

DAVID WEBER:

## STRUČNÝ ÚVOD DO TEORIE MNOŽIN PRO STŘEDOŠKOLÁKY

### *Oponentský posudek na bakalářskou práci*

Bakalářská práce se věnuje (nejen) teorii množin. Členěna je do šesti kapitol (a pěti příloh). První představuje historii teorie množin, druhá se zabývá logikou. Ve třetí kapitole jsou studovány axiomy teorie množin a ve čtvrté relace. Pátá kapitola se věnuje především přirozeným číslům a šestá nekonečným množinám.

Na četbu práce jsem se těšila. Na základě názvu a zadání práce jsem očekávala pro středoškoláky vhodnou (tj. svým způsobem „odlehčenou“) formou podaný výklad teorie množin, který bude jasný, výstižný a po odborné stránce správný. První strany úvodní kapitoly o historii teorie množin mě navíc velmi mile překvapily stylem, kterým jsou psány. Tím myslím nejen krásně plynoucí český jazyk, ale i obsahovou náplň.

Již při prvním prolistování práce, resp. namátkovém přečtení některých částí textu bylo navíc zřejmé, že je práce hezky vysázena a psána pečlivě.

Na druhou stranu bylo ihned zřejmé, že se nejedná o *Stručný úvod . . .*, jak je uvedeno v názvu, neboť předložená bakalářská práce má více než sto stran. Při dalším čtení jsem však bohužel začala pochybovat i o zbývajících slovech v názvu práce.

Začnu tím, zda je práce vhodná pro nadané středoškoláky. (V zadání je napsáno: *Cílem práce je podat srozumitelný a přehledný úvod do nejdůležitějších konceptů teorie množin a to tak, aby výkladu porozuměl (případně s malou pomocí od učitele) nadaný středoškolák se zájmem o matematiku.*) Podle mého názoru nikoliv, a to z více důvodů:

- Matematický text (či alespoň jeho podstatné části) je psán značně formálním jazykem. Nemyslím si, že středoškolák (byť nadaný) je schopen v tomto jazyce studovat. Například takřka celá kapitola 3 je (s výjimkou části o sjednocení a průniku množin) pro středoškolské studenty takřka nečitelná. Obdobně některé důkazy by byly pro středoškoláky velkým oříškem.
- Práce je psána z pozice, jako kdyby text nebyl pro studenty středních škol, ale pro někoho, kdo již má tento stupeň absolvovaný. Na střední školu se již od prvních stránek „vzpomíná“, tj. píše se o ni v minulosti. (např. *Na střední škole jsme si s tímto chápáním uvedeného pojmu nejspíše vystačili, . . .* – str. 6; *Tato část je čtenáři pravděpodobně již zčásti známa ze střední školy.* – str. 19).
- V textu jsou používány pojmy, který ne každý středoškolák zná. Například na str. 12 je bez jakéhokoliv vysvětlení použit pojem *diferenciál*. Na straně 13 je psáno o *mohutnosti množin*. Na straně 14 se mluví o *nekonečné velikosti* množiny a zmiňuje se otázka, zda je *mohutnější* množina přirozených nebo reálných čísel. Mohutnost množiny je přitom čtenáři vysvětlována až v poslední kapitole, resp. v poslední příloze. V kontrastu s tímto jsou poměrně podrobně rozebírány například kvantifikátory, které většinou studenti zvládají již na počátku svých středoškolských studií.
- Je používáno jiné značení, než je na střední škole zvykem.
- Nemyslím si ani, že velmi podrobné vysvětlování zápisů, resp. jejich různých variant, je zde vhodné (viz např. část 2.2.2 a přibližně jednostránkový rozbor zápisu).

Co se týče prostřední části názvu práce, tj. *. . . do teorie množin . . .*, domnívám se, že práce obsahuje nadbytečné informace, které ani do teorie množin, ani do této bakalářské

práce nepatří. Například třístránková sekce 1.1.3 *Nekonečno v matematické analýze* do tématu nespadá. Stačilo by příslušnou část shrnout do jediného odstavce opatřeného jedním obrázkem: obecně napsat o lepší aproximaci plochy obdélníky, jejichž šířka se stále zmenšuje, a přitom dochází k „nekonečnému dělení“. Jistě není nutné v práci věnované teorii množin vysvětlovat určitý integrál. Není nutné ani (byť v appendixu) uvádět důkaz o iracionalitě čísla  $\sqrt{2}$  atd. Naopak část E.2 *Mohutnost množiny* z přílohy E bych – spolu s krátkým vysvětlením relace ekvivalence – uvedla v hlavním textu, neboť pojem *mohutnost množiny* považuji v teorii množin za podstatný.

Zkrátka mi chybí, co se náplně práce týče, „tah na bránu“. Text na mě působí jako souhrn více prací v jedné (pokud by se rozpracovaly jednotlivé kapitoly, vydala by takřka každá z nich na samostatnou práci). Přílohy jsou napsány na více než dvaceti stranách, tj. v rozsahu, který by v podstatě stačil na celou bakalářskou práci.

Současně ve mně text nebudil dojem, že je psán studentem bakalářského studia, a je to tedy pravděpodobně jeho první matematická stať. Naopak. Pokud bych spis nedostala jako kvalifikační práci, tipovala bych, že autor již několik matematických textů napsal. Zpracování musel student věnovat enormní množství energie a času.

Další klad vidím v uvedení několika velmi hezkých příkladů a paradoxů.

V textu jsem našla několik (převážně drobných) nepřesností. Odborné části se týkají tyto:

- Na str. 22 není jednotné označení formulí (formule  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  jsou současně značeny  $\varphi$  a  $\psi$ ).
- Na str. 24, 11. řádek shora, má být (po zjednodušení)  $1 \vee (A \Leftrightarrow B)$ .
- Na str. 26 není vhodné pro označení obyvatel Prahy použít křestní jména, neboť existuje určitě více Aniček, Jiříků atd. žijících v hlavním městě.
- Na str. 33, poslední řádek, má být  $x = a \vee x = b$ .
- Na str. 43, 5. řádek zdola, má být  $A \times B \neq B \times A$ .
- Na str. 45, v definici 4.2.1, mi jednak mírně chybí přívlastek *binární*, jednak má být *relací mezi X a Y*, ne *relací mezi X a X*.
- Na str. 45, pod úmluvou 4.2.2, má být jednak  $B = \{a, b, c, d, e\}$ , jednak je v obrázku špatně označen prvek  $b$ . Rovněž odkaz na obrázek je nesprávný.
- Na str. 46, v řešení příkladu 4.2.4, je jednak relace  $S$  označena nesprávně  $s$  a dále má být  $aRz \wedge zSj \Rightarrow aTj$ . Příslušný obrázek bych nenazývala *Grafické znázornění relace složení relací . . .*, ale jednodušeji *Grafické znázornění složení relací . . .* (dlouhé názvy obrázků se vyskytují v celé práci).
- Na str. 47 je vysvětlen rozdíl mezi zobrazením a funkcí. Na str. 48 je uveden graf funkce a dále je napsáno *Tento způsob proto budeme používat i u zobrazení (tedy nejen u funkcí)*. Prosim o vysvětlení. (Lze např. pomocí obdobného grafu zakreslit zobrazení množiny jistých lidí na množinou jejich domácích mazlíčků?)
- Na str. 49, v definici 4.3.4, je zavedeno zobrazení *na*. A v poznámce pod čarou je napsáno, že potom používáme terminologii *X na Y (nikoliv do Y)*. Nemyslím si, že slovo „nikoliv“ je vhodné. I předložka *do* je správná, ale *na* je přesnější.
- Strany 55 a 56 – píšeme *relace na množině o čtyřech prvcích*, ne *relace na čtyřech prvcích*.

- Na str. 56, 1. řádek, nelze psát pouze *šipka mezi  $x$  a  $y$  a zároveň mezi  $y$  a  $z$* . Je nutné určit, odkud a kam šipky směřují. Jinak existuje případ, kdy je šipka mezi prvky  $x$  a  $y$  a současně mezi prvky  $y$  a  $z$  a přesto nemusí být šipka mezi  $x$  a  $z$ . (V názvu příslušného obrázku je navíc překlep.)
- Na str. 56 je zavedena inverzní relace, a to pouze na množině  $X$ . Ihned poté se ale pojem inverzní relace používá pro relaci mezi množinami  $X$  a  $Y$ . Poté jsou skládány relace  $R$  a  $R^{-1}$ . V připomenutí definice (i níže) je jednak nesprávně označena výsledná relace, jednak nesouhlasím s tím, že vždy vyjde identita na množině  $X$  (zavedena jako speciální případ zobrazení).
- Na str. 58, obr. 5.10, je buď chybný směr šipky, nebo špatný popis v názvu obrázku.
- Na str. 61, obrázek 5.17, je více chyb (chybějící spojnice, označení prvků).
- Na str. 63, příklad 5.4.6. (iii), nesedí označení prvků množiny  $A$  na další výklad. Ani když tuto chybu opravíme (tj.  $A = \{1, 2, 3\}$ ), není obrázek 5.21 správně.
- Na str. 96, 5. řádek shora, chybí symbol  $\in$ .
- Na str. 100 je nešťastná volba značení:  $A$  (podmnožina) a současně  $A$  (případ). Na obrázcích E.1 a E.2 je poté vysázeno  $A$  místo  $A$ .
- Na str. 102 chybí v obrázku E.4 (pokud se máme držet popisu obrázku, resp. skutečnosti, že se v textu píše pouze o přidání jedné dvojice prvků) celkem osm šipek, a to pro každý prvek jedna.
- Na str. 103, v příkladu E.1.3 (iii), nejsou v jednotlivých třídách vůbec uvedena záporná celá čísla.
- Na str. 20 doporučuji vyjádření o pravdivosti konjunkce, disjunkce atd. psát ve formě ekvivalence, tj. psát *Konjunkce je pravdivá právě tehdy, když . . .*
- Na str. 19–20 je v úmluvě 2.1.1 zavedeno pro označení výroků nebo též výrokových proměnných značení pomocí velkých písmen latinské abecedy, tj.  $A, B, \dots, Z$ . Na str. 21 jsou zápisy typu  $\varphi_1 \sim (A) \wedge ((B) \vee (C))$ . Poté je napsáno, a to v souvislosti s pořadím logických operací, že je zde nadměrně používáno závorek. Nechápu, jakou má souvislost pořadí operací a psaní jednotlivých výroků do závorek. Jaký vliv na pořadí operací má např. zápis  $((B) \vee (C))$  v porovnání se zápisem  $(B \vee C)$ ? Proším o vysvětlení.
- Jsou na str. 39 u axiomu sumy (ve slovním vysvětlení) správně označeny všechny množiny (v porovnání se symbolickým zápisem)?

Připojuji rovněž další komentáře a doporučení:

- Odkazy na zdroje nacházím hlavně u příkladů. Není jasné, na základě jakých publikací je napsána většina teorie.
- Práci zcela chybí *Úvod* a *Závěr*. *Abstrakt* je natolik obsáhlý a popisný, že bych ho spíše nazvala právě *Úvodem*.
- *Seznam obrázků* je netypicky umístěn ještě před samotným textem práce.
- Práce je psaná převážně v 1. osobě množného čísla. Někdy je však (i v rámci téhož odstavce) zvolena 1. osoba čísla jednotného.

- Doporučuji čísla odkazující na poznámky pod čarou dávat ke slovům, nikoliv ani k matematickým symbolům, kde se mohou na první pohled zaměnit s exponentem, ani k právě zaváděnému značení nějakého pojmu, kde mohou působit jako součást tohoto označení.
- Doporučuji psát názvy všech v textu uvedených publikací italikou.
- V položce [12] v seznamu literatury zcela chybí název publikace a její autor.
- V textu se vůbec nevyskytuje, ač je uveden mezi klíčovými slovy, termín/pojem *ordinál*.
- Ve svazku práce, který jsem dostala do rukou, je špatně vložen jeden list. Strana 11 je tak před stranou 10.

Jak již bylo řečeno, text je psaný kultivovaným a současně čtivým jazykem. Občas je použit zvláštní slovosled (např. ...*každému prvku „předchází“ jiný prvek až na číslo 1 – str. 61; Z předchozích příkladů 6.2.1 a 6.2.3 bychom tak mohli zápis některých našich poznatků zkrátit jednoduše takto: ... – str. 77*). Další chyby se vyskytují ve velmi malé míře. Mezi ty opakující se patří takřka jen chyby v interpunkci, především nesprávně (ne)umístění čárek před spojkami *jako* a *než*, nepsaní čárky (až na výjimky) před větou v důsledkovém poměru, která začíná výrazy *a tedy*, *a proto*, či psaní čárky před zkratkou aj.

Práce je psána pečlivě, o čemž svědčí i malé množství překlepů. Někdy se ve větách opakují táž slova.

Rovněž formátování textu je v pořádku, je vysázen s dodržением základních typografických pravidel. Upozorňuji jen na chybějící mezery ve výčtech, intervalech apod. (nepíše se např. 1,2,3, ..., ale 1, 2, 3, ...; nepíše se  $\langle x, y \rangle$ , ale  $\langle x, y \rangle$  apod.), dále na záměnu pomlčky za spojovník (především u letopočtů) či nevhodné dělení i relativně krátkých vztahů na dva řádky (například  $n >$  na konci jednoho řádku a  $m$  na začátku řádku následujícího).

Ráda bych znala odpovědi na následující otázky:

- Proč je práce tak obsáhlá, a to jak počtem stran, tak zahrnutými tématy?
- V čem spatřuje autor svůj hlavní přínos?
- Pokusil se autor vysvětlit problematiku uvedeným stylem některému středoškolákovi? Pokud ano, s jakým úspěchem?
- Na základě jakých zdrojů byla napsána většina teorie?

Ze všech mých dosud oponovaných prací mám u této největší problém s celkovým zhodnocením. Mám na ni rozporuplné názory. Na jedné straně vah je velmi vospělý text (skutečně bych netipovala, že autor je studentem bakalářského studia), čtivost, neskutečně mnoho práce. Na straně druhé si nemyslím, že byl napsán text odpovídající svému názvu a že byl splněn první požadavek v zadání práce.

**Přes uvedené nedostatky doporučuji práci k obhajobě.**

**Vzhledem k výše uvedenému váhám nad klasifikací práce, a to mezi stupněm *výborně* a *velmi dobře*. Svě definitivní rozhodnutí provedu na základě průběhu obhajoby.**

V Praze dne 16. června 2022

RNDr. Martina Škorpilová, Ph.D.