

# Michal Ketner, *Dělitelnost v okruzích*

(V. Švejdar, posudek vedoucího na bakalářskou práci, srpen 2022)

Cílem práce bylo vzít v úvahu různé podmínky pro relaci dělitelnosti vyskytující se v literatuře, vysvětlit vztahy mezi nimi, a také podívat se na ně z logického hlediska, tj. určit, které se dají považovat za dodatečné axiomy teorie okruhů chápané jako axiomatická teorie. Dělitelnost je častou součástí kursů a učebnic algebry. Spíš než zpřístupnit čtenáři málo známé či dokonce nové poznatky šlo o to, napsat přehledné pojednání zajímavé pro (řekněme studenty) logiky.

Práce má mnoho nedostatků. Fakt, že asociativní a komutativní operace má nejvýše jeden neutrální prvek, a že má-li jej, pak pro každý prvek existuje nejvýše jeden prvek k němu inverzní, je celkem známý. Důkazy těchto tvrzení by šlo zkrátit nebo i vypustit a rozhodně nebylo nutné totéž dokazovat dvakrát, jednou pro sčítání a jednou pro násobení. Je také celkem jasné, že když každá dvouprvková množina má infimum, pak i každá konečná množina má infimum (Lemmata 1.2.9 a 1.2.10). S touto řekněme rozvleklostí kontrastuje neúnosná stručnost v těsné blízkosti. Základní vlastnosti oborů integrity, totiž že v nich lze nenulovým prvkem krátit a že prvky jsou asociované, právě když jeden z nich lze z druhého získat vynásobením invertibilním prvkem, nijak zdůrazněny nejsou. Na str. 10 čtenář rozumí, že prvky  $4$  a  $2(1 + \sqrt{-3})$  mají v  $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$  společné dělitele  $2$  a  $1 + \sqrt{-3}$ . Ale jak má ověřit, že žádný z těchto prvků není dělitelný tím druhým? A co je to vůbec za strukturu  $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ ? Je to okruh nebo dokonce obor integrity? A jsou  $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$  a  $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$  tytéž struktury? Domyslí-li si čtenář chybějící komplexní jednotku ve výrazu  $(1 + \sqrt{7})(1 - \sqrt{7})$  na str. 17, pak chápe, že  $2$  dělí součin  $(1 + i\sqrt{7})(1 - i\sqrt{7})$ . Ale jak má ověřit, že  $2$  nedělí ani jeden z činitelů? A že  $2$  je ireducibilní?

Závěrečná kapitola 3 působí poněkud neorganicky. Mnohé z uvedených poznatků o ideálech zůstávají nevyužity a tato část se vlastně nespojila s předchozími částmi. Myslím, že oba výše zmíněné příklady s odmocninami měly být vyloženy jako aplikace ideálů. Na str. 38 není vysvětleno, proč je účelné podmínku  $D$  nově značit NSD. Také příklady na str. 40 srozumitelné nejsou.

Kromě nedostatků rázu věcného či strukturálního je v práci velké množství nedokonalostí v symbolických zápisech, překlepů, pravopisných chyb, nevhodných řádkových lomů (str. 36) a jiných typografických závad. Autor se nepochopitelně vyhýbá užití kvantifikátorů, například v Definici 3.1.21 na str. 38. Na str. 37 v Definici 3.1.16 nebo již dříve na str. 33 opustil užití složených závorek v zápisech množin. Naopak  $\exists 0$  na str. 3 je dost nešikovně užitý kvantifikátor. V “uzavřenost sčítání a násobení” na str. 3 asi chybí “na”. Ale stejně to není žádný axiom, protože totálnost realizací funkčních symbolů je v predikátové logice samozřejmá. Z téhož hlediska  $x^{-1}$  na str. 7 je nevhodná symbolika, protože invertování naopak totální operací není. Definovat obor integrity jako “okruh bez dělitelů nuly” je celkem běžné, ale jde spíš o hantýrku pro zasvěcence než o opravdovou definici, protože

dělitelé nuly samozřejmě vždy existují (což je v práci správně zmíněno). Říci “součin nenulových prvků nikdy není nula” by nebylo o mnoho delší. Není jasné, proč se množinová inkluze někdy značí  $\subset$  a někdy  $\subseteq$ . Terminologie je mnohdy užita nedůsledně. Například místo “prvočinitel” by většinou mělo být “prvočíslo”. Zmínka o “dělení” v první větě oddílu 1.2 je úplně mimo kontext: v tomto místě a vlastně v práci skoro pořád se pracuje s relací dělitelnosti, nikoliv s operací dělení. Na str. 11 autora podezírám, že “*NSD*” sází jako součin, tj. v  $\text{\TeX}$ u jako  $\$NSD\$$ . V seznamu literatury jsou závady skoro všude, zejména poslední položka v pořádku není. Pokud se definuje “ostře multiplikatívni monotónní norma”, nemělo by to o pár řádků dále být “ostře monotónní multiplikatívni norma”. Pokud si ve větě “Ukažme si že *Obor* takový obor, kde platí bezoutova věta a i Základní věta aritmetiky, neboli pokud obor je Gaussův a Bezoutův zároveň musí být oborem hlavních ideálů” odmyslíme svévolné zacházení s velkými a malými písmeny, stejně nedává smysl. Takovýchto těžko srozumitelných vět je v práci mnoho. Ve větách velmi často chybějí nebo přebývají čárky. Autor pravděpodobně neuposlechl mou radu práci si několik dní před odevzdáním pečlivě přečíst *z papíru*. Představa, že práce s tolika pravopisnými a stylistickými chybami a překlepy bude navždy uložena v SISu Filozofické fakulty je dost nepříjemná.

Autor vykonal poměrně hodně práce. Prostudoval relevantní literaturu, promyslel řadu důkazů a dokonce samostatně vyhledal určité zdroje. Některé části jsem si se zájmem přečetl. Na druhé straně, závady v práci jsou závažné, přehledné pojednání poučné pro studenty logiky nevzniklo. Z těchto důvodů je obtížné navrhnout odpovídající klasifikaci, jsou důvody pro více možností. Pro určitost navrhuji *nevyhověl*, protože se domnívám, že s ne tak velkým úsilím může autor napsat o hodně lepší verzi.

V Praze 19.8.2022

doc RNDr Vítězslav Švejdar CSc