



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA**  
Univerzita Karlova

**BAKALÁRSKA PRÁCA**

Jakub Jelenčiak

**Vektorová autoregresia**

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedúci bakalárskej práce: prof. RNDr. Tomáš Cipra, DrSc.

Študijný program: Matematika

Študijný obor: Obecná matematika

Praha 2022

Prehlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracoval samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov, literatúry a ďalších odborných zdrojov. Táto práca nebola využitá na získanie iného alebo rovnakého titulu.

Beriem na vedomie, že sa na moju prácu vzťahujú práva a povinnosti vyplývajúce zo zákona č. 121/2000 Zb., autorského zákona v platnom znení, najmä skutočnosť, že Univerzita Karlova má právo na uzavretie licenčnej zmluvy o použití tejto práce ako školského diela podľa §60 ods. 1 autorského zákona

V ..... dňa .....

Podpis autora

Chcel by som týmto poďakovať vedúcemu bakalárskej práce, prof. RNDr. Tomášovi Čiprovi, DrSc., za cenné rady, ochotu a pomoc pri písaní práce.

Názov práce: Vektorová autoregresia

Autor: Jakub Jelenčiak

Katedra: Katedra pravdepodobnosti a matematické statistiky

Vedúci bakalárskej práce: prof. RNDr. Tomáš Cipra, DrSc., Katedra pravdepodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Vektorový autoregresný model VAR patrí medzi najpoužívanejšie viac-rovnicové modely hlavne v oblasti finančnej ekonometrie. Hlavnou úlohou tejto práce je spracovanie základnej teórie VAR modelov a ilustrácia aplikácie teórie na reálnych dátach. Na začiatku práce popíšeme vlastnosti viacrozmerných časových radov a uvedieme k nim základné lineárne modely. Následne sa podrobne venujeme modelu VAR, a to jeho popisu, konštrukcii a aplikácii. V konštrukcii sa zameriavame hlavne na identifikáciu rádu, odhad modelu pomocou OLS metódy a diagnostiku. V rámci diagnostiky overujeme základné predpoklady modelu, a to stacionaritu, nekorelovanosť rezíduí a normalitu. V aplikácii sa zameriavame hlavne na popis a vysvetlenie Grangerovej kauzality. V poslednej časti aplikujeme zavedenú teóriu na reálne dáta v dvoch príkladoch. Ilustrujeme na nich konštrukciu modelu VAR. V druhom príklade navyše analyzujeme kauzalitu a diskutujeme nadobudnuté výsledky.

Kľúčové slová: VAR, vektorová autoregresia, viacrozmerné časové rady

Title: Vector autoregression

Author: Jakub Jelenčiak

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: prof. RNDr. Tomáš Cipra, DrSc., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: Vector autoregression model VAR belongs to the most used multiple time series models mainly in field of financial econometrics. The main role of this text is to survey basic theory of VAR models and to illustrate application of theory on real data. At first the properties of multiple time series and basic linear models are described. Then we focus on the VAR model, more specifically on its description, construction and application. In the construction subsection our primary focus is on the order identification, model estimation by OLS method and diagnostics. In the diagnostics basic assumptions of the model are checked, more specifically stationarity, correlation of the residuals and normality. In applications we focus on explanation and description of Granger causality. In the last section previously described theory is applied on real data in two examples. On them we illustrate construction of the VAR model. Furthermore, in the second example we also analyze causality and discuss the results.

Keywords: VAR, vector autoregression, multiple time series

# Obsah

Úvod	2
<b>1 Viacrozmerné časové rady</b>	<b>3</b>
1.1 Stacionarita . . . . .	3
1.2 Autokovariančná a autokorelačná maticová funkcia . . . . .	3
1.3 Parciálna autokorelačná maticová funkcia . . . . .	4
1.4 Empirické odhady zavedených pojmov . . . . .	4
<b>2 Lineárne modely viacrozmerných časových radov</b>	<b>6</b>
2.1 Viacrozmerný lineárny proces . . . . .	6
2.2 Viacrozmerný proces klzavých súčtov . . . . .	7
2.3 Viacrozmerný zmiešaný proces . . . . .	7
2.4 Viacrozmerný autoregresný proces . . . . .	7
<b>3 Vektorová autoregresia VAR</b>	<b>8</b>
3.1 Popis modelu . . . . .	8
3.2 Konštrukcia modelu . . . . .	10
3.2.1 Identifikácia rádu modelu . . . . .	10
3.2.2 Odhad modelu VAR . . . . .	13
3.2.3 Diagnostika modelu VAR . . . . .	16
3.2.4 Konštrukcia predpovede v modeli VAR . . . . .	18
3.3 Aplikácie . . . . .	19
3.3.1 Kauzalita . . . . .	19
3.3.2 Odozva na impulz . . . . .	20
3.3.3 Dekompozícia rozptylu . . . . .	20
<b>4 Numerická štúdia</b>	<b>21</b>
4.1 Príklad 1 . . . . .	21
4.1.1 Identifikácia . . . . .	21
4.1.2 Odhad . . . . .	21
4.1.3 Diagnostika . . . . .	23
4.2 Príklad 2 . . . . .	25
4.2.1 Identifikácia . . . . .	25
4.2.2 Odhad . . . . .	26
4.2.3 Diagnostika . . . . .	26
4.2.4 Kauzalita . . . . .	29
<b>Záver</b>	<b>31</b>
<b>Zoznam použitej literatúry</b>	<b>32</b>
<b>Zoznam obrázkov</b>	<b>33</b>
<b>Zoznam tabuliek</b>	<b>34</b>

# Úvod

Finančná ekonometria je na pomedzí matematických modelov, štatistickej analýzy a financií. V ekonometrii sa používajú ekonomické modely, ktoré popisujú hlavné rysy ekonomického javu, ktoré rozhodujú o jeho charakteristike. Cieľom je overenie ekonomických teórií pomocou pozorovateľných dát, či odhalení nových kvantitatívnych vzťahov medzi ekonomickými procesmi. Ekonometrické modely zapadajú do komplexných systémov modelov, ktoré sa využívajú v makroekonómii aj mikroekonómii.

K týmto modelom patrí aj vektorový autoregresný model VAR, ktorý je široko používaný práve v oblasti finančnej ekonometrie. V poslednom čase sa modely VAR začali vo väčšom používať aj v iných oblastiach, napr. epidemiológii, medicíne či biológii. VAR je model viacrozmerných časových radov, ktorého cieľom je zachytiť súvis medzi momentálnymi pozorovaniami premennej s jej minulými pozorovaniami a minulými pozorovaniami ostatných premenných v systéme. Model obsahuje pre každú premennú rovnicu, ktorá modeluje jej vývoj v čase. Každá rovnica sa skladá z minulých pozorovaní premennej, minulých pozorovaní zvyšných premenných v modeli a reziduálnej zložky.

V prvej kapitole si predstavíme vo všeobecnosti viacrozmerné časové rady a ich základné vlastnosti. Zadefinujeme stacionaritu, autokovariančnú a (parciálnu) autokorelačnú maticovú funkciu a ich empirické odhady. V ďalšej kapitole v krátkosti popíšeme základné lineárne modely viacrozmerných časových radov, medzi ktoré patrí aj model VAR.

V tretej kapitole sa budeme podrobne venovať práve modelu VAR. Základnú štruktúru tvorí popis modelu, jeho konštrukcia a aplikácie. V rámci konštrukcie modelu sa zameriame na identifikáciu rádu modelu, odhad, diagnostiku a konštrukciu predpovede. Cieľom diagnostiky je overiť predpoklady, ktoré sú pre správnu interpretáciu modelu VAR nevyhnutné.

V poslednej kapitole aplikujeme zavedenú teóriu pomocou softwaru R na dva praktické príklady a diskutujeme nadobudnuté výsledky.

# 1. Viacrozmerné časové rady

V tejto kapitole v krátkosti všeobecne opíšeme viacrozmerné časové rady a ich základné vlastnosti, viz Cipra (2013).

$M$ -rozmerným časovým radom chápeme postupnosť výsledkov pozorovaní  $m$  náhodných veličín tvoriacich  $m$ -rozmerný náhodný vektor v diskretnom čase  $t$

$$\mathbf{y}_t = (y_{1t}, \dots, y_{mt})^\top. \quad (1.1)$$

V nasledujúcom texte budeme značiť viacrozmerný, resp. vektorový, časový rad ako  $\{\mathbf{y}_t\}$ .

## 1.1 Stacionarita

Slabá stacionarita  $m$ -rozmerného časového radu znamená, že daný časový rad je do druhého momentu invariantný voči posunom v čase.

Povieme, že  $m$ -rozmerný časový rad je *slabo stacionárny*, ak má nasledujúce dve vlastnosti:

$$1) E(\mathbf{y}_t) = \boldsymbol{\mu} < \infty$$

pre všetky hodnoty  $t$ , kde  $\boldsymbol{\mu}$  je  $m$ -rozmerný stĺpcový vektor stredných hodnôt jednotlivých časových radov,

$$2) cov(\mathbf{y}_s, \mathbf{y}_t) = E(\mathbf{y}_s - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu})^\top = cov(\mathbf{y}_{s+h}, \mathbf{y}_{t+h})$$

pre ľubovoľné  $h$ . Špeciálne teda platí

$$var(\mathbf{y}_t) = \boldsymbol{\Sigma}_{yy} < \infty,$$

t.j. rozptyly a vzájomné kovariancie časových radov sú konštantné. Pri popise teoretických charakteristík  $m$ -rozmerného časového radu budeme predpokladať slabú stacionaritu, ktorú budeme ďalej označovať zjednodušene *stacionarita*.

## 1.2 Autokovariančná a autokorelačná maticová funkcia

Pre stacionárny časový rad môžeme definovať nasledujúce funkcie: *Autokovariančná maticová funkcia* pre oneskorenie  $k$  časového radu  $\{\mathbf{y}_t\}$  je definovaná ako

$$\boldsymbol{\Gamma}_k = cov(\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_{t-k}) = E(\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{y}_{t-k} - \boldsymbol{\mu})^\top,$$

kde na diagonále sú autokovariancie jednotlivých radov v čase  $t$  a  $t-k$ , nad a pod diagonálou kovariancie príslušných dvojíc radov v čase  $t$  a  $t-k$ .

*Autokorelačná maticová funkcia* pre oneskorenie  $k$  je definovaná ako

$$\boldsymbol{\rho}_k = \mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}_k\mathbf{D}^{-1},$$

kde  $\mathbf{D}$  je diagonálna matica, ktorá má na diagonále smerodatné odchyľky príslušných časových radov, teda sú to odmocniny diagonálnych prvkov  $\Gamma_0$ .

Ak označíme vzájomnú kovarianciu medzi radmi  $\{y_{i,t}\}$  a  $\{y_{j,t-k}\}$  ako  $\gamma_{ij,k}$  (teda  $\gamma_{ij,k}$  je  $ij$ -ty element matice  $\Gamma_k$ ), potom sú prvky  $\gamma_{11,0}, \dots, \gamma_{mm,0}$ , ležiace na diagonále  $\Gamma_0$ , rozptyly časových radov  $y_{1t}, \dots, y_{mt}$ . Z toho vyplýva, že vzájomná korelácia medzi  $\{y_{i,t}\}$  a  $\{y_{j,t-k}\}$  je

$$\rho_{ij,k} = \frac{\gamma_{ij,k}}{\sqrt{\gamma_{ii,0}}\sqrt{\gamma_{jj,0}}},$$

čo je  $ij$ -ty element  $\boldsymbol{\rho}_k$ . Zrejme  $\rho_{ij,k}$  popisuje, ako sú medzi sebou dané rady závislé. Je vidno, že obe autokovariančná aj autokorelačná funkcia sú párne, teda platí

$$\Gamma_k = \Gamma_{-k}^\top, \boldsymbol{\rho}_k = \boldsymbol{\rho}_{-k}^\top.$$

Preto sa môžeme obmedziť iba na prípad  $k \geq 0$ . Navyiac platí, že matica  $\boldsymbol{\rho}_0$  má na hlavnej diagonále jednotky.

### 1.3 Parciálna autokorelačná maticová funkcia

Parciálna autokorelačná maticová funkcia pre oneskorenie  $k$ , značená ako  $\boldsymbol{\rho}_{kk}$ , má súvislosť s odpovedajúcim parametrom modelu

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\rho}_{k1}\mathbf{y}_{t-1} + \dots + \boldsymbol{\rho}_{kk}\mathbf{y}_{t-k} + \boldsymbol{\varepsilon}_t,$$

kde  $\{\boldsymbol{\varepsilon}_t\}$  je viacrozmerový biely šum (viz odstavec 2.1), pre ktorý platí, že  $E(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbf{0}$  (teda má nulový vektor stredných hodnôt) a jeho zložky sú v rôznych časoch nekorelované s hodnotami  $\mathbf{y}_{t-k}$ ,  $k \geq 1$ .

Vyjadrením  $\boldsymbol{\rho}_{kk}$  z vyššie uvedeného vzťahu dostaneme tvar (viz Křivý (2012))

$$\boldsymbol{\rho}_{kk} = (\Gamma_k - \mathbf{a}_k^\top \mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{b}_k)(\Gamma_0 - \mathbf{b}_k^\top \mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{b}_k)^{-1}, \text{ kde}$$

$$\mathbf{A}_k = \begin{pmatrix} \Gamma_0 & \Gamma_1^\top & \dots & \Gamma_{k-2}^\top \\ \Gamma_1 & \Gamma_0 & \dots & \Gamma_{k-3}^\top \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{k-2} & \Gamma_{k-3} & \dots & \Gamma_0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_k = \begin{pmatrix} \Gamma_{k-1}^\top \\ \Gamma_{k-2}^\top \\ \vdots \\ \Gamma_1^\top \end{pmatrix}, \mathbf{a}_k = \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Parciálna autokorelačná maticová funkcia vyjadruje priamy vzťah medzi  $\{\mathbf{y}_t\}$  a  $\{\mathbf{y}_{t-k}\}$ , teda všetky oneskorené hodnoty medzi nimi (t.j.  $\{\mathbf{y}_{t-k+1}\}, \dots, \{\mathbf{y}_{t-1}\}$ ) sú pevné.

Grafické zaznamenanie (parciálnej) autokorelačnej maticovej funkcie je nazývané (parciálny) *korelogram*. Ten popisuje korelačnú štruktúru daného časového radu.

### 1.4 Empirické odhady zavedených pojmov

Nech je dĺžka časového radu  $\{\mathbf{y}_t\}$   $n$  a jej rozmer je  $m$ . Ako empirický odhad vektoru stredných hodnôt časového radu sa používa vektor aritmetických



priemerov  $\bar{\mathbf{y}}$ , kde  $i$ -ta zložka je vypočítaná ako

$$\bar{y}_i = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y_{it}.$$

Ako empirický odhad *autokovariančnej maticovej funkcie* sa používa výraz

$$\mathbf{C}_k = \frac{1}{n} \sum_{t=k+1}^n (\mathbf{y}_t - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_{t-k} - \bar{\mathbf{y}})^\top, k = 0, 1, \dots, n-1,$$

ktorý má na diagonále empirické odhady autokovariancie jednotlivých časových radov, nad a pod diagonálou má empirické odhady kovariancií príslušných časových radov (v časoch  $t$  a  $t-k$ ):

$$c_{ij,k} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\mathbf{y}_{it} - \bar{y}_i)(\mathbf{y}_{jt-k} - \bar{y}_j)^\top, i, j = 1, 2, \dots, m.$$

Ako empirický odhad *autokorelačnej maticovej funkcie* sa používa

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C}_k \mathbf{D}^{-1},$$

kde  $\mathbf{D}$  je diagonálna matica s odhadnutými smerodatnými odchýlkami daných časových radov,  $i$ -ty prvok na diagonále matice  $\mathbf{R}_k$  je

$$R_{ii,k} = \frac{c_{ii,k}}{c_{ii,0}}, i = 1, \dots, m.$$

Empirický odhad *parciálnej autokorelačnej maticovej funkcie*  $\mathbf{R}_{kk}$  dostaneme dosadením  $\mathbf{C}_k$  za  $\mathbf{\Gamma}_k$  vo vzorci pre parciálnu maticovú autokorelačnú funkciu. Dostávame

$$\mathbf{R}_{kk} = (\mathbf{C}_k - \mathbf{a}_k^\top \mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{b}_k)(\mathbf{C}_0 - \mathbf{b}_k^\top \mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{b}_k)^{-1}.$$

## 2. Lineárne modely viacrozmerných časových radov

V tejto kapitole v krátkosti priblížime tvary základných lineárnych modelov viacrozmerných časových radov.

### 2.1 Viacrozmerný lineárny proces

Viacrozmerný lineárny proces môžeme chápať ako lineárnu kombináciu rovnako rozdelených, vzájomne nekorelovaných náhodných vektorov. Definujeme  $m$ -rozmerný lineárny proces ako nekonečný rad

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\varepsilon}_t + \boldsymbol{\Psi}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} + \boldsymbol{\Psi}_2 \boldsymbol{\varepsilon}_{t-2} + \dots,$$

kde  $\boldsymbol{\Psi}_i, i = 1, 2, 3, \dots$  je  $m \times m$  matica parametrov a  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  je  $m$ -rozmerný biely šum, t.j. zložky vektorov  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  majú nulovú strednú hodnotu, sú v rôznych časoch navzájom nekorelované, ale v rovnakom čase môžu byť korelované s konštantnou pozitívne definitnou rozptylovou maticou  $\boldsymbol{\Sigma}$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_t) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_s \boldsymbol{\varepsilon}_t^\top) &= \delta_{st} \boldsymbol{\Sigma}, \end{aligned}$$

viz Cipra (2013, 12.1.10). Použitím operátora časového oneskorenia  $B$ , ktorý posúva časový index dozadu, môžeme prepísať rovnicu do kompaktnejšieho tvaru

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\Psi}(B) \boldsymbol{\varepsilon}_t,$$

kde

$$\boldsymbol{\Psi}(B) = \mathbf{I} + \sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{\Psi}_k B^k.$$

Predpokladá sa, že korene polynómu  $\boldsymbol{\Psi}(z)$  ležia mimo jednotkový kruh v komplexnej rovine, čo potom znamená, že tento proces je stacionárny. Za predpokladu, že je proces invertibilný, dá sa zapísať ako

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\Pi}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\Pi}_2 \mathbf{y}_{t-2} + \dots + \boldsymbol{\varepsilon}_t,$$

teda pomocou operátora  $B$  ako

$$\boldsymbol{\Pi}(B) \mathbf{y}_t = \boldsymbol{\varepsilon}_t.$$

Podmienka invertibility je splnená, podobne ako vyššie, ak korene polynómu  $\boldsymbol{\Pi}(z)$  ležia mimo jednotkový kruh v komplexnej rovine. Platí vzťah  $\boldsymbol{\Psi}(B) * \boldsymbol{\Pi}(B) = 1$ .

## 2.2 Viacrozmerný proces kĺzavých súčtov

Model viacrozmerneho procesu kĺzavých súčtov rádu  $q$ , skrátene označovaný VMA( $q$ ), môžeme definovať ako

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\varepsilon}_t + \boldsymbol{\Theta}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} + \boldsymbol{\Theta}_2 \boldsymbol{\varepsilon}_{t-2} + \cdots + \boldsymbol{\Theta}_q \boldsymbol{\varepsilon}_{t-q}.$$

Opäť pomocou operátora časového oneskorenia  $B$  môžeme rovnicu prepísať do skráteneho tvaru

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\Theta}(B) \boldsymbol{\varepsilon}_t,$$

kde

$$\boldsymbol{\Theta}(B) = \mathbf{I} + \sum_{k=1}^q \boldsymbol{\Theta}_k B^k.$$

Proces VMA( $q$ ) je vždy stacionárny. Invertibilný je v prípade, ak všetky korene polynómu  $\boldsymbol{\Theta}(z)$  ležia mimo jednotkový kruh v komplexnej rovine.

## 2.3 Viacrozmerný zmiešaný proces

Viacrozmerne zmiešaný proces rádu  $p$  a  $q$ , označovaný ako VARMA( $p, q$ ), má model tvaru

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\Phi}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\Phi}_2 \mathbf{y}_{t-2} + \cdots + \boldsymbol{\Phi}_p \mathbf{y}_{t-p} + \boldsymbol{\varepsilon}_t + \boldsymbol{\Theta}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} + \boldsymbol{\Theta}_2 \boldsymbol{\varepsilon}_{t-2} + \cdots + \boldsymbol{\Theta}_q \boldsymbol{\varepsilon}_{t-q},$$

resp. s použitím operátora  $B$

$$\boldsymbol{\Phi}(B) \mathbf{y}_t = \boldsymbol{\Theta}(B) \boldsymbol{\varepsilon}_t.$$

## 2.4 Viacrozmerný autoregresný proces

Viacrozmerne autoregresný proces rádu  $p$ , označovaný ako VAR( $p$ ), je popísaný modelom

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\Phi}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\Phi}_2 \mathbf{y}_{t-2} + \cdots + \boldsymbol{\Phi}_p \mathbf{y}_{t-p} + \boldsymbol{\varepsilon}_t,$$

čo vieme opäť pomocou operátora  $B$  zapísať ako

$$\boldsymbol{\Phi}(B) \mathbf{y}_t = \boldsymbol{\varepsilon}_t.$$

Tomuto špeciálnemu prípadu lineárneho viacrozmerneho procesu sa budeme v nasledujúcej časti venovať podrobnejšie.

# 3. Vektorová autoregresia VAR

V tejto kapitole bude podrobnejšie popísaný proces VAR, ktorý zachytáva vplyv na pozorovanú premennú zvyšnými premennými a minulými hodnotami pozorovanej premennej. Tvorí ho systém rovníc, ktoré reprezentujú vzťahy medzi viacerými premennými. Pri modeloch VAR špecifikujeme, koľko časový rad obsahuje premenných a koľko obsahuje minulých pozorovaní, napr. označenie  $m$ -rozmerný VAR( $p$ ) znamená, že model má  $p$ -minulých pozorovaní a obsahuje  $m$  premenných.

Cieľom analýzy modelov VAR sú hlavne predpoved a štrukturálna analýza. Oproti jednorozmerným AR modelom môžeme získať viac informácií, keďže skúmaná premenná nezávisí len na svojich oneskorených hodnotách, ale aj na hodnotách zvyšných premenných v skúmanom VAR procese. Výhodou modelu VAR je aj fakt, že všetky premenné sú endogénne. To znamená, že sa všetky premenné generujú vnútri tohoto modelu a nevstupujú do modelu zvonku.

Nevýhodou modelu VAR je predpoklad stacionarity pri jeho konštrukcii. Ten v praxi často splnený nie je a na dosiahnutie stacionarity sa musí použiť transformácia dát, napr. diferencovanie, pri ktorom však dochádza k strate informácie.

Obsahom tejto kapitoly bude popis modelu, jeho konštrukcia a jeho aplikácie, ktoré boli spracované podľa Lütkepohl (2005).

## 3.1 Popis modelu

Všeobecne má model VAR( $p$ ) tvar

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\Phi}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\Phi}_2 \mathbf{y}_{t-2} + \cdots + \boldsymbol{\Phi}_p \mathbf{y}_{t-p} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.1)$$

kde  $\mathbf{y}_t$  je  $m$ -rozmerný náhodný vektor,  $\boldsymbol{\Phi}_i, i = 1, \dots, p$  sú matice koeficientov,  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  je biely šum a  $\boldsymbol{\nu}$  je (viacrozmerný) intercept, ktorý je nenulový v prípade nenulovej strednej hodnoty  $E(\mathbf{y}_t)$ .

Uvažujme model VAR(1) v tvare

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\Phi}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t. \quad (3.2)$$

Keď určíme začiatok ako  $t = 1$ , potom máme

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1 &= \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\Phi}_1 \mathbf{y}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \mathbf{y}_2 &= \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\Phi}_1 \mathbf{y}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ &= (\mathbf{I}_m + \boldsymbol{\Phi}_1) \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\Phi}_1^2 \mathbf{y}_0 + \boldsymbol{\Phi}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ &\vdots \\ \mathbf{y}_t &= (\mathbf{I}_m + \boldsymbol{\Phi}_1 + \cdots + \boldsymbol{\Phi}_1^{t-1}) \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\Phi}_1^t \mathbf{y}_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \boldsymbol{\Phi}_1^i \boldsymbol{\varepsilon}_{t-i}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Vidíme, že vektory  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_t$  sú určené jednoznačne hodnotami  $\mathbf{y}_0, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_t$ . Predpokladajme, že proces začal v nekonečnej minulosti. Potom podľa (3.3) máme

$$\mathbf{y}_t = (\mathbf{I}_m + \boldsymbol{\Phi}_1 + \cdots + \boldsymbol{\Phi}_1^j) \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\Phi}_1^{j+1} \mathbf{y}_{t-j-1} + \sum_{i=0}^j \boldsymbol{\Phi}_1^i \boldsymbol{\varepsilon}_{t-i}.$$

Pre  $j \rightarrow \infty$  konverguje  $(\mathbf{I}_m + \Phi_1 + \dots + \Phi_1^j)\boldsymbol{\nu}$  k  $(\mathbf{I}_m - \Phi_1)^{-1}\boldsymbol{\nu}$  (Lütkepohl (2005)[Appendix A, Proposition A.9.1]) a  $\Phi_1^{j+1}$  konverguje k nule. Za týchto podmienok môžeme povedať, že  $\mathbf{y}_t$  proces VAR(1) (3.2) je dobre definovaný stochastický proces

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu} + \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_1^i \boldsymbol{\varepsilon}_{t-i}, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

kde

$$\boldsymbol{\mu} = (\mathbf{I}_m - \Phi_1)^{-1}\boldsymbol{\nu}.$$

Prvý a druhý moment procesu  $\mathbf{y}_t$  sú

$$\begin{aligned} E(\mathbf{y}_t) &= \boldsymbol{\mu} \\ \Gamma_k &= \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_1^{k+i} \Sigma (\Phi_1^i)^\top, \end{aligned}$$

kde  $E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t^\top) = \Sigma$ .

Podmienka, že všetky vlastné čísla matice  $\Phi_1$  sú menšie ako 1, sa dá ekvivalentne zapísať ako  $\det(\mathbf{I}_m - \Phi_1 z) \neq 0$ ,  $|z| \leq 1$ . Rady, ktoré spĺňajú túto podmienku, sa nazývajú *stabilné*. Z definície stacionarity vidíme, že stabilné procesy sú *stacionárne*. Existujú aj nestabilné procesy, ktoré sú stacionárne, tými sa však v tejto práci nebudeme zaoberať.

Keďže proces VAR( $p$ ) sa dá zapísať vo forme VAR(1), vieme predchádzajúcu úvahu rozšíriť. Nech  $\mathbf{y}_t$  VAR( $p$ ) ako (3.1). Potom jeho príslušný zápis vo forme VAR(1) je

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{N} + \Phi \mathbf{Y}_{t-1} + \mathbf{E}_t,$$

kde

$$\begin{aligned} \Phi &= \begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \dots & \Phi_{p-1} & \Phi_p \\ \mathbf{I}_m & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \dots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \end{pmatrix}, & \mathbf{N} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\nu} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{Y}_t &= \begin{pmatrix} \mathbf{y}_t \\ \mathbf{y}_{t-2} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{t-p+1} \end{pmatrix}, & \mathbf{E}_t &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_t \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pre prvý a druhý moment  $\mathbf{Y}_t$  potom platí

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu} &= E(\mathbf{Y}_t) = (\mathbf{I}_{mp} - \Phi)^{-1}\boldsymbol{\nu} \\ \Gamma_k &= \sum_{i=0}^{\infty} \Phi^{k+i} \Sigma_E (\Phi^i)^\top, \end{aligned}$$

kde  $\Sigma_E = E(\mathbf{E}_t \mathbf{E}_t^\top)$ . Teda podmienka stability pre  $\mathbf{Y}_t$  je splnená, ak platí

$$\det(\mathbf{I}_{mp} - \Phi z) = \det(\mathbf{I}_m - \Phi_1 z - \dots - \Phi_p z^p) \neq 0, \quad |z| \leq 1.$$

Inak povedané, všetkých  $m$  koreňov tejto rovnice leží mimo jednotkový kruh v komplexnej rovine.

Pre výpočet autokovariancií budeme najprv uvažovať stabilný (t.j. aj stacionárny) VAR(1) proces (3.2). Tento proces môžeme vďaka predpokladu stability prepísať do tvaru

$$\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu} = \Phi_1(\mathbf{y}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\varepsilon}_t.$$

Vynásobením tejto rovnice hodnotou  $(\mathbf{y}_{t-k} - \boldsymbol{\mu})^\top$  a prejdením k strednej hodnote dostaneme

$$E[(\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{y}_{t-k} - \boldsymbol{\mu})^\top] = \Phi_1 E[(\mathbf{y}_{t-1} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{y}_{t-k} - \boldsymbol{\mu})^\top] + E[\boldsymbol{\varepsilon}_t(\mathbf{y}_{t-k} - \boldsymbol{\mu})].$$

Pre  $k = 0$  máme

$$\Gamma_0 = \Phi_1 \Gamma_{-1} + \Sigma = \Phi_1 \Gamma_1^\top + \Sigma$$

a pre  $k > 0$

$$\Gamma_k = \Phi_1 \Gamma_{k-1}.$$

Tieto dve rovnice nám dávajú rekurzívny spôsob výpočtu  $\Gamma_k$  a nazývajú sa *Yule-Walkerové* rovnice.

Pre proces VAR( $p$ ) rovnakým spôsobom získame *Yule-Walkerové* rovnice: pre  $k = 0$  v tvare

$$\Gamma_0 = \Phi_1 \Gamma_{-1} + \dots + \Phi_p \Gamma_{-p} + \Sigma = \Phi_1 \Gamma_1^\top + \dots + \Phi_p \Gamma_p^\top + \Sigma$$

a pre  $k > 0$  v tvare

$$\Gamma_k = \Phi_1 \Gamma_{k-1} + \dots + \Phi_p \Gamma_{k-p}.$$

Môžeme opäť rekurzívnym spôsobom vypočítať  $\Gamma_k$  pre  $h \geq p$ , ak poznáme hodnoty  $\Gamma_0, \dots, \Gamma_{p-1}$  a  $\phi_1, \dots, \phi_p$ . Autokovariančné matice pre  $|h| < p$  sa určia pomocou VAR(1) procesu, viz Lütkepohl (2005).

## 3.2 Konštrukcia modelu

Konštrukcia modelu VAR spočíva v štyroch hlavných krokoch:

1. Identifikácia rádu modelu
2. Odhad modelu
3. Diagnostika modelu
4. Konštrukcia predpovede v modeli

### 3.2.1 Identifikácia rádu modelu

V praxi je zvyčajne rád modelu  $p$  neznámy a je treba ho správne identifikovať. Príliš veľká hodnota  $p$  znižuje presnosť predikcie modelu, preto je dôležité

určiť optimálnu hodnotu. Všeobecne nemusí byť rád modelu jednoznačný. Ak uvažujeme (3.1) ako VAR( $p$ ), potom za podmienky  $\Phi_{p+1} = 0$  má model

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\nu} + \Phi_1 \mathbf{y}_{t-1} + \Phi_2 \mathbf{y}_{t-2} + \cdots + \Phi_p \mathbf{y}_{t-p} + \Phi_{p+1} \mathbf{y}_{t-p-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

rovnaké charakteristiky, teda model (3.1) je aj VAR( $p+1$ ) proces. Kvôli jednoduchošti budeme ďalej uvažovať jednoznačný rád procesu  $p$ . Teda  $\mathbf{y}_t$  bude proces VAR( $p$ ), ak  $\Phi_p \neq 0$  a  $\Phi_j = 0 \forall j > p$ , teda  $p$  bude najmenší možný rád modelu. Rád modelu je možné identifikovať viacrozmerným parciálnym korelogramom, no tento postup sa v praxi nepoužíva kvôli jeho zložitosti. Najčastejšie sa používajú metódy založené na štatistických testoch alebo informačných kritériách.

Najpoužívanejším štatistickým testom na identifikáciu rádu modelu je test pomerom vierohodností, LR-test (likelihood ratio). Za platnosti nulovej hypotézy spočívajúcej v stacionarite a normálnym rozdelením procesu VAR( $p$ ) má testová štatistika tvar

$$\lambda_{LR} = T[\ln|\tilde{\Sigma}_r| - \ln|\tilde{\Sigma}|],$$

pričom  $\lambda_{LR}$  má asymptoticky  $\chi^2(m^2q)$  rozdelenie s kritickým oborom  $\lambda_{LR} > \chi_{1-\alpha}^2(m^2q)$ .  $T$  je dĺžka časového radu,  $\tilde{\Sigma}_r$  je maximálne vierohodný odhad reziduálnej zložky  $\Sigma$  v obmedzenom modeli s nulovými maticami parametrov  $\Phi_i$  pre posledných  $q$  oneskorení,  $\tilde{\Sigma}$  je neobmedzený maximálne vierohodný odhad.

Na štatistike  $\lambda_{LR}$  a jej kritickom obore je postavená nasledujúca testovacia schéma. Nech  $M$  je nejaká známa horná hranica pre rád VAR. Potom testujeme nasledujúcu sériu nulových a alternatívnych hypotéz, kde pri každej hypotéze je predpoklad, že predchádzajúca nebola zamietnutá:

$$\begin{aligned} H_0^1 : \Phi_M = 0 & \text{ proti } H_1^1 : \Phi_M \neq 0 \\ H_0^2 : \Phi_{M-1} = 0 & \text{ proti } H_1^2 : \Phi_{M-1} \neq 0 \mid \Phi_M = 0 \\ & \vdots \\ H_0^i : \Phi_{M-i+1} = 0 & \text{ proti } H_1^i : \Phi_{M-i+1} \neq 0 \mid \Phi_M = \cdots = \Phi_{M-i+2} = 0 \\ & \vdots \\ H_0^M : \Phi_1 = 0 & \text{ proti } H_1^M : \Phi_1 \neq 0 \mid \Phi_M = \cdots = \Phi_2 = 0. \end{aligned}$$

Rád procesu VAR je určený následovne: Ak je zamietnutá nulová hypotéza  $H_0^i$ , potom je ako odhad rádu procesu VAR určená hodnota  $\tilde{p} = M - i + 1$ . Štatistika v  $i$ -tom teste má tvar

$$\lambda_{LR}(i) = T[\ln|\tilde{\Sigma}(M-i)| - \ln|\tilde{\Sigma}(M-i+1)|],$$

kde  $\tilde{\Sigma}(q)$  značí maximálne vierohodný odhad  $\Sigma$ , keď je model VAR( $q$ ) napasovaný na časový rad dĺžky  $T$ .

V prípade, že cieľom modelu je nejaký konkrétny účel, napríklad vyšetrovanie kauzality alebo predikcia vývoja premenných, ukazuje sa vhodnejšie použiť informačné kritériá. Nezaujíma nás totiž prioritne rád modelu, ale chceme mať model s čo najlepšou predikciou. Chceme teda zvoliť rád modelu tak, aby sme

minimalizovali MSE (mean squared error) predpovede. Akaike navrhol kritérium na výber rádu, ktoré je založené na približnej predpovedi matice MSE o jeden krok,

$$\Sigma_{\hat{y}}(1) = \frac{T + mq + 1}{T} \Sigma,$$

kde  $T$  je opäť dĺžka časového radu,  $q$  je rád procesu VAR napasovaný na dáta,  $m$  je dimenzia časovej rady. Matica kovariancií bieleho šumu je neznáma, a tak je nutné ju odhadnúť. Akaike odhad založil na odhade najmenších štvorcov s úpravou pomocou stupňov voľnosti,

$$\hat{\Sigma}(q) = \frac{T}{T - mq - 1} \tilde{\Sigma}(q),$$

kde  $\tilde{\Sigma}(q)$  je maximálne vierohodný odhad  $\Sigma(q)$  získaný napasovaním modelu VAR( $q$ ). Na získanie jednoznačného riešenia je vhodnejšie mať skalár miesto matice, a teda vezmeme determinant z výslednej hodnoty. Kritérium, ktoré takto dostaneme,

$$FPE(q) = \det\left[\frac{T + mq + 1}{T} \frac{T}{T - mq - 1} \tilde{\Sigma}(q)\right] = \left(\frac{T + mq + 1}{T - mq - 1}\right)^m \det \tilde{\Sigma}(q),$$

sa nazýva final prediction error, značené FPE. Odhad rádu VAR dostaneme optimálnym vybalansovaním hodnoty  $\frac{T + mq + 1}{T - mq - 1}$ , ktorá sa so zväčšujúcim  $q$  zväčšuje a hodnoty  $\det \tilde{\Sigma}(q)$ , ktorá sa so zväčšujúcim  $q$  znižuje. Odhad  $\hat{p}(FPE)$  je potom zvolený ako

$$\hat{p}(FPE) = \min\{FPE(q) | q = 0, 1, \dots, M\}.$$

Takže sa odhadnú modely VAR rádov  $0, \dots, M$ , vypočítajú sa príslušné hodnoty FPE( $q$ ) a ako odhad  $p$  je zvolená hodnota, ktorá minimalizuje FPE. Akaike neskôr navrhol podobné kritérium, nazývané Akaikeho informačné kritérium, značené AIC. Je definované ako

$$AIC(q) = \ln|\tilde{\Sigma}(q)| + \frac{2}{T}k,$$

kde  $k = m^2q + m$  značí počet parametrov, ktoré v modeli VAR( $q$ ) musíme odhadnúť. Hodnotu  $m$  však môžeme ignorovať, pretože rozdiel bude len v konštante, a tým sa rád modelu nezmení. Odhadom je potom opäť hodnota minimalizujúca toto kritérium

$$\hat{p}(AIC) = \min\{AIC(q) | q = 0, 1, \dots, M\}.$$

Ukazuje sa, že pre veľké hodnoty  $T$  dosahujú obe kritériá minimum v rovnakej hodnote.

Nech  $\mathbf{y}_t$  je stacionárny proces VAR( $p$ ), maximálny rád modelu  $M \geq p$  a  $\hat{p}$  je zvolený tak, aby minimalizoval

$$Cr(q) = \ln|\tilde{\Sigma}(q)| + \frac{qc_T}{T},$$



pre  $q = 0, 1, \dots, M$  a  $c_T$  je neklesajúca postupnosť reálnych čísel závislá na  $T$ . Potom je  $\hat{p}$  konzistentný odhad, ak platí

$$c_T \longrightarrow \infty, \frac{c_T}{T} \longrightarrow 0 \text{ pre } T \longrightarrow \infty.$$

Povieme, že odhad  $\hat{p}$  modelu VAR rádu  $p$  je konzistentný (teda konverguje v pravdepodobnosti), ak platí

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P(\hat{p} = p) = 1.$$

Na základe tejto definície nie sú odhady kritérií AIC a FPE konzistentné (viz Lütkepohl (2005)). Ďalšie dve kritériá, ktoré uvedieme, spĺňajú konzistentnosť.

Hannan-Quinn kritérium, značené ako HQ, je definované ako

$$HQ(q) = \ln|\tilde{\Sigma}(q)| + \frac{2 \ln \ln T}{T} qm^2.$$

Odhad  $\hat{p}(HQ)$  je zvolený tak, aby minimalizoval  $HQ(q)$  pre  $q = 0, 1, \dots, M$ .

Schwarzovo kritérium, značené SC, je definované ako

$$SC(q) = \ln|\tilde{\Sigma}(q)| + \frac{\ln T}{T} qm^2.$$

Odhad  $\hat{p}(SC)$  je opäť zvolený tak, aby minimalizoval  $SC(q)$  pre  $q = 0, 1, \dots, M$ .

Kritériá AIC a FPE síce nie sú konzistentné, ale keďže sú určené na minimalizovanie rozptylu, ukazuje sa, že môžu dosahovať lepšie predikčné výsledky, aj keď nemusia odhadnúť rád modelu správne. Preto býva pre účely predikcie často preferované kritérium AIC. Ako ukázali rôzne pokusy, celkovo nie je jednoznačné, ktoré kritérium je lepšie. Preto môže byť rozumný postup porovnať odhady rôznych kritérií a vykonať analýzu s rôznymi rádmí modelu VAR (viz Lütkepohl (2005)).

### 3.2.2 Odhad modelu VAR

Budeme predpokladať, že máme  $m$ -dimenzionálny časový rad generovaný stacionárnym procesom VAR rádu  $p$

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\Phi}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\Phi}_2 \mathbf{y}_{t-2} + \dots + \boldsymbol{\Phi}_p \mathbf{y}_{t-p} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad (3.4)$$

tak, ako bol definovaný vyššie. V nasledujúcej sekcii budú koeficienty neznáme a ukážeme spôsoby ich odhadu.

#### Odhad metódou najmenších štvorcov

Majme dĺžku časového radu  $T$  a hodnoty  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_T$  pre každú z  $m$  premenných v našom modeli VAR( $p$ ) (3.4). Definujeme značenie:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_T) && (m \times T) \\ \mathbf{B} &= (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\phi}_1, \dots, \boldsymbol{\phi}_p) && (m \times (mp + 1)) \\ \mathbf{Z}_t &= \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{y}_t \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{t-p+1} \end{pmatrix} && ((mp + 1) \times 1) \\ \mathbf{Z} &= (\mathbf{Z}_0, \dots, \mathbf{Z}_{T-1}) && ((mp + 1) \times T) \end{aligned}$$

Potom môžeme prepísať  $\mathbf{y}_t$  do tvaru

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{B}\mathbf{Z}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t.$$

Túto rovnicu pre násobíme  $\mathbf{Z}_{t-1}^\top$  sprava a prejdeme k stredným hodnotám. Dostávame

$$\mathbf{E}[\mathbf{y}_t \mathbf{Z}_{t-1}^\top] = \mathbf{E}[\mathbf{B}\mathbf{Z}_{t-1} \mathbf{Z}_{t-1}^\top] + \mathbf{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_t \mathbf{Z}_{t-1}^\top] = \mathbf{B}\mathbf{E}[\mathbf{Z}_{t-1} \mathbf{Z}_{t-1}^\top].$$

Ďalej odhadneme strednú hodnotu  $\mathbf{E}[\mathbf{y}_t \mathbf{Z}_{t-1}^\top]$  priemerom

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{y}_t \mathbf{Z}_{t-1}^\top = \frac{1}{T} \mathbf{Y} \mathbf{Z}^\top$$

a podobne strednú hodnotu  $\mathbf{E}[\mathbf{Z}_{t-1} \mathbf{Z}_{t-1}^\top]$  priemerom

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{Z}_{t-1} \mathbf{Z}_{t-1}^\top = \frac{1}{T} \mathbf{Z} \mathbf{Z}^\top.$$

Dostaneme teda rovnicu

$$\frac{1}{T} \mathbf{Y} \mathbf{Z}^\top = \mathbf{B} \frac{1}{T} \mathbf{Z} \mathbf{Z}^\top,$$

z ktorej dostaneme odhad

$$\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{Y} \mathbf{Z}^\top (\mathbf{Z} \mathbf{Z}^\top)^{-1}.$$

Tento odhad je rovnaký, ako keby sme jednorozmernou verziou metódy najmenších štvorcov odhadli každú z  $m$  rovníc v (3.4) zvlášť. Analytické výsledky pre konečné  $T$  sú v praxi veľmi ťažko získateľné, preto nás zaujímajú asymptotické vlastnosti získaného odhadu. Za predpokladu, že je biely šum normálne rozdelený, je odhad konzistentný a má asymptoticky normálne rozdelenie. Platí teda

$$\sqrt{T} \text{vec}(\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B}) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \otimes \boldsymbol{\Sigma}),$$

kde  $\text{vec}$  značí operátor, ktorý transformuje stĺpce matice do stĺpcového vektora a  $\frac{\mathbf{Z} \mathbf{Z}^\top}{T} \xrightarrow{d} \boldsymbol{\Gamma}$  (symbol  $\xrightarrow{d}$  značí konvergenciu v distribúcii). Normálne rozdelenie bieleho šumu navyše implikuje normálne rozdelenie procesu  $\mathbf{y}_t$ . Ostáva nám teda ešte odhadnúť neznáme matice  $\boldsymbol{\Gamma}$  a  $\boldsymbol{\Sigma}$ . Ako konzistentný odhad matice  $\boldsymbol{\Gamma}$  sa z vyššie uvedeného ako jednoznačná voľba javí

$$\hat{\boldsymbol{\Gamma}} = \frac{\mathbf{Z} \mathbf{Z}^\top}{T}.$$

Pretože  $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t^\top]$ , ako odhad  $\boldsymbol{\Sigma}$  môžeme použiť priemer

$$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t^\top = \frac{1}{T} (\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{B}} \mathbf{Z})(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{B}} \mathbf{Z})^\top.$$

Dosadením za  $\hat{\mathbf{B}}$  a úpravou dostaneme

$$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{T} \mathbf{Y} (\mathbf{I}_T - \mathbf{Z}^\top (\mathbf{Z} \mathbf{Z}^\top)^{-1} \mathbf{Z}) \mathbf{Y}^\top.$$

Podobne ako sme uviedli pri informačných kritériách v sekcii 3.2.1, často sa používa upravený odhad

$$\hat{\Sigma} = \frac{T}{T - mp - 1} \tilde{\Sigma},$$

pretože pri regresii s pevnými regresormi tento upravený odhad vedie k nestrannému odhadu  $\Sigma$ . Oba odhady sú asymptoticky ekvivalentné.

Uvažujme ďalej situáciu, v ktorej máme daný model VAR( $p$ ) v upravenom tvare

$$(\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}) = \Phi_1(\mathbf{y}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}) + \dots + \Phi_p(\mathbf{y}_{t-p} - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (3.5)$$

kde  $\boldsymbol{\mu}$  značí strednú hodnotu procesu. Podobne ako predtým, definujeme

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^0 &= (\mathbf{y}_1 - \boldsymbol{\mu}, \dots, \mathbf{y}_T - \boldsymbol{\mu}) && (m \times T) \\ \boldsymbol{\phi} &= (\boldsymbol{\phi}_1, \dots, \boldsymbol{\phi}_p) && (m \times mp) \\ \mathbf{Y}_t^0 &= \begin{pmatrix} \mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu} \\ \mathbf{y}_{t-1} - \boldsymbol{\mu} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{t-p+1} - \boldsymbol{\mu} \end{pmatrix} && (mp \times 1) \\ \mathbf{X} &= (\mathbf{Y}_0^0, \dots, \mathbf{Y}_{T-1}^0) && (mp \times T) \\ \mathbf{U} &= (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_T) && (m \times T) \end{aligned}$$

Potom môžeme prepísať (3.5) do tvaru

$$\mathbf{Y}^0 = \boldsymbol{\phi} \mathbf{X} + \mathbf{U}.$$

Zrejme má LS odhad opäť tvar

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = \mathbf{Y}^0 \mathbf{X}^\top (\mathbf{X} \mathbf{X}^\top)^{-1}.$$

Za podmienok stacionarity a normálneho rozdelenia procesu dostávame opäť podobný asymptotický výsledok

$$\sqrt{T} \text{vec}(\hat{\boldsymbol{\phi}} - \boldsymbol{\phi}) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Gamma}_0^{-1} \otimes \boldsymbol{\Sigma}),$$

kde  $\boldsymbol{\Gamma}_0 = E[\mathbf{Y}_t^0 (\mathbf{Y}_t^0)^\top]$ . Vo väčšine prípadov je stredná hodnota procesu neznáma a je nutné ju odhadnúť. Odhadneme ju opäť pomocou priemeru ako

$$\bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{y}_t.$$

Výsledný odhad je rovnaký ako vyššie s tým, že miesto neznámej hodnoty  $\boldsymbol{\mu}$  dosadíme odhad  $\bar{\mathbf{y}}$ .

V prípade, že skúmaný proces má normálne rozdelenie a je stacionárny, odhad metódou najmenších štvorcov je identický ako odhad metódou maximálnej vierohodnosti, ktorý je detailne spracovaný v Lütkepohl (2005).

### 3.2.3 Diagnostika modelu VAR

Pri zavádzaní teórie sme využili isté predpoklady o našom modeli, ktoré je treba overiť. Pri diagnostike modelu VAR chceme zistiť, či model, ktorý sme odhadli, spĺňa predpoklady stacionarity a podmienky na rezíduá, teda či je reziduálna zložka naozaj biely šum, resp. ako blízko k nemu je. Diagnostických postupov je mnoho, v tomto texte uvedieme len v praxi najpoužívanejšie.

#### Nekorelovanosť rezíduí

Na diagnostiku bieleho šumu môžeme využiť *portmanteau test*, ktorý skúma autokorelácie rezíduí do oneskorenia  $h$ . Predpokladáme, že máme odhadnutý model VAR( $p$ ) pomocou metódy LS a značením z predchádzajúcej časti, teda  $\hat{\mathbf{B}}$  značí odhad koeficientov a  $\hat{\mathbf{U}} = (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1, \dots, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_T) = \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{B}}\mathbf{Z}$  značí odhadnuté rezíduá. Podobne ako sme v sekcii 1.4 mali odhad autokorelačnej funkcie časového radu  $\mathbf{y}_t$ , odhadneme autokovariančnú maticu rezíduí ako

$$\hat{\mathbf{C}}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=i+1}^T \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{t-1}^\top$$

resp. (ak povolíme nenulové stredné hodnoty)

$$\hat{\mathbf{C}}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=i+1}^T (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{t-1} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})^\top,$$

kde  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \boldsymbol{\varepsilon}_t$ . Autokorelačná odhadnutá matica má potom tvar

$$\hat{\mathbf{R}}_k = \hat{\mathbf{D}}^{-1} \hat{\mathbf{C}}_k \hat{\mathbf{D}}^{-1},$$

kde  $\hat{\mathbf{D}}$  je diagonálna matica s odmocninami prvkov na hlavnej diagonále  $\mathbf{C}_0$ . Testujeme hypotézu

$$H_0 : (\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_h) = \mathbf{0} \text{ proti } H_1 : (\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_h) \neq \mathbf{0}.$$

Testová štatistika má tvar

$$Q_h = T \sum_{i=1}^h \text{tr}(\hat{\mathbf{C}}_i^\top \hat{\mathbf{C}}_0^{-1} \hat{\mathbf{C}}_i \hat{\mathbf{C}}_0^{-1}).$$

Použitím Monte Carlo metód sa podľa prác Davies a kol. (1977) a Ljung a Box (1978) ukazuje, že upravená štatistika

$$\bar{Q}_h = T^2 \sum_{i=1}^h (T-i)^{-1} \text{tr}(\hat{\mathbf{C}}_i^\top \hat{\mathbf{C}}_0^{-1} \hat{\mathbf{C}}_i \hat{\mathbf{C}}_0^{-1})$$

má lepšie vlastnosti pri menších hodnotách  $T$ . Asymptoticky sú si tieto štatistiky ekvivalentné. Pre veľké hodnoty  $T$  a  $k$  majú asymptotické rozdelenie  $\chi^2(m^2(k-p))$ . Kritický obor pre zamietnutie hypotézy má teda tvar

$$\bar{Q}_h \geq \chi_{1-\alpha}^2(m^2(k-p))$$

pre úroveň spoľahlivosti  $\alpha$ .

## Normalita rezíduí

Žiadanou vlastnosťou je aj normalita rezíduí. Testy na normalitu rezíduí sú založené na treťom a štvrtom centrálnom momente (krivosť a špicatosť), ktoré sú pre veličiny so štandardným normálnym rozdelením známe.

Nech je  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$   $m$ -dimenzionálny biely šum, pre ktorý platí  $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ . Ďalej nech je  $\mathbf{P}$  matica získaná Cholského rozkladom matice  $\boldsymbol{\Sigma}$  tak, aby platilo  $\mathbf{P}\mathbf{P}^\top = \boldsymbol{\Sigma}$ . Potom môžeme transformovať  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  tak, aby sme dostali veličinu so štandardným normálnym rozdelením:

$$\boldsymbol{\omega}_t = (\omega_{1t}, \dots, \omega_{mt})^\top = P^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}_t - \boldsymbol{\mu}) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_m). \quad (3.6)$$

Potom vieme, že platí

$$E \begin{pmatrix} \omega_{1t}^3 \\ \vdots \\ \omega_{mt}^3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad E \begin{pmatrix} \omega_{1t}^4 \\ \vdots \\ \omega_{mt}^4 \end{pmatrix} = \mathbf{3I}_m. \quad (3.7)$$

Cieľom testu bude porovnať hodnoty tretieho a štvrtého momentu nášho transformovaného procesu s hodnotami vyššie. Ďalej definujeme

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad S = \frac{1}{T-1} \sum_t (\boldsymbol{\varepsilon}_t - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})(\boldsymbol{\varepsilon}_t - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})^\top,$$

maticu  $\mathbf{P}_s$ , pre ktorú platí  $\mathbf{P}_s \mathbf{P}_s^\top = S$  a konverguje v pravdepodobnosti k  $\mathbf{P}$ . Zavedme ďalej odhady (3.6) a (3.7)

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_t &= (v_{1t}, \dots, v_{mt})^\top = \mathbf{P}_s^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}_t - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}), \quad t = 1, 2, \dots, T, \\ \mathbf{b}_1 &= (b_{11}, \dots, b_{m1})^\top, \quad b_{i1} = \frac{1}{T} \sum_t v_{it}^3, \quad i = 1, \dots, m, \\ \mathbf{b}_2 &= (b_{12}, \dots, b_{m2})^\top, \quad b_{i2} = \frac{1}{T} \sum_t v_{it}^4, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

ktoré majú rozdelenie

$$\sqrt{T} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 - \mathbf{3I}_m \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \begin{pmatrix} \mathbf{6I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{24I}_m \end{pmatrix}).$$

Odhady  $\mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{b}_2$  sú teda asymptoticky nezávislé a normálne rozdelené. Odtiaľ dostávame štatistiky

$$\begin{aligned} \lambda_s &= T \frac{\mathbf{b}_1^\top \mathbf{b}_1}{6} \xrightarrow{d} \chi^2(m), \\ \lambda_k &= T \frac{(\mathbf{b}_2 - \mathbf{3I}_m)^\top (\mathbf{b}_2 - \mathbf{3I}_m)}{24} \xrightarrow{d} \chi^2(m). \end{aligned}$$

Štatistika  $\lambda_s$  môže byť potom použitá na testovanie

$$H_0 : E \begin{pmatrix} \omega_{1t}^3 \\ \vdots \\ \omega_{mt}^3 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad \text{proti} \quad H_1 : E \begin{pmatrix} \omega_{1t}^3 \\ \vdots \\ \omega_{mt}^3 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$$

a štatistika  $\lambda_k$  na testovanie

$$H_0 : E \begin{pmatrix} \omega_{1t}^4 \\ \vdots \\ \omega_{mt}^4 \end{pmatrix} = \mathbf{3I}_m \text{ proti } H_1 : E \begin{pmatrix} \omega_{1t}^4 \\ \vdots \\ \omega_{mt}^4 \end{pmatrix} \neq \mathbf{3I}_m.$$

Je možné tieto hypotézy spojiť a na testovanie (tzv. viacrozmerný Jarque-Bera test) použiť spojenú štatistiku

$$\lambda_{sk} = \lambda_s + \lambda_k \xrightarrow{d} \chi^2(2m).$$

Uvedené výsledky potom platia aj v prípade, že reziduá  $\varepsilon_t$  nahradíme ich odhadmi, čo je v praxi žiadúce.

### Stacionarita

Stacionaritu môžeme vyšetriť graficky tak, že zistíme, či ležia korene odhadnutého autoregresného polynómu mimo jednotkový kruh v komplexnej rovine. V praktickej časti sa budeme okrem toho opierať aj o Augmented Dickey-Fuller a Phillips-Perron testy, ktoré testujú prítomnosť jednotkového koreňa v odhadnutom autoregresnom modeli. Sú implementované v software R v knižnici *vars* ako funkcie *adf.test* a *pp.test* (viz Pfaff (2008)), kde sú aj podrobnejšie popísané.

### 3.2.4 Konštrukcia predpovede v modeli VAR

Jednou zo zásadných úloh analýzy viacrozmerných časových radov je predpovedanie. Chceme uviesť nejaké domnienky o budúcich hodnotách  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$ . V našom prípade máme k dispozícii ako proces generujúci dáta odhadnutý proces VAR a informačná množina bude obsahovať súčasné a minulé pozorovania systému. Čas  $t$ , kedy robíme predpoveď, je začiatok predikcie a časom  $h$  budeme mať na mysli predikčný horizont. Cieľom je minimalizovať zvolenú stratovú funkciu. Pri VAR modeloch, ktorým sa v tejto práci venujeme, sa najčastejšie používa stredná štvorcová chyba MSE (mean square error). Túto voľbu opodstatňujú viaceré fakty uvedené napr. v Granger (1969). Okrem iného, predikcie založené na minimalizácii MSE zároveň minimalizujú aj iné stratové funkcie a v prípade, že je prediktor nestranný, je MSE vlastne rozptyl predpovedanej chyby, čo je dôležitý faktor pri konštrukcii intervalov spoľahlivosti.

Uvažujme stacionárny proces VAR( $p$ ) (3.1). Pre jednoduchosť budeme uvažovať iba prediktory, ktoré sú lineárnymi funkciami  $\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_{t-1}, \dots$  a minimalizujú MSE. Potom má optimálny prediktor rekurzívny tvar

$$\hat{\mathbf{y}}_{t+h}(t) = \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\Phi}_1 \hat{\mathbf{y}}_{t+h-1}(t) + \dots + \boldsymbol{\Phi}_p \hat{\mathbf{y}}_{t+h-p}(t),$$

kde zrejme platí  $\hat{\mathbf{y}}_{t+j}(t) = \mathbf{y}_{t+j}$  pre  $j \leq 0$ . Chybová matica MSE má tvar

$$\text{MSE}[\hat{\mathbf{y}}_{t+h}(t)] = \sum_{i=1}^{h-1} \boldsymbol{\Phi}_i \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\Phi}_i^\top = \text{MSE}[\hat{\mathbf{y}}_{t+h-1}(t)] + \boldsymbol{\Phi}_{h-1} \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\Phi}_{h-1}^\top.$$

## 3.3 Aplikácie

### 3.3.1 Kauzalita

Kauzalitu skúma ako jeden z prvých vo svojej práci Granger (1969). Preto sa presnejšie používa pomenovanie *Grangerova kauzalita*. V ďalšom texte budeme mať preto vždy pod pojmom kauzalita na mysli Grangerovu kauzalitu. Granger definoval kauzalitu nasledujúcim spôsobom:

Nech  $\Omega_t$  je množina obsahujúca všetky informácie do času  $t$  vrátane. Označme  $\mathbf{z}_t(h|\Omega_t)$   $h$ -krokový prediktor minimalizujúci MSE procesu  $\mathbf{z}_t$  na základe informácie z  $\Omega_t$ . Potom proces  $\mathbf{x}_t$  kauzálne vplýva na proces  $\mathbf{z}_t$  (v Grangerovom zmysle), ak aspoň pre jedno  $h = 1, 2, \dots$  platí

$$\Sigma_z(h|\Omega_t) < \Sigma_z(h|\Omega_t \setminus \{\mathbf{x}_s | s \leq t\}), \quad (3.8)$$

kde  $\Sigma_z(h|\Omega_t)$  je chyba daného prediktoru.  $\Omega_t \setminus \{\mathbf{x}_s | s \leq t\}$  je množina obsahujúca všetky informácie okrem minulej a súčasnej informácie založených na hodnotách procesu  $\mathbf{x}_s$  do času  $t$ . Z tejto definície je zrejmé, že myšlienka kauzality je postavená na zlepšení predpovede jednej premennej pomocou druhej. Teda ak premenná  $x$  ovplyvňuje premennú  $z$ ,  $x$  by mala pomôcť pri predikcii  $z$ .

Kauzalita sa vyšetruje najčastejšie v rámci systému VAR, ktorý v tejto práci skúmame. Ako je uvedené v Cípra (2013), môžeme zhrnúť možné prípady následovne:

- Ak sú oneskorené hodnoty premennej  $y_i$  v rovnici vysvetľujúcej premennú  $y_j$  významné, potom  $y_i$  *kauzálne pôsobí* (podľa Grangera) na  $y_j$ .
- Ak premenná  $y_i$  kauzálne pôsobí na premennú  $y_j$ , ale tento vzťah opačne neplatí, potom existuje *jednosmerná závislosť*  $y_j$  na  $y_i$ . Premenná  $y_i$  sa v tomto prípade niekedy nazýva aj silno exogénna.
- Ak premenná  $y_i$  kauzálne pôsobí na premennú  $y_j$  a tento vzťah platí aj opačne, povieme, že medzi  $y_i$  a  $y_j$  existuje *spätná väzba*.
- Ak premenná  $y_i$  kauzálne nepôsobí na premennú  $y_j$ , a tak isto premenná  $y_j$  kauzálne nepôsobí na premennú  $y_i$ , potom sú tieto premenné *nezávislé* (podľa Grangera).

Ako sme už naznačili vyššie, uvažujeme (3.1)  $m$ -dimenzionálny proces VAR( $p$ )  $\mathbf{y}_t$  rozdelený na  $k$ -dimenzionálny proces  $\mathbf{z}_t$  a  $(m - k)$ -dimenzionálny  $\mathbf{x}_t$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_t \\ \mathbf{x}_t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\nu}_1 \\ \boldsymbol{\nu}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{11,1} & \boldsymbol{\Phi}_{12,1} \\ \boldsymbol{\Phi}_{21,1} & \boldsymbol{\Phi}_{22,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z}_{t-1} \\ \mathbf{x}_{t-1} \end{pmatrix} + \dots \\ &+ \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{11,p} & \boldsymbol{\Phi}_{12,p} \\ \boldsymbol{\Phi}_{21,p} & \boldsymbol{\Phi}_{22,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z}_{t-p} \\ \mathbf{x}_{t-p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{1t} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Potom môžeme testovať hypotézu, že  $\mathbf{z}_t$  kauzálne nepôsobí na  $\mathbf{x}_t$ , ako

$$H_0 : \boldsymbol{\Phi}_{21,i} = \mathbf{0} \quad \text{proti} \quad H_1 : \boldsymbol{\Phi}_{21,i} \neq \mathbf{0},$$

pre  $i = 1, 2, \dots, p$ . Takže testujeme nulovosť vhodných blokov v rovnici (3.9). Pre tento účel môžeme použiť napr. F-testy či Waldove testy. Pre podrobnejšie

informácie a najnovšie poznatky odkazujeme na Shojaie a Fox (2022).

Existuje ešte takzvaná *okamžitá kauzalita*, ktorá sa od Grangerovej kauzality líši tým, že pre lepšiu predikciu  $\mathbf{z}_t$  berieme do úvahy aj budúce hodnoty premennej  $\mathbf{x}_t$ , čo môžeme zapísať podobne ako v 3.8 ako

$$\Sigma_z(h|\Omega_t \cup \{x_{t+1}\}) < \Sigma_z(h|\Omega_t).$$

Testy na okamžitú kauzalitu sú potom postavené na fakte, že medzi  $\mathbf{z}_t$  a  $\mathbf{x}_t$  nie je okamžitá kauzalita práve vtedy, ak platí  $E(\varepsilon_{1t}\varepsilon_{2t}^\top) = 0$ . Smer okamžitej kauzality ale nevieme určiť z VAR reprezentácie modelu a je nutná ďalšia znalosť vzťahu skúmaných premenných. Túto znalosť môže obsahovať napr. ekonomická teória. Podrobnejšie je táto téma obsiahnutá napr. v Lütkepohl (2005).

### 3.3.2 Odozva na impulz

Grangerova kauzalita nám nemusí povedať všetko o vzťahoch medzi jednotlivými premennými v našom systéme VAR. V praxi nás často zaujíma, ako dlho trvá kauzálny vzťah alebo aké má znamienko. Odozva na impulz skúma, ako prebieha odozva vybranej vysvetľovanej pramennej na impulz v niektorej rovnici modelu VAR. Ak teda uvažujeme  $m$ -rozmerný model VAR pozorujeme v ňom  $m^2$  odoziev. Vplyv všetkých impulzov postupne odznie, pretože predpokladáme stacionárny model VAR, viz Cipra (2013).

Impulz predstavuje exogénny šok alebo inováciu jednej alebo viacerých premenných systému. Pod exogénnym šokom si môžeme predstaviť napr. celosvetové zvýšenie ceny ropy organizáciou zemí vyvážajúcich ropu, zmenu úrokovej sadzby centrálnou bankou a pod. Koncept odozvy na impulz uvádza ako prvý Sims (1980), kde je táto téma vysvetlená podrobnejšie. Pre podrobnejší výklad odkazujeme tiež na Lütkepohl (2005) alebo Kirchgässner a Wolters (2007).

### 3.3.3 Dekompozícia rozptylu

Dekompozícia rozptylu predstavuje ďalšie možnosti na skúmanie vzťahov medzi premennými vo VAR modeloch. Je založená na ortogonalizovaných impulzných maticiach koeficientov, ktoré dostaneme napr. Cholského rozkladom, viz Lütkepohl (2005). Dekompozícia rozptylu umožňuje analyzovať, ako prispeje jedna premenná pri predikcii  $h$ -krokovej variačnej chyby druhej premennej. V praxi sa na vysvetlení danej chyby predpovede najviac podieľa inovácia v tej istej rovnici, resp. v krátkom časovom horizonte. Podrobnejší výklad viz napr. Kirchgässner a Wolters (2007).

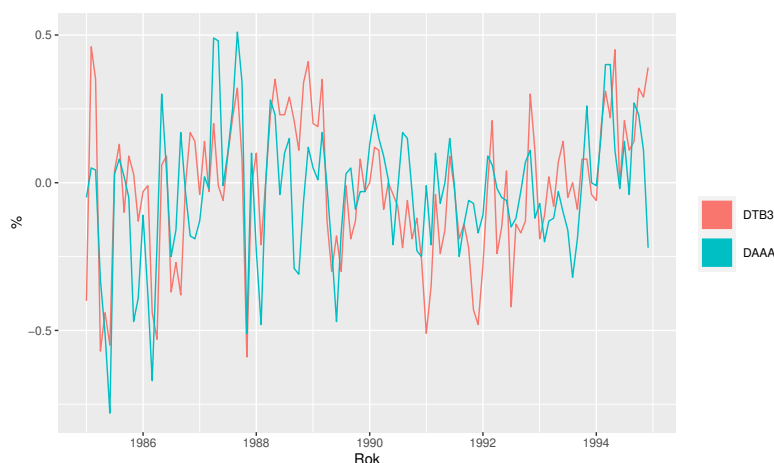


## 4. Numerická štúdia

V tejto časti aplikujeme teóriu popísanú v tejto práci na 2 príklady. Analýza je vykonaná pomocou softwaru R, hlavne použitím knižnice *vars*, viz Pfaff (2008).

### 4.1 Príklad 1

V prvom príklade vezmeme dáta z Cipra (2013), ale miesto EViews použijeme pre ich analýzu software R. Cieľom bude porovnať a rozšíriť nadobudnuté výsledky (viz Cipra (2013, Príklad 12.1.1)). Skúmame dvojrozmerný časový rad o 120 pozorovaniach, ktorý tvoria diferencované mesačné výnosnosti do splatnosti pre trojmesačné T-bills *DTB3* v % p.a. v prvej zložke a v druhej pre firemné dlhopisy *DAAA* (t.j. dlhopisy s najkvalitnejším hodnotením AAA od S&P) v % p.a., viz Obr.4.1



Obr. 4.1: Diferencované časové rady z pr. 1

#### 4.1.1 Identifikácia

##### Rád modelu

Na určenie rádu modelu ponúka prostredie R funkciu *varselect* v rámci knižnice *vars*, ktorá vráti odhadnutý rád podľa rôznych informačných kritérií (viz Tab. 4.1). Do funkcie vstupuje hodnota maximálneho povoleného oneskorenia, ktorú určí užívateľ. Zvolené rády jednotlivých kritérií súhlasia s výsledkami v Cipra (2013), aj keď samotné hodnoty v Tab. 4.1 sú odlišné.

#### 4.1.2 Odhad

V odhadnutom modeli VAR(2), ktorý je uvedený v Cipra (2013), vidíme oproti výsledkom v odhadnutom modeli VAR(2) v tejto práci u niektorých odhadov pomerne veľké rozdiely (viz Tab. 4.2). Keďže výber rádu modelu nemusí byť jednoznačný, v ďalšej časti pre porovnanie vykonáme testy pre odhadnuté modely VAR(1), VAR(2) a VAR(3). Odhad bol vykonaný pomocou funkcie *VAR*.

$k$	AIC( $k$ )	HQ( $k$ )	SC( $k$ )	FPE( $k$ )
1	-6.82	-6.78	-6.72	0.001
2	-6.83	-6.76	-6.64	0.001
3	-6.83	-6.72	-6.55	0.001
4	-6.78	-6.62	-6.39	0.001
5	-6.74	-6.54	-6.26	0.001
Zvolený rád	3	1	1	3

Tabuľka 4.1: Odhad rádu modelu z pr. 1 pomocou informačných kritérií

	<i>Dependent variable:</i>	
	DTB3	DAAA
dtb3.l1	0.439*** (0.107)	-0.066 (0.105)
daaa.l1	0.193* (0.111)	0.592*** (0.109)
dtb3.l2	0.029 (0.105)	0.084 (0.103)
daaa.l2	-0.194* (0.112)	-0.291*** (0.110)
const	-0.012 (0.019)	-0.024 (0.018)
Observations	118	118
R <sup>2</sup>	0.278	0.247
Adjusted R <sup>2</sup>	0.252	0.220
Residual Std. Error (df = 113)	0.201	0.197
F Statistic (df = 4; 113)	10.859***	9.269***
Roots of the characteristic polynomial	0.49 0.45	0.49 0.07

*Note:* \*p<0.1; \*\*p<0.05; \*\*\*p<0.01

Tabuľka 4.2: Odhad modelu VAR(2) z pr. 1

### 4.1.3 Diagnostika

#### Stacionarita

Stacionaritu overíme pre oba rady pomocou Augmented Dickey-Fuller(ADF) a Phillips–Perron(PP) testov v rámci funkcií *adf.test* a *pp.test*.

ADF test pre *DTB3* (viz Tab. 4.3) síce ukazuje nestacionaritu, ale druhý PP test stacionaritu pre oba rady potvrdzuje (viz Tab. 4.4). Korene odhadnutého autoregresného polynómu vo všetkých troch modeloch sú výrazne menšie ako 1, a teda tiež prichádzame k záveru, že odhadnutý model je stacionárny.

Časový rad	Dickey-Fuller štat.	P-hodnota
DTB3	-2,82	0,24
DAAA	-4,30	0,01

Tabuľka 4.3: Augmented Dickey-Fuller testy na stacionaritu z pr. 1

Časový rad	Dickey-Fuller $Z(\alpha)$ štat.	P-hodnota
DTB3	-67,70	0,01
DAAA	-61,70	0,01

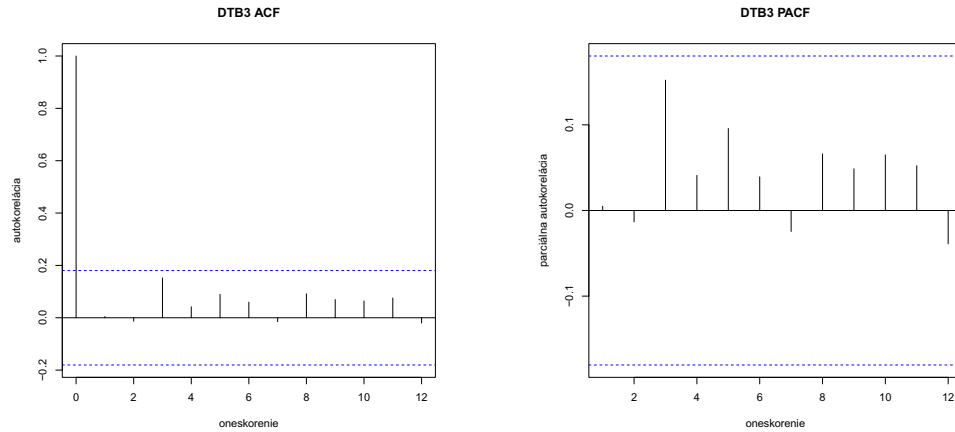
Tabuľka 4.4: Phillips-Perron testy na stacionaritu z pr. 1

#### Nekorelovanosť

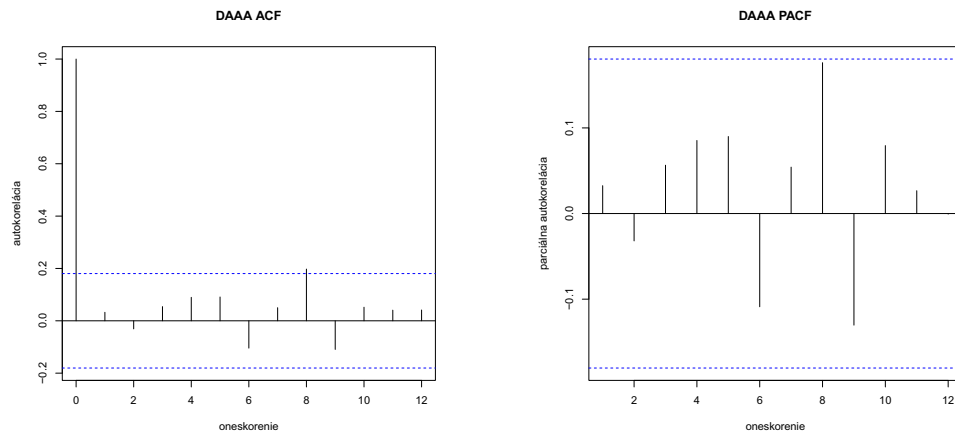
Na skúmanie nekorelovanosti rezíduí vykonáme Portmonteau test pre každý z modelov (viz Tab. 4.5). Test je vykonaný pomocou funkcie *serial.test*. Výsledok pre VAR(2) je obdobný ako v Cipra (2013) Tab. 12.2.4.: *p*-hodnota je väčšia ako 5 %, teda nezamietame  $H_0$  (t.j. nekorelovanosť rezíduí). Takisto pohľad na autokorelačné a parciálne autokorelačné funkcie nás privádza k rovnakému záveru, a to takému, že odhadnuté rezíduá môžeme považovať za nekorelované (viz Obr. 4.2 a Obr. 4.3 ).

Model	Q-štat.	P-hodnota	Stupeň voľnosti
VAR(1)	39,68	0,31	36
VAR(2)	27,90	0,67	32
VAR(3)	21,43	0,81	28

Tabuľka 4.5: Portmonteau test na odhadnuté rezíduá do oneskorenia 10 z pr. 1



Obr. 4.2: Autokorelácia a parciálna autokorelácia pre DTB3 v odhadnutom modeli VAR(2) z pr. 1



Obr. 4.3: Autokorelácia a parciálna autokorelácia pre DAAA v odhadnutom modeli VAR(2) z pr. 1

### Normalita

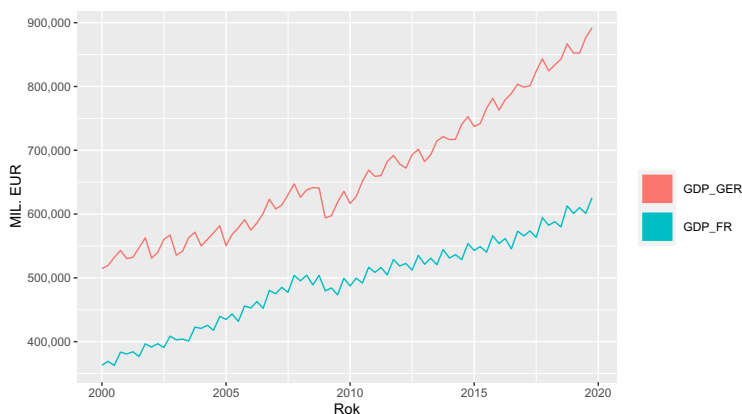
Viacrozmerný Jarque-Bera test aplikovaný na odhadnuté rezíduá, vykonaný pomocou funkcie *normality.test*, potvrdzuje normalitu dát iba pri modeli VAR(3) a aj to relatívne na hranici štatistickej významnosti (viz Tab. 4.6).

Model	Chi <sup>2</sup> štat.	P-hodnota	Stupeň voľnosti
VAR(1)	10,93	0,03	4
VAR(2)	14,16	0,01	4
VAR(3)	8,65	0,07	4

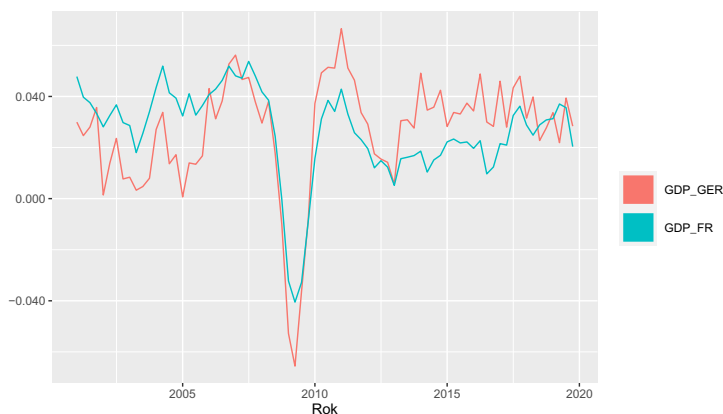
Tabuľka 4.6: Viacrozmerný Jarque-Bera test na normalitu dát z pr. 1

## 4.2 Príklad 2

V tomto príklade budeme analyzovať dáta prevzaté z Eurostatu, a to konkrétne štvrťročné dáta hrubého domáceho produktu Nemecka a Francúzska od začiatku roku 2000 do konca roku 2019 (viz Eurostat (2022b) a Eurostat (2022a) v Literatúre). Dáta sú zobrazené v miliónoch eur na Obr. 4.4. Na zaistenie predpokladov modelu VAR a jeho optimálneho odhadu použijeme na analýzu kvartálne diferencie logaritmov pôvodných dát (viz Obr. 4.5). V texte budeme tieto časové rady referovať skráteno ako GER, resp. FR.



Obr. 4.4: Časové rady z pr. 2



Obr. 4.5: Kvartálne diferencie logaritmov časových radov z pr. 2

### 4.2.1 Identifikácia

#### Rád modelu

Na určenie rádu modelu postupujeme obdobne ako v pr. 1. Pretože pracujeme s kvartálnymi dátami, ako rozumné maximálne oneskorenie rádu modelu sa javí násobok 4. Nechceme príliš vysoký rád a tak použijeme pre odhad maximálne oneskorenie 8. Ukázalo sa však, že aj použitie iných hodnôt maximálneho oneskorenia nemalo na voľbu rádu veľký vplyv. Informačné kritériá určili zhodne hodnotu 2 (viz Tab. 4.7).

$k$	AIC( $k$ )	HQ( $k$ )	SC( $k$ )	FPE( $k$ )
1	-18.80	-18.75	-18.67	0.00
2	-19.06	-18.95	-18.80	0.00
3	-19.01	-18.86	-18.62	0.00
4	-18.98	-18.78	-18.46	0.00
5	-19.02	-18.76	-18.37	0.00
6	-18.94	-18.63	-18.16	0.00
7	-18.94	-18.58	-18.03	0.00
8	-18.84	-18.42	-17.79	0.00
Zvolený rád	2	2	2	2

Tabuľka 4.7: Odhad rádu modelu z pr. 2 pomocou informačných kritérií

### 4.2.2 Odhad

V Tab. 4.8 je odhadnutý model VAR(2). Odhadnutý charakteristický polynóm má všetky korene menšie ako 1 (viz Tab. 4.8), čo značí stacionaritu odhadnutého modelu (viz Pfaff (2008)). Ďalej vidíme, že až na jeden sú všetky oneskorené členy vyhodnotené ako signifikantné. Kvartálne diferencie dopomohli k tomu, aby sme čo najlepšie odhadnutý model napasovali na pôvodné dáta, čo sa prejavuje aj na pomerne vysokej hodnote štatistik  $R^2$ . Logaritmovanie dát znížilo hodnotu reziduálnej štandardnej odchyľky a veľkosti odhadnutých koeficientov.

### 4.2.3 Diagnostika

#### Stacionarita

Stacionaritu opäť overíme testami ADF a PP, ktoré testujú, či má daný časový rad jednotkový koreň. Vidíme, že časový rad FR vykazuje podľa ADF testu nestacionaritu (viz Tab. 4.9) a podobne aj (ale na hranici štatistickej významnosti) podľa PP testu (viz Tab. 4.10). Pre časový rad GER potvrdzujú oba rady stacionaritu (aj keď v ADF na hranici štatistickej významnosti). V odhadnutom modeli vyšli korene charakteristického polynómu menšie ako 1 (viz 4.8). Keďže je zriedka možné dosiahnuť na reálnych dátach úplne jednoznačnú stacionaritu, budeme považovať odhadnutý model za stacionárny.

Časový rad	Dickey-Fuller štat.	P-hodnota
GER	-3,63	0,04
FR	-3,05	0,14

Tabuľka 4.9: Dickey-Fuller testy na stacionaritu z pr. 2

	<i>Dependent variable:</i>	
	GER	FR
ger.l1	0.28* (0.16)	-0.19* (0.10)
fr.l1	1.33*** (0.26)	1.58*** (0.16)
ger.l2	0.46*** (0.15)	0.12 (0.09)
fr.l2	-1.42*** (0.26)	-0.72*** (0.16)
const	0.01*** (0.003)	0.01*** (0.002)
Observations	74	74
R <sup>2</sup>	0.73	0.84
Adjusted R <sup>2</sup>	0.72	0.83
Residual Std. Error (df = 69)	0.01	0.01
F Statistic (df = 4; 69)	47.15***	88.53***
Roots of the characteristic polynomial	0.90 0.72	0.72 0.33

*Note:*

\*p<0.1; \*\*p<0.05; \*\*\*p<0.01

Tabuľka 4.8: Odhad modelu VAR(2) pre kvartálne diferencie logaritmov časových radov z pr. 2

Časový rad	Dickey-Fuller $Z(\alpha)$ štat.	P-hodnota
GER	-24,34	0,02
FR	-18,51	0,07

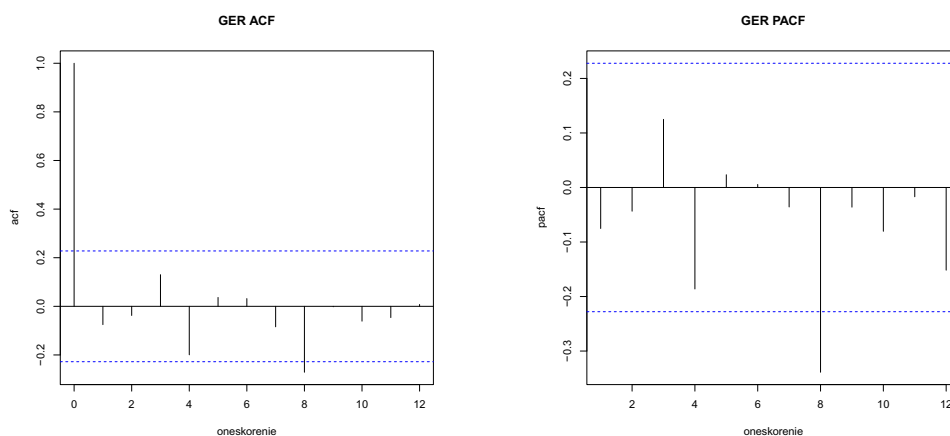
Tabuľka 4.10: Philips-Perron testy na stacionaritu z pr. 2

### Nekorelovanosť

Na skúmanie nekorelovanosti rezíduí vykonáme podobne ako v prvom príklade Portmonteau test, ale teraz uvedieme výsledky aj pre upravenú testovú štatistiku (viz Tab. 4.11). Na hladine 5% môžeme celkom jednoznačne usúdiť, že odhadnuté rezídua sú nekorelované. Tento záver potvrdzujú aj (parciálne) autokorelačné funkcie postupne pre GER a FR, aj keď v ôsmom oneskorení vidíme hodnoty prekračujúce hranicu (viz Obr. 4.6 a Obr. 4.7).

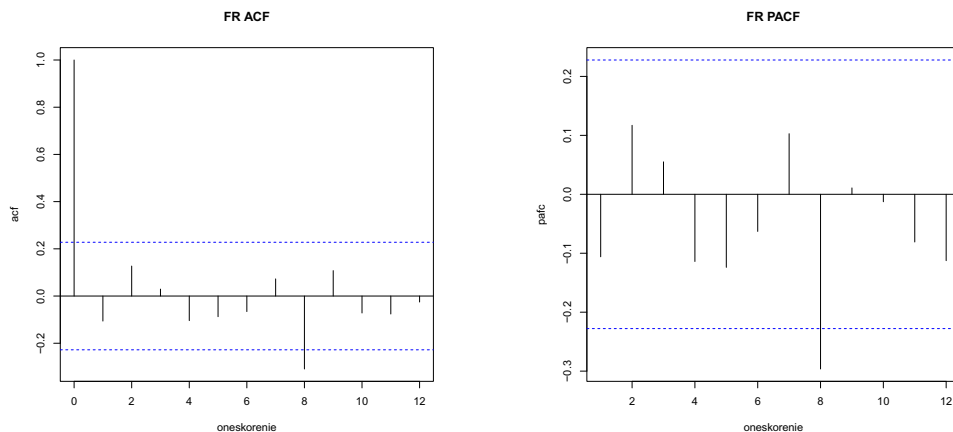
Test	Q-štat.	P-hodnota	Stupne voľnosti
Upravený	39,36	0,50	40
Asymptotický	36,12	0,65	40

Tabuľka 4.11: Portmonteau test na odhadnuté rezíduá do oneskorenia 12 z pr. 2



Obr. 4.6: Autokorelácia a parciálna autokorelácia pre GER v odhadnutom modeli VAR(2) z pr. 2





Obr. 4.7: Autokorelácia a parciálna autokorelácia pre FR v odhadnutom modeli VAR(2) z pr. 2

## Normalita

Všetky vykonané testy na normalitu dát v Tab. 4.12 nezamietajú na hladine 5 % nulovú hypotézu a tak môžeme považovať dáta za normálne rozdelené.

Test	Chi <sup>2</sup> štat.	P-hodnota	Stupeň voľnosti
Jarque-Bera	1,50	0,83	4
Krivosť	0,43	0,81	2
Šikmosť	1,08	0,58	2

Tabuľka 4.12: Viacrozmerné testy šikmosti, krivosti a Jarque-Bera na normalitu dát z pr. 2

### 4.2.4 Kauzalita

V tejto časti pomocou funkcie *causality* testujeme kauzalitu jednotlivých premenných podľa Grangera a okamžitú kauzalitu. V Tab. 4.13 sú postupne uvedené výsledky pre dané príčinné premenné a takisto výsledok okamžitej kauzality. Z výsledných *p*-hodnôt môžeme na hladine 5 % celkom jednoznačne usúdiť, že FR kauzálne vplýva na GER a že medzi premennými je potvrdená silná okamžitá kauzalita. Kauzalita GER na FR sa však nepotvrdila. Skúmanie kauzality je problematické, ak sú niektoré premenné nestacionárne, pretože nemusí platiť príslušná asymptotická distribučná teória. Vzhľadom na to, že pri rade FR nebola nestacionarita ADF a PP testami vyvrátená, mali by sme na to myslieť pri interpretácii výsledkov.

<b>Príčina</b>	<b>F-štat.</b>	<b>P-hodnota</b>
GER	2,02	0,14
FR	15,19	0,00
	<b>Wald-štat.</b>	<b>P-hodnota</b>
Okamžitá kauzalita	24,20	0,00

Tabuľka 4.13: Testy na Grangerovu a okamžitú kauzalitu pre dáta z pr. 2

# Záver

Cieľom tejto práce bolo spracovať teóriu vektorových autoregresných procesov a aplikovať ju na praktické príklady pomocou vybraného softwaru. Práca je rozdelená na štyri časti.

V prvej kapitole sme definovali základné pojmy teórie viacrozmerných časových radov ako je stacionarita, autokorelačná a parciálna autokorelačná maticová funkcia a ich empirické odhady.

V druhej kapitole sme v krátkosti uviedli základné lineárne modely viacrozmerných časových radov, vrátane modelu VAR, ktorým sa zaoberáme ďalej.

V tretej kapitole sa podrobne venujeme modelu VAR. Najprv sme ukázali všeobecný popis modelu, jeho rôzne formy a kľúčové vlastnosti, ako sú stacionarita a autokovariancia. Ďalej sa venujeme konštrukcii modelu. Opisujeme metódy identifikácie rádu modelu, samotný odhad modelu, diagnostiku a konštrukciu predpovede. Pri diagnostike uvádzame vybrané postupy, ktorými overujeme, či odhadnutý model spĺňa spomenuté predpoklady. Na záver kapitoly sme ukázali možné aplikácie modelu VAR, a to najmä Grangerovu kauzalitu, ktorá identifikuje príčinné vzťahy medzi danými premennými.

V poslednej kapitole sme pomocou softwaru R aplikovali teóriu z predchádzajúcich kapitol na 2 praktické príklady. V tom prvom bolo cieľom analyzovať časové rady diferencovaných mesačných záznamov *DTB3* a *DAAA* a porovnať nadobudnuté výsledky z Cipra (2013, Príklad 12.1.1), kde bol použitý iný software, konkrétne EViews. Identifikácia rádu modelu na základe informačných kritérií ukázala rovnaké výsledky. Určenie rádu však nie je úplne jednoznačné, a tak sme pre lepšie porovnanie uviedli výsledky diagnostických testov pre odhadnuté modely o rádoch 1,2 aj 3. Zásadné rozdiely vo výsledkoch sme nezaznamenali. Navyše sme spravili test na normalitu rezíduí, ktorý nebol zamietnutý iba pre rad VAR(3) a aj to na hranici štatistickej významnosti.

V druhom príklade sme z oficiálnych štatistík eurostatu vzali kvartálne údaje hrubého domáceho produktu Nemecka a Francúzska, ktoré boli udané v miliónoch eur. Pre lepšie napasovanie modelu a zlepšenie kľúčových vlastností pre model VAR sme pracovali s kvartálnymi diferenciami logaritmov originálnych dát. Postupovali sme podobne ako v pr.1. Na základe informačných kritérií, ktoré zhodne zvolili rád 2, sme model odhadli ako VAR(2). V rámci diagnostiky sme chceli overiť, či odhadnutý model spĺňa predpoklady stacionarity, nekorelovanosti rezíduí a normality. Model sme vyhodnotili ako stacionárny, aj keď tento výsledok nebol úplne jednoznačný. Nekorelovanosť rezíduí sme potvrdili na základe *portmanteau* testu pre dve rôzne testové štatistiky a na základe grafov autokorelačných a parciálnych autokorelačných funkcií. Ďalej testy normality potvrdili normalitu dát. Výsledky predikcie v tejto práci neuvádzame vzhľadom na covidovú krízu, ktorú nebolo možné v rámci modelu VAR predpovedať. Predpoveď na rok 2020 by teda bola veľmi odlišná od skutočných dát. Na základe výsledkov analýzy kauzality môžeme jednoznačne povedať, že GDP Francúzska príčinne vplyva na GDP Nemecka, no naopak to tvrdiť nemôžeme.

# Zoznam použitej literatúry

- CIPRA, T. (2013). *Finanční ekonometrie*. Ekopress, Praha. ISBN 9788086929934.
- DAVIES, N., TRIGGS, C. M. , NEWBOLD, P. (1977). Significance levels of the Box-Pierce portmanteau statistic in finite samples. *Biometrika*, **64**(3), 517–522.
- EUROSTAT (2022a). Gross domestic product for France [CPMNACNSAB1GQFR], retrieved from FRED, Federal Reserve Bank of St. Louis. <https://fred.stlouisfed.org/series/CPMNACNSAB1GQFR>.
- EUROSTAT (2022b). Gross domestic product for Germany [CPMNACNSAB1GQDE], retrieved from FRED, Federal Reserve Bank of St. Louis. <https://fred.stlouisfed.org/series/CPMNACNSAB1GQDE>.
- GRANGER, C. W. J. (1969). Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods. *Econometrica*, **37**(3), 424–438.
- KIRCHGÄSSNER, G. , WOLTERS, J. (2007). *Introduction to Modern Time Series Analysis*. Springer. ISBN 9783540732914.
- KŘIVÝ, I. (2012). *Analýza časových řad*. Ostravská univerzita v Ostravě. URL <https://web.osu.cz/~Bujok/files/ancas.pdf>.
- LJUNG, G. M. , BOX, G. E. P. (1978). On a measure of lack of fit in time series models. *Biometrika*, **65**(2), 297–303.
- LÜTKEPOHL, H. (2005). *New Introduction To Multiple Time Series Analysis*. Springer, Berlin. ISBN 3540262393.
- PFAFF, B. (2008). VAR, SVAR and SVEC models: Implementation within R package vars. *Journal of Statistical Software*, **27**(4).
- SHOJAIE, A. , FOX, E. B. (2022). Granger causality: A review and recent advances. *Annual Review of Statistics and Its Application*, **9**, 289–319.
- SIMS, C. A. (1980). Macroeconomics and reality. *Econometrica*, **48**(1), 1–48.

# Zoznam obrázkov

4.1	Diferencované časové rady z pr. 1 . . . . .	21
4.2	Autokorelácia a parciálna autokorelácia pre DTB3 v odhadnutom modeli VAR(2) z pr. 1 . . . . .	24
4.3	Autokorelácia a parciálna autokorelácia pre DAAA v odhadnutom modeli VAR(2) z pr. 1 . . . . .	24
4.4	Časové rady z pr. 2 . . . . .	25
4.5	Kvartálne diferencie logaritmov časových radov z pr. 2 . . . . .	25
4.6	Autokorelácia a parciálna autokorelácia pre GER v odhadnutom modeli VAR(2) z pr. 2 . . . . .	28
4.7	Autokorelácia a parciálna autokorelácia pre FR v odhadnutom modeli VAR(2) z pr. 2 . . . . .	29

# Zoznam tabuliek

4.1	Odhad rádu modelu z pr. 1 pomocou informačných kritérií . . . . .	22
4.2	Odhad modelu VAR(2) z pr. 1 . . . . .	22
4.3	Augmented Dickey-Fuller testy na stacionaritu z pr. 1 . . . . .	23
4.4	Phillips-Perron testy na stacionaritu z pr. 1 . . . . .	23
4.5	Portmonteau test na odhadnuté rezíduá do oneskorenia 10 z pr. 1	23
4.6	Viacrozmerný Jarque-Bera test na normalitu dát z pr. 1 . . . . .	24
4.7	Odhad rádu modelu z pr. 2 pomocou informačných kritérií . . . . .	26
4.9	Dickey-Fuller testy na stacionaritu z pr. 2 . . . . .	26
4.8	Odhad modelu VAR(2) pre kvartálne diferencie logaritmov časových radov z pr. 2 . . . . .	27
4.10	Phillips-Perron testy na stacionaritu z pr. 2 . . . . .	28
4.11	Portmonteau test na odhadnuté rezíduá do oneskorenia 12 z pr. 2	28
4.12	Viacrozmerné testy šikmosti, krivosti a Jarque-Bera na normalitu dát z pr. 2 . . . . .	29
4.13	Testy na Grangerovu a okamžitú kauzalitu pre dáta z pr. 2 . . . . .	30