MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Matěj Svoboda

Gebeleinova nerovnost

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Petr Čoupek, Ph.D.
Studijní program: Obecná matematika

Praha 2022

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Rád bych zde poděkoval vedoucímu práce RNDr. Petru Čoupkovi, Ph.D. za všechen věnovaný čas a cenné rady, které mi při vzniku této práce poskytl.

Název práce: Gebeleinova nerovnost

Autor: Matěj Svoboda

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Petr Čoupek, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: V práci se zabýváme korelační nerovností pro gaussovské náhodné veličiny nazývanou Gebeleinova nerovnost. V první části práce tuto nerovnost zformulujeme, zavedeme Hermitovy polynomy a odvodíme některé jejich vlastnosti, na jejichž základě nerovnost dokážeme. V druhé části s pomocí Gebeleinovy nerovnosti ukazujeme, že pro normované gaussovské posloupnosti lze v Borelově-Cantelliho lemmatu a silném zákonu velkých čísel upustit od nezávislosti a pouze předpokládat dostatečně rychle klesající korelaci.

Klíčová slova: Gebeleinova nerovnost, normální rozdělení

Title: Gebelein's inequality

Author: Matěj Svoboda

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Petr Čoupek, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: In this thesis we deal with a correlation inequality for Gaussian random variables called Gebelein's inequality. In the first part of the thesis, we state the inequality, define Hermite polynomials, and derive several of their properties which we then use to prove the inequality. In the second part, we apply Gebelein's inequality in order to show that for normalized Gaussian sequences the Borel-Cantelli lemma and strong law of large numbers still hold when the assumption of independence is replaced by a sufficient fast decay of their correlation function.

Keywords: Gebelein's inequality, normal distribution

Obsah

Úvod **2**

1 Gebeleinova nerovnost **3**
1.1 Gaussovské náhodné veličiny 3
1.2 Prostory L^p s gaussovskou mírou 4
1.3 Hermitovy polynomy 6

2 Aplikace Gebeleinovy nerovnosti **12**
2.1 Borelovo-Cantelliho lemma 13
2.2 Silný zákon velkých čísel 15

Závěr **20**

Seznam použité literatury **21**

Úvod

V teorii pravděpodobnosti se vyskytuje celá řada tvrzení o náhodných veličinách, která předpokládají jejich nezávislost. Jako příklad některého z těchto tvrzení může sloužit silný zákon velkých čísel či Borelovo-Cantelliho lemma. Nabízí se tak otázka, zda by existovala speciální třída náhodných veličin, pro kterou by bylo možné předpoklad nezávislosti nahradit slabší podmínkou. Ukazuje se, že pro normálně rozdělené náhodné veličiny taková slabší podmínka skutečně existuje a hlavním nástrojem k důkazu tohoto faktu je tvrzení nazývané Gebeleinova nerovnost.

Práce je členěna do dvou kapitol. V první kapitole zformulujeme Gebeleinovu nerovnost a převedeme ji do podoby využívající pojmů funkcionální analýzy. Následně představíme Hermitovy polynomy a odvodíme několik jejich vlastností (ortogonalitu, integrální reprezentaci, vyjádření Mehlerova jádra, ...), na jejichž základě nakonec Gebeleinovu nerovnost dokážeme.

Ve druhé kapitole Gebeleinovu nerovnost aplikujeme a dokážeme, že pro normované gaussovské posloupnosti jejichž autokorelační funkce $\rho_{i,j}$ splňuje podmínku

$$\sup_i \sum_j |\rho_{i,j}| < \infty,$$

platí Borelovo-Cantelliho lemma a silný zákon velkých čísel i bez předpokladu nezávislosti.

Celá práce vychází z [1]. Z tohoto článku se zabýváme první kapitolou (důkaz Gebeleinovy nerovnosti) a vybranými aplikacemi z druhé a třetí kapitoly (Borelovo-Cantelliho lemma, verze silného zákona velkých čísel pro společnou transformaci f).

Hlavním přínosem práce nad rámec [1] je zkompletování důkazu Gebeleinovy nerovnosti ve smyslu podrobného rozpracování jednotlivých kroků a doplnění chybějících důkazů pomocných tvrzení. Dále ve druhé kapitole navíc ukazujeme platnost potřebných lemmat, odvozujeme Borelovo-Cantelliho lemma a doplňujeme několik chybějících kroků a zdůvodnění v důkazu silného zákona velkých čísel.

1. Gebeleinova nerovnost

1.1 Gaussovské náhodné veličiny

Uvažujme náhodný vektor $(X,Y)^T$ s nedegenerovaným centrovaným sdruženým normálním rozdělením s korelací mezi veličinami X a Y o hodnotě $\mathsf{E}\,XY = \rho$ (v celé práci budeme předpokládat, že $|\rho| < 1$), tj. $(X,Y)^T$ má hustotu vzhledem k dvojrozměrné Lebesgueově míře danou

$$p(x,y;\rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{x^2+y^2-2xy\rho}{2(1-\rho^2)}\right\}, \quad x,y \in \mathbb{R}.$$

Marginální rozdělení náhodných veličin X a Y pak bude dané hustotou

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Jednou z pro nás důležitých vlastností sdruženě normálních náhodných vektorů bude, že složku X ve vektoru $(X,Y)^T$ můžeme nahradit veličinou $\rho Y + \sqrt{1-\rho^2}Z$, kde Z je normálně rozdělená a nezávislá s Y, a rozdělení se tím nezmění.

Tvrzení 1.1. *Nechť $Z \sim N(0,1)$ je náhodná veličina nezávislá s Y. Označme $V = \rho Y + \sqrt{1-\rho^2}Z$. Potom $(X,Y)^T$ a $(V,Y)^T$ mají stejné rozdělení.*

Důkaz. Označíme $V = \rho Y + \sqrt{1-\rho^2}Z$ a $W = Y$. Dále definujeme transformaci

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \\ \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{v-\rho w}{\sqrt{1-\rho^2}} \\ w \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Zobrazení φ^{-1} je zřejmě prosté, třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ a pro jakobián platí

$$J_{\varphi^{-1}}(v,w) = \det\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} & -\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \neq 0.$$

Jakobián je tedy na celém $\mathbb{R}^2$ nenulový, tudíž můžeme užít věty o transformaci hustot a pro hustotu $f_{(V,W)^T}$ náhodného vektoru $(V,W)^T$ psát

$$f_{(V,W)^T}(v,w) = f_{(Z,Y)^T}\left(\varphi^{-1}(v,w)\right)|J_{\varphi^{-1}}(v,w)|, \quad v,w \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Díky předpokladu, že Z a Y jsou nezávislé, je hustota $f_{(Z,Y)^T}$ součinem marginálních hustot $p(z)$ a $p(y)$. Dosazením do rovnosti (1.1) dostáváme

$$\begin{aligned} f_{(V,W)^T}(v,w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{v-\rho w}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)^2\right\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}w^2\right\}\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{v^2-2\rho vw+w^2\rho^2+w^2(1-\rho^2)}{2(1-\rho^2)}\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{v^2+w^2-2\rho vw}{2(1-\rho^2)}\right\} \\ &= p(v,w;\rho), \quad v,w \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ukázali jsme, že vektor $(V,W)^T$ má stejnou hustotu jako $(X,Y)^T$, tedy má i stejné rozdělení.

$\square$

Hlavním předmětem našeho zkoumání bude následující věta, která nám dává horní odhad na změnu kovariance mezi X a Y pro určitou třídu transformací.

Věta 1.2 (Gebeleinova nerovnost)**.** *Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou měřitelné funkce takové, že $f(X), g(Y)$ mají konečné druhé momenty a $\mathsf{E} f(X) = 0$. Potom platí*

$$|\,\mathsf{E} f(X)g(Y)| \leq |\rho| \left(\mathsf{E}|f(X)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathsf{E}|g(Y)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Všimněme si, že díky předpokladu $\mathsf{E}\, f(X) = 0$ dostáváme na levé straně nerovnosti absolutní hodnotu kovariance mezi $f(X)$ a $g(Y)$. Pokud bychom přidali předpoklad $\mathsf{E}\, g(Y) = 0$, pak by věta 1.2 říkala, že

$$\left|\operatorname{cor}\Big(f(X), g(Y)\Big)\right| \leq |\rho|.$$

Tedy transformace zachovávající střední hodnotu nám absolutní hodnotu korelace mezi X a Y nezvětší.

1.2 Prostory L^p s gaussovskou mírou

Naším primárním cílem bude v tuto chvíli důkaz věty 1.2. Ukazuje se, že k důkazu bude vhodné na funkce f a g nenahlížet jako na transformace náhodných veličin, ale jako na prvky L^p prostoru s pravděpodobnostní mírou normálně rozdělených náhodných veličin.

Definice. Na měřitelném prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ definujeme *gaussovskou míru* γ předpisem

$$\gamma(A) = \int_A p(x)\,\mathrm{d}x = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}x^2\right\}\,\mathrm{d}x, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Míra γ je tak pravděpodobnostním rozdělením gaussovských náhodných veličin.

Nyní, když již máme definovanou naši míru γ, můžeme uvažovat prostor $L^p(\gamma)$ s normou

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p\,\mathrm{d}\gamma(x)\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Nejdůležitějším prostorem pro nás bude prostor $L^2(\gamma)$. Na něm uvažujeme skalární součin

$$\langle f, g\rangle_\gamma = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,\mathrm{d}\gamma(x).$$

Prostor $L^2(\gamma)$ s takto definovaným skalárním součinem pak je Hilbertovým prostorem.

Díky znalosti, že γ je pravděpodobností rozdělení gaussovské náhodné veličiny X, můžeme psát

$$\|f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p\,\mathrm{d}\gamma(x) = \mathsf{E}\,|f(X)|^p$$

a

$$\langle f, g\rangle_\gamma = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,\mathrm{d}\gamma(x) = \mathsf{E}[f(X)g(X)].$$

Norma a skalární součin funkcí v $L^p(\gamma)$ tedy odpovídají momentům těmito funkcemi transformovaných normálně rozdělených náhodných veličin.

Pro $f \in L^p(\gamma)$ a náhodný vektor $(X, Y)^T$ jako v sekci 1.1 definujeme

$$P_\rho f(y) = \mathsf{E}\left[f(X)|Y = y\right], \quad y \in \mathbb{R}.$$

Operátor P_ρ můžeme vyjádřit dalšími dvěma způsoby, které později využijeme. První vyjádření dostáváme, použijeme-li vzorec pro výpočet podmíněné střední hodnoty pomocí hustot:

$$P_\rho f(y) = \frac{1}{p(y)} \int_{\mathbb{R}} f(x)p(x, y; \rho)\,\mathrm{d}x, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Tento výraz lze přepsat jako

$$P_\rho f(y) = \int_{\mathbb{R}} K(x, y; \rho) f(x)\,\mathrm{d}\gamma(x),$$

kde

$$K(x, y; \rho) = \frac{p(x, y; \rho)}{p(x)p(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{\rho^2(x^2+y^2) - 2xy\rho}{2(1-\rho^2)}\right\}.$$

nazýváme *Mehlerovým jádrem.*

Druhé vyjádření dostaneme díky tvrzení 1.1. S jeho pomocí pak totiž platí

$$\begin{aligned} P_\rho f(y) &= \mathsf{E}\left[f(X)|Y = y\right] = \\ &= \mathsf{E}[f(\rho Y + \sqrt{1-\rho^2}Z)|Y = y] = \mathsf{E}[f(\rho y + \sqrt{1-\rho^2}Z)]. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Z definice operátoru P_ρ však není jasné zda, vezmeme-li funkci f z $L^p(\gamma)$ a aplikujeme-li na ní operátor P_ρ, dostaneme opět funkci z $L^p(\gamma)$.

Tvrzení 1.3. *Buď $f \in L^p(\gamma), 1 \le p < \infty$. Potom*

$$\|P_\rho f\|_p \le \|f\|_p.$$

Důkaz. S pomocí vyjádření operátoru P_ρ v (1.2) můžeme psát

$$\int_{\mathbb{R}} |P_\rho f(x)|^p\,\mathrm{d}\gamma(x) = \int_{\mathbb{R}} |\,\mathsf{E}\, f(\rho y + \sqrt{1-\rho^2}Z)|^p\,\mathrm{d}\gamma(y).$$

S využitím Jensenovy nerovnosti (funkce $u \mapsto |u|^p$ je konvexní na $\mathbb{R}$ pro všechna $p \in [1,\infty)$) platí

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\,\mathsf{E}\, f(\rho y + \sqrt{1-\rho^2}Z)|^p\,\mathrm{d}\gamma(y) &\le \int_{\mathbb{R}} \mathsf{E}\,|f(\rho y + \sqrt{1-\rho^2}Z)|^p\,\mathrm{d}\gamma(y) = \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f(\rho y + \sqrt{1-\rho^2}z)|^p\,\mathrm{d}\gamma(z)\,\mathrm{d}\gamma(y) = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p\,\mathrm{d}\gamma(x) = \|f\|_p^p, \end{aligned}$$

kde předposlední rovnost plyne z tvrzení 1.1.

□

Z tvrzení 1.3 tak nejen plyne, že operátor P_ρ zachovává prvky v původním prostoru, navíc dokonce normu prvků nezvětšuje. Hlavním krokem pro důkaz věty 1.2 bude ukázat, že na prostoru $L^2(\gamma)$ operátor P_ρ splňuje silnější nerovnost, a to

$$\|P_\rho f\|_2 \leq |\rho| \, \|f\|_2, \quad f \in L^2(\gamma).$$

Nyní již můžeme přepsat větu 1.2 do podoby, která bude využívat norem, skalárního součinu a operátoru P_ρ. S pomocí tvrzení 1.1 platí

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[f(X)g(Y)] &= \mathsf{E}[f(\rho Y + \sqrt{1-\rho^2}Z)g(Y)] \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(\rho y + \sqrt{1-\rho^2}z) g(y) \, \mathrm{d}\gamma(y) \, \mathrm{d}\gamma(z) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathsf{E}[f(\rho y + \sqrt{1-\rho^2}Z)] g(y) \, \mathrm{d}\gamma(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} P_\rho f(y) g(y) \, \mathrm{d}\gamma(y) = \langle P_\rho f, g \rangle_\gamma ,
\end{aligned}$$

kde jsme nejdříve ve druhé rovnosti využili toho, že Y a Z jsou nezávislé a poté jsme ve třetí rovnosti užili vyjádření P_ρ z (1.2). Nakonec díky rovnosti

$$\mathsf{E}\, f(X) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \, \mathrm{d}\gamma(x) = \langle f, 1 \rangle_\gamma$$

můžeme ekvivalentně formulovat větu 1.2.

Věta 1.4 (Gebeleinova nerovnost)**.** *Nechť $f, g \in L^2(\gamma)$ splňují $\langle f, 1 \rangle_\gamma = 0$. Potom*

$$| \langle P_\rho f, g \rangle_\gamma | \leq |\rho| \, \|f\|_2 \, \|g\|_2.$$

1.3 Hermitovy polynomy

Hlavním nástrojem pro důkaz věty 1.4 bude speciální systém polynomů nazývaný Hermitovy polynomy. V této sekci dokážeme dvě jejich důležité vlastnosti a sice, že při vhodné normalizaci tvoří ortonormální bázi prostoru $L^2(\gamma)$ a lze s jejich pomocí vyjádřit Mehlerovo jádro. Nakonec tyto dvě vlastnosti užijeme a dokončíme důkaz věty 1.4.

Definice. Pro $n \in \mathbb{N}_0$ nazveme *n-tým Hermitovým polynomem* funkci

$$H_n(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \mathrm{e}^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Z definice je zřejmé, že n-tý Hermitův polynom bude polynomem stupně n, tedy Hermitovy polynomu generují (ve smyslu lineárního obalu) prostor všech polynomů.

Hermitovy polynomy dále mají následující vlastnost (viz [2])

$$\int_{\mathbb{R}} H_n(x) H_m(x) \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{n,m}, \tag{1.3}$$

kde

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

Vztah (1.3) nám říká, že Hermitovy polynomy jsou ortogonální vzhledem k váhové funkci e^{-x^2}, která je blízká hustotě $p(x)$. Při vhodné normalizaci by tak Hermitovy polynomy mohli být ortonormální vzhledem ke skalárnímu součinu $\langle\cdot,\cdot\rangle_\gamma$. Označíme-li

$$h_n(x) = \frac{H_n(x/\sqrt{2})}{\sqrt{2^n n!}},$$

pak

$$\begin{aligned}
\langle h_n, h_m\rangle_\gamma &= \int_{\mathbb{R}} h_n(x)h_m(x)\,\mathrm{d}\gamma(x)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \frac{H_n(x/\sqrt{2})}{\sqrt{2^n n!}}\frac{H_m(x/\sqrt{2})}{\sqrt{2^m m!}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2^n 2^m n! m!}}\int_{\mathbb{R}} H_n(y)H_m(y)\mathrm{e}^{-y^2}\sqrt{2}\,\mathrm{d}y\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{2^n 2^m n! m!}}2^n n!\sqrt{\pi}\delta_{n,m}\\
&= \delta_{n,m},
\end{aligned}$$

kde jsme v předposlední rovnosti užili vztahu (1.3). Tedy $\{h_n\}_{n=0}^\infty$ tvoří ortonormální systém polynomů v $L^2(\gamma)$.

Nyní, když již víme, že $\{h_n\}_{n=0}^\infty$ je ortonormální systém, vyvstává otázka, zda bychom jej mohli prohlásit za ortonormální bázi prostoru $L^2(\gamma)$. K tomu nám stačí ukázat, že polynomy tvoří hustou podmnožinu $L^2(\gamma)$. K důkazu tohoto tvrzení využijeme následující lemma, které uvádí ekvivalentní podmínku pro to, aby byla množina hustá v $L^2(\gamma)$.

Lemma 1.5. *Buď S podprostor $L^2(\gamma)$. Pak S je hustá v $L^2(\gamma)$ právě tehdy, když pro každé $g \in L^2(\gamma)$ platí:*

$$\text{je-li } \int fg\,\mathrm{d}\gamma = 0 \text{ pro každé } f \in S, \text{ pak } g = 0\ \gamma\text{-skoro jistě.}$$

Důkaz. Viz [3, Proposition E.1.3]. Jde o speciální případ $L^2(\gamma)$ prostoru. □

Lemma 1.5 nyní využijeme k důkazu hustoty polynomů v $L^2(\gamma)$. Zde ukázaný důkaz je převzat z [3, Proposition 1.1.5] pro speciální případ $L^2(\gamma)$.

Tvrzení 1.6. *Posloupnost polynomů $\{x^n\}_{n=0}^\infty$ generuje hustou podmnožinu $L^2(\gamma)$.*

Důkaz. Díky lemmatu 1.5 stačí ukázat, že pro každé $g \in L^2(\gamma)$ splňující

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)x^k\,\mathrm{d}\gamma(x) = 0, \quad k = 0,1,2,\ldots, \tag{1.4}$$

platí $g = 0$ γ-skoro jistě. Nechť tedy $g \in L^2(\gamma)$ splňuje podmínku (1.4) a $t \in \mathbb{R}$ je pevné. Pak pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ platí odhad

$$\left|g(x)\sum_{k=0}^{n}\frac{(itx)^k}{k!}\right| \le |g(x)|\mathrm{e}^{|tx|}.$$

Navíc s užitím Hölderovy nerovnosti máme

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)|\mathrm{e}^{|tx|}\,\mathrm{d}\gamma(x) = \|g\,e^{|t\cdot|}\|_1 \le \|g\|_2\,\|e^{|t\cdot|}\|_2 < \infty.$$

Funkce $x \mapsto |g(x)|e^{|tx|}$ tedy leží v prostoru $L^1(\gamma)$, můžeme tak zaměnit limitu a integrál a psát

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\mathrm{e}^{itx}\,\mathrm{d}\gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(it)^k}{k!}\int_{\mathbb{R}} g(x)x^k\,\mathrm{d}\gamma(x) = 0.$$

Z faktu, že Fourierova transformace je prostá (viz [4, Theorem 7.7]), pak již plyne, že $g = 0$ γ-skoro jistě.

□

Druhou vlastností Hermitových polynomů, kterou budeme chtít ukázat, je ta, že Mehlerovo jádro (a tedy i operátor P_ρ) lze s jejich pomocí jednoznačně vyjádřit. K důkazu této vlastnosti bude užitečná následující integrální reprezentace Hermitových polynomů.

Tvrzení 1.7. *Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ a $x \in \mathbb{R}$ platí*

$$H_n(x) = \frac{(-2i)^n}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{x^2}\int_{\mathbb{R}} u^n\mathrm{e}^{-u^2+2ixu}\,\mathrm{d}u.$$

Důkaz. Vyjdeme z rovnosti

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-u^2+2ixu}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-x^2}. \tag{1.5}$$

Tu dostaneme výpočtem

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-u^2+2ixu}\,\mathrm{d}u &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-u^2}(\cos 2xu + i\sin 2xu)\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-u^2}\cos 2xu\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-u^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2xu)^{2n}}{(2n)!}\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^nx^{2n}}{(2n)!}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-u^2}u^{2n}\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^nx^{2n}}{(2n)!}\,2\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-u^2}u^{2n}\,\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

kde jsme v druhé rovnosti využili toho, že funkce $u \mapsto e^{-u^2}\sin 2xu$ je lichá pro každé $x \in \mathbb{R}$. Dále s pomocí substituce $y = u^2$ dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-u^2+2ixu}\,\mathrm{d}u &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^nx^{2n}}{(2n)!}\,2\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-y}y^n\frac{1}{2\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^nx^{2n}}{(2n)!}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-y}y^{n-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^nx^{2n}}{(2n)!}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^nx^{2n}}{2n\,\Gamma(2n)}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right).\end{aligned} \tag{1.6}$$

K další úpravě využijeme následující vlastnost funkce Γ (pro důkaz viz např. [5])

$$\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2n}\sqrt{\pi}\Gamma(2n). \tag{1.7}$$

Vyjádříme-li z rovnosti (1.7) člen $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$ a dosadíme-li jej do (1.6), dostaneme

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n x^{2n}}{2n\,\Gamma(2n)}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n x^{2n}}{2n\,\Gamma(2n)}\frac{2^{1-2n}\sqrt{\pi}\Gamma(2n)}{\Gamma(n)} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n\,\Gamma(n)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!} = \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Postupným derivováním obou stran rovnosti (1.5) dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}}(2i)^n u^n \mathrm{e}^{-u^2+2ixu}\,\mathrm{d}u,$$

potom tedy

$$H_n(x) = \frac{(-2i)^n}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{x^2}\int_{\mathbb{R}} u^n \mathrm{e}^{-u^2+2ixu}\,\mathrm{d}u.$$

□

Nyní již můžeme dokázat tvrzení o vztahu Mehlerova jádra a Hermitových polynomů. Důkaz zakládá na postupu ukázaného v [6].

Tvrzení 1.8. *Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ a $\rho \in (-1,1)$ platí*

$$K(x,y;\rho) = \sum_{n=0}^{\infty}\rho^n h_n(x)h_n(y).$$

Důkaz. Vyjádříme-li h_n pomocí předpisu z tvrzení 1.7 dostáváme

$$\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n h_n(x)h_n(y) = \sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\frac{1}{2^n n!}H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)H_n\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho^n}{2^n n!}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\frac{(-2i)^n\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{\pi}}\frac{(-2i)^n\mathrm{e}^{\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{\pi}}u^n v^n\mathrm{e}^{-u^2-v^2+2i\frac{x}{\sqrt{2}}+2i\frac{y}{\sqrt{2}}}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\frac{(-2\rho uv)^n}{n!}\mathrm{e}^{-u^2-v^2+2i\frac{x}{\sqrt{2}}+2i\frac{y}{\sqrt{2}}}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-u^2-v^2-2\rho uv+2i\frac{x}{\sqrt{2}}+2i\frac{y}{\sqrt{2}}}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-u^2-v^2-2\rho uv+2i\frac{x}{\sqrt{2}}+2i\frac{y}{\sqrt{2}}}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-v^2+2iv\left(\frac{y}{\sqrt{2}}+i\rho u\right)}\mathrm{e}^{-u^2+2i\frac{x}{\sqrt{2}}}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\left(\frac{y}{\sqrt{2}}+i\rho u\right)^2}\mathrm{e}^{-u^2+2i\frac{x}{\sqrt{2}}}\,\mathrm{d}u$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}-2\frac{y}{\sqrt{2}}i\rho u+\rho^2u^2}\mathrm{e}^{-u^2+2i\frac{x}{\sqrt{2}}}\,\mathrm{d}u$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-u^2(1-\rho^2)+2iu\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{y}{\sqrt{2}}\rho\right)}\,\mathrm{d}u,$$

kde jsme při integrování podle proměnné v použili vztah (1.5). S využitím substituce $z = u\sqrt{1-\rho^2}$ pak platí

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n h_n(x) h_n(y) &= \frac{\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-z^2+2iz\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{y}{\sqrt{2}}\rho\right)\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \,\mathrm{d}z \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{1-\rho^2}} \mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{y}{\sqrt{2}}\rho\right)^2 \frac{1}{1-\rho^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}-\frac{1}{1-\rho^2}\left(\frac{x^2}{2}-xy\rho+\frac{y^2}{2}\rho^2\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \mathrm{e}^{\frac{x^2(1-\rho^2)-(x^2-2xy\rho+y^2\rho^2)}{2(1-\rho^2)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \mathrm{e}^{\frac{-x^2\rho^2+2\rho xy-y^2\rho^2}{2(1-\rho^2)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \mathrm{e}^{\frac{\rho^2(x^2+y^2)-2\rho xy}{2(1-\rho^2)}} = K(x,y;\rho).
\end{aligned}$$

□

Jelikož operátor P_ρ je jednoznačně charakterizován Mehlerovým jádrem, můžeme jej také vyjádřit pomocí Hermitových polynomů. Pro $f \in L^2(\gamma)$ tvrzení 1.8 dává

$$\begin{aligned}
P_\rho f(x) &= \int_{\mathbb{R}} K(x,y;\rho) f(y) \,\mathrm{d}\gamma(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n h_n(x) h_n(y) f(y) \,\mathrm{d}\gamma(y) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n h_n(x) \int_{\mathbb{R}} h_n(y) f(y) \,\mathrm{d}\gamma(y) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n h_n(x) \langle h_n, f\rangle_\gamma .
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Fakt, že $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ortonormální bází prostoru $L^2(\gamma)$, nyní budeme potřebovat, abychom mohli vyjádřit normu $P_\rho f$ s pomocí následujícího tvrzení.

Tvrzení 1.9 (Parsevalova rovnost)**.** *Nechť X je Hilbertův prostor se skalárním součinem $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ jeho ortonormální báze. Potom pro každé $x \in X$ platí*

$$\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2.$$

Jelikož $L^2(\gamma)$ je Hilbertův prostor, pak můžeme psát

$$\begin{aligned}
\|P_\rho f\|_2^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left| \langle P_\rho f, h_n \rangle_\gamma \right|^2 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left| \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k h_k \langle h_k, f \rangle_\gamma , h_n \right\rangle_\gamma \right|^2 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \langle h_k, f \rangle_\gamma \langle h_k, h_n \rangle_\gamma \right|^2 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left| \rho^n \langle h_n, f \rangle_\gamma \right|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{2n} | \langle h_n, f \rangle_\gamma |^2,
\end{aligned} \tag{1.9}$$

kde jsme postupně využili tvrzení 1.9, rovnosti (1.8), linearity skalárního součinu a ortonormality systému $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Všimněme si, že $h_0(x) = 1$, tedy podmínka $\langle f, 1 \rangle_\gamma = 0$ z věty 1.4 nám říká, že můžeme vynechat první člen řady v (1.9). Platí-li tedy tato podmínka, pak pro $f \in L^2(\gamma)$ máme

$$\begin{aligned}
\|P_\rho f\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{2n} | \langle h_n, f \rangle_\gamma |^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{2n} | \langle h_n, f \rangle_\gamma |^2 \leq \\
\leq \sum_{n=1}^{\infty} \rho^2 | \langle h_n, f \rangle_\gamma |^2 = \rho^2 \sum_{n=0}^{\infty} | \langle h_n, f \rangle_\gamma |^2 = \rho^2 \|f\|_2^2,
\end{aligned} \tag{1.10}$$

kde jsme využili toho, že pro $n \geq 1$ platí $\rho^{2n} \leq \rho^2$ a v poslední rovnosti tvrzení 1.9.

Potom tak pro funkce $f, g \in L^2(\gamma)$ splňující $\langle f, 1 \rangle_\gamma = 0$ s užitím Hölderovy nerovnosti a (1.10) dostáváme

$$\begin{aligned}
| \langle P_\rho f, g \rangle_\gamma | = \left| \int_{\mathbb{R}} P_\rho f(x) g(x) \,\mathrm{d}\gamma(x) \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |P_\rho f(x) g(x)| \,\mathrm{d}\gamma(x) = \\
= \|P_\rho f \cdot g\|_1 \leq \|P_\rho f\|_2 \, \|g\|_2 \leq |\rho| \, \|f\|_2 \, \|g\|_2,
\end{aligned}$$

čímž jsme dokázali větu 1.4.

2. Aplikace Gebeleinovy nerovnosti

Uvažujme normovanou gaussovskou posloupnost $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$, tj. pro každé $n \in \mathbb{N}$ a n-tici indexů $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{N}$ má vektor $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ n-rozměrné normální rozdělení a navíc $X_i \sim N(0{,}1)$. Gaussovská posloupnost je jednoznačně určena středními hodnotami a autokorelační funkcí (tj. funkcí $(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mapsto \mathrm{cor}(X_i, X_j)$).

V této kapitole pomocí Gebeleinovy nerovnosti ukážeme, že pro normované gaussovské posloupnosti, jejichž autokorelační funkce $\rho_{i,j}$ splňuje podmínku

$$C = \sup_i \sum_j |\rho_{i,j}| < \infty, \tag{P}$$

platí Borelovo-Cantelliho lemma a silný zákon velkých čísel i bez předpokladu nezávislosti.

Příkladem normované gaussovské posloupnosti, která splňuje podmínku (P) je *stacionární Ornsteinův-Uhlenbeckův proces.* Ten je určen autokorelační funkcí

$$\rho_{i,j} = \mathrm{e}^{-|i-j|}.$$

Potom totiž platí

$$\begin{aligned}
\sup_i \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-|i-j|} &\leq \sup_i 2 \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-|i-x|}\,\mathrm{d}x \\
&= \sup_i 2 \left(\int_0^i \mathrm{e}^{-(i-x)}\,\mathrm{d}x + \int_i^{\infty} \mathrm{e}^{-(x-i)}\,\mathrm{d}x \right) \\
&= \sup_i 2 \left(\left[\mathrm{e}^{-(i-x)} \right]_0^i + \left[-\mathrm{e}^{-(x-i)} \right]_i^{\infty} \right) \\
&= \sup_i 2(1 - \mathrm{e}^{-i} + 1) = \sup_i (4 - 2\mathrm{e}^{-i}) = 4 < \infty.
\end{aligned}$$

Naopak, příkladem normované gaussovské posloupnosti, která podmínku (P) nesplňuje, je gaussovská posloupnost určená autokorelační funkcí

$$\rho_{i,j} = \frac{\min(i,j)}{\sqrt{i}\sqrt{j}}.$$

Jelikož platí

$$\lim_{j \to \infty} \frac{\min(i,j)}{i} = 1,$$

pak řada

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\min(i,j)}{\sqrt{i}\sqrt{j}}$$

bude konvergentní právě tehdy, když bude konvergentní řada

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{i}{\sqrt{i}\sqrt{j}}.$$

Ta je ale zřejmě divergentní, tedy podmínka (P) nemůže platit.

2.1 Borelovo-Cantelliho lemma

V této sekci dokážeme Borelovo-Cantelliho lemma pro normované gaussovské posloupnosti splňující podmínku (P). Důkaz vyplyne z následujícího odhadu.

Lemma 2.1. *Nechť $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ je normovaná gaussovská posloupnost splňující podmínku* (P) *a $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ posloupnost množin z $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$\mathsf{E}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} I_{A_i}(X_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(X_i \in A_i)} - 1\right)^2 \leq \frac{C}{\sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(X_i \in A_i)}.$$

Důkaz. Pro $i, j \in \mathbb{N}$ definujeme funkce

$$\begin{aligned} f_i(x) &= I_{A_i}(x) - \mathsf{P}(X_i \in A_i), \\ g_j(x) &= I_{A_j}(x) - \mathsf{P}(X_j \in A_j). \end{aligned}$$

Pro tyto funkce zřejmě platí $\mathsf{E}\, f_i(X_i) = \mathsf{E}\, g_j(X_j) = 0$. Dále také

$$\begin{aligned} |\,\mathsf{E}\, f_i(X_i) g_j(Y_j)| &= \left|\mathsf{E}\left(I_{A_i}(X_i) - \mathsf{P}(X_i \in A_i)\right)\left(I_{A_j}(X_j) - \mathsf{P}(X_j \in A_j)\right)\right| \\ &= |\,\mathsf{E}\, I_{A_i}(X_i) I_{A_j}(X_j) - \mathsf{E}\, I_{A_i}(X_i)\, \mathsf{P}(X_j \in A_j) \\ &\quad - \mathsf{E}\, I_{A_j}(X_j)\, \mathsf{P}(X_i \in A_i) + \mathsf{E}\, \mathsf{P}(X_i \in A_i)\, \mathsf{P}(X_j \in A_j)| \\ &= |\,\mathsf{P}(X_i \in A_i, X_j \in A_j) - \mathsf{P}(X_i \in A_i)\, \mathsf{P}(X_j \in A_j)| \end{aligned} \tag{2.1}$$

a

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(f_i(X_i))^2 &= \operatorname{var} f_i(X_i) = \operatorname{var}\left(I_{A_i}(X_i) - P(X_i \in A_i)\right) \\ &= \operatorname{var} I_{A_i}(X_i) = \mathsf{E}\, I_{A_i}(X_i) - \left(\mathsf{E}\, I_{A_i}(X_i)\right)^2 \\ &= \mathsf{P}(X_i \in A_i) - \left[\mathsf{P}(X_i \in A_i)\right]^2 \\ &= \mathsf{P}(X_i \in A_i)\left(1 - \mathsf{P}(X_i \in A_i)\right) \\ &= \mathsf{P}(X_i \in A_i)\, \mathsf{P}(X_i \notin A_i). \end{aligned} \tag{2.2}$$

S využitím věty 1.2 a (2.1), (2.2) dostáváme

$$\begin{aligned} &|\,\mathsf{P}(X_i \in A_i, X_j \in A_j) - \mathsf{P}(X_i \in A_i)\, \mathsf{P}(X_j \in A_j)| \\ &\leq |\rho_{i,j}| \sqrt{\mathsf{P}(X_i \in A_i)\, \mathsf{P}(X_i \notin A_i)\, \mathsf{P}(X_j \in A_j)\, \mathsf{P}(X_j \notin A_j)} \\ &\leq |\rho_{i,j}| \sqrt{\mathsf{P}(X_i \in A_i)\, \mathsf{P}(X_j \in A_j)} \\ &\leq |\rho_{i,j}| \frac{\mathsf{P}(X_i \in A_i) + \mathsf{P}(X_j \in A_j)}{2}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Díky (2.3) pak platí

$$\mathsf{E}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} I_{A_i}(X_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(X_i \in A_i)} - 1\right)^2 = \mathsf{E}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} I_{A_i}(X_i) - \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(X_i \in A_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(X_i \in A_i)}\right]^2$$

$$= \mathsf{E}\left[\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} I_{A_i}(X_i)\right)^2 - 2\sum_{i=1}^{n} I_{A_i}(X_i) \sum_{j=1}^{n} \mathsf{P}(X_j \in A_j) + \left(\sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(X_i \in A_i)\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(X_i \in A_i)\right)^2}\right]$$

$$= \frac{\mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} I_{A_i}(X_i)\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathsf{P}(X_i \in A_i)\, \mathsf{P}(X_j \in A_j)}{\left(\sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(X_i \in A_i)\right)^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathsf{P}(X_i \in A_i, X_j \in A_j) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathsf{P}(X_i \in A_i)\, \mathsf{P}(X_j \in A_j)}{\left(\sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(X_i \in A_i)\right)^2}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\rho_{i,j}| \Big(\mathsf{P}(X_i \in A_i) + \mathsf{P}(X_j \in A_j) \Big)}{2 \left(\sum_{i=1}^n \mathsf{P}(X_i \in A_i) \right)^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\rho_{i,j}| \, \mathsf{P}(X_i \in A_i)}{\left(\sum_{i=1}^n \mathsf{P}(X_i \in A_i) \right)^2} \\
&\leq \frac{\sum_{i=1}^n \mathsf{P}(X_i \in A_i) \sup_{1 \leq i} \sum_{j=1}^n |\rho_{i,j}|}{\left(\sum_{i=1}^n \mathsf{P}(X_i \in A_i) \right)^2} \\
&\leq \frac{C}{\sum_{i=1}^n \mathsf{P}(X_i \in A_i)}.
\end{aligned}
$$

□

Tvrzení 2.2 (Borelovo-Cantelliho lemma)**.** *Nechť* $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ *je normovaná gaussovská posloupnost splňující podmínku* (P) *a* $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ *posloupnost množin z* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *taková, že*

$$\sum_{i=1}^\infty P(X_i \in A_i) = \infty. \tag{2.4}$$

Potom

$$P(\limsup_{i \to \infty} A_i) = 1.$$

Pokud posloupnost $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ *splňuje*

$$\sum_{i=1}^\infty P(X_i \in A_i) < \infty, \tag{2.5}$$

pak

$$P(\limsup_{i \to \infty} A_i) = 0.$$

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že platí (2.4). Z lemmatu 2.1 pak dostáváme, že

$$\mathsf{E} \left(\frac{\sum_{j=1}^n I_{A_i}(X_i)}{\sum_{i=1}^n \mathsf{P}(X_i \in A_i)} - 1 \right)^2 \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

čili

$$\frac{\sum_{j=1}^n I_{A_i}(X_i)}{\sum_{i=1}^n \mathsf{P}(X_i \in A_i)} \xrightarrow[n \to \infty]{L^2} 1.$$

Jelikož předpokládáme platnost podmínky (2.4), pak je nutně $\sum_{i=1}^\infty I_{A_i}(X_i) = \infty$ skoro jistě. Protože se však jedná o součet pouze nul a jedniček a výsledný součet je nekonečno, muselo se v součtu vyskytnout nekonečně mnoho jedniček, což ale implikuje, že muselo nastat nekonečně mnoho z jevů $\{X_i \in A_i\}$.

Nyní zas předpokládejme platnost (2.5). Výraz na pravé straně nerovnosti v lemmatu 2.1 tak konverguje ke konečnému číslu, tím pádem ke konečnému číslu konverguje i výraz na levé straně. To se však mohlo stát pouze v případě, že $\sum_{i=1}^\infty I_{A_i}(X_i) < \infty$ skoro jistě. V tom případě ale nemohlo nastat nekonečně mnoho z jevů $\{X_i \in A_i\}$.

□

2.2 Silný zákon velkých čísel

Pro posloupnost $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ nezávislých náhodných veličin z $N(0,1)$ a $f \in L^1(\gamma)$ nám silný zákon velkých čísel říká, že

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i) \xrightarrow[n\to\infty]{s.j.} \mathsf{E}\, f(X_1).$$

Otázkou je, zda by toto tvrzení platilo, pokud bychom neměli k dispozici předpoklad nezávislosti. V této sekci ukážeme, že pro normované gaussovské posloupnosti, kde obecně předpoklad nezávislosti nemáme, splňující podmínku (P), silný zákon velkých čísel přesto platí.

Jedním z nástrojů, který budeme potřebovat, je následující odhad na rozptyl součtu transformovaných složek normované gaussovské posloupnosti.

Lemma 2.3. *Nechť $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ je normovaná gaussovská posloupnost splňující podmínku* (P) *a $\{f_i\}_{i=1}^{\infty} \subset L^2(\gamma)$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$\operatorname{var}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(X_i)\right) \le C \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var} f_i(X_i).$$

Důkaz. Pro rozptyl součtu náhodných veličin obecně platí

$$\operatorname{var}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(X_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var} f_i(X_i) + \sum_{i\neq j} \operatorname{cov}\Big(f_i(X_i), f_j(X_j)\Big). \tag{2.6}$$

Definujeme-li funkce

$$\begin{aligned} g(x) &= f_i(x) - \mathsf{E}\, f_i(X_i),\\ h(x) &= f_j(x) - \mathsf{E}\, f_j(X_j), \end{aligned}$$

pak s využitím věty 1.2 dostáváme

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}\Big(f_i(X_i), f_j(X_j)\Big) &= \mathsf{E}\, g(X_i)h(X_j)\\ &\le |\rho_{i,j}|\sqrt{\mathsf{E}\,|g(X_i)|^2\, \mathsf{E}\,|h(X_j)|^2}\\ &= |\rho_{i,j}|\sqrt{\mathsf{E}\,|f_i(X_i) - \mathsf{E}\, f_i(X_i)|^2\, \mathsf{E}\,|f_j(X_j) - \mathsf{E}\, f_j(X_j)|^2}\\ &= |\rho_{i,j}|\sqrt{\operatorname{var} f_i(X_i) \operatorname{var} f_j(X_j)}. \end{aligned}$$

Použijeme-li tento odhad v (2.6), získáme

$$\begin{aligned} \operatorname{var}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(X_i)\right) &\le \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var} f_i(X_i) + \sum_{i\neq j} |\rho_{i,j}|\sqrt{\operatorname{var} f_i(X_i) \operatorname{var} f_j(X_j)}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |\rho_{i,j}|\sqrt{\operatorname{var} f_i(X_i) \operatorname{var} f_j(X_j)}\\ &\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |\rho_{i,j}|\frac{\operatorname{var} f_i(X_i) + \operatorname{var} f_j(X_j)}{2}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |\rho_{i,j}| \operatorname{var} f_i(X_i)\\ &\le C\sum_{i=1}^{n} \operatorname{var} f_i(X_i), \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat.

□

Tvrzení 2.4 (Silný zákon velkých čísel)**.** *Nechť* $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ *je normovaná gaussovská posloupnost splňující podmínku* (P) *a* $f \in L^1(\gamma)$. *Potom*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i) \xrightarrow[n\to\infty]{s.j.} \mathsf{E}\, f(X_1).$$

Důkaz. Na začátek si všimněme, že díky rozepsání $f = f^+ - f^-$ na kladnou a zápornou část, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $f \geq 0$. Pro $\alpha > 1$ definujeme posloupnost $\{k_n\}_{n=0}^{\infty}$ předpisem

$$k_n = \lfloor \alpha^n \rfloor, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

kde $\lfloor \cdot \rfloor$ značí dolní celou část. Z odhadů

$$\frac{\alpha^n - 1}{\alpha^{n+1}} \leq \frac{k_n}{k_{n+1}} \leq \frac{\alpha^n}{\alpha^{n+1} - 1}$$

plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{k_{n+1}} = \frac{1}{\alpha}.$$

Posloupnost $\{k_n\}_{n=0}^{\infty}$ je neklesající a konverguje do nekonečna. Potom tedy musí platit

$$\forall\, m \geq 1\, \exists\, n(m) \geq 1 : k_{n(m)-1} \leq m \leq k_{n(m)}. \tag{2.7}$$

Označíme-li

$$S_m = \sum_{i=1}^{m} f(X_i)$$

m-tý částečný součet, pak díky (2.7) a předpokladu, že f je nezáporné, platí

$$\frac{k_{n(m)-1}}{k_{n(m)}} \frac{S_{k_{n(m)-1}}}{k_{n(m)-1}} = \frac{S_{k_{n(m)-1}}}{k_{n(m)}} \leq \frac{S_m}{m} \leq \frac{S_{k_{n(m)}}}{k_{n(m)-1}} = \frac{k_{n(m)}}{k_{n(m)-1}} \frac{S_{k_{n(m)}}}{k_{n(m)}}. \tag{2.8}$$

Předpokládejme nyní, že

$$\forall\, \alpha > 1 : \frac{S_{k_n}}{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{s.j.} \mathsf{E}\, f(X_1). \tag{2.9}$$

Platí-li tento předpoklad, pak s užitím nerovností v (2.8) a limity spočtené výše obdržíme

$$\frac{1}{\alpha}\, \mathsf{E}\, f(X_1) = \frac{1}{\alpha} \liminf_{m\to\infty} \frac{S_{k_{n(m)-1}}}{k_{n(m)-1}} \leq \liminf_{m\to\infty} \frac{S_m}{m} \leq \limsup_{m\to\infty} \frac{S_m}{m} \leq$$
$$\leq \alpha \limsup_{m\to\infty} \frac{S_{k_{n(m)}}}{k_{n(m)}} = \alpha\, \mathsf{E}\, f(X_1).$$

Jelikož tyto nerovnosti platí skoro jistě pro každé $\alpha > 1$, pak již musí

$$\frac{S_m}{m} \xrightarrow[m\to\infty]{s.j.} \mathsf{E}\, f(X_1).$$

K dokončení důkazu nám tak stačí pouze ukázat platnost (2.9). Mějme tedy $\alpha > 1$ pevné. Všimněme si, že platí

$$\mathsf{E}\, f(X_1) < \infty \iff \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(f(X_1) \geq i) < \infty \iff \mathsf{P}(\limsup_{i\to\infty}\{f(X_i) \geq i\}) = 0, \tag{2.10}$$

kde druhá ekvivalence plyne z tvrzení 2.2 a první ekvivalenci zase dostáváme z následujícího odhadu pro nezápornou náhodnou veličinu Y:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(Y \geq i) - \mathsf{E}\, Y\right| &= \left|\sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(Y \geq i) - \int_0^{\infty} (1 - F_Y(s))\, \mathrm{d}s\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(Y \geq i) - \int_0^{\infty} \mathsf{P}(Y \geq s)\, \mathrm{d}s\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{N}} \int_i^{\infty} \mathrm{d}\,\mathsf{P}_Y\; \mathrm{d}\mu(i) - \int_0^{\infty}\int_s^{\infty} \mathrm{d}\,\mathsf{P}_Y\; \mathrm{d}s\right|,
\end{aligned}$$

kde μ je čítací míra. S užitím Fubiniovy věty potom obdržíme

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(Y \geq i) - \mathsf{E}\, Y\right| &= \left|\int_1^{\infty}\int_{\{1,2,\dots,\lfloor x\rfloor\}} \mathrm{d}\mu\, \mathrm{d}\,\mathsf{P}_Y(x) - \int_0^{\infty}\int_0^{x} \mathrm{d}s\, \mathrm{d}\,\mathsf{P}_Y(x)\right| \\
&\leq \left|\int_0^{\infty}\int_{\{1,2,\dots,\lfloor x\rfloor\}} \mathrm{d}\mu\, \mathrm{d}\,\mathsf{P}_Y(x) - \int_0^{\infty}\int_0^{x} \mathrm{d}s\, \mathrm{d}\,\mathsf{P}_Y(x)\right| \\
&= \left|\int_0^{\infty}\left(\int_{\{1,2,\dots,\lfloor x\rfloor\}} \mathrm{d}\mu - \int_0^{x} \mathrm{d}s\right) \mathrm{d}\,\mathsf{P}_Y(x)\right| \\
&= \left|\int_0^{\infty} (\lfloor x\rfloor - x)\, \mathrm{d}\,\mathsf{P}_Y(x)\right| \\
&\leq \int_0^{\infty} \left|\lfloor x\rfloor - x\right| \mathrm{d}\,\mathsf{P}_Y(x) \\
&\leq \int_0^{\infty} \mathrm{d}\,\mathsf{P}_Y(x) = \mathsf{P}(Y \geq 0) = 1.
\end{aligned}$$

V tvrzení věty předpokládáme, že $f \in L^1(\gamma)$, tedy $\mathsf{E}\, f(X_1) < \infty$. Z ekvivalence mezi prvním a třetím výrokem v (2.10) dostáváme

$$\frac{S_{k_n} - \mathsf{E}\, S_{k_n}}{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{s.j.} 0 \iff \frac{S^c_{k_n} - \mathsf{E}\, S_{k_n}}{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{s.j.} 0,$$

kde $S^c_m = \sum_{i=1}^m f^c(X_i)$ a $f^c(X_i) = f(X_i) I\{f(X_i) < i\}$. Dále také

$$\mathsf{E}[f(X_i) I\{f(X_i) \geq i\}] = \mathsf{E}\, f(X_i) - \mathsf{E}[f(X_i) I\{f(X_i) < i\}] \xrightarrow[i\to\infty]{} 0.$$

Pak nám zřejmě budou konvergovat k nule i průměry těchto členů, tedy

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}[f(X_i) I\{f(X_i) \geq i\}] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

a tudíž

$$\frac{S_{k_n} - \mathsf{E}\, S_{k_n}}{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{s.j.} 0 \iff \frac{S^c_{k_n} - \mathsf{E}\, S^c_{k_n}}{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{s.j.} 0. \tag{2.11}$$

Posloupnost v (2.11) pak konverguje skoro jistě k nule právě tehdy, když

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \mathsf{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\{|S^c_{k_n} - \mathsf{E}\, S^c_{k_n}| > \varepsilon\, k_n\}\right) = 0.$$

Platnost této podmínky můžeme z obecného Borelova-Cantelliho lemmatu zajistit ověřením konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(|S_{k_n}^c - \mathsf{E}\, S_{k_n}^c| > \varepsilon\, k_n).$$

Jelikož platí

$$\mathsf{E}\,|f^c(X_i)|^2 = \mathsf{E}[f(X_i)^2 I\{f(X_i) < i\}] \le \mathsf{E}[i^2 I\{f(X_i) < i\}] \le \mathsf{E}\, i^2 = i^2 < \infty,$$

můžeme užít lemma 2.3. To nám spolu s Čebyševovou nerovností dává

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(|S_{k_n}^c - \mathsf{E}\, S_{k_n}^c| > \varepsilon\, k_n) &\le \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{var} S_{k_n}^c}{k_n^2} \\
&\le \frac{C}{\varepsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n^2} \sum_{i=1}^{k_n} \operatorname{var} f^c(X_i) \\
&= \frac{C}{\varepsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\operatorname{var} f^c(X_i)}{k_n^2} I_{\{1,2,\ldots,k_n\}}(i) \\
&= \frac{C}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{var} f^c(X_i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n^2} I_{\{1,2,\ldots,k_n\}}(i) \\
&= \frac{C}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{var} f^c(X_i) \sum_{\substack{n=1 \\ i \le k_n}}^{\infty} \frac{1}{k_n^2}.
\end{aligned}$$

Dále existuje konstanta $C_\alpha \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\sum_{\substack{n=1 \\ i \le k_n}}^{\infty} \frac{1}{k_n^2} \le \frac{C_\alpha}{i^2}, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Potom tak dostáváme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(|S_{k_n}^c - \mathsf{E}\, S_{k_n}^c| > \varepsilon\, k_n) \le \frac{C_\alpha \cdot C}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\operatorname{var} f^c(X_i)}{i^2}.$$

Zároveň ale platí odhad

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\operatorname{var} f^c(X_i)}{i^2} &\le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathsf{E}(f^c(X_i))^2}{i^2} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathsf{E}[f(X_1)^2 I\{f(X_1) < i\}]}{i^2} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \sum_{j=1}^{i} \mathsf{E}[f(X_1)^2 I\{j-1 \le f(X_1) < j\}] \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \mathsf{E}[f(X_1)^2 I\{j-1 \le f(X_1) < j\}] \sum_{i=j}^{\infty} \frac{1}{i^2} \\
&\le \sum_{j=1}^{\infty} \mathsf{E}[f(X_1)^2 I\{j-1 \le f(X_1) < j\}] \int_j^{\infty} \frac{2}{x^2}\, \mathrm{d}x \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{j}\, \mathsf{E}[f(X_1)^2 I\{j-1 \le f(X_1) < j\}] \\
&\le 2 \sum_{j=1}^{\infty} \mathsf{E}[f(X_1) I\{j-1 \le f(X_1) < j\}] = 2\, \mathsf{E}\, f(X_1) < \infty.
\end{aligned}$$

Ukázali jsme, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(|S_{k_n}^c - \mathsf{E}\, S_{k_n}^c| > \varepsilon\, k_n) < \infty,$$

z čehož plyne konvergence v (2.11). Jelikož platí $\mathsf{E}\, \frac{S_{k_n}}{k_n} = \mathsf{E}\, f(X_1)$, pak z věty o spojité transformaci dostáváme

$$\frac{S_{k_n}}{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{s.j.} \mathsf{E}\, f(X_1),$$

čímž jsme dokázali (2.9) a tím i celé tvrzení.

$\square$

Závěr

V práci jsme se zabývali Gebeleinovou nerovností a jejími aplikacemi pro normované gaussovské posloupnosti. Nejdříve jsme nerovnost zformulovali a následně ji převedli do podoby, která využívala pojmů funkcionální analýzy. Dále jsme definovali Hermitovy polynomy a ukázali, že při jejich vhodné normalizaci tvoří ortonormální bázi prostoru L^2 s gaussovskou mírou a lze s jejich pomocí vyjádřit Mehlerovo jádro. Tyto vlastnosti jsme pak použili k důkazu Gebeleinovy nerovnosti.

Dále jsme na základě Gebeleinovy nerovnosti odvodili několik důsledků pro normované gaussovské posloupnosti. Ukázali jsme, že pokud jejich autokorelační funkce $\rho_{i,j}$ splňuje podmínku

$$\sup_i \sum_j |\rho_{i,j}| < \infty,$$

pak stále platí Borelovo-Cantelliho lemma či silný zákon velkých čísel i přesto, že už nepředpokládáme nezávislost členů posloupnosti.

V [1] jsou navíc ukázány další zajímavé důsledky Gebeleinovy nerovnosti, kterými jsme se v práci už nezabývali. Pro ukázku například zmiňme, že pro normované gaussovské posloupnosti splňující podmínku výše, lze bez předpokladu nezávislosti ukázat platnost zákona iterovaného logaritmu či verze silného zákona velkých čísel, kde jednotlivé členy posloupnosti transformujeme různými funkcemi.

Nakonec se lze tázat, zda by šla Gebeleinova nerovnost a zde ukázané aplikace nějakým způsobem zobecnit. Tomuto tématu se věnuje [7], kde jsou námi ukázané výsledky zobecněny do vícerozměrných prostorů.

Seznam použité literatury

[1] Marek Beśka and Zbigniew Ciesielski. Gebelein's inequality and its consequences. *Banach Center Publications*, 1(72):11–23, 2006.

[2] SJL Van Eijndhoven and JLH Meyers. New orthogonality relations for the Hermite polynomials and related Hilbert spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 146(1):89–98, 1990.

[3] Ivan Nourdin and Giovanni Peccati. *Normal approximations with Malliavin calculus: from Stein's method to universality.* Cambridge University Press, 2012.

[4] Walter Rudin. *Functional analysis.* International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York, Second edition, 1991.

[5] In-Hyok Park and Tae-Young Seo. A proof of the Legendre duplication formula for the gamma function. *East Asian mathematical journal*, 14(2):321–327, 1998.

[6] George Neville Watson. Notes on generating functions of polynomials:(2) Hermite polynomials. *Journal of the London Mathematical Society*, 1(3):194–199, 1933.

[7] Mark Veraar. Correlation inequalities and applications to vector-valued Gaussian random variables and fractional Brownian motion. *Potential Analysis*, 30(4):341–370, 2009.