestrojte osy kuželosečky, která je dána třemi body (resp. třemi tečnami) a středem křivosti v jednom z nich (resp. příslušným k jedné z tečen).

[80] A. Mannheim (1831 – 1906) – francouzský geometr. Značnou část života působil jako důstojník francouzské armády (do roku 1890). Od roku 1864 do roku 1901 byl profesorem deskriptivní geometrie na pařížské polytechnice. Znám též jako autor logaritmického pravítka tzv. Mannheimova typu, které se stalo jednotnou výbavou v inženýrských jednotkách francouzské armády (též i v USA, Japonsku, Velké Británii, aj.). Je též

hledal konstrukci středů křivosti evoluty, resp. druhé evoluty kuželosečky. V [**S103**] kombinací analytického a syntetického přístupu určil kuželosečku, která má v bodě ***P*** dotyk alespoň čtvrtého řádu s křivkou ***p***, jsou-li v tomto bodě dány středy křivosti křivky ***p*** i její první i druhé evoluty. Zjednodušil zde řešení, které před ním odvodil Mannheim. V práci [**S83**] studuje více témat, kromě problému normál (viz níže) si všímal opět určení oskulační kružnice v bodě středové kuželosečky. Dokázal zde též, že jistá věta zformulovaná Steinerem pro elipsu[81] platí skutečně pouze pro ni.

Další oblastí, kterou se Sobotka více zabýval, byl tzv. problém normál kuželosečky. Ten spočívá v řešení úlohy, kdy máme vést z daného bodu normály dané kuželosečky. V centru zájmu je snaha učit polohu bodů, pro které je úloha řešitelná pomocí kružítka a pravítka. V úvodní práci [**S27**] předložil jednak nové důkazy výsledků předchůdců – Pelze (pro elipsu)[82], Lauermanna (pro hyperbolu)[83] a Martense[84]. Přitom využil opět Steinerovu parabolu (viz výše). V práci můžeme vysledovat i jeho snahu o to, aby předložil co nejjednodušší konstrukce. V [**S26**] dále zobecnil výsledky [**S27**]. Ukázal, že body, pro něž je problém normál řešitelný euklidovskou konstrukcí, leží na jisté kuželosečce, jejíž degenerací může vzniknou dvojice přímek uvažovaná v [**S27**].

Jiné řešení problému je založeno na tzv. Joachimsthalově větě: „*Kolmice spuštěná z vrcholu **A** centrální kuželosečky **s** na normály z libovolného bodu **P** k ní vedené, protínají kuželosečku **s** ve čtyřech bodech, které leží na kružnici, tak zvané Joachimsthalově kružnici příslušné bodu **P**,*“ ([18], str. 92). Práce [**S50**] je věnována vlastnostem středu této kružnice (označíme ho $\boldsymbol{P}_0$) a souvisejícím konstruktivním důsledkům. Sobotka navázal na výsledky K. Pelze pro elipsu a rozšířil je dále na hyperbolu. Metodicky je práce založena na analytickém odvození jistých vztahů, které vedou k jednoduchým konstrukcím. Je z nich možné též určit, kdy je problém řešitelný pomocí pravítka a kružítka. Zabýval se i studiem křivek, které opisuje bod $\boldsymbol{P}_0$, pohybuje-li se bod ***P*** po některých speciálních křivkách. Odlišný přístup přináší stať [**S51**], kde hledal řešení problému normál pro libovolnou středovou kuželosečku tak, že ho přenesl na jinou pevně danou kuželosečku. Stručně se dotkl i množin bodů, pro které je problém euklidovsky řešitelný.

---

zajímavé, že souvislosti s jeho vědeckou činností nalezneme v pracích Jana Sobotky relativně často (např. [**S13**], [**S24**], [**S28**], [**S31**], [**S44**], [**S84**], [**S103**]).

[81] „*Každým bodem **D** elipsy procházejí tři kružnice, které ji oskulují v jiných třech bodech **A**, **B**, **C**, přičemž body **A**, **B**, **C**, **D** leží na kružnici,*“ ([18], str. 143). Věta byla zveřejněna roku 1845 bez důkazu.

[82] „*... tento problém je kvadratický pro body těch dvou průměrů ... elipsy, které jsou kolmé na dva sdružené průměry ... této elipsy, svírající s osami elipsy stejné úhly,*“ ([18], str. 56).

[83] „*Lauerman se později zmínil o přímkách s podobnou vlastností pro hyperbolu,*“ ([18], str. 56).

[84] Ten dokázal vlastnosti příslušné dvojice přímek analyticky.

Jak jsme uvedli výše, řešil v [**S83**] i problém normál. Zobecnil zde Joachimsthalovu větu pro kolmice z libovolného bodu středové kuželosečky (nejen vrcholu)[85]. Vyšetřoval opět, kdy je úloha řešitelná pomocí kružítka a pravítka nebo kdy je problém lineární a kubický (tj. vede na řešení jistých lineárních a kubických rovnic). Často tak jiným způsobem došel k výsledkům někoho jiného. V [**S116**] došel z jisté věty zformulované Joachimsthalem (jiné než uvedené výše) k výsledku, který je možný považovat za zobecnění Joachimsthalovy věty (jiné než v poznámce 85). Zajímavé je, že větu přenáší i na nestředovou kuželosečku. Odtud ukazuje platnost výše zmíněné Joachimsthalovy věty.

Předmětem většího zájmu na poli kvadratických útvarů byly u Sobotky i jejich konstrukce z imaginárních prvků. Po stránce metodické využil zejména postupů projektivní geometrie, jednotlivé práce se liší především způsobem určení kuželosečky (v [**S37**] pomocí dvojice imaginárně sdružených bodů a tří reálných bodů nebo dvou dvojic imaginárně sdružených bodů a jednoho reálného, v [**S76**] konstrukce rovnoosé hyperboly ze čtyř imaginárních bodů nebo tečen, v [**S80**] pomocí reálného bodu a dvou dvojic imaginárně sdružených bodů, v [**S114**] pomocí dvou reálných (příp. imaginárně sdružených) tečen, reálného bodu a dvou imaginárně sdružených bodů). Imaginárně sdružené elementy určil většinou jako samodružné elementy eliptických involucí. V [**S80**] chápal dvojice imaginárních bodů jako průsečíky dvou kuželoseček (reálných nebo imaginárních). S problematikou se můžeme také setkat v práci [**S119**], kde kromě konstrukcí prostorové křivky třetího (resp. čtvrtého) stupně ze tří (resp. čtyř) párů imaginárně sdružených bodů sestrojoval i kvadriku určenou čtyřmi páry imaginárně sdružených bodů a jedním reálným. V [**S142**] se okrajově zabýval určením imaginárních průsečíků dvou kružnic jako samodružných bodů nějaké eliptické involuce.

Z dalších prací věnovaných kuželosečkám uveďme [**S113**]. V ní si všímal možností užití parametrických rovnic středových i nestředových kuželoseček. Konkrétně odvodil jednoduchou podmínku pro hodnoty parametru příslušných čtyřem bodům na kuželosečce tak, aby ležely na jediné kružnici. Dokázal tak mj. věty jiných geometrů, kterých si všímal i v jiných svých pojednáních[86]. V pracích [**S132**] a [**S133**] studoval množinu polár daného bodu,

[85] „*Spustíme-li z libovolného bodu **S** centrální kuželosečky kolmice na normály vedené k ní z libovolného bodu, pak průsečíky těchto kolmic s danou kuželosečkou se promítají v jistém směru **l** na danou kuželosečku do čtyř bodů kružnice (**l** je směr antiparalelní vzhledem k osám této kuželosečky se spojnicí jejího vrcholu s bodem **S**),*“ ([18], str. 145).

[86] Např. Steinerova věta (viz poznámka 81) - nalezneme ji v [**S83**], Joachimsthalova věta – viz výše v souvislosti s [**S50**].

případně množinu pólů jisté přímky, vzhledem k určité soustavě kuželoseček[87]. V první z prací užil výhradně metod syntetické projektivní geometrie, ve druhé uplatnil mj. na problémy studované i v [**S132**] metody analytické projektivní geometrie, kdy prohloubil tam získané výsledky. V [**S143**] studoval samostatně dvě rovinné křivky 3. stupně, které vzniknou jako množiny bodů s jistými vlastnostmi vzhledem k soustavě konfokálních kuželoseček, resp. k rovnoosé hyperbole. V [**S102**] se zabýval trojúhelníky vepsanými rovnoosé hyperbole a opsanými kružnici, jež má svůj střed na této hyperbole a prochází středem hyperboly[88]. V pojednání [**S117**] předložil řadu konstrukcí pro určení průsečíků dvou kuželoseček. Aby byly konstrukce proveditelné pomocí pravítka a kružítka, užil přitom další dané kuželosečky.

Kvadrikám v trojrozměrném prostoru se Sobotka také věnoval, ale v mnohem menším počtu prací než v případě kuželoseček. Jedním z předmětů zájmu, kterému věnoval celou sérii navazujících pojednání [**S39**], [**S40**], [**S42**] a [**S43**] (v úhrnném rozsahu 93 stran), byla problematika vytváření kvadrik a její souvislost s Ivoryho větou. V [**S28**] a [**S31**] pojednal o prostorových čtyřúhelnících opsaných kvadrice[89], přitom podle [18] zjednodušil teorii těchto čtyřúhelníků oproti Mannheimovi, který uveřejnil své výsledky roku 1897. V [**S28**] výsledky aplikoval na konstrukci kulové plochy vepsané prostorovému čtyřúhelníku.

V [**S67**] a výrazně stručněji v [**S67-JA**] definoval pojem mocnosti bodu ke ploše 2. stupně[90] a hledal jeho geometrický význam jak pro středové regulární kvadriky, tak pro paraboloidy. Ukázal na souvislost s problémem normál u kvadrik. V [**S79**] ukázal konstrukci kvadriky z devíti bodů. Přitom určil výhradně užitím pravítka kuželosečku na uvažované kvadrice, která leží v rovině učené třemi z daných 9 bodů. Konečně v [**S21**] řešil v podstatě pouze několik úloh na sestrojení kuželoseček využitím prostorových úvah.

C. Diferenciální geometrie

[87] Např. soustava kuželoseček: a) dotýkajících se daných dvou kuželoseček ([**S132**]), b) dotýkajících se dané přímky a kuželosečky a procházejících daných bodem ([**S132**]), c) opsaných danému trojúhelníku a dotýkajících se dané přímky ([**S132**] i [**S133**]), d) vepsaných danému trojúhelníku a procházejících daných bodem ([**S132**] i [**S133**]), e) dotýkajících se kubiky ve třech bodech a procházejících daným bodem, resp. dotýkajících se dané přímky ([**S133**]).

[88] Problém také různě modifikoval, avšak cílem bylo ukázat, jak tyto výsledky můžeme použít pro jiný důkaz Feuerbachovy věty (viz níže u prací z elementární geometrie).

[89] Sobotka označuje čtyřúhelníkem 1. druhu (resp. 2. druhu) takový, jehož dotykové body leží (resp. neleží) v jedné rovině.

[90] „*Celá práce navazuje na práci J. Neuberga: „Théorie des indices des points des troites et des plans par rapport a une surface du 2^{me} ordre.“ (Nouv. Annales Mat., 1870),*“ ([18], str. 125), tj. s odstupem více než 40 let.

V oblasti diferenciální geometrie křivek věnoval Sobotka zvýšenou pozornost konstrukcím středů křivosti. Viděli jsme již, že se tento zájem projevil i u kuželoseček větším počtem prací s podobným zaměřením. V pojednáních [**S14**] a [**S15**] se zaměřil na středy křivosti integrální křivky dané křivky vyjádřené v lineárních i polárních souřadnicích. Zatímco v první z nich nalezneme odvození spíše obecných konstrukcí, ve druhé práci aplikoval výsledky *„na konkrétní případy křivek, a to paraboly a hyperboly vyšších stupňů, na exponenciální křivku a řetězovku, na parabolické a hyperbolické spirály vyšších řádů a na konchoidy,*“ ([18], str. 29).

V [**S84**] se zabýval úlohou, jak využít střed křivosti v bodě jisté křivky k určení středu křivosti jejího obrazu ve středové kolineaci. Předložil řadu konstrukcí (včetně speciálních případů). Nevyužil pouze metod diferenciální geometrie, ale i syntetické projektivní geometrie, někde konstrukce zjednodušil tak, že si pomohl algebraickým výpočtem. V [**S85**] se zabývá podobným tématem (vztahem mezi poloměry křivosti křivky a jejího obrazu ve středové kolineaci), avšak postupoval ryze synteticky. Cílem je kromě důkazů příslušných vět opět odvodit velmi jednoduché konstrukce. V obou pracích také podal jiné důkazy některých konstrukcí dalších geometrů. V [**S86**] hledal střed křivosti nejprve křivky třetího stupně a posléze i obecné algebraické křivky. Jednou z metod, kterou nalezneme ve všech třech pracích, je nahrazení studované křivky oskulační kuželosečkou, případně kružnicí[91]. Vynikne nám tak ještě více souvislost s podobnými pojednáními o kuželosečkách.

I v případě diferenciální geometrie ploch jsou v popředí Sobotkova zájmu opět konstrukce středů křivosti. V již zmiňované práci [**S2**] (viz A. Deskriptivní geometrie) určoval indikatrix a středy křivosti v bodě šroubové plochy. V [**S44**] užil jisté příbuznosti mezi středy křivosti normálních řezů plochy v daném bodě a svazkem příslušných rovin řezu[92] pro určení středů křivosti normálového řezu pro různé speciální případy daných prvků (např. jsou dány středy křivosti tří normálových řezů). V [**S90**] autor hledal konstrukci 2. středu křivosti libovolného normálového řezu (tj. příslušného středu křivosti evoluty tohoto řezu) v bodě plochy, jsou-li dány 1. a 2. středy křivosti čtyř normálových řezů plochy v témže bodě. Posléze přešel i k libovolným rovinným řezům. Na práci přímo navazuje [**S91**], kde řešil problém určení 2. středu křivosti rovinného řezu na ploše. Přitom synteticky i analyticky

[91] V [**S85**] např. *„danou křivku nahradí oskulační kružnicí, která se promítá do kuželosečky; střed křivosti hledá autor vtipně pomocí Steiner-Pelzovy paraboly,*“ ([18], str. 152).
[92] Tu poprvé použil Emil Weyr v *„Beiträge zur Kurvenlehre*“.

odvodil a následně vyžil vlastností kvadriky, která oskuluje danou plochu tak, aby ji rovina řezu protnula v kuželosečce, jež má s příslušným řezem na ploše dotyk alespoň 3. řádu. Této kvadriky využil i v pojednání [**S100**], kde „*v podstatě algebraickou cestou odvozuje (s užitím projektivní geometrie kuželoseček) jednoduché geometrické konstrukce týkající se druhé indikatrix plochy v daném bodě a jejího vztahu k druhým středům křivosti rovinných řezů na ploše v tomto bodě,*“ ([18], str. 169)[93]. Článek [**S99**] je pouze stručným výtahem [**S91**] pro mezinárodní kongres matematiků ve Štrasburku roku 1920.

Z tohoto poměrně jednotného zaměření Sobotkových prací z diferenciální geometrie vybočuje pouze práce [**S66**]. Zde se obíral „*konstrukcí rozvinutelné plochy, která vznikne jako obálka roviny pevně spjaté s průvodním trojhranem křivky,*“ ([**S66**], str. 128). Vidíme zde jistou metodickou spřízněnost s výše uvedenými pracemi. Uvažovanou křivku totiž v okolí daného bodu nahradil jistou šroubovicí, potom mu stačilo zabývat se rovinou fixovanou na průvodní trojhran této šroubovice.

D. Elementární geometrie

Podle B. Bydžovského byly právě úlohy z elementární geometrie tím „*vlastním oborem, který byl Sobotkovým zálibám a sklonům nejblíže. K tomuto úsudku – který však zcela otevřeně vydávám jen za svůj osobní dojem – mne vede jednak péče, s kterou propracovával právě práce tohoto oboru se týkající, jednak – a hlavně – celý ráz jeho prací z jiných oborů: péče o geometrický detail, péče o jemné podrobnosti konstrukce,*“ ([17], str. 27 – 28). Osobně musím přiznat, že mne asi nejvíce zaujaly právě jeho práce z tohoto okruhu, snad právě proto, že je mi z oblastí geometrie nejbližší právě elementární geometrie a řešení konstruktivních geometrických úloh. To byl též důvod, proč jsem se více zaměřil na jednu skupinu prací z této oblasti. Jedná se o pojednání [**S46**], [**S47**], [**S48**], [**S49**] a [**S144**] věnovaná Apolloniově úloze a úlohám příbuzným.

Nalezneme zde též práce věnované extremálním úlohám. V [**S57**] se inspiroval úlohou nalézt pro daný trojúhelník vepsaný trojúhelník s minimálním obvodem (jeho vrcholy jsou patami výšek daného trojúhelníku). Zde řešil elementárním způsobem (rozvinutím do sítě) analogickou úlohu pro prostor. Je dán osmistěn, jehož stěny tvoří shodné trojúhelníky, ten

[93] Odvozuje zde např. velmi jednoduchý vztah mezi délkou ρ průvodiče $\boldsymbol{PV}$ bodu $\boldsymbol{V}$ na 2. indikatrix v bodě $\boldsymbol{P}$ a poloměrem 1. (resp. 2.) křivosti r (resp. R) normálového řezu rovinou vedenou $\boldsymbol{PV}$: $\rho = 3r^2 / R$.

protneme mezi rovnoběžnými stěnami rovinou tak, aby řezem byl šestiúhelník. Mezi těmi s minimálním obvodem hledá ten s maximálním obsahem. Posléze úlohu zobecnil na libovolný středově souměrný osmistěn.

Pro další dvě pojednání bylo inspirací dílo R. Sturma „*Maxima und Minima in der elementaren Geometrie*“ (1910). V [**S58**] zobecnil Sturmovy věty o trojúhelníku s největším (resp. nejmenším) obsahem opsaném (resp. vepsaném) rovnostrannému trojúhelníku na libovolný trojúhelník. Zaměřil se na trojúhelník opsaný (resp. vepsaný) danému trojúhelníku, který je podobný s daným druhým trojúhelníkem[94]. Úvahy doplnil příslušnými konstrukcemi. V [**S59**] zobecnil mimo jiné větu, kterou Sturm dokázal pro konvexní čtyřúhelníky i na čtyřúhelníky nekonvexní: „*Mají-li konkávní čtyřstrany stejné úhly v témž pořádku a stejný obvod, pak ten, jemuž lze vepsati kružnici tak, že jeho strany leží na čtyřech tečnách této kružnice, je z nich nejmenší,*“ ([18], str. 114 – 115).

Konečně v [**S60**] vyšetřoval, které z *n*-úhelníků vepsaných do daného *n*-úhelníku mají minimální obvod, mezi nimi pak hledal ten, který má extrémní obsah. V závěru výsledky přenesl na tětivový čtyřúhelník[95].

Dále můžeme uvést práce vztahující se k tzv. Feuerbachově větě, která tvrdí: „*Kružnice devíti bodů libovolného trojúhelníka se dotýká kružnice trojúhelníku vepsané i všech tří kružnic připsaných.*“ V pojednání [**S77**] nejprve tuto větu dokazuje pomocí Caseyovy věty (viz podkapitola 2.1.3, spec. vztah (2.1.7)). Následně vlastnosti kružnice devíti bodů (též nazývané Feuerbachova kružnice) trojúhelníka zobecňuje a zavádí tzv. Feuerbachovu kuželosečku. „*Dvěma body v rovině procházejí čtyři kuželosečky, které se dotýkají* [přímek, v nichž leží strany] *daného trojúhelníka. Těmito dvěma body lze vést pátou kuželoseček, která se všech čtyř předchozích dotýká. Tato kuželosečka se nazývá kuželosečka Feuerbachova,*“ ([18], str. 135). Studoval i další vlastnosti Feurbachovy kuželosečky.

V [**S101**] předložil jednak dva důkazy Feuerbachovy věty (ryze syntetický[96] a analytický), jednak ukazuje na jiné úloze souvislost s touto větou. Uvažoval středovou

[94] „*Z trojúhelníků opsaných danému Δ**ABC**, které jsou podobny druhému Δ jest ten největší, pro který kolmice ke stranám v bodech **A**, **B**, **C** sestrojené se protínají v jednom bodě. Ze všech trojúhelníků danému Δ**A'B'C'** vepsaných, které jsou podobny druhému danému trojúhelníku, jest ten Δ**ABC** nejmenší, pro který kolmice sestrojené ve vrcholech **A**, **B**, **C** ke stranám Δ **A'B'C'** se protínají v jednom bodě,*“ ([18], str. 103).
[95] „*Mezi všemi čtyřúhelníky, které lze tětivovému čtyřúhelníku vepsat a pro něž algebraický součet stran je minimální, má tečnový čtyřúhelník extrémní obsah,*“ ([18], str. 109).
[96] Zvolený postup alespoň naznačím, přijde mi zajímavý. Kružnice připsané chápeme jako souhlasně orientované cykly, kružnici vepsanou orientujeme opačně. Následně uvažujeme body v prostoru, jejichž cyklografickými průměty jsou tyto čtyři cykly, včetně čtyř kuželů určených těmito body a příslušnými cykly. Pomocí těchto

kuželosečku o ohniscích ***E*** a ***F*** a délce hlavní poloosy *a*. Ukázal, že všechny trojúhelníky opsané této kuželosečce a vepsané kružnici o středu ***E*** a poloměru 2*a* mají v bodě ***F*** průsečík výšek. Všechny vepsané a připsané kružnice těchto trojúhelníků se dotýkají vrcholové kružnice dané kuželosečky. Odkaz na Feuerbachovu větu můžeme nalézt i v jiných dvou pracích [**S102**] (viz oblast věnovaná kuželosečkám) a [**S130**] (viz níže E. Ostatní práce).

Na závěr si všimněme ještě dalších prací. V [**S13**] vyšel z problému pocházejícího od Mannheima. Ten se věnoval množině bodů, které mají od dvou křivek stejné vzdálenosti měřené po tečně. Sobotka úlohu zobecnil na množinu bodů s konstantním poměrem těchto vzdáleností. Problém také specializoval na dvě kružnice. Konečně řešil další příbuzné úlohy. Zaujala mě následující úloha, ve které: „*... vyšetřuje množinu kružnic, které mají s třemi danými kružnicemi ... společné tečny, jejichž poměr délek ... je dán, a ukazuje úzkou souvislost tohoto problému se známým problémem Apolloniovým,*“ ([18], str. 24). Pojednání [**S141**] se týká konstrukcí sférických trojúhelníků z daných prvků. Sobotka k tomu odvodil určité vztahy mezi stranami (resp. úhly) sférického trojúhelníka a úhlopříčkami jistého tětivového čtyřúhelníka. V [**S142**] předložil několik postřehů k teorii elementárních konstrukcí. Zpřesnil některé konstrukce související s tzv. Mascheroniho konstrukcemi[97]. Ukázal snadné určení eliptické involuce na přímce, jejíž samodružné body jsou imaginárními průsečíky této přímky a kružnice. Konečně zpřesňuje, případně zjednodušuje, některé Steinerovy konstrukce[98].

E. Ostatní práce

Všimněme si nejprve vůbec první Sobotkovy práce [**S1**], kterou napsal ještě během svých studií a uveřejnil ji o dva roky později roku 1887. V ní předložil nový důkaz (užívající metod elementární geometrie) jisté věty[99], kterou nalezneme v „*Základech vyšší geometrie*“ bratří Weyrů. Poté ukázal, jak je možné větu dokázat na základě obecnější věty[100], kterou také

kuželů nalezneme jistý bod v prostoru, o němž ukážeme, že jeho cyklografickým průmětem je orientovaná kružnice devíti bodů.

[97] Italský geometr Mascheroni jako první ukázal (1797), že každou euklidovskou konstrukci je možné provést pouze užitím kružítka.

[98] J. V. Poncelet ukázal (1822), že libovolnou euklidovskou konstrukci je možné provést pomocí pravítka a jediné pevné kružnice a jejího středu. J. Steiner tuto skutečnost dokázal elegantněji roku 1833.

[99] „*Vedeme-li z libovolného bodu kruhu opsaného jistému trojúhelníku k stranám kosé přímky o témž sklonu, v témž směru rotace, protínají nám ony přímky řečené strany v bodech téže přímky,*“ ([27], str. 231).

[100] „*Spojíme-li libovolný bod kuželosečky opsané jistému trojúhelníku s průměty vrcholů jeho na řečenou kuželosečku, protínají spojnice ty příslušným vrcholům protilehlé strany v bodech téže přímky,*“ ([27], str. 232 – 233).

dokázal. Z tohoto tvrzení Sobotka odvodil další věty (i duální) a ukázal, že z nich plynou věta Pascalova a věta Brianchonova. Již tato první práce má řadu společných rysů, které nalezneme v jeho dalších pojednání. Předně si můžeme všimnout, že Sobotka s oblibou vycházel s problému, který již před ním někdo zformuloval. K problému přidával vlastní řešení a dále ho rozvíjel (např. ho zobecnil nebo se jím nechal inspirovat při formulaci jiného problému, příp. úlohy). Konečně ukazoval souvislost s jinými dalšími úlohami, příp. řešeními téhož u jiných autorů.

V pojednání [**S11**] se zabýval převody některých rovinných nebo prostorových útvarů na jiné (např. zobecněná věta Pythagorova[101], určení rovnoběžnostěnu, který má danou výšku a podstavu v dané rovině a jehož objem je součtem objemů daných n rovnoběžnostěnů). V [**S130**] vyšel z jisté věty o kružnicích na kulové ploše, které se dotýkají jejích tří hlavních kružnic. Větu zobecnil pro kvadriku. Pomocí průsečíků této plochy a tří přímek (neležících v jedné rovině) vedených z jednoho bodu určil jisté dvě čtveřice rovin. Pro obě ukázal, že na kvadrice leží kuželosečka (obecně různá pro obě skupiny), která se dotýká čtveřice kuželoseček, v nichž protínají uvažované roviny kvadratickou plochu. Předložil obdobnou větu o dvou čtveřicích opsaných kuželových ploch kvadriky. Každé z nich se dotýká pátá opsaná kuželová plocha.

Do okruhu můžeme zařadit i práce, v nichž Sobotka pojednal o grafických metodách řešení diferenciálních nebo algebraických rovnic. V pojednání [**S22**] řešil diferenciální rovnice tvaru $y' = \dfrac{Q - Py}{M + Ly}$, kde P, Q, L a M jsou funkce proměnné x. Určuje graf partikulárního řešení procházejícího bodem $[x_0, y_0]$. Podle [18] přitom užívá skutečnosti, že tečny grafů partikulárních řešení v bodech na přímce rovnoběžné s osou y obalují jistou parabolu, kterou je možné určit pomocí funkcí P, Q, L a M. Zaměřil se také na rovnici $y' + Py = Q$ včetně souvislosti s řešením rovnice $y' + Py = 0$. V práci [**S34**] (příp. [**S35**], jehož obsahem je zhruba první polovina [**S34**]) řešil algebraické rovnice tvaru $z^2 + pz + q = 0$, $z^3 + pz + q = 0$ a $z^4 + pz^2 + qz + s = 0$. Pro první dva typy rovnic využil metodu, která není původní[102]. Zaměřil se ale na co nejjednodušší konstrukci kořenů rovnice. Pro bikvadratickou

[101] Nad stranami ***AB*** a ***BC*** libovolného trojúhelníka ***ABC*** sestrojíme rovnoběžníky ***ABDE*** a ***BCFG***. Označíme ***H*** průsečík přímek ***DE*** a ***FG***. Na přímce ***DE***, resp. ***FG***, učíme bod ***K***, resp. ***L***, tak, aby přímka ***AK***, resp. ***CL***, byla rovnoběžná s ***BH***. Potom je obsah rovnoběžníka ***ACLK*** součtem obsahů rovnoběžníků ***ABDE*** a ***BCFG***.

[102] Využijeme plochu ***F***, která má ve zvolené kartézské soustavě souřadnic rovnici: $z^m + xz^n + y = 0$. „*Každé dvojici x = p a y = q odpovídá v rovině* ***xy*** *bod a kolmice v něm na rovinu* ***xy*** *vztyčená protne plochu* ***F*** *v bodech jejichž z – ové souřadnice jsou rovny kořenům rovnice ... Plochu* ***F*** *zobrazíme ortogonálním průmětem jejích isoplet* [řezy plochy ***F*** rovinami rovnoběžnými s rovinou ***xy***] *na rovinu* ***xy****, v níž provádíme celou konstrukci. Průměty isoplet jsou přímky, jejichž rovnice dostaneme dosazením z = konst. do rovnice plochy* ***F****. Soustava*

rovnici uvedl vlastní původní řešení. Věnoval se i určení imaginárních kořenů. V [**S45**] řešil grafickými metodami rovnici $a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$. Výchozí idea řešení není původní, zaměřil se však opět na zjednodušení konstrukcí.

V [**S146**] se věnoval zavedení nehomogenních projektivních souřadnic bodu, příp. roviny, v trojrozměrném prostoru. Postupoval přitom analogicky ke způsobu, kterým T. Vahlen zavedl názorné nehomogenní souřadnice bodu a přímky v rovině[103]. Definoval též homogenní souřadnice pomocí nehomogenních. Konečně stanovil podmínku, kdy bod o jistých nehomogenních souřadnicích leží v rovině určené jejími nehomogenními souřadnicemi.

V [**S104**] odvodil užitím vlastností prostorové kubiky věty pro úplné čtyřrohy a čtyřstrany (některé z nich již dříve dokázané jinak jiným autorem). O dalších pracích se zmíním pouze výčtem, přitom vycházím pouze z názvů prací. V [**S129**] se věnoval bikvadratickým involucím a v [**S138**] vzájemným vztahům úplných čtyřrohů a čtyřstranů. V [**S104**] studoval tetraedrální komplexy. V pojednání [**S140**] „*dokazuje autor prostředky syntetické geometrie vlastnosti křivky třetího stupně s uzlovým bodem, které svého času dokázal prof. K. Petr analyticky,*“ ([18], str. 232).

*těchto přímek obaluje jistou křivku **h** ... Když nyní z bodu **R** o souřadnicích x = p, y = q vedeme tečny ke křivce **h**, pak jim příslušné hodnoty parametru z jsou hledané kořeny,*“ ([18], str. 66).

[103] Vahlen, T., *Konstruktionen und Approximationen*, Leipzig 1911. „*Vyložíme stručně myšlenku Vahlenovu. Základní trojúhelník souřadnicový buď **Y**, **X**, **O**, jednotkový bod **E**, průměty bodu **M** o souřadnicích x, y z bodů **Y**, **X** ... na protější strany, t. j. **XO**, **YO** ... buďte po řadě M_1, M_2 ... a podobně E_1, E_2 ... průměty bodu **E**. Potom klademe x = (XOE_1M_1), y = (XOE_2M_2),*“ ([18], str. 244). Souřadnice přímky určíme podobně pomocí jejích průsečíků s přímkami ***OX*** a ***OY***.