MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jakub Knesel

Spingrupy v nízkých dimenzích

Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Dalibor Šmíd, Ph.D.

Studijní program: Obecná matematika (B0541A170011)

Praha 2022

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Rád bych poděkoval vedoucímu této práce panu Mgr. Daliboru Šmídovi, Ph.D. za toto zajímavé téma pro bakalářskou práci, za poskytnutí veškeré literatury k jejímu vypracování a obecně za dobrou spolupráci.

Název práce: Spingrupy v nízkých dimenzích

Autor: Jakub Knesel

katedra: Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Dalibor Šmíd, Ph.D., Matematický ústav UK

Abstrakt: Cílem této práce je popsat konstrukce maticových reprezentací Lieových grup Spin(n) = Spin(0,n,$\mathbb{R}$) v dimenzích jedna až šest. Poté, co v první kapitole zkonstruujeme 2-1 nakrytí grupy SO(3) pomocí grupy SU(2), definujeme Cliffordovu algebru, s jejíž pomocí zkonstruujeme grupu Spin(n) obecně. Popíšeme také, jakým způsobem grupa Spin(n) poskytuje 2-1 nakrytí grupy SO(n). Vybudovanou teorii následně využijeme k nalezení maticových reprezentací Cliffordovy algebry a spingrupy Spin(n) v konkrétních nízkých dimenzích. Kromě Cliffordovy algebry budou všechny argumenty v této práci využívat pouze znalosti z lineární algebry a elementární teorie grup.

Klíčová slova: Cliffordova algebra, spingrupa, ortogonální transformace, Lieova grupa

Title: Spin Groups in Low Dimension

Author: Jakub Knesel

Department: Mathematical Institute of Charles University

Supervisor: Mgr. Dalibor Šmíd, Ph.D., Mathematical Institute of Charles University

Abstract: The aim of his thesis is to construct matrix representations of the Lie groups Spin(n) = Spin(0,n,$\mathbb{R}$) in dimensions from one to six. After we construct the double-cover of the group SO(3) using the group SU(2) in the first chapter, we will define the Clifford algebra, which we will use to construct the spin group in general. We will also describe how the spin group Spin(n) provides a double-cover of the group SO(n). Using this theory, we will construct matrix representations of the Clifford algebra and the spin group Spin(n) in all the low dimensions listed above respectively. Apart from Clifford algebra, all arguments in this thesis will be based only on linear algebra and elementary group theory.

Keywords: Clifford algebra, Spin group, orthogonal transformation, Lie group

Obsah

Úvod

Dobře známým výsledkem geometrie je, že rotace v prostoru $\mathbb{R}^3$ se dají realizovat pomocí kvaternionového násobení. Způsob, kterým kvaterniony tyto rotace realizují je mimo jiné zachycen v existenci 2-1 nakrytí grupy SO(3) pomocí grupy SU(2). Podobným, ale o něco méně známým výsledkem, je realizace rotací v prostoru $\mathbb{R}^4$, opět pomocí kvaternionového násobení, což je zachyceno v existenci 2-1 nakrytí grupy SO(4) pomocí grupy $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ a má význam například v kvantovém popisu atomu vodíku. S tímto nakrytím je pak příbuzné 2-1 nakrytí takzvané Lorentzovy grupy O(1,3), která hraje důležitou roli ve speciální teorii relativity při popisování symetrií prostoročasu. V této práci existenci těchto 2-1 nakrytí zobecníme. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ totiž existuje pro grupu $\mathrm{SO}(n)$ grupa G a surjektivní grupový homomorfismus $\chi : G \longrightarrow \mathrm{SO}(n)$ s dvouprvkovým jádrem. Grupa G se pak nazývá spingrupa a značí se $\mathrm{Spin}(n)$. Teorie spingrup je důležitá při popisu elementárních částic a interakcí mezi nimi, neboť umožňuje rozšíření grupy symetrií takzvaného standardního modelu, viz článek [1] o teoriích velkého sjednocení. Z matematického hlediska je dále spingrupa zajímavá například v tom, že je to Lieova grupa, která se až na výjimky nedá popsat jako grupa matic. K těmto výjimkám dochází v nízkých dimenzích $n = 1, \ldots, 6$. Cílem této práce bude zkonstruovat maticové reprezentace grupy $\mathrm{Spin}(n)$ pro $n = 1, \ldots, 6$.

V kapitole 1 zkonstruujeme 2-1 nakrytí grupy SO(3) pomocí speciální unitární grupy SU(2) s využitím pouze znalostí z lineární algebry a elementární teorie grup. V kapitole 2 definujeme pojem Cliffordova algebra. Jedná se o jisté rozšíření vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$ se symetrickou nedegenerovanou bilineární formou, které nám umožní pomocí zavedení multiplikativní struktury ne $\mathbb{R}^n$ realizovat ortogonální transformace prostoru $\mathbb{R}^n$ vzhledem k dané bilineární formě. Grupu $\mathrm{Spin}(n)$ pak zkonstruujeme jako jistou grupu definovanou pomocí multiplikativní struktury Cliffordovy algebry prostoru $\mathbb{R}^n$. Způsob konstrukce obecné Cliffordovy algebry a spingrupy nám navíc poskytne celkem podrobný návod jak v konkrétních dimenzích hledat jejich maticové reprezentace. Na konci kapitoly 2 pak nalezneme s využitím vybudované teorie maticové reprezentace grup Spin(1) a Spin(2) a ukážeme, že $\mathrm{Spin}(3) \simeq \mathrm{SU}(2)$. V kapitolách 3, 4 a 5 pak nalezneme maticové reprezentace Cliffordových algeber a spingrup v dimenzích čtyři, pět a šest. Během všech konstrukcí se budeme kromě Cliffordovy algebry opírat pouze o znalosti z lineární algebry a elementární teorie grup, a přestože se jedná o Lieovy grupy, obejdeme se v této práci bez znalostí z topologie a teorie Lieových algeber. Často budeme pracovat s kvaterniony a maticemi nad nimi. V kapitole 5 budeme také používat maticovou exponenciálu. Z těchto důvodů se na konci této práce nachází ještě appendix A, ve kterém jsou bez důkazu shrnuty základní vlastnosti těchto nástrojů.

Na konec ještě poznamenejme, že spingrupa je dokonce ještě obecnější, než jak jsme jí prezentovali v předchozích odstavcích. Jako 2-1 nakrytí speciální ortogonální grupy totiž existuje pro libovolný reálný vektorový prostor se symetrickou nedegenerovanou bilineární formou. Potom se značí $\mathrm{Spin}(p,q)$, kde (p,q) je signatura příslušné bilineární formy, a podobně jako v definitním případě, pro dvojice (p,q) takové, že $p + q$ je malé, existuje maticová reprezentace Lieovy grupy $\mathrm{Spin}(p,q)$. V článku [2] je popsáno, jakým způsobem maticové reprezentace grup Spin(p,q) poskytují 2-1 nakrytí grup SO(p,q) pro jednotlivé dvojice (p,q), $p + q \leq 6$. V této práci se sice v konkrétních dimenzích budeme zabývat pouze spingrupami prostorů s definitní bilineární formou, nicméně ve druhé kapitole ukážeme existenci a způsob konstrukce spingrupy pro libovolnou signaturu (p,q).

1. Motivační úloha - rotace v $\mathbb{R}^3$

V této úvodní kapitole zkonstruujeme 2-1 nakrytí grupy SO(3) rotací vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ pomocí grupy SU(2). To jest, nalezneme surjektivní grupový homomorfismus $\varphi : \mathrm{SU}(2) \longrightarrow \mathrm{SO}(3)$ s dvouprvkovým jádrem.

Definujme reálný vektorový prostor

$$V = \{X \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})\ ;\ X = X^*,\ \mathrm{Tr}(X) = 0\}.$$

všech 2×2 hermitovských matic s nulovou stopou. Obecný prvek V je matice tvaru

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 + x_3 i \\ x_2 - x_3 i & -x_1 \end{pmatrix} \ ; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

V má bázi $\mathcal{B} = \{E_1,E_2,E_3\}$, kde

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Na V dále definujeme skalární součin $\langle \cdot\ ;\ \cdot \rangle$ předpisem

$$\langle X; Y \rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(XY).$$

Pak vzhledem k $\langle \cdot\ ;\ \cdot \rangle$ je $\mathcal{B}$ ortonormální báze. Zřejmě V společně s $\langle \cdot\ ;\ \cdot \rangle$ je izometricky izomorfní $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem.

Nyní definujeme působení $\Phi : \mathrm{U}(2) \longrightarrow \mathrm{Aut}\, V$ grupy U(2) na V tak, že pro $U \in \mathrm{U}(2)$ a $X \in V$ je $\Phi(U)(X) = UXU^*$. Zobrazení $\Phi(U)$ je zřejmě lineární a prosté. Protože $(UXU^*)^* = UX^*U^* = UXU^*$ a konjugace zachovává stopu matice, zobrazuje $\Phi(U)$ do V a vzor prvku $Y \in V$ při $\Phi(U)$ je prvek $U^*YU \in V$. Tedy Φ je dobře definované. Pro $U_1, U_2 \in \mathrm{U}(2)$ a $X \in V$ je

$$\Phi(U_2U_1)(X) = U_2U_1X(U_2U_1)^* = U_2U_1XU_1^*U_2^* = [\Phi(U_2) \circ \Phi(U_1)](X),$$

a Φ je tak homomorfismus grup.

Dále pro $U \in \mathrm{U}(2)$ a $X,Y \in V$ je díky vlastnostem stopy matice

$$\langle \Phi(U)(X); \Phi(U)(Y) \rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(UXU^*UYU^*) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(UXYU^*) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(XY) = \langle X; Y \rangle.$$

$\Phi(U)$ tedy zachovává skalární součin na V, takže Φ zobrazuje do $\mathrm{O}(V)$.

Dále ukážeme, že pro $S \in \mathrm{SU}(2)$ je $\Phi(S) \in \mathrm{SO}(V)$. To uděláme ve dvou krocích.

Nejprve uvažujme S tvaru

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

pro nějaké $\theta \in \langle 0,2\pi)$. Pak pro $X \in V$ je

$$\Phi(S)(X) = SXS^* = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + x_3 i \\ x_2 - x_3 i & -x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & e^{i2\theta}(x_2+x_3 i) \\ e^{-i2\theta}(x_2-x_3 i) & -x_1 \end{pmatrix},$$

přičemž $x_2 + x_3 i \mapsto e^{i2\theta}(x_2 + x_3 i)$ je rotace v $\mathbb{R}^3$ v rovině (x_2,x_3) o úhel 2θ v kladném směru. Tedy $\det \Phi(S) = 1$ a $\Phi(S) \in \mathrm{SO}(V)$.

Nyní buď $S \in \mathrm{SU}(2)$ libovolná. S je unitárně diagonalizovatelná, tedy existují matice $U \in \mathrm{U}(2)$ a $D = \mathrm{diag}_2(\lambda_1,\lambda_2)$ takové, že $S = UDU^*$. $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{C}$ jsou vlastní čísla S, tedy $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1 = \det S = \lambda_1\lambda_2$. Tedy nutně $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ a existuje $\theta \in \langle 0,2\pi)$ takové, že $\lambda_1 = e^{i\theta}$ a $\lambda_2 = e^{-i\theta}$. Potom

$$\det \Phi(S) = \det \Phi(UDU^*) = \det \Phi(U) \det \Phi(D) \det \Phi(U^*) = 1,$$

neboť $\det \Phi(U^*) = (\det \Phi(U))^{-1}$ a $\det \Phi(D) = 1$ díky předchozímu případu, a tedy $\Phi(S) \in \mathrm{SO}(V)$.

Dále definujeme φ jako zúžení Φ na $\mathrm{SU}(2)$. Ukážeme, že φ má dvouprvkové jádro. Buď $S \in \mathrm{Ker}\,\varphi$. Pak $\varphi(S) = \mathrm{id}_V$ a pro všechna $X \in V$ je $SXS^* = X$, ekvivalentně $SX = XS$. Matice S je tvaru

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \; ; \alpha, \beta \in \mathbb{C}\, , |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Součiny SX a XS mají pro $X \in V$ tvar

$$SX = \begin{pmatrix} x_1\alpha - \overline{\beta}(x_2+x_3 i) & \alpha(x_2 - x_3 i) + x_1\overline{\beta} \\ x_1\beta + \overline{\alpha}(x_2+x_3 i) & \beta(x_2 - x_3 i) - x_1\overline{\alpha} \end{pmatrix},$$

$$XS = \begin{pmatrix} x_1\alpha + \beta(x_2 - x_3 i) & -x_1\overline{\beta} + \overline{\alpha}(x_2 - x_3 i) \\ \alpha(x_2+x_3 i) - x_1\beta & -\overline{\beta}(x_2+x_3 i) - x_1\overline{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Rovnost těchto součinů musí platit speciálně pro prvky báze $\mathcal{B}$. Dosazením $X = E_1$ dostaneme porovnáním prvků na pozici (2,1), že $\beta = -\beta$. Tedy $\beta = 0$. Pro $X = E_2$ dostaneme opět z pozice (2,1), že $\alpha = \overline{\alpha}$. Tedy $\alpha \in \mathbb{R}$, a protože $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, tak $\alpha = \pm 1$. Dostáváme, že $S \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ je ± 1 násobkem jednotkové matice. Tedy $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{\pm I_2\}$ je dvouprvkové.

Nakonec ještě ukážeme, že $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{SO}(V)$. Buď $R \in \mathrm{SO}(V)$. Díky izometrii $V \simeq \mathbb{R}^3$ máme také izomorfismus $\mathrm{SO}(V) \simeq \mathrm{SO}(3)$. Víme, že každý prvek $\mathrm{SO}(3)$ je rotace kolem nějaké přímky procházející počátkem, tedy každý takový prvek má vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu 1. To samé lze říct o R. Buď tedy X vlastní vektor R příslušný vlastnímu číslu 1. Prvky V jsou hermitovské matice a ty lze unitárně diagonalizovat. Existují tedy $U \in \mathrm{U}(2)$ a $x_1 \in \mathbb{R}$ takové, že

$$X = U \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & -x_1 \end{pmatrix} U^* = \Phi(U) \left(\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & -x_1 \end{pmatrix} \right)$$

($X \in V$ má nulovou stopu a konjugace stopu zachovává). Prvky V, které jsou kolmé na X, jsou tvaru

$$U \begin{pmatrix} 0 & x_2 + x_3 i \\ x_2 - x_3 i & 0 \end{pmatrix} U^* = \Phi(U) \left(\begin{pmatrix} 0 & x_2 + x_3 i \\ x_2 - x_3 i & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Položíme-li

$$S = U \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix} U^* \in \mathrm{SU}(2),$$

kde $\theta \in \langle 0{,}2\pi)$ je úhel rotace R jakožto prvku $\mathrm{SO}(3)$, pak $\varphi(S) = R$. Skutečně, $\varphi(S)(X) = X$ a

$$\varphi(S)\left(U \begin{pmatrix} 0 & x_2 + x_3 i \\ x_2 - x_3 i & 0 \end{pmatrix} U^*\right) = U \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta}(x_2 + x_3 i) \\ e^{-i\theta}(x_2 - x_3 i) & 0 \end{pmatrix} U^*$$

$$= \Phi(U)\left(\begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta}(x_2 + x_3 i) \\ e^{-i\theta}(x_2 - x_3 i) & 0 \end{pmatrix}\right),$$

což je vzhledem k tomu, že $\Phi(U)$ zachovává skalární součin na V, rotace o úhel θ kolem X. Tedy φ je na $\mathrm{SO}(V)$.

Dohromady máme, že $\varphi : \mathrm{SU}(2) \longrightarrow \mathrm{SO}(V) \simeq \mathrm{SO}(3)$ je surjektivní grupový homomorfismus s dvouprvkovým jádrem, a je tak hledaným 2-1 nakrytím grupy $\mathrm{SO}(3)$.

Poznamenejme, že všechny konstrukce by bylo možné provést pomocí kvaternionů. Prostor $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem je izometricky izomorfní prostoru $\mathrm{Ve}\,\mathbb{H} = \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k \subset \mathbb{H}$ se skalárním součinem $\langle \cdot\,; \cdot \rangle$ definovaným pro $x, y \in \mathrm{Ve}\,\mathbb{H}$ jako $\langle x; y \rangle = \mathrm{Re}\, x\overline{y}$. Grupa $\mathrm{SU}(2)$ je izomorfní s grupou S^3 všech jednotkových kvaternionů. Definovali bychom tedy působení $\psi : S^3 \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}\, \mathrm{Ve}\,\mathbb{H}$ tak, že pro $q \in S^3$ a $x \in \mathrm{Ve}\,\mathbb{H}$ je $\psi(q)(x) = qxq^{-1} = qx\overline{q}$. Pak není těžké ukázat, že akce φ grupy $\mathrm{SU}(2)$ na prostoru V je izomorfní akci ψ grupy S^3 na prostoru $\mathrm{Ve}\,\mathbb{H}$.

2. Cliffordova algebra a spingrupa

2.1 Cliffordova algebra

V této části ať V označuje vektorový prostor konečné dimenze n nad komutativním tělesem $\mathbb{K}$ spolu se symetrickou nedegenerovanou bilineární formou $B : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ (to jest $\forall\, o \neq v \in V : \exists w \in V : B(v,w) \neq 0$).

Definice 2.1. *Cliffordova algebra $\mathcal{C}(V)$ prostoru V je asociativní $\mathbb{K}$-algebra s jednotkou taková, že*

- *$\mathbb{K}$ a V jsou vektorové podprostory $\mathcal{C}(V)$ a $\forall\, v \in V : v^2 = B(v,v)$,*
- *je-li $\mathcal{A}$ asociativní $\mathbb{K}$-algebra s jednotkou $1_{\mathcal{A}}$ a $\iota : V \longrightarrow \mathcal{A}$ lineární zobrazení takové, že $\forall\, v \in V : \iota(v)^2 = B(v,v)1_{\mathcal{A}}$, pak existuje právě jeden homomorfismus algeber $\Psi : \mathcal{C}(V) \longrightarrow \mathcal{A}$ takový, že $\Psi|_V = \iota$.*

Cliffordova algebra existuje pro libovolný vektorový prostor V konečné dimenze s libovolnou symetrickou nedegenerovanou bilineární formou B. Uvažujme tenzorovou algebru $\mathrm{T}(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \otimes^k V$ prostoru V a její oboustranný ideál $I = \langle v \otimes v - B(v,v) \ ;\ v \in V \rangle$ a položme $\mathcal{C} = \mathrm{T}(V)/I$. Protože $\mathrm{T}(V)$ je asociativní $\mathbb{K}$-algebra s jednotkou $1 \in \mathbb{K}$, platí to samé i pro $\mathcal{C}$. Označíme-li pro $v,w \in V : vw = v \otimes w + I$, pak $v^2 = B(v,v) + I$. Celý a podrobný důkaz existence Cliffordovy algebry pomocí tenzorové algebry je v [3].

Dále bez důkazu uvedeme tvrzení o bázi Cliffordovy algebry, které budeme dále potřebovat (jeho důkaz je opět možné najít v [3]).

Tvrzení 2.1. *Buď $\{u_1, \ldots, u_n\}$ B-ortogonální báze prostoru V, to jest pro libovolné $1 \leq i,j \leq n$ je $|B(u_i,u_j)| = \delta_{ij}$. Pro $I \subset N = \{1, \ldots, n\}$ dále označme $u_I = u_{i_1} \ldots u_{i_k}$, kde $|I| = k$ a $i_1 < \ldots < i_k \in I$. Speciálně $u_\emptyset = 1 \in \mathbb{K}$. Pak množina $\{u_I \ ;\ I \subset N\}$ je báze $\mathcal{C}(V)$. V důsledku platí* $\dim \mathcal{C}(V) = 2^n$.

Nadále budeme všechny konstrukce, které jsou závislé na bázi $\mathcal{C}(V)$, provádět vzhledem k bázi $\{u_I \ ;\ I \subset N\}$ definované v tvrzení 2.1.

Pozorování 2.2. *Pro prvky $v,w \in V$ takové, že $B(v,w) = 0$, platí $vw = -wv$. Speciálně, pro prvky báze $\{u_1, \ldots, u_n\}$ prostoru V z tvrzení 2.1 platí $u_i u_j = -u_j u_i$ pro $i \neq j$.*

Důkaz. Nejprve rozepíšeme $(v + w)^2 = v^2 + vw + wv + w^2$. Zároveň z definice $\mathcal{C}(V)$ máme $(v + w)^2 = B(v + w, v + w) = B(v,v) + B(w,w) = v^2 + w^2$ díky B-ortogonalitě prvků v,w. Odečtením dostaneme $vw + wv = 0$. □

Také se nám bude hodit následující značení. Víme, že každý prvek $a \in \mathcal{C}(V)$ se dá jednoznačně vyjádřit ve tvaru $a = \sum_{I \subset N} a_I u_I$, $a_I \in \mathbb{K}$. Pro $0 \leq k \leq n$ označíme $\mathcal{C}^k(V) = \langle u_I \ ;\ I \subset N,\ |I| = k \rangle_{\mathbb{R}}$ vektorový podprostor $\mathcal{C}(V)$ a $[a]_k = \sum_{|I|=k} a_I u_I$ projekci prvku a do $\mathcal{C}^k(V)$. Díky tomu, že známe bázi $\mathcal{C}(V)$, a tomu, že pro u_I, u_J, kde $|I|, |J|$ sudé, pro $u_I u_J = \pm u_{(I \cup J) \setminus (I \cap J)}$ je $|(I \cup J) \setminus (I \cap J)|$ opět sudé, můžeme definovat tzv. sudou část $\mathcal{C}(V)$.

Definice 2.2. *Pro $\mathcal{C}(V)$ definujeme její sudou část jako její podalgebru generovanou prvky u_I, $I \subset N$, $|I|$ sudé, a značíme jí $\mathcal{C}^{\mathrm{ev}}(V)$. Tedy $\mathcal{C}^{\mathrm{ev}}(V) = \mathcal{C}^0(V) \oplus \mathcal{C}^2(V) \oplus \mathcal{C}^4(V) \oplus \dots$*

Poznámka. V definici 2.2 se ve vyjádření $\mathcal{C}^{\mathrm{ev}}(V)$ jakožto direktního součtu jedná o direktní součet vektorových prostorů, ale ne algeber. Jednotlivé podprostory $\mathcal{C}^k(V)$ závisí na naší volbě báze $\{u_I \; ; \; I \subset N\}$, ale podprostor $\mathcal{C}^{\mathrm{ev}}(V)$ už na ní nezávisí.

Definice 2.3. *Na $\mathcal{C}(V)$ definujeme involuci $\gamma : \mathcal{C}(V) \longrightarrow \mathcal{C}(V)$ jako (jednoznačné) rozšíření lineárního zobrazení $v \mapsto -v$ z V do $\mathcal{C}(V)$ na automorfismus algebry $\mathcal{C}(V)$.*

Protože $(-v)^2 = B(-v, -v) = B(v,v)$, je díky definici Cliffordovy algebry γ opravdu jednoznačně určeno a je to endomorfismus algebry $\mathcal{C}(V)$. Tedy γ je lineární a navíc pro $a,b \in \mathcal{C}(V)$ je $\gamma(ab) = \gamma(a)\gamma(b)$. Potom pro $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset N$ je

$$\gamma(u_I) = \gamma(u_{i_1} \dots u_{i_k}) = \gamma(u_{i_1}) \dots \gamma(u_{i_k}) = (-1)^k u_{i_1} \dots u_{i_k} = (-1)^{|I|} u_I.$$

Tedy pro $a = \sum\limits_{I \subset N} a_I u_I$ je $\gamma(a) = \sum\limits_{I \subset N} (-1)^{|I|} a_I u_I$. Odtud již snadno vidíme, že γ je bijekce, $\gamma \circ \gamma = \mathrm{id}_{\mathcal{C}(V)}$ a že γ zůžené na $\mathcal{C}^{\mathrm{ev}}(V)$ je identita. $\mathcal{C}^{\mathrm{ev}}(V)$ jsme mohli tedy také definovat jako $\{a \in \mathcal{C}(V) \; ; \; \gamma(a) = a\}$.

Na závěr této části ještě učiníme jednoduché pozorování o invertibilních prvcích v $\mathcal{C}(V)$.

Pozorování 2.3.
(1) $v \in V$ je invertibilní, právě když $B(v,v) \neq 0$.
(2) $\forall\, I \subset N : u_I$ je invertibilní.

Důkaz.
(1) Buď $v \in V$ invertibilní. Pak $\exists\, a \in \mathcal{C}(V) : av = 1$. Pro spor předpokládejme, že $B(v,v) = 0$. Zobrazení $g : c \in \mathcal{C}(V) \longmapsto vc$ je zřejmě lineární a díky invertibilitě prvku v je prosté. Tedy $\operatorname{Ker} g = \{0\}$. Zároveň $g(v) = v^2 = B(v,v) = 0$, tedy $v \in \operatorname{Ker} g$, takže $v = 0$, což je spor s invertibilitou prvku v. Máme-li naopak $B(v,v) \neq 0$, pak $v^{-1} = \frac{1}{B(v,v)} v$.

(2) Pro $u_I = u_{i_1} \dots u_{i_k}$ stačí položit $u_I^{-1} = \pm u_{i_k} \dots u_{i_1}$. □

2.2 Konstrukce reálné spingrupy

V této části budeme uvažovat pouze Cliffordovu algebru vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$ s bilineární formou

$$B(x,y) = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i - \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i y_i \;\; ; x, y \in \mathbb{R}^n$$

pro nějaká $0 \leq p \leq n$ a $q = n - p$. Tento prostor budeme značit $\mathbb{R}^{p,q}$ a jeho Cliffordovu algebru $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{p,q})$. Báze $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{p,q})$ je $\{e_I \; ; \; I \subset N = \{1, \dots, n\}\}$, kde $\{e_1, \dots, e_n\}$ je kanonická báze $\mathbb{R}^n$, která je vzhledem k bilineární formě B ortonormální.

Uvažujme prvek $a \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^{p,q})$ takový, který je invertibilní a $\forall x \in \mathbb{R}^{p,q} : ax\gamma(a)^{-1} \in \mathbb{R}^{p,q}$. Označme $\chi(a) : \mathbb{R}^{p,q} \longrightarrow \mathbb{R}^{p,q}$ lineární zobrazení definované předpisem $\chi(a)(x) = ax\gamma(a)^{-1}$, $x \in \mathbb{R}^{p,q}$. Ukážeme, že $\chi(a) \in \mathrm{O}(p,q)$, kde $\mathrm{O}(p,q)$ značí grupu všech ortogonálních transformací na $\mathbb{R}^{p,q}$. Analogicky, $\mathrm{SO}(p,q)$ značí grupu všech speciálních ortogonálních transformací na $\mathbb{R}^{p,q}$.

$$B(\chi(a)(x),\chi(a)(x)) = (\chi(a)(x))^2 = -\gamma(\chi(a)(x))\chi(a)(x) =$$

$$= -\gamma(ax\gamma(a)^{-1})ax\gamma(a)^{-1} = -\gamma(a)\gamma(x)x\gamma(a)^{-1} = \gamma(a)B(x,x)\gamma(a)^{-1} = B(x,x).$$

Zde jsme dvakrát použili to, že γ zúžené na $\mathbb{R}^{p,q}$ je $x \mapsto -x$, a tedy $B(x,x) = -\gamma(x)x$. Dále pro $x,y \in \mathbb{R}^{p,q}$ je

$$B(\chi(a)(x),\chi(a)(y)) =$$

$$= \frac{1}{2}[B(\chi(a)(x+y),\chi(a)(x+y)) - B(\chi(a)(x),\chi(a)(x)) - B(\chi(a)(y),\chi(a)(y))] =$$

$$= \frac{1}{2}[B(x+y,x+y) - B(x,x) - B(y,y)] = B(x,y).$$

Označme A matici zobrazení $\chi(a)$ a $D = \mathrm{diag}_{p+q}(1,\dots 1,-1,\dots,-1)$ matici bilineární formy B vzhledem ke kanonické bázi prostoru $\mathbb{R}^{p,q}$. Z toho, že $\chi(a)$ zachovává B, plyne $A^T DA = D$. Protože D je regulární, je také A regulární a $\chi(a)$ je tak bijekce. Tedy skutečně $\chi(a) \in \mathrm{O}(p,q)$.

Vidíme, že zobrazení $\chi(a^{-1})$ je inverzní zobrazení k $\chi(a)$, tedy má-li invertibilní prvek $a \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^{p,q})$ vlastnost $a\mathbb{R}^{p,q}\gamma(a)^{-1} = \mathbb{R}^{p,q}$, má tuto vlastnost i prvek a^{-1}. Je-li navíc $b \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^{p,q})$ nějaký další invertibilní prvek s vlastností $b\mathbb{R}^{p,q}\gamma(b)^{-1} = \mathbb{R}^{p,q}$, pak platí

$$\chi(ab)(x) = abx\gamma(ab)^{-1} = abx\gamma(b)^{-1}\gamma(a)^{-1} = [\chi(a) \circ \chi(b)](x).$$

Tato pozorování vedou na následující definici.

Definice 2.4. *Cliffordova grupa $\Gamma(p,q)$ je multiplikativní grupa tvořená těmi prvky $a \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^{p,q})$, které jsou invertibilní a $\forall x \in \mathbb{R}^{p,q} : ax\gamma(a)^{-1} \in \mathbb{R}^{p,q}$. Dále definujeme sudou podgrupu Cliffordovy grupy $\Gamma^{\mathrm{ev}}(p,q)$ jako $\Gamma(p,q) \cap \mathcal{C}^{\mathrm{ev}}(\mathbb{R}^{p,q})$.*

Díky pozorováním před definicí 2.4 je $\Gamma(p,q)$ opravdu grupa. Její neutrální prvek je prvek $1 \in \mathbb{R}$. Navíc, $\chi : a \in \Gamma(p,q) \longmapsto \chi(a)$ je grupový homomorfismus z $\Gamma(p,q)$ do $\mathrm{O}(p,q)$. Dále, $\Gamma^{\mathrm{ev}}(p,q)$ je skutečně podgrupa v $\Gamma(p,q)$, neboť zřejmě $\Gamma^{\mathrm{ev}}(p,q) \subset \Gamma(p,q)$ a $\mathcal{C}^{\mathrm{ev}}(\mathbb{R}^{p,q})$ je uzavřená na násobení.

Tvrzení 2.4. $\mathrm{Ker}\,\chi = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Důkaz. Buď $b \in \mathrm{Ker}\,\chi$. Pak $\chi(b) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{p,q}}$, a tedy $\forall x \in \mathbb{R}^{p,q} : bx\gamma(b)^{-1} = x$, tedy $bx = x\gamma(b)$. Speciálně musí tento vztah platit pro prvky e_i báze prostoru $\mathbb{R}^{p,q}$. Vyjádříme b ve tvaru $\sum\limits_{I \subset N} b_I e_I$, $b_I \in \mathbb{R}$. Díky tomu, že každý prvek $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{p,q})$ má právě jedno takové vyjádření, a tomu, že γ je homomorfismus, musí být pro každou $I \subset N$ $b_I e_I x = x\gamma(b_I e_I) = b_I x\gamma(e_I) = (-1)^{|I|} b_I x e_I$. Zřejmě prvek $e_\emptyset = 1$ tento vztah splňuje pro libovolné $x \in \mathbb{R}$. Ať tedy $I \neq \emptyset$. Zvolme $x = e_j$ tak, že $j \in I$. Potom $b_I e_I e_j = (-1)^{|I|-1} b_I e_j e_I = -(-1)^{|I|} b_I e_j e_I$, kde v první rovnosti využíváme opakovaně pozorování 2.2. Tedy nutně $b_I = 0$. Dohromady je tak $b = b_\emptyset \in \mathbb{R}$, a tedy $\mathrm{Ker}\,\chi = \Gamma(p,q) \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. □

Tvrzení 2.5. $\Gamma(p,q)$ *je generovaná invertibilními prvky z* $\mathbb{R}^{p,q}$ *a* $\chi : \Gamma(p,q) \longrightarrow \mathrm{O}(p,q)$ *je surjektivní grupový homomorfismus.*

Důkaz. Uvažujme $v \in \mathbb{R}^{p,q}$ invertibilní, tj. ekvivalentně $B(v,v) \neq 0$ (pozorování 2.3). Pro každý prvek $x \in \mathbb{R}^{p,q}$ máme jednoznačný rozklad $x = tv + y$, kde $t \in \mathbb{R}$, $B(v,y) = 0$ a tv je B-ortogonální projekce x do podprostoru $\mathbb{R}^{p,q}$ generovaného prvkem v. Potom

$$vx\gamma(v)^{-1} = v(tv+y)(-v^{-1}) = -tv^2v^{-1} - vyv^{-1} = -tv + yvv^{-1} = -tv + y \in \mathbb{R}^{p,q}.$$

V předposlední rovnosti jsme použili pozorování 2.2 o antikomutativitě B-ortogonálních prvků na v a y.

Dostáváme, že $v \in \Gamma(p,q)$, a vidíme, že $\chi(v)$ je reflexe podle nadroviny kolmé k prvku v. Podle Cartan-Dieudonného věty A.3 je $O(p,q)$ je generovaná reflexemi, tedy

$$\mathrm{O}(p,q) = \langle \chi(v) \; ; \; v \in \mathbb{R}^{p,q},\, B(v,v) \neq 0 \rangle.$$

Je-li tedy $T \in \mathrm{O}(p,q)$, pak $T = \chi(v_1) \circ \ldots \circ \chi(v_k)$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ a invertibilní $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^{p,q}$, a protože χ je homomorfismus grup, tak $T = \chi(v_1 \ldots v_k)$. Dokázali jsme, že χ je surjektivní.

Je-li $a \in \Gamma(p,q)$, pak $\chi(a) \in \mathrm{O}(p,q)$ je složením reflexí $\chi(v_1), \ldots, \chi(v_k)$ pro nějaké invertibilní $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^{p,q}$. Potom

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{p,q}} = \chi(a) \circ \chi(v_1 \ldots v_k)^{-1} = \chi(av_k^{-1} \ldots v_1^{-1}),$$

tedy $av_k^{-1} \ldots v_1^{-1} \in \operatorname{Ker} \chi$. Podle tvrzení 2.4 je tak $av_k^{-1} \ldots v_1^{-1} = s$ pro nějaké $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Potom $a = \frac{1}{s} v_1 \ldots v_k$, což dokazuje, že $\Gamma(p,q)$ je generovaná invertibilními prvky z $\mathbb{R}^{p,q}$. $\square$

Díky tvrzení 2.5 je možné definovat Cliffordovu grupu jako

$$\Gamma(p,q) = \{v_1 \ldots v_k \; ; \; k \in \mathbb{N}, v_i \in \mathbb{R}^{p,q}, B(v_i,v_i) \neq 0\}$$

a její sudou podgrupu jako

$$\Gamma^{\mathrm{ev}}(p,q) = \{v_1 \ldots v_{2k} \; ; \; k \in \mathbb{N}, v_i \in \mathbb{R}^{p,q}, B(v_i,v_i) \neq 0\},$$

neboť pro $v,w \in \mathbb{R}^{p,q}$ je $vw \in \mathcal{C}^{\mathrm{ev}}(\mathbb{R}^{p,q})$. Protože složení dvou reflexí podle nadrovin v $\mathbb{R}^{p,q}$ je prvkem $\mathrm{SO}(p,q)$, je obraz $\Gamma^{\mathrm{ev}}(p,q)$ při χ právě $\mathrm{SO}(p,q)$. Označíme-li tedy χ^{ev} zúžení χ na $\Gamma^{\mathrm{ev}}(p,q)$, pak $\chi^{\mathrm{ev}} : \Gamma^{\mathrm{ev}}(p,q) \longrightarrow \mathrm{SO}(p,q)$ je surjektivní grupový homomorfismus, jehož jádro je $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dostáváme následující izomorfismy.

$$\Gamma(p,q)/\mathbb{R}^\times \simeq \mathrm{O}(p,q) \;,\;\; \Gamma^{\mathrm{ev}}(p,q)/\mathbb{R}^\times \simeq \mathrm{SO}(p,q),$$

kde $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je multiplikativní grupa nenulových reálných čísel.

Buď nyní $k \in \mathbb{N}$ a mějme invertibilní prvky $v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_k \in \mathbb{R}^{p,q}$ takové, že $\forall\, 1 \leq i \leq k : \exists\, t_i \in \mathbb{R}\setminus\{0\} : \; w_i = t_i v_i$. Označíme-li $a = v_1 \ldots v_k$ a $b = w_1 \ldots w_k$, pak

$$a^{-1}b = t_1 \ldots t_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} = \operatorname{Ker} \chi.$$

Potom $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{p,q}} = \chi(a^{-1}b) = \chi(a)^{-1}\chi(b)$, a tedy $\chi(a) = \chi(b)$. Z toho plyne, že pro nakrytí všech prvků grup $\mathrm{O}(p,q)$, resp. $\mathrm{SO}(p,q)$, stačí brát pouze ty součiny $v_1 \ldots v_k \in \Gamma(p,q)$, pro které je $|B(v_i,v_i)| = 1$, $1 \leq i \leq k$. Nyní můžeme konečně definovat pingrupu a spingrupu.

Definice 2.5. *Pingrupu* $\mathrm{Pin}(p,q)$ *a spingrupu* $\mathrm{Spin}(p,q)$ *definujeme jako*

$$\mathrm{Pin}(p,q) = \{v_1 \dots v_k \; ; \; k \in \mathbb{N}, v_i \in \mathbb{R}^{p,q}, |B(v_i,v_i)| = 1\},$$

$$\mathrm{Spin}(p,q) = \{v_1 \dots v_{2k} \; ; \; k \in \mathbb{N}, v_i \in \mathbb{R}^{p,q}, |B(v_i,v_i)| = 1\} = \mathrm{Pin}(p,q) \cap \Gamma^{\mathrm{ev}}(p,q).$$

Je snadné nahlédnout, že $\mathrm{Pin}(p,q) \leq \Gamma(p,q)$, $\mathrm{Spin}(p,q) \leq \Gamma^{\mathrm{ev}}(p,q)$ a také že $\mathrm{Pin}(p,q) \simeq \Gamma(p,q)/\mathbb{R}^{\times}_{+}$ a $\mathrm{Spin}(p,q) \simeq \Gamma^{\mathrm{ev}}(p,q)/\mathbb{R}^{\times}_{+}$, kde $\mathbb{R}^{\times}_{+}$ je multiplikativní grupa kladných reálných čísel. Tuto definici budeme často využívat při konstrukci spingrupy v konkrétních případech. Navíc, protože prvky pingrupy a spingrupy jsou generovány jen těmi $v \in \mathbb{R}^{p,q}$, pro které je $|B(v,v)| = 1$, platí $\mathrm{Pin}(p,q) \cap \mathbb{R} = \mathrm{Spin}(p,q) \cap \mathbb{R} = \{\pm 1\}$. Označíme-li tedy $\tilde{\chi} = \chi|_{\mathrm{Pin}(p,q)}$ a $\tilde{\chi}^{\mathrm{ev}} = \chi|_{\mathrm{Spin}(p,q)}$, pak $\tilde{\chi} : \mathrm{Pin}(p,q) \longrightarrow \mathrm{O}(p,q)$ a $\tilde{\chi}^{\mathrm{ev}} : \mathrm{Spin}(p,q) \longrightarrow \mathrm{SO}(p,q)$ jsou surjektivní grupové homomorfismy s dvouprvkovým jádrem $\{\pm 1\} \simeq \mathbb{Z}_2$. Máme tak dvě krátké exaktní posloupnosti

$$\{1\} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathrm{Pin}(p,q) \longrightarrow \mathrm{O}(p,q) \longrightarrow \{1\},$$

$$\{1\} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathrm{Spin}(p,q) \longrightarrow \mathrm{SO}(p,q) \longrightarrow \{1\}.$$

Poznámka (Značení)**.** Pro jednoduchost značení, kdykoliv nadále použijeme symbol χ, budeme se tím ve skutečnosti odkazovat na homomorfismus $\tilde{\chi}^{\mathrm{ev}}$ grupy $\mathrm{Spin}(p,q)$ na grupu $\mathrm{SO}(p,q)$.

2.2.1 $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,n})$, Spin($n$) a SO($n$)

Speciální pozornost si zaslouží prostor $\mathbb{R}^{p,q}$, kde $p = 0$ a $q = n$. Tedy když

$$B(x,y) = -\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = -\langle x\,;y\rangle \;\; ; x, y \in \mathbb{R}^n,$$

kde $\langle \cdot\,;\cdot \rangle$ je standardní skalární součin na $\mathbb{R}^n$. Zřejmě $\mathbb{R}^{0,n} \simeq \mathbb{R}^{n,0}$ a $\mathrm{O}(0,n) = \mathrm{O}(n,0) = \mathrm{O}(n)$ a $\mathrm{SO}(0,n) = \mathrm{SO}(n,0) = \mathrm{SO}(n)$. Tedy $\mathrm{Pin}(0,n)$, resp. $\mathrm{Spin}(0,n)$, poskytují 2-1 nakrytí grup $\mathrm{O}(n)$, resp. $\mathrm{SO}(n)$. Pro jednoduchost budeme dále značit $\mathrm{Pin}(n) = \mathrm{Pin}(0,n)$ a $\mathrm{Spin}(n) = \mathrm{Spin}(0,n)$. Máme tak

$$\{1\} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathrm{Pin}(n) \longrightarrow \mathrm{O}(n) \longrightarrow \{1\},$$

$$\{1\} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathrm{Spin}(n) \longrightarrow \mathrm{SO}(n) \longrightarrow \{1\}.$$

2.3 Příklady

Ještě než přejdeme k dalším kapitolám, kde budeme postup popsaný výše používat k nalezení maticových reprezentací Cliffordovy algebry, spingrupy a nakrytí speciální ortogonální grupy pro reálný vektorový prostor dimenze čtyři, pět a šest, uvedeme tyto konstrukce pro dimenze nižší, kde jsou podstatně jednodušší.

2.3.1 $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,1})$, Spin(1) a SO(1)

Prostor $\mathbb{R}^{0,1}$ má jediný bázový prvek e, pro který $B(e,e) = -1$. Tedy $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,1}) = \langle 1,e \rangle_{\mathbb{R}}$, přičemž $e^2 = -1$. Pak zřejmě $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,1}) \simeq \mathbb{C}$. Potom $\mathcal{C}^{\mathrm{ev}}(\mathbb{R}^{0,1}) = \mathbb{R}$, a tedy $\Gamma^{\mathrm{ev}}(0,1) = \mathbb{R}^{\times}$ a $\mathrm{Spin}(1) \simeq \Gamma^{\mathrm{ev}}(0,1)/\mathbb{R}^{\times}_{+} \simeq \{\pm 1\}$. Zároveň $\mathrm{SO}(1) = 1$ a 2-1 nakrytí této grupy je $\chi : \pm 1 \longmapsto 1$, což je zřejmě grupový homomorfismus.

2.3.2 $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,2})$, Spin(2) a SO(2)

Prostor $\mathbb{R}^{0,2}$ má ortonormální bázi $\{e_1,e_2\}$, kde $e_i^2 = B(e_i,e_i) = -1$ a $e_1e_2 = -e_2e_1$. Označme $e_{12} = e_1e_2$. Potom $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,2}) = \langle 1,e_1,e_2,e_{12}\rangle_{\mathbb{R}}$. Všimneme si, že $e_{12}^2 = -1$ a že prvek e_{12} antikomutuje s prvky e_1,e_2. Lineárním rozšířením přiřazení

$$1 \longmapsto 1,\ e_1 \longmapsto i,\ e_2 \longmapsto j,\ e_{12} \longmapsto k$$

dostaneme izomorfismus Cliffordovy algebry $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,2})$ s algebrou kvaternionů $\mathbb{H}$. Potom $\mathcal{C}^{\mathrm{ev}}(\mathbb{R}^{0,2}) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}k = \langle 1,k\rangle_{\mathbb{R}}$. $\mathrm{Spin}(2) \simeq \Gamma^{\mathrm{ev}}(0,2)/\mathbb{R}_+^\times$, kde $\Gamma^{\mathrm{ev}}(0,2)$ je tvořena invertibilními prvky tvaru $a + dk \in \mathbb{H}$ takovými, že

$$(a + dk)(\mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j)(a + dk)^{-1} = \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j$$

(zde využíváme toho, že involuce γ zúžená na $\mathcal{C}^{\mathrm{ev}}(\mathbb{R}^{0,2})$ je identita). Buď tedy $xi + yj \in \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j$ a $a + dk \neq 0$. Potom

$$\begin{aligned}(a + dk)(xi + yj)(a + dk)^{-1} &= (a + dk)(xi + yj)\frac{1}{a^2 + d^2}(a - dk) = \\ &= \frac{1}{a^2 + d^2}(a + dk)^2(xi + yj),\end{aligned} \tag{2.1}$$

kde ve druhé rovnosti využíváme antikomutativitu prvků i,j,k, a po roznásobení dostaneme, že tento výraz skutečně leží v $\mathbb{R}i\oplus\mathbb{R}j$. Tedy $\Gamma^{\mathrm{ev}}(0,2)$ je tvořena všemi nenulovými prvky z $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}k$. Snadno vidíme, že $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}k \simeq \mathbb{C}$, a tím pádem

$$\mathrm{Spin}(2) \simeq \mathbb{C}^\times/\mathbb{R}_+^\times \simeq S^1 = \{e^{i\theta}\ ;\ \theta \in \langle 0,2\pi)\}.$$

Navíc, díky (2.1) vidíme, že působení konjugací prvkem $s \in \mathrm{Spin}(2)$ na $\mathbb{R}^{0,2}$ je stejné jako násobení zleva prvkem s^2, neboť pro $a + dk \in \mathbb{H}$ reprezentaci prvku s by platilo $a^2 + d^2 = 1$.

Označme nyní $f : \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}k$ lineární zobrazení definované tak, že $f(xi+yj) = x+yk$. Pak f je zřejmě izomorfismus reálných vektorových prostorů $\mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j$ a $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}k$. Roznásobením bychom dostali, že pro $a + dk \in \mathrm{Spin}(2)$ a $xi + yj$ platí

$$f((a + dk)^2(xi + yj)) = (a + dk)^2 f(xi + yj).$$

Protože $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}k \simeq \mathbb{C}$, přenesli jsme vlastně zobrazením f celou situaci do $\mathbb{C}$. Definujme-li tedy působení $\Phi : S^1 \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}\, \mathbb{C}$ tak, že pro $e^{i\theta} \in S^1$ a $z \in \mathbb{C}$ bude

$$\Phi(e^{i\theta})(z) = e^{2i\theta} z = (e^{i\theta})^2 z,$$

pak zobrazení f uvažované jako izomorfismus prostorů $\mathbb{R}^{0,2}$ a $\mathbb{C}$ indukuje izomorfismus akce χ grupy Spin(2) na $\mathbb{R}^{0,2}$ s akcí Φ grupy S^1 na $\mathbb{C}$. Tedy pro $s \in \mathrm{Spin}(2)$ a jeho jednoznačně určenou reprezentaci $e^{i\theta} \in S^1$ je následující diagram komutativní.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^{0,2} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\chi(s)"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "\Phi(e^{i\theta})"] \\ \mathbb{R}^{0,2} \arrow[r, "f"'] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

2.3.3 $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,3})$ a Spin(3)

Na závěr této kapitoly se ještě vrátíme k úvodní konstrukci v dimenzi tři provedené v kapitole 1, kde jsme zkonstruovali 2-1 nakrytí grupy SO(3) pomocí grupy SU(2), a ukážeme, že SU(2) je skutečně grupa Spin(3).

Uvažujme tedy prostor $\mathbb{R}^{0,3}$ s kanonickou ortonormální bází $\{e_1,e_2,e_3\}$ a jeho Cliffordovu algebru $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,3}) = \langle e_I \ ; \ I \subset \{1,2,3\}\rangle_{\mathbb{R}}$. Podíváme-li se na $\mathcal{C}^{\mathrm{ev}}(\mathbb{R}^{0,3}) = \langle 1,e_{12},e_{23},e_{31}\rangle_{\mathbb{R}}$, vidíme, že pro $|I| = 2$ je $e_I^2 = -1$, a lineárním rozšířením následujících přiřazení

$$1 \longmapsto 1,\ e_{12} \longmapsto i,\ e_{23} \longmapsto j,\ e_{31} \longmapsto k,$$

dostaneme $\mathcal{C}^{\mathrm{ev}}(\mathbb{R}^{0,3}) \simeq \mathbb{H}$. Také si všimneme, že prvek e_{123} komutuje se všemi ostatními bázovými prvky $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,3})$. Dostáváme tak izomorfismus algeber

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,3}) = \mathcal{C}^{\mathrm{ev}}(\mathbb{R}^{0,3}) \oplus \mathcal{C}^{\mathrm{ev}}(\mathbb{R}^{0,3})e_{123} \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}e_{123}$$

a každý prvek z $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,3})$ se tak dá jednoznačně vyjádřit ve tvaru $p+qe_{123}$, $p,q \in \mathbb{H}$.

Spin(3) je definována jako $\Gamma^{\mathrm{ev}}(0,3)/\mathbb{R}_+^\times$, přičemž $\Gamma^{\mathrm{ev}}(0,3)$ je tvořena těmi invertibilními prvky $a \in \mathcal{C}^{\mathrm{ev}}(\mathbb{R}^{0,3})$, které navíc splňují $a\mathbb{R}^{0,3}a^{-1} = \mathbb{R}^{0,3}$. Protože je $\mathcal{C}^{\mathrm{ev}}(\mathbb{R}^{0,3}) \simeq \mathbb{H}$, je každý její nenulový prvek invertibilní. Všimneme si, jak vypadají prvky $\mathbb{R}^{0,3}$ v $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}e_{123}$. Buď $v \in \mathbb{R}^{0,3}$. Pak

$$v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3 = (-v_3e_{12} - v_1e_{23} - v_2e_{31})e_{123},$$

a tedy v $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}e_{123}$ je v reprezentován jako $(-v_3i - v_1j - v_2k)e_{123} = qe_{123}$, kde $q \in \mathrm{Ve}\,\mathbb{H}$. Buď tedy $p \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ a $h \in \mathrm{Ve}\,\mathbb{H}$. Potom $p(he_{123})p^{-1} = php^{-1}e_{123}$. Rozepsáním kvaternionů p,h,p^{-1} a následným roznásobením bychom dostali, že $php^{-1} \in \mathrm{Ve}\,\mathbb{H}$. Tedy $p\mathbb{R}^{0,3}p^{-1} = \mathbb{R}^{0,3}$, a tím pádem $\Gamma^{\mathrm{ev}}(0,3) = \mathbb{H}^\times$. Potom

$$\mathrm{Spin}(3) \simeq \Gamma^{\mathrm{ev}}(0,3)/\mathbb{R}_+^\times \simeq \mathbb{H}^\times/\mathbb{R}_+^\times \simeq S^3 = \{q \in \mathbb{H} \ ; \ |q| = 1\} \simeq \mathrm{SU}(2).$$

Zbývá ukázat, že podobně jako v předchozím příkladu je akce χ grupy Spin(3) na prostoru $\mathbb{R}^{0,3}$ izomorfní s akcí φ grupy SU(2) na prostoru V definované v kapitole 1. Připomeňme, že jsme definovali

$$V = \{X \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C}) \ ; \ X^* = X, \mathrm{Tr}(X) = 0\}$$

a pro $S \in \mathrm{SU}(2)$ a $X \in V$ bylo

$$\varphi(S)(X) = SXS^*.$$

Dále uvažujme vnoření

$$\sigma : a + bi + cj + dk = a + bi + (c + di)j \in \mathbb{H} \longmapsto \begin{pmatrix} a + bi & -c + di \\ c + di & a - bi \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$$

algebry $\mathbb{H}$ do algebry $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$. Pomocí něj definujeme zobrazení $f : \mathbb{R}^{0,3} \longrightarrow V$ tak, že pro $x \in \mathbb{R}^{0,3}$ je $f(x) = i\sigma(q)$, kde $q \in \mathrm{Ve}\,\mathbb{H}$ a qe_{123} je reprezentace prvku x v prostoru $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}e_{123}$. Pak f je dobře definované, neboť kvaternion q je jednoznačně určený, a protože pro $q = bi + cj + dk \in \mathrm{Ve}\,\mathbb{H}$ je

$$\sigma(q) = \begin{pmatrix} bi & -c + di \\ c + di & -bi \end{pmatrix},$$

je $i\sigma(q) \in V$. Zobrazení f je zřejmě lineární. Díky tomu, že σ je prosté, je f také prosté. Pro $X \in V$ je $-iX \in \sigma(\operatorname{Ve}\mathbb{H})$. Označíme-li tedy $x \in \mathbb{R}^{0,3}$ ten vektor, jehož reprezentace v $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}e_{123}$ je prvek $\sigma^{-1}(-iX)e_{123}$, pak $f(x) = X$. Zobrazení f je tak dohromady izomorfismus prostoru $\mathbb{R}^{0,3}$ s prostorem V. Buď $a \in \mathrm{Spin}(3)$, $s \in S^3$ jeho reprezentace v $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}e_{123}$ a $S = \sigma(s) \in \mathrm{SU}(2)$ jeho maticová reprezentace. Pak pro $x \in \mathbb{R}^{0,3}$ a jeho reprezentaci $qe_{123} \in \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}e_{123}$, $q \in \operatorname{Ve}\mathbb{H}$, je

$$f(\chi(a)(x)) = f(axa^{-1}) = i\sigma(sq\overline{s}) =$$

$$= i\sigma(s)\sigma(q)\sigma(\overline{s}) = Si\sigma(q)S^* = Sf(x)S^* = \varphi(S)(f(x)).$$

Ve druhé rovnosti jsme využili toho, že $s(qe_{123})\overline{s} = sq\overline{s}e_{123}$, neboť prvek e_{123} komutuje s celou $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,3})$. Dostáváme komutativitu následujícího diagramu, což jsme chtěli.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^{0,3} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\chi(a)"'] & V \arrow[d, "\varphi(S)"] \\
\mathbb{R}^{0,3} \arrow[r, "f"'] & V
\end{tikzcd}$$

3. Konstrukce $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,4})$, $\mathrm{Spin}(4)$ a nakrytí $\mathrm{SO}(4)$

V této kapitole nalezneme pomocí předchozí teorie maticovou reprezentaci Cliffordovy algebry a příslušné spingrupy pro $\mathbb{R}^{0,4}$ a zkonstruujeme 2-1 nakrytí grupy SO(4). Během těchto konstrukcí budeme pracovat s kvaterniony a kvaternionovými maticemi. V appendixu A.1 se proto případně nachází přehled vlastností kvaternionů a kvaternionových matic, které v této práci využíváme.

Uvažujme tedy vektorový prostor $\mathbb{R}^4$ spolu s bilineární formou

$$B(x,y) = -x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4 \ \ ; x, y \in \mathbb{R}^4.$$

Cliffordova algebra $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,4})$ tohoto prostoru má bázi

$$\{e_I \ ; \ I \subset \{1,2,3,4\}\},$$

kde $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ je kanonická báze $\mathbb{R}^{0,4}$.

Označme $X = \{1,e_{12},e_{23},e_{31}\}$ a $G = \{1,e_{123},e_4,e_{1234}\}$. Přiřadíme-li $e_{12} \mapsto \ i$, $e_{23} \mapsto j, e_{31} \mapsto k$, dostaneme, že $\langle X\rangle_{\mathbb{R}}$ podalgebra $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,4})$ je izomorfní s kvaternionovou algebrou $\mathbb{H}$ a snadno nahlédneme, že prvky množiny

$$XG = \{xg \ ; \ x \in X, g \in G\}$$

jsou až na znaménka prvky báze $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,4})$ a že prvky z G komutují s prvky z X. To dává následující izomorfismus algeber

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,4}) \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}e_{123} \oplus \mathbb{H}e_4 \oplus \mathbb{H}e_{1234}$$

a každý prvek $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,4})$ je tak tvaru

$$p + qe_{123} + re_4 + se_{1234} \ \ ; \ p, q, r, s \in \mathbb{H}.$$

Uvažujme následující přiřazení:

$$1 \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ e_{123} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_4 \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ e_{1234} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

To se rozšíří na lineární zobrazení z $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,4})$ do $\mathrm{M}_2(\mathbb{H})$ jako

$$\iota : p + qe_{123} + re_4 + se_{1234} \ \ \longmapsto \ \ \begin{pmatrix} p+s & q-r \\ q+r & p-s \end{pmatrix}.$$

Přímočaře se ověří, že ι zachovává násobení. Tedy ι je homomorfismus algeber. Také platí, že $\forall\,(h_1,h_2) \in \mathbb{H}^2 : \ \exists!\,(q_1,q_2) \in \mathbb{H}^2 : \ q_1 + q_2 = h_1$ a $q_1 - q_2 = h_2$. Z toho plyne, že každá matice v $\mathrm{M}_2(\mathbb{H})$ má právě jeden vzor v $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,4})$ při ι. Tedy ι je bijekce, a tím pádem izomorfismus algeber. Dostáváme tak, že $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,4}) \simeq \mathrm{M}_2(\mathbb{H})$. Zároveň prvky $\mathcal{C}^{\mathrm{ev}}(\mathbb{R}^{0,4})$ odpovídají v $\mathrm{M}_2(\mathbb{H})$ diagonálním maticím, neboť v $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,4})$

mají tvar $p + se_{1234}$, $p, s \in \mathbb{H}$.

Dále nalezneme maticovou reprezentaci grupy Spin(4). Nejprve si všimneme, jaký tvar mají prvky $\mathbb{R}^{0,4}$ v $\mathrm{M}_2(\mathbb{H})$. Buď $v = (v_1,v_2,v_3,v_4) \in \mathbb{R}^{0,4}$. Pak

$$v = (-v_3e_{12} - v_1e_{23} - v_2e_{31})e_{123} + (v_4 1)e_4,$$

což odpovídá matici

$$\begin{pmatrix} 0 & -v_4 - v_3i - v_1j - v_2k \\ v_4 - v_3i - v_1j - v_2k & 0 \end{pmatrix}.$$

Tedy prvky $\mathbb{R}^{0,4}$ jsou v $\mathrm{M}_2(\mathbb{H})$ reprezentovány jako matice tvaru

$$\begin{pmatrix} 0 & -\overline{h} \\ h & 0 \end{pmatrix} \quad ; h \in \mathbb{H}. \tag{3.1}$$

Spin(4) je definována jako $\Gamma^{\mathrm{ev}}(0,4)/\mathbb{R}_+^\times$, kde $\mathbb{R}_+^\times$ je multiplikativní grupa kladných reálných čísel a $\Gamma^{\mathrm{ev}}(0,4)$ je definována jako multiplikativní grupa tvořená invertibilními $a \in \mathcal{C}^{\mathrm{ev}}(\mathbb{R}^{0,4})$ takovými, že $\forall x \in \mathbb{R}^{0,4} : axa^{-1} \in \mathbb{R}^{0,4}$. V maticové reprezentaci jsou tedy prvky $\Gamma^{\mathrm{ev}}(0,4)$ tvaru $A = \mathrm{diag}_2(u_1,u_2)$, $u_1,u_2 \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$, takové, že pro libovolnou matici X typu (3.1) je matice AXA^{-1} opět typu (3.1). Matice

$$AXA^{-1} = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\overline{h} \\ h & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{|u_1|^2}\overline{u_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{|u_2|^2}\overline{u_2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{|u_2|^2} u_1\overline{h}\overline{u_2} \\ \frac{1}{|u_1|^2} u_2 h \overline{u_1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{|u_2|^2} \overline{u_2 h \overline{u_1}} \\ \frac{1}{|u_1|^2} u_2 h \overline{u_1} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

je typu (3.1), právě když $|u_1| = |u_2|$. Takže

$$\Gamma^{\mathrm{ev}}(0,4) = \{\mathrm{diag}_2(tu_1,tu_2) \; ; \; u_1,u_2 \in S^3 \subset \mathbb{H}, t \in \mathbb{R}_+^\times\},$$

a tím pádem

$$\mathrm{Spin}(4) = \Gamma^{\mathrm{ev}}(0,4)/\mathbb{R}_+^\times \simeq \{\mathrm{diag}_2(u_1,u_2) \; ; \; u_1,u_2 \in S^3\} \simeq \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2).$$

Poznamenejme ještě, že z předchozí kapitoly máme $\mathrm{Spin}(3) \simeq \mathrm{SU}(2)$, tedy platí $\mathrm{Spin}(4) \simeq \mathrm{Spin}(3) \times \mathrm{Spin}(3)$.

Ze získané reprezentace Spin(4) nyní zkonstruujeme 2-1 nakrytí grupy SO(4). Nejprve definujeme reálný vektorový prostor

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 + x_2 i & -x_3 + x_4 i \\ x_3 + x_4 i & x_1 - x_2 i \end{pmatrix} \; ; \; x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \{tS \; ; \; t \in \mathbb{R}, S \in \mathrm{SU}(2)\}.$$

Prostor V má bázi $\mathcal{B} = \{E_1,E_2,E_3,E_4\}$, kde

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

která je navíc ortonormální vzhledem ke skalárnímu součinu

$$\langle X;Y\rangle = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(XY^*) \ \ ; X,Y \in V.$$

Tedy V je izometricky izomorfní s vektorovým prostorem $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem.

Nyní definujeme působení $\Phi : \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \longrightarrow \operatorname{Aut} V$ grupy $\mathrm{Spin}(4) \simeq \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ na V tak, že pro $(S_1,S_2) \in \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ a $X \in V$ bude $\Phi(S_1,S_2)(X) = S_1XS_2^*$. Protože X je násobek matice z $SU(2)$ reálným číslem, je $S_1XS_2^* \in V$. $\Phi(S_1,S_2)$ je zřejmě lineární a prosté a je také na V, neboť vzor prvku $Y \in V$ při $\Phi(S_1,S_2)$ je prvek $S_1^*YS_2 \in V$. Zobrazení Φ je tedy dobře definované. Pro $(R_1,R_2),(S_1,S_2) \in \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ a $X \in V$ je

$$\Phi(R_1S_1,R_2S_2)(X) = R_1S_1X(R_2S_2)^* = R_1S_1XS_2^*R_2^* = [\Phi(R_1,R_2) \circ \Phi(S_1,S_2)](X),$$

tedy Φ je také homomorfismus grup.

Dále pro $(S_1,S_2) \in \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ a $X,Y \in V$ díky tomu, že konjugace zachovává stopu matice, platí

$$\langle \Phi(S_1,S_2)(X)\,;\,\Phi(S_1,S_2)(Y)\rangle = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(S_1XS_2^*(S_1YS_2^*)^*) =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(S_1XY^*S_1^*) = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(XY^*) = \langle X;Y\rangle.$$

Tedy $\Phi(S_1,S_2)$ zachovává skalární součin na V, a Φ tak zobrazuje do $\mathrm{O}(V)$.

Potřebujeme ukázat, že Φ zobrazuje do $\mathrm{SO}(V)$. K tomu se nám bude hodit následující pozorování.

Pozorování 3.1. *Buď $T \in \mathrm{O}(4)$ taková transformace, že 1 není její vlastní číslo. Pak $T \in \mathrm{SO}(4)$.*

Důkaz. Determinant T je roven součinu všech vlastních čísel T. Pro každé λ vlastní číslo T platí $|\lambda| = 1$. Navíc, je-li $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, je také $\overline{\lambda} \neq \lambda$ vlastní číslo T, neboť λ je kořen charakteristického polynomu T, což je reálný polynom, a jeho kořeny jsou tak po dvou komplexně sdružené. Z toho plyne, že počet všech nereálných vlastních čísel T musí být sudý, a tedy i počet všech reálných vlastních čísel T musí být sudý. Jediné reálné vlastní číslo T může ovšem být pouze -1. Tedy v součinu všech vlastních čísel T se -1 násobí sudě-krát. Dvojice nereálných komplexně sdružených vlastních čísel se vynásobí na 1. Dohromady je tak součin vlastních čísel T roven jedné, tedy $\det T = 1$, takže $T \in \mathrm{SO}(4)$. □

$\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ je generována dvojicemi tvaru (S,I_2) a (I_2,S). Ukážeme-li, že pro každou $S \in \mathrm{SU}(2)$ jsou $\Phi(S,I_2),\Phi(I_2,S) \in \mathrm{SO}(V)$, bude $\operatorname{Im}\Phi \subset \mathrm{SO}(V)$. Uvažujme tedy dvojici $(S,I_2)\,, S \in \mathrm{SU}(2)$ a ať existuje $X \in V \setminus \{0\}$ takový, že $X = \Phi(S,I_2)(X) = SX$. Ovšem X je invertibilní matice, tedy vynásobením rovnosti zprava maticí X^{-1} dostaneme $S = I_2$. V tom případě ale $\Phi(I_2,I_2) = \mathrm{id}_V \in \mathrm{SO}(V)$ a pro libovolnou $S \in \mathrm{SU}(2) \setminus \{I_2\}$ není 1 vlastní číslo $\Phi(S,I_2)$, tedy podle pozorování 3.1 je $\Phi(S,I_2) \in \mathrm{SO}(V) \simeq \mathrm{SO}(4)$. Stejným způsobem dostaneme také $\forall\, S \in \mathrm{SU}(2) : \Phi(I_2,S) \in \mathrm{SO}(V)$. Tedy Φ zobrazuje do $SO(V)$.

Dále ukážeme, že $\operatorname{Ker} \Phi$ je dvouprvkové. Buď tedy $(S_1,S_2) \in \operatorname{Ker} \Phi$. Pak platí $\forall X \in V : S_1 X S_2^* = \Phi(S_1,S_2)(X) = \mathrm{id}_V(X) = X$, tedy $S_1 X = X S_2$. Dosazením $X = E_1$ dostaneme $S_1 = S_2$. Buď tedy

$$S_1 = \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2).$$

Potom dosazením $X = E_3$ dostaneme

$$S_1 E_3 = \begin{pmatrix} -\overline{\beta} & -\alpha \\ \overline{\alpha} & -\beta \end{pmatrix}, \ E_3 S_1 = \begin{pmatrix} -\beta & -\overline{\alpha} \\ \alpha & -\overline{\beta} \end{pmatrix}.$$

Porovnáním odpovídajících pozic dostaneme $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Nakonec dosadíme $X = E_2$ a dostaneme

$$S_1 E_2 = i \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}, \ E_2 S_1 = i \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Odtud dostáváme, že $\beta = 0$. Potom už nutně $\alpha = \pm 1$ a $S = \pm I_2$. Tedy $\operatorname{Ker} \Phi = \{\pm(I_2,I_2)\}$ je dvouprvkové.

Zbývá ukázat, že Φ je na $\mathrm{SO}(V)$. K tomu se nám bude hodit vědět, jak vypadají reflexe v prostoru V. Buď $X \in V \setminus \{0\}$ a označme

$$N_X = \{Y \in V \ ; \ \langle X; Y \rangle = 0\}$$

nadrovinu kolmou na X. Můžeme předpokládat, že $\langle X; X \rangle = \det X = 1$, tedy $X \in \mathrm{SU}(2)$. Snadno se pak ověří, že $\{XE_2, XE_3, XE_4\}$ je (ortonormální) báze N_X (díky tomu, že konjugace zachovává stopu matice a že $X^{-1} = X^*$). Uvažujme zobrazení $T_X \in \operatorname{Aut} V$ definované tak, že pro $Y \in V$ je $T_X(Y) = -XY^*X$. Pro $j \in \{2,3,4\}$ je

$$T_X(XE_j) = -X(XE_j)^*X = -XE_j^*X^*X = -X(-E_j) = XE_j \ .$$

Zároveň platí

$$T_X(X) = -XX^*X = -X.$$

T_X je tak reflexe podle nadroviny N_X. Je-li tedy $R \in \mathrm{SO}(V)$, pak podle Cartan-Dieudonného věty A.3 je R složením sudého počtu reflexí podle nějakých nadrovin $N_{X_1}, \ldots, N_{X_{2k}}$, tedy $R = T_{X_{2k}} \circ \cdots \circ T_{X_1}$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ a $X_1, \ldots, X_{2k} \in \mathrm{SU}(2)$. Pro libovolné $Y \in V$ je potom

$$\begin{aligned} R(Y) &= -X_{2k}(-X_{2k-1}(\ldots(-X_2(-X_1 Y^* X_1)^* X_2)^* \ldots)^* X_{2k-1})^* X_{2k} \\ &= (-1)^{2k}(X_{2k} X_{2k-1}^* \ldots X_2 X_1^*) Y (X_1^* X_2 \ldots X_{2k-1}^* X_{2k}) \\ &= \Phi(X_{2k} X_{2k-1}^* \ldots X_2 X_1^*, X_{2k}^* X_{2k-1} \ldots X_2^* X_1)(Y). \end{aligned}$$

Dvojice $(X_{2k} X_{2k-1}^* \ldots X_2 X_1^*, X_{2k}^* X_{2k-1} \ldots X_2^* X_1) \in \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ je tedy vzorem R při Φ, a Φ je tak na $\mathrm{SO}(V)$.

Nakonec ještě ukážeme, že zobrazení Φ je ve skutečnosti zobrazení χ definované v předchozí kapitole, pouze v kontextu $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$. Přesněji, akce χ grupy $\mathrm{Spin}(4)$ na prostoru $\mathbb{R}^{0,4}$ je izomorfní akci Φ grupy $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ na prostoru V.

Uvažujme vnoření

$$\sigma : a + bi + cj + dk = a + bi + (c + di)j \in \mathbb{H} \longmapsto \begin{pmatrix} a + bi & -c + di \\ c + di & a - bi \end{pmatrix} \in V$$

algebry $\mathbb{H}$ do algebry $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$. Vidíme, že $V = \sigma(\mathbb{H})$. Buď $x \in \mathbb{R}^{0,4}$. Definujeme zobrazení $f : \mathbb{R}^{0,4} \longrightarrow V$ tak, že $f(x) = \sigma(h)$, kde $h \in \mathbb{H}$ je ten jediný kvaternion (jako v (3.1)), pro který

$$\iota(x) = \begin{pmatrix} 0 & -\overline{h} \\ h & 0 \end{pmatrix}.$$

Pak f je izomorfismus vektorových prostorů $\mathbb{R}^{0,4}$ a V. Uvažujme nyní $a \in \mathrm{Spin}(4)$ a jeho maticovou reprezentaci $A = \mathrm{diag}_2(u_1, u_2)$, $u_1, u_2 \in S^3$. Potom

$$f(\chi(a)(x)) = f(axa^{-1}) = f(\iota^{-1}(A\iota(x)A^{-1})) = \sigma(u_2 h \overline{u_1}) = \sigma(u_2)\sigma(h)\sigma(\overline{u_1}) =$$

$$= \sigma(u_2)\sigma(h)\sigma(u_1)^* = \Phi(\sigma(u_2), \sigma(u_1))(\sigma(h)) = \Phi(\sigma(u_2), \sigma(u_1))(f(x)).$$

Ve třetí rovnosti vycházíme z úprav (3.2), v páté používáme to, že pro $q \in \mathbb{H}$ je $\sigma(\overline{q}) = \sigma(q)^*$ a v šesté to, že $|q| = 1$, právě když $\sigma(q) \in \mathrm{SU}(2)$. Ukázali jsme tak komutativitu následujícího diagramu, což jsme chtěli.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^{0,4} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\chi(a)"'] & V \arrow[d, "\Phi(\sigma(u_2),\sigma(u_1))"] \\ \mathbb{R}^{0,4} \arrow[r, "f"'] & V \end{tikzcd}$$

4. Konstrukce $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,5})$, Spin(5) a nakrytí SO(5)

V této kapitole nalezneme s využitím konstrukcí v dimenzi čtyři z předchozí kapitoly Cliffordovu algebru a spingrupu prostoru $\mathbb{R}^{0,5}$ a příslušné 2-1 nakrytí speciální ortogonální grupy SO(5). Opět budeme pracovat s kvaterniony a kvaternionovými maticemi. V appendixu A.1 se proto případně nachází přehled vlastností kvaternionů a kvaternionových matic, které v této práci využíváme.

Uvažujeme tedy vektorový prostor $\mathbb{R}^5$ s bilineární formou

$$B(x,y) = -\sum_{i=1}^{5} x_i y_i \ \ ; x, y \in \mathbb{R}^5.$$

Cliffordova algebra $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,5})$ tohoto prostoru má bázi

$$\{e_I \ ; \ I \subset N = \{1, \ldots ,5\}\},$$

kde $\{e_1, \ldots ,e_5\}$ je kanonická báze $\mathbb{R}^{0,5}$.

Při konstrukci $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,5})$ budeme postupovat odlišně od předchozí části. Nejprve nalezneme $\mathcal{C}^{\text{ev}}(\mathbb{R}^{0,5})$ a až potom celou $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,5})$. Protože $e_N = e_1 \ldots e_5 \notin \mathcal{C}^{\text{ev}}(\mathbb{R}^{0,5})$, platí $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,5}) = \mathcal{C}^{\text{ev}}(\mathbb{R}^{0,5}) \oplus \mathcal{C}^{\text{ev}}(\mathbb{R}^{0,5})e_N$. Je navíc snadné nahlédnout, že e_N komutuje se všemi prvky $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,5})$, což je vlastnost, kterou budeme často využívat.

Označme W reálný vektorový prostor dimenze čtyři s bází $\{e_{15},e_{25},e_{35},e_{45}\}$. Pak pro $1 \leq i < j \leq 4$ platí

$$e_{i5}^2 = -1 \ , \ e_{i5}e_{j5} = -e_{j5}e_{i5}.$$

Mezi prvky báze W platí stejné vztahy jako mezi prvky báze prostoru $\mathbb{R}^{0,4}$, tedy $\mathcal{C}(W) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,4})$. Dále si všimneme, že pro $I = \{i_1 < \cdots < i_k\} \subset \{1,2,3,4\}$ je $e_{i_1 5} \ldots e_{i_k 5}$ rovno e_I, je-li $|I|$ sudé, a $e_I e_5$, je-li $|I|$ liché. V obou případech se ale jedná o součin sudého počtu prvků báze $\mathbb{R}^{0,5}$. Tedy máme

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}^0(W) &= \mathbb{R}, \\
\mathcal{C}^1(W) &= \langle e_{15},e_{25},e_{35},e_{45}\rangle_{\mathbb{R}} = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{0,4})e_5, \\
\mathcal{C}^2(W) &= \langle e_{ij} \ ; \ 1 \leq i < j \leq 4\rangle_{\mathbb{R}} = \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{0,4}), \\
\mathcal{C}^3(W) &= \langle e_{ijk5} \ ; \ 1 \leq i < j < k \leq 4\rangle_{\mathbb{R}} = \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^{0,4})e_5, \\
\mathcal{C}^4(W) &= \langle e_{1234}\rangle_{\mathbb{R}} = \mathcal{C}^4(\mathbb{R}^{0,4})
\end{aligned}$$

a zároveň

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}^1(W) \oplus \mathcal{C}^2(W) &= \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{0,5}), \\
\mathcal{C}^3(W) \oplus \mathcal{C}^4(W) &= \mathcal{C}^4(\mathbb{R}^{0,5}),
\end{aligned}$$

z čehož dostáváme rovnost $\mathcal{C}(W) = \mathcal{C}^{\text{ev}}(\mathbb{R}^{0,5})$, a tím pádem také následující izomorfismy

$$\mathcal{C}^{\text{ev}}(\mathbb{R}^{0,5}) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,4}) \simeq \mathrm{M}_2(\mathbb{H}).$$

Poznámka. Vztah, který jsme právě dokázali, platí obecněji. Máme-li prostor $\mathbb{R}^{p,q}$ a jeho Cliffordovu algebru $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{p,q})$, pak $\mathcal{C}^{\mathrm{ev}}(\mathbb{R}^{p,q}) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{q,p-1})$, pokud $p > 0$, a $\mathcal{C}^{\mathrm{ev}}(\mathbb{R}^{p,q}) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{p,q-1})$, pokud $q > 0$. Důkaz tohoto tvrzení je možné nalézt v knize [4]. Jedná se o zobecnění postupu, který jsme provedli v tomto konkrétním případě.

Uvažujme vnoření algebry $\mathbb{H}$ do algebry $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$

$$\sigma : a + bi + cj + dk = a + bi + (c + di)j \in \mathbb{H} \longmapsto \begin{pmatrix} a + bi & -c + di \\ c + di & a - bi \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C}).$$

Pomocí něj zkonstruujeme zobrazení

$$\nu : \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{H}) \longmapsto \begin{pmatrix} \sigma(p) & \sigma(r) \\ \sigma(q) & \sigma(s) \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{C}),$$

kde kvaterniony v matici vlevo nahradíme jejich 2×2 komplexními maticemi, čímž dostaneme blokovou 4×4 komplexní matici. ν je zřejmě $\mathbb{R}$-lineární zobrazení a je také prosté, neboť σ je prosté. S využitím blokového násobení matic navíc dostaneme, že ν zachovává násobení. Tedy se jedná o prostý homorfismus algeber a ν je tak vnoření algebry $\mathrm{M}_2(\mathbb{H})$ do algebry $\mathrm{M}_4(\mathbb{C})$.

Dále využijeme toho, že podalgebra $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,5})$ generovaná prvky 1 a e_N je izomorfní s $\mathbb{C}$, a vnoříme ji do $\mathrm{M}_4(\mathbb{C})$ tak, že prvku $z \in \mathbb{C}$ přiřadíme diagonální matici zI_4. Tím se zachová komutativita prvků z $\langle 1, e_N \rangle_{\mathbb{R}}$ s celou $\mathcal{C}^{\mathrm{ev}}(\mathbb{R}^{0,5})$, neboť komplexní násobky jednotkové matice komutují se všemi ostatními maticemi z $\mathrm{M}_4(\mathbb{C})$. Speciálně, e_N se do $\mathrm{M}_4(\mathbb{C})$ vnoří jako iI_4. Dimenze $\nu(\mathrm{M}_2(\mathbb{H}))$ nad $\mathbb{R}$ je 16. Navíc, je-li $A \in \nu(\mathrm{M}_2(\mathbb{H})) \setminus \{0\}$, pak $iA = (iI_4)A \notin \nu(\mathrm{M}_2(\mathbb{H}))$, neboť 2×2 bloky matice A mají nezáporné determinanty, zatímco odpovídající bloky matice iA mají determinanty nekladné. Tedy $\nu(\mathrm{M}_2(\mathbb{H})) \cap i\nu(\mathrm{M}_2(\mathbb{H})) = \{0\}$. Zobrazení $A \mapsto iA$ je izomorfismus vektorových prostorů, tedy dimenze $i\nu(\mathrm{M}_2(\mathbb{H}))$ nad $\mathbb{R}$ je také 16. Dimenze $\mathrm{M}_4(\mathbb{C})$ nad $\mathbb{R}$ je 32, tedy nutně

$$\mathrm{M}_4(\mathbb{C}) = \nu(\mathrm{M}_2(\mathbb{H})) \oplus i\nu(\mathrm{M}_2(\mathbb{H})) \simeq \mathcal{C}^{\mathrm{ev}}(\mathbb{R}^{0,5}) \oplus e_N\, \mathcal{C}^{\mathrm{ev}}(\mathbb{R}^{0,5}) = \mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,5}),$$

čímž jsme nalezli maticovou reprezentaci pro $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,5})$.

Dále zkonstruujeme grupu Spin(5) definovanou jako $\Gamma^{\mathrm{ev}}(0,5)/\mathbb{R}^{\times}_{+}$. Rádi bychom k tomu využili algebru $\mathrm{M}_2(\mathbb{H})$. V té ovšem nemáme reprezentovaný samotný prostor $\mathbb{R}^{0,5}$. To ale nevadí, neboť $\Gamma^{\mathrm{ev}}(0,5)$ je generována součiny vw , kde $v,w \in \mathbb{R}^{0,5} \setminus \{o\}$, které lze ovšem vyjádřit ve tvaru $(-ve_N)(we_N)$ (e_N komutuje se všemi prvky z $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,5})$ a $e_N^2 = -1$), což je součin dvou invertibilních prvků z $\mathcal{C}^4(\mathbb{R}^{0,5}) \subset \mathcal{C}^{\mathrm{ev}}(\mathbb{R}^{0,5})$. Tedy

$$\Gamma^{\mathrm{ev}}(0,5) = \langle bc\, ;\, b, c \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R}^{0,5}) \setminus \{0\} \rangle. \tag{4.1}$$

Dále, pro $a \in \Gamma^{\mathrm{ev}}(0,5)$ platí $a\mathbb{R}^{0,5}a^{-1} = \mathbb{R}^{0,5}$, právě když $a\, \mathcal{C}^4(\mathbb{R}^{0,5})a^{-1} = \mathcal{C}^4(\mathbb{R}^{0,5})$, neboť $x \in \mathbb{R}^{0,5}$, právě když $xe_N \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R}^{0,5})$, a $a(xe_N)a^{-1} = (axa^{-1})e_N$. Tato pozorování nám umožňují se při konstrukci grupy Spin(5) omezit na $\mathrm{M}_2(\mathbb{H})$, kdy budeme $\Gamma^{\mathrm{ev}}(0,5)$ konstruovat jako multiplikativní grupu těch invertibilních $a \in \mathcal{C}^{\mathrm{ev}}(\mathbb{R}^{0,5})$, které navíc splňují $a\, \mathcal{C}^4(\mathbb{R}^{0,5})a^{-1} = \mathcal{C}^4(\mathbb{R}^{0,5})$.

V předchozí části jsme ztotožnili $\mathbb{R}^{0,4} = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{0,4})$ s prostorem

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -\overline{h} \\ h & 0 \end{pmatrix} \; ; \, h \in \mathbb{H} \right\}.$$

Provedeme tedy přiřazení z $\mathcal{C}^1(W)$ do tohoto prostoru

$$e_{15} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \, e_{25} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, e_{35} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{pmatrix}, \, e_{45} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{pmatrix}.$$

Zároveň z předchozí kapitoly víme, že

$$e_{1234} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Potom

$$e_{1235} = e_{45}e_{1234} = \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix}, \, e_{1245} = e_{1234}e_{35} = \begin{pmatrix} 0 & j \\ -j & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_{1345} = e_{25}e_{1234} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \, e_{2345} = e_{1234}e_{15} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

a tedy můžeme ztotožnit

$$\mathcal{C}^4(\mathbb{R}^{0,5}) = \left\{ \begin{pmatrix} t & \overline{h} \\ h & -t \end{pmatrix} \; ; \, t \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{H} \right\}.$$

Součin dvou takových nenulových matic je podle (4.1) generátor grupy $\Gamma^{\mathrm{ev}}(0{,}5)$. Pro $t_1{,}t_2 \in \mathbb{R}, h_1{,}h_2 \in \mathbb{H}$ máme

$$\begin{pmatrix} t_1 & \overline{h_1} \\ h_1 & -t_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_2 & \overline{h_2} \\ h_2 & -t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1t_2 + \overline{h_1}h_2 & t_1\overline{h_2} - t_2\overline{h_1} \\ t_2h_1 - t_1h_2 & t_1t_2 + h_1\overline{h_2} \end{pmatrix} =: A.$$

Potom inverzní prvek k tomuto součinu je

$$\frac{1}{t_2^2 + |h_2|^2} \begin{pmatrix} t_2 & \overline{h_2} \\ h_2 & -t_2 \end{pmatrix} \frac{1}{t_1^2 + |h_1|^2} \begin{pmatrix} t_1 & \overline{h_1} \\ h_1 & -t_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(t_1^2 + |h_1|^2)(t_2^2 + |h_2|^2)} \begin{pmatrix} t_1t_2 + \overline{h_2}h_1 & t_2\overline{h_1} - t_1\overline{h_2} \\ t_1h_2 - t_2h_1 & t_1t_2 + h_2\overline{h_1} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(t_1^2 + |h_1|^2)(t_2^2 + |h_2|^2)} \overline{A}^T.$$

Tedy každý generátor A grupy $\Gamma^{\mathrm{ev}}(0{,}5)$ má vlastnost $\exists\, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : A\overline{A}^T = dI_2$, ekvivalentně $A^{-1} = \frac{1}{d}\overline{A}^T$. Matice z $\mathrm{M}_2(\mathbb{H})$ s touto vlastností tvoří grupu, neboť platí $\overline{AB}^T = \overline{B}^T\overline{A}^T$. Označíme-li tuto grupu G, máme $\Gamma^{\mathrm{ev}}(0{,}5) \leq G$. Dále ukážeme, že platí $\Gamma^{\mathrm{ev}}(0{,}5) = G$. Pro tento účel definujeme následující pojem.

Definice 4.1. *Buď $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{H})$,$n \in \mathbb{N}$. Definujeme redukovanou stopu matice A jako*

$$\tau(A) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(a_{ii} + \overline{a_{ii}}) = \operatorname{Re}\operatorname{Tr}(A).$$

Tvrzení 4.1. *Pro* $A,B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{H})$ *platí* $\tau(AB) = \tau(BA)$.

Důkaz. Buďte $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. Potom

$$\tau(AB) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}b_{ki} + \overline{a_{ik}b_{ki}}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(\operatorname{Re} a_{ik}b_{ki} + \operatorname{Re}\overline{a_{ik}b_{ki}}) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(\operatorname{Re} b_{ki}a_{ik} + \operatorname{Re}\overline{b_{ki}a_{ik}}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(b_{ki}a_{ik} + \overline{b_{ki}a_{ik}}) = \tau(BA).$$

Při úpravách jsme použili, že pro $p, q \in \mathbb{H}$ je $\operatorname{Re} pq = \operatorname{Re} qp$ a že $p + \overline{p} = 2\operatorname{Re} p = \operatorname{Re} p + \operatorname{Re}\overline{p}$. □

Jednoduchým důsledkem tvrzení 4.1 je, že pro $A,B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{H})$, A invertibilní, je $\tau(ABA^{-1}) = \tau(B)$.

S pomocí redukované stopy můžeme vyjádřit

$$\mathcal{C}^4(\mathbb{R}^{0,5}) = \{X \in \mathrm{M}_2(\mathbb{H}) \ ; \ X = \overline{X}^T, \tau(X) = 0\}. \tag{4.2}$$

Buď nyní $A \in G$. Potom pro $X \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R}^{0,5})$ je

$$\overline{(AXA^{-1})}^T = \overline{(AX\frac{1}{d}\overline{A}^T)}^T = \frac{1}{d}A\overline{X}^T\overline{A}^T = AX\frac{1}{d}\overline{A}^T = AXA^{-1}$$

pro nějaké $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $\tau(AXA^{-1}) = \tau(X) = 0$. Tedy $AXA^{-1} \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R}^{0,5})$, a tím pádem $A \in \Gamma^{\mathrm{ev}}(0,5)$, takže $\Gamma^{\mathrm{ev}}(0,5) = G$. Potom

$$\mathrm{Spin}(5) \simeq \Gamma^{\mathrm{ev}}(0,5)/\mathbb{R}^{\times}_{+} \simeq G/\{dI_2 \ ; \ d \in \mathbb{R}^{\times}_{+}\} \simeq$$

$$\simeq \{A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{H}) \ ; \ A^{-1} = \overline{A}^T\} = \mathrm{Sp}(2).$$

Mějme $a \in \mathrm{Spin}(5)$, jeho maticovou reprezentaci $A \in \mathrm{Sp}(2)$, $x \in \mathbb{R}^{0,5}$ a $X \in \mathrm{M}_2(\mathbb{H})$ maticovou reprezentaci prvku $xe_N \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R}^{0,5})$. Označíme-li $y = axa^{-1}$ a $Y = AXA^{-1}$, pak Y je maticová reprezentace prvku ye_N, neboť $ye_N = axa^{-1}e_N = axe_Na^{-1}$ (opět využíváme komutativitu prvku e_N s $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,5})$). Uvažujme nyní maticovou reprezentaci (4.2) prostoru $\mathcal{C}^4(\mathbb{R}^{0,5})$ jako reálný vektorový prostor dimenze pět se skalárním součinem $\langle\cdot\,;\cdot\rangle$ definovaným jako

$$\langle X; Y\rangle = \frac{1}{2}\tau(XY) \ ; X, Y \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R}^{0,5}).$$

Ortonormální báze prostoru $\mathcal{C}^4(\mathbb{R}^{0,5})$ vzhledem k $\langle\cdot\,;\cdot\rangle$ je pak tvořena například těmi maticemi, které nám reprezentují prvky e_I , $|I| = 4$. Pak $\mathcal{C}^4(\mathbb{R}^{0,5})$ je izometricky izomorfní vektorovému prostoru $\mathbb{R}^5$ se standardním skalárním součinem. Uvažujme zobrazení $\Phi : \mathrm{Sp}(2) \longrightarrow \operatorname{Aut}\mathcal{C}^4(\mathbb{R}^{0,5})$ definované tak, že pro matici $A \in \mathrm{Sp}(2)$ a $X \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R}^{0,5})$ je $\Phi(A)(X) = AX\overline{A}^T = AXA^{-1}$. Potom Φ je 2-1 nakrytí grupy $\mathrm{SO}(\mathcal{C}^4(\mathbb{R}^{0,5})) \simeq \mathrm{SO}(5)$ pomocí grupy $\mathrm{Sp}(2) \simeq \mathrm{Spin}(5)$. Vidíme totiž, že Φ je definované stejně jako χ, pouze v kontextu matic, a že akce prvku

a na $\mathbb{R}^{0,5}$, respektive akce jeho jednoznačně určené matice A na $\mathcal{C}^4(\mathbb{R}^{0,5})$, je zachována izomorfismem, který prvku $x \in \mathbb{R}^{0,5}$ přiřadí jednoznačně určenou matici $X \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R}^{0,5})$ reprezentující prvek xe_N. Následující diagram je tedy komutativní.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^{0,5} \arrow[r, "x \mapsto X"] \arrow[d, "\chi(a)"'] & \mathcal{C}^4(\mathbb{R}^{0,5}) \arrow[d, "\Phi(A)"] \\
\mathbb{R}^{0,5} \arrow[r, "x \mapsto X"'] & \mathcal{C}^4(\mathbb{R}^{0,5})
\end{tikzcd}$$

5. Konstrukce $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,6})$ a $\mathrm{Spin}(6)$

V této kapitole už jen stručněji popíšeme konstrukci Cliffordovy algebry prostoru $\mathbb{R}^{0,6}$, neboť je velmi analogická konstrukci $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,5})$, a ukážeme, že grupa $\mathrm{Spin}(6)$ je izomorfní grupě $\mathrm{SU}(4)$.

Uvažujme tedy vektorový prostor $\mathbb{R}^6$ s bilineární formou

$$B(x,y) = -\sum_{i=1}^{6} x_i y_i \ ; x, y \in \mathbb{R}^6.$$

Cliffordova algebra $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,6})$ tohoto prostoru má bázi

$$\{e_I \ ; I \subset N = \{1, \ldots, 6\}\},$$

kde $\{e_1, \ldots, e_6\}$ je kanonická báze $\mathbb{R}^{0,6}$.

Označme W reálný vektorový prostor dimenze pět s bází $\{e_{16}, e_{26}, \ldots, e_{56}\}$. Pak pro $1 \leq i < j \leq 5$ platí

$$e_{i6}^2 = -1 \ , \ e_{i6}e_{j6} = -e_{j6}e_{i6}.$$

Dostáváme tak $\mathcal{C}(W) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,5})$ a podobně jako v předchozí kapitole dostaneme následující dekompozici prostoru $\mathcal{C}(W)$.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{C}^0(W) = \mathbb{R}, \\
&\mathcal{C}^1(W) = \langle e_{16}, \ldots, e_{56} \rangle_{\mathbb{R}} = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{0,5})e_6, \\
&\mathcal{C}^2(W) = \langle e_{ij} \ ; 1 \leq i < j \leq 5 \rangle_{\mathbb{R}} = \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{0,5}), \\
&\mathcal{C}^3(W) = \langle e_{ijk6} \ ; 1 \leq i < j < k \leq 5 \rangle_{\mathbb{R}} = \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^{0,5})e_6, \\
&\mathcal{C}^4(W) = \langle e_{ijkl} \ ; 1 \leq i < j < k < l \leq 5 \rangle_{\mathbb{R}} = \mathcal{C}^4(\mathbb{R}^{0,5}), \\
&\mathcal{C}^5(W) = \mathbb{R}e_N = \mathcal{C}^5(\mathbb{R}^{0,5})e_6,
\end{aligned}$$

což nám dává dekompozice

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}^1(W) \oplus \mathcal{C}^2(W) &= \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{0,6}), \\
\mathcal{C}^3(W) \oplus \mathcal{C}^4(W) &= \mathcal{C}^4(\mathbb{R}^{0,6}), \\
\mathcal{C}^5(W) &= \mathcal{C}^6(\mathbb{R}^{0,6}),
\end{aligned}$$

z nichž plyne

$$\mathcal{C}^{\mathrm{ev}}(\mathbb{R}^{0,6}) = \mathcal{C}(W) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,5}) \simeq \mathrm{M}_4(\mathbb{C}).$$

Uvažujme nyní vnoření algebry $\mathbb{C}$ do algebry $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\rho : a + bi \in \mathbb{C} \longmapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}).$$

Pomocí něj zkonstruujeme zobrazení

$$\mu : (z_{kl})_{1 \leq k,l \leq 4} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{C}) \longmapsto (\rho(z_{kl}))_{1 \leq k,l \leq 4} \in \mathrm{M}_8(\mathbb{R}).$$

Potom μ je vnoření algebry $\mathrm{M}_4(\mathbb{C})$ do algebry $\mathrm{M}_8(\mathbb{R})$. Označme

$$J = \rho(i) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Připomeňme, že v předchozí kapitole jsme pomocí vnoření $\sigma : \mathbb{H} \longrightarrow \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ definovali vnoření $\nu : \mathrm{M}_2(\mathbb{H}) \longrightarrow \mathrm{M}_4(\mathbb{C})$. Dále jsme měli $\mathcal{C}^4(\mathbb{R}^{0,5})$ reprezentováno v $\mathrm{M}_2(\mathbb{H})$ jako

$$\left\{ \begin{pmatrix} t & \overline{h} \\ h & -t \end{pmatrix} ;\ t \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{H} \right\}.$$

Pomocí ν vnoříme tento prostor do $\mathrm{M}_4(\mathbb{C})$ a následně každý prvek přenásobíme maticí iI_4, která nám reprezentovala prvek e_{12345}. Jelikož $\mathbb{R}^{0,5} = \mathcal{C}^4(\mathbb{R}^{0,5})e_{12345}$, dostaneme následující reprezentaci prostoru $\mathbb{R}^{0,5}$ v $\mathrm{M}_4(\mathbb{C})$.

$$\left\{ \begin{pmatrix} siI_2 & tiU^* \\ tiU & -siI_2 \end{pmatrix} ;\ s, t \in \mathbb{R}, U \in \mathrm{SU}(2) \right\} \tag{5.1}$$

Nyní prvkům báze W přiřadíme prvky báze této reprezentace prostoru $\mathbb{R}^{0,5}$ a následně aplikujeme vnoření μ.

$$e_{16} = \begin{pmatrix} 0 & iI_2 \\ iI_2 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} & & J & 0 \\ & & 0 & J \\ J & 0 & & \\ 0 & J & & \end{pmatrix},$$

$$e_{26} = \begin{pmatrix} 0 & P \\ -P & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} & & I_2 & 0 \\ & & 0 & -I_2 \\ -I_2 & 0 & & \\ 0 & I_2 & & \end{pmatrix},$$

$$e_{36} = \begin{pmatrix} 0 & -iJ \\ iJ & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} & & 0 & J \\ & & -J & 0 \\ 0 & -J & & \\ J & 0 & & \end{pmatrix},$$

$$e_{46} = \begin{pmatrix} 0 & -Q \\ Q & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} & & 0 & -I_2 \\ & & -I_2 & 0 \\ 0 & I_2 & & \\ I_2 & 0 & & \end{pmatrix},$$

$$e_{56} = \begin{pmatrix} iI_2 & 0 \\ 0 & -iI_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} J & 0 & & \\ 0 & J & & \\ & & -J & 0 \\ & & 0 & -J \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,6})$ je multiplikativně generována prvky $e_{16}, \dots, e_{56}, e_6$, přičemž pro $1 \leq j \leq 5$ je $e_6 e_{j6} = -e_{j6} e_6$. Položíme-li

$$E = \begin{pmatrix} 0 & -Q & & \\ Q & 0 & & \\ & & 0 & -Q \\ & & Q & 0 \end{pmatrix},$$

pak $E^2 = -I_8$ a pro $1 \leq j \leq 5$ je $E\mu(e_{j6}) = -\mu(e_{j6})E$, což se ověří přímočaře vynásobením příslušných matic. Matice E nám tedy bude reprezentovat prvek e_6 v $\mathrm{M}_8(\mathbb{R})$.

Označíme-li $\mathcal{A} = \operatorname{Im} \rho \subset \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, pak pro $A \in \mathcal{A}$ je $\det A \geq 0$, přičemž rovnost nastává pouze v případě, že $A = 0$. Protože $\det Q = -1$, tak pro $A \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ máme $AQ, QA \notin \mathcal{A}$. Je-li matice $A \in \mu(\mathrm{M}_4(\mathbb{C}))$, pak každý její 2×2 blok je prvek $\mathcal{A}$, a tím pádem nenulové 2×2 bloky matic AE a EA nejsou prvky $\mathcal{A}$, neboť mají záporné determinanty. Odtud plyne $\mu(\mathrm{M}_4(C)) \cap E\mu(\mathrm{M}_4(\mathbb{C})) = \{0\}$. Dále, μ je prosté a $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{M}_4(\mathbb{C}) = 32$, tedy $\dim_{\mathbb{R}} \mu(\mathrm{M}_4(\mathbb{C})) = 32$. Navíc, protože E je regulární matice, je lineární zobrazení $A \mapsto EA$ izomorfismus vektorových prostorů, a tedy také $\dim_{\mathbb{R}} E\mu(\mathrm{M}_4(\mathbb{C})) = 32$. Zároveň $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{M}_8(\mathbb{R}) = 64$, tedy nutně

$$\mathrm{M}_8(\mathbb{R}) = \mu(\mathrm{M}_4(\mathbb{C})) \oplus E\mu(\mathrm{M}_4(\mathbb{C})) \simeq \mathcal{C}^{\mathrm{ev}}(\mathbb{R}^{0,6}) \oplus e_6\, \mathcal{C}^{\mathrm{ev}}(\mathbb{R}^{0,6}) = \mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,6}),$$

čímž jsme nalezli maticovou reprezentaci pro $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,6})$.

Nakonec ještě ukážeme, že $\mathrm{Spin}(6) \simeq \mathrm{SU}(4)$. Opět budeme vycházet z definice $\mathrm{Spin}(6) \simeq \Gamma^{\mathrm{ev}}(0{,}6)/\mathbb{R}_+^\times$. Grupa $\Gamma^{\mathrm{ev}}(0{,}6)$ je generována součiny vw, kde $v{,}w \in \mathbb{R}^{0,6} \setminus \{0\}$. Každý prvek $v \in \mathbb{R}^{0,6}$ se dá vyjádřit jako

$$v = \sum_{j=1}^{6} v_j e_j = e_6 \left(v_6 + \sum_{j=1}^{5} v_j e_{j6} \right) = \left(v_6 - \sum_{j=1}^{5} v_j e_{j6} \right) e_6.$$

Vyjádříme-li $v = ae_6$ a $w = e_6 b$, kde $a, b \in \mathbb{R} \oplus W$, pak $vw = (ae_6)(e_6 b) = -ab$. Potom

$$\Gamma^{\mathrm{ev}}(0{,}6) = \langle ab \,;\, a, b \in (\mathbb{R} \oplus W) \setminus \{0\} \rangle.$$

Protože $\mathbb{R} \oplus W \subset \mathcal{C}^{\mathrm{ev}}(\mathbb{R}^{0,6})$, můžeme $\mathbb{R} \oplus W$ reprezentovat v $\mathrm{M}_4(\mathbb{C})$, a sice takto

$$\mathbb{R} \oplus W = \left\{ \begin{pmatrix} zI_2 & tiU^* \\ tiU & \overline{z}I_2 \end{pmatrix} \,;\, t \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}, U \in \mathrm{SU}(2) \right\}.$$

K tomuto vyjádření jsme použili (5.1) a to, že $\mathbb{R}$ je v $\mathrm{M}_4(\mathbb{C})$ reprezentováno reálnými násobky jednotkové matice.

Pro $X \in \mathbb{R} \oplus W$ platí $XX^* = dI_4$, kde $d = |z|^2 + t^2$. Buď $U \in \mathrm{SU}(2)$. Potom tiU je tvaru

$$\begin{pmatrix} \alpha & \overline{\beta} \\ \beta & -\overline{\alpha} \end{pmatrix} \;;\; \alpha, \beta \in \mathbb{C},\, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = t^2 = -\det tiU$$

a tiU^* je tvaru

$$\begin{pmatrix} -\overline{\alpha} & -\overline{\beta} \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Je-li tedy $X \in (\mathbb{R} \oplus W) \setminus \{0\}$, pak

$$\det X = \det \begin{pmatrix} z & 0 & -\overline{\alpha} & -\overline{\beta} \\ 0 & z & -\beta & \alpha \\ \alpha & -\overline{\beta} & \overline{z} & 0 \\ \beta & \overline{\alpha} & 0 & \overline{z} \end{pmatrix} = (|z|^2 + |\alpha|^2 + |\beta|^2)^2 \in \mathbb{R}_+^\times. \tag{5.2}$$

Generátor A grupy $\Gamma^{\mathrm{ev}}(0{,}6)$ je součinem dvou matic z $(\mathbb{R} \oplus W) \setminus \{0\}$, tedy A má také vlastnosti $AA^* = dI_2$ pro nějaké $d \in \mathbb{R}_+^\times$ a $\det A \in \mathbb{R}_+^\times$. Dostáváme tak $\Gamma^{\mathrm{ev}}(0{,}6) \leq \mathrm{SU}(4) \times \mathbb{R}_+^\times$, a tím pádem

$$\mathrm{Spin}(6) \simeq \Gamma^{\mathrm{ev}}(0{,}6)/\mathbb{R}_+^\times \leq (\mathrm{SU}(4) \times \mathbb{R}_+^\times)/\mathbb{R}_+^\times \simeq \mathrm{SU}(4).$$

K důkazu inkluze $\mathrm{SU}(4) \leq \mathrm{Spin}(6)$ využijeme maticovou exponenciálu definovanou pro $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ jako

$$e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k$$

(základní vlastnosti maticové exponenciály jsou shrnuty v appendixu A.3). Označme dále

$$H = \{X \in \mathrm{M}_4(\mathbb{C}) \ ; \ X^* = X, \mathrm{Tr}(X) = 0\}$$

reálný vektorový prostor dimenze 15 všech hermitovských komplexních 4×4 matic s nulovou stopou. V článcích [5] a [6] je dokázáno, že grupa SU(4) je generována exponenciálami ryze imaginárních násobků patnácti speciálních matic $\lambda_1, \ldots, \lambda_{15}$, které jsou popsány v článku [6], kde se nazývají Gell-Mannovy matice, a tvoří bázi $\mathcal{G}$ prostoru H. Tedy platí

$$\mathrm{SU}(4) = \langle e^{it\lambda} \ ; \ t \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathcal{G} \rangle.$$

Potřebujeme tedy ukázat, že pro libovolné $t \in \mathbb{R}$ a $\lambda \in \mathcal{G}$ je $e^{it\lambda} \in \mathrm{Spin}(6)$. K tomu by stačilo vyjádřit matici $e^{it\lambda}$ jako součin sudého počtu matic z $\mathbb{R} \oplus W$, neboť prvky z $\mathbb{R} \oplus W$ multiplikativně generují grupu $\Gamma^{\mathrm{ev}}(0{,}6)$, a tedy i Spin(6).

Uvažujme následující bázi $\mathcal{B}$ prostoru iH všech antihermitovských 4×4 komplexních matic s nulovou stopou.

$$B_1 = \begin{pmatrix} i & 0 & & \\ 0 & i & & \\ & & -i & 0 \\ & & 0 & -i \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} i & 0 & & \\ 0 & -i & & \\ & & i & 0 \\ & & 0 & -i \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} i & 0 & & \\ 0 & -i & & \\ & & -i & 0 \\ & & 0 & i \end{pmatrix},$$

$$B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & -1 & 0 \end{pmatrix}, B_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}, B_6 = \begin{pmatrix} 0 & i & & \\ i & 0 & & \\ & & 0 & i \\ & & i & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_7 = \begin{pmatrix} 0 & i & & \\ i & 0 & & \\ & & 0 & -i \\ & & -i & 0 \end{pmatrix}, B_8 = \begin{pmatrix} & & -1 & 0 \\ & & 0 & -1 \\ 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \end{pmatrix}, B_9 = \begin{pmatrix} & & -1 & 0 \\ & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & \\ 0 & -1 & & \end{pmatrix},$$

$$B_{10} = \begin{pmatrix} & & i & 0 \\ & & 0 & i \\ i & 0 & & \\ 0 & i & & \end{pmatrix}, B_{11} = \begin{pmatrix} & & i & 0 \\ & & 0 & -i \\ i & 0 & & \\ 0 & -i & & \end{pmatrix}, B_{12} = \begin{pmatrix} & & 0 & -1 \\ & & -1 & 0 \\ 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \end{pmatrix},$$

$$B_{13} = \begin{pmatrix} & & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \\ 0 & -1 & & \\ 1 & 0 & & \end{pmatrix}, B_{14} = \begin{pmatrix} & & 0 & i \\ & & i & 0 \\ 0 & i & & \\ i & 0 & & \end{pmatrix}, B_{15} = \begin{pmatrix} & & 0 & i \\ & & -i & 0 \\ 0 & -i & & \\ i & 0 & & \end{pmatrix}.$$

Pozorování 5.1.
(1) Matice B_1,B_2,B_3 po dvou komutují a pro $j \in \{4,6,8,10,12,14\}$ matice B_j a B_{j+1} komutují.
(2) Pro $B \in \mathcal{B}$ a $t \in \mathbb{R}$ platí $e^{tB} = (\cos t)I_4 + (\sin t)B$.

Důkaz.
(1) Přímočaře se ověří.
(2) Pro $B \in \mathcal{B}$ je $B^{2k} = (-1)^k I_4$, a tedy $B^{2k+1} = (-1)^k B$, kde $k \in \mathbb{N}_0$. Můžeme tedy pro $t \in \mathbb{R}$ rozdělit

$$e^{tB} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(tB)^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} \right) I_4 + \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) B =$$

$$= (\cos t)I_4 + (\sin t)B.$$

□

Uvažujme diagonální matici $D \in H$. Pro $t \in \mathbb{R}$ lze jednoznačně vyjádřit $itD = s_1B_1 + s_2B_2 + s_3B_3$ pro nějaké $s_1,s_2,s_3 \in \mathbb{R}$. Matice B_1,B_2,B_3 spolu po dvou komutují, tedy podle tvrzení A.4 platí

$$e^{itD} = e^{s_1B_1}e^{s_2B_2}e^{s_2B_2}.$$

Pro exponenciály $e^{s_jB_j}$, $j \in \{1,2,3\}$ máme následující vyjádření.

$$e^{s_1B_1} = \operatorname{diag}_4(e^{is_1},e^{is_1},e^{-is_1},e^{-is_1})I_4\ ,$$

$$e^{s_2B_2} = \operatorname{diag}_4(e^{is_2},e^{-is_2},e^{is_2},e^{-is_2}) =$$

$$= \begin{pmatrix} & & 0 & -e^{is_2} \\ & & -e^{-is_2} & 0 \\ 0 & e^{is_2} & & \\ e^{-is_2} & 0 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \\ 0 & -1 & & \\ -1 & 0 & & \end{pmatrix},$$

$$e^{s_3 B_3} = \mathrm{diag}_4(e^{is_3}, e^{-is_3}, e^{-is_3}, e^{is_3}) =$$

$$= \begin{pmatrix} & & ie^{is_3} & 0 \\ & & 0 & ie^{-is_3} \\ ie^{-is_3} & 0 & & \\ 0 & ie^{is_3} & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & -i & 0 \\ & & 0 & -i \\ -i & 0 & & \\ 0 & -i & & \end{pmatrix},$$

což jsou ve všech třech případech součiny dvou matic z $\mathbb{R} \oplus W$, neboť všech šest matic je tvaru (5.2) (používáme vztah $\overline{e^{is_j}} = e^{-is_j}$). Umíme tedy vyjádřit e^{itD} jako součin sudého počtu matic z $\mathbb{R} \oplus W$ pro diagonální $D \in H$. Speciálně to tedy dokážeme pro všechny tři diagonální Gell-Mannovy matice

$$\lambda_3 = \mathrm{diag}_4(1, -1, 0, 0)\ ,\ \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathrm{diag}_4(1, 1, -2, 0)\ ,\ \lambda_{15} = \frac{1}{\sqrt{6}} \mathrm{diag}_4(1, 1, 1, -3),$$

a tím pádem $e^{it\lambda_3}, e^{it\lambda_8}, e^{it\lambda_{15}} \in \mathrm{Spin}(6)$ pro libovolné $t \in \mathbb{R}$.

Podobným způsobem se dá ukázat, že i exponenciály it-násobků zbylých dvanácti nediagonálních Gell-Mannových matic se dají vyjádřit jako součiny sudého počtu matic z $\mathbb{R} \oplus W$, a tím pádem jsou to prvky grupy Spin(6). Vždy stačí pro Gell-Mannovu matici λ najít dvojici $B_j, B_{j+1} \in \mathcal{B}$, kde $j \in \{4,6,8,10,12,14\}$, takovou, že $it\lambda$ je lineární kombinací matic B_j a B_{j+1}. Potom díky komutativitě matic B_j a B_{j+1} vyjádříme díky tvrzení A.4 $e^{it\lambda} = e^{s_j B_j} e^{s_{j+1} B_{j+1}}$ a následně vyjádříme exponenciály $e^{s_j B_j}$ a $e^{s_{j+1} B_{j+1}}$ jako součiny sudého počtu matic z $\mathbb{R} \oplus W$. Vzhledem k tomu, že by se jednalo o zdlouhavý a repetitivní postup, už tyto konstrukce ale provádět nebudeme. Dokázali jsme tak inkluzi $\mathrm{SU}(4) \leq \mathrm{Spin}(6)$, a tedy dohromady

$$\mathrm{Spin}(6) \simeq \mathrm{SU}(4).$$

Samozřejmě by bylo možné hledat vyjádření $e^{it\lambda}$, $\lambda \in \mathcal{G}$, jako součiny matic z $\mathbb{R} \oplus W$ přímo, ovšem nevýhoda tohoto postupu je ta, že $e^{it\lambda}$ mají mnohem nepravidelnější tvary než exponenciály násobků matic z $\mathcal{B}$. Naopak, exponenciály násobků matic z $\mathcal{B}$ mají pravidelný tvar, který je už často docela podobný tvaru (5.2), a díky pozorování 5.1 se snadno spočítají. Navíc, matice $B_1, B_9, B_{10}, B_{12}, B_{15}$ dokonce tvar (5.2) mají, tedy už v $\mathbb{R} \oplus W$ leží, a díky pozorování 5.1 tak v $\mathbb{R} \oplus W$ leží i exponenciály násobků těchto pěti matic. Exponenciály násobků zbylých deseti matic z $\mathcal{B}$ se pak dají vyjádřit vždy jako součin dvou matic z $\mathbb{R} \oplus W$.

Závěr

Cílem této práce bylo zkonstruovat maticové reprezentace grup Spin(n) pro $n = 1, \dots, 6$ a popsat, jakým způsobem tyto reprezentace poskytují 2-1 nakrytí odpovídající speciální ortogonální grupy SO(n), k čemuž jsme využili maticové reprezentace Cliffordových algeber příslušných vektorových prostorů. Výsledky provedených konstrukcí v jednotlivých nízkých dimenzích jsou uvedeny v následující tabulce.

n	$\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,n})$	$\mathcal{C}^{\mathrm{ev}}(\mathbb{R}^{0,n})$	$\mathrm{Spin}(n)$
1	$\mathbb{C}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Z}_2$
2	$\mathbb{H}$	$\mathbb{C}$	S^1
3	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathbb{H}$	$\mathrm{SU}(2)$
4	$\mathrm{M}_2(\mathbb{H})$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$
5	$\mathrm{M}_4(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_2(\mathbb{H})$	$\mathrm{Sp}(2)$
6	$\mathrm{M}_8(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_4(\mathbb{C})$	$\mathrm{SU}(4)$

Z tabulky je mimo jiné vidět to, co jsme zmiňovali v kapitole 4. A sice, že $\mathcal{C}^{\mathrm{ev}}(\mathbb{R}^{0,n}) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,n-1})$. Zdůrazněme také důležitost grupy SU(2), která měla nějakou roli v konstrukcích v každé dimenzi (kromě jednoduchého případu dimenze jedna), ať už při reprezentaci samotné spingrupy, nebo při reprezentování kvaternionů, což jsme využili například při vnoření algebry $\mathrm{M}_2(\mathbb{H})$ do algebry $\mathrm{M}_4(\mathbb{C})$ v kapitole 4 nebo při reprezentování prvků prostoru $\mathbb{R} \oplus W$ v kapitole 5.

Nakonec ještě shrneme přínos této práce. Touto prací poskytujeme detailní explicitní konstrukce maticových reprezentací reálných Cliffordových algeber a spingrup pro prostory s definitní bilineární formou ve všech dimenzích, kde maticové reprezentace spingrupy existují. Během konstrukcí maticových reprezentací jednotolivých Cliffordových algeber a spingrup vycházíme přímo z jejich definic a opíráme se pouze o znalosti z lineární algebry a elementární teorie grup, bez využití topologických vlastností grup nebo teorie Lieových algeber. Například hned v první kapitole, kde konstruujeme 2-1 nakrytí grupy SO(3) pomocí grupy SU(2), vycházíme z konstrukcí popsaných v knize [7], ale všechny argumenty využívající topologické vlastnosti zmíněných grup nahrazujeme argumenty, které stojí na unitární diagonalizaci a teorii vlastních čísel.

A. Appendix

A.1 Kvaterniony

A.1.1 Definice a základní vlastnosti

Definice A.1. *Kvaterniony definujeme jako reálnou asociativní algebru*

$$\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$$

s jednotkou $1 \in \mathbb{R}$*, kde* i,j,k *jsou tři imaginární jednotky splňující vztahy*

- $i^2 = j^2 = k^2 = -1$,
- $ij = k, jk = i, ki = j$.

Z těchto dvou vlastností prvků i,j,k se snadno odvodí jejich antikomutativita, to jest $ji = -k, kj = -i, ik = -j$.

Každý kvaternion q se dá jednoznačně vyjádřit ve tvaru

$$q = a + bi + cj + dk\ ; a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Lze tak zavést následující značení: $\operatorname{Re} q = a$ je reálná část q a $\operatorname{Ve} q = bi + cj + dk$ je vektorová část q. Pro každý kvaternion q definujeme konjugovaný kvaternion $\overline{q} = \operatorname{Re} q - \operatorname{Ve} q$.

Pozorování A.1. *Konjugace má následující vlastnosti:*

- *pro* $q \in \mathbb{H}$ *je* $\overline{\overline{q}} = q$,
- *pro* p,$q \in \mathbb{H}$ *je* $\overline{pq} = \overline{q}\,\overline{p}$,
- *pro* $q = a + bi + cj + dk$ *je* $q\overline{q} = \overline{q}q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \in \mathbb{R}$,
- *pro* $q \in \mathbb{H}$ *je* $q\overline{q} = 0$*, právě když* $q = 0$.

Díky pozorování A.1 můžeme definovat normu (nebo také absolutní hodnotu) kvaternionu q jako $|q| = \sqrt{q\overline{q}}$ a vidíme, že $|q| \in \mathbb{R}$ a $|q| = 0$, právě když $q = 0$. Dále, každý nenulový kvaternion q je invertibilní. Konkrétně, $q^{-1} = \frac{\overline{q}}{|q|^2}$. $\mathbb{H}$ je tím pádem nekomutativní těleso.

Nenulové kvaterniony s operací násobení tedy tvoří neabelovskou grupu $\mathbb{H}^\times$. Dále označíme S^3 podgrupu $\mathbb{H}^\times$ tvořenou všemi jednotkovými kvaterniony, tj.

$$S^3 = \{q \in \mathbb{H}\ ; |q| = 1\} = \{q \in \mathbb{H} \setminus \{0\}\ ; q^{-1} = \overline{q}\}.$$

A.1.2 Maticová reprezentace kvaternionů

Uvažujme zobrazení

$$\sigma : a + bi + cj + dk = a + bi + (c + di)j \in \mathbb{H} \longmapsto \begin{pmatrix} a + bi & -c + di \\ c + di & a - bi \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C}).$$

Pak σ je zřejmě $\mathbb{R}$-lineární a přímočaře se ověří, že pro p,$q \in \mathbb{H}$ je $\sigma(pq) = \sigma(p)\sigma(q)$. Navíc, σ je prosté díky jednoznačnosti vyjádření každého kvaternionu lineární kombinací prvků 1,i,j,k. σ je tedy prostý homomorfismus algeber a jedná se tak o vnoření algebry $\mathbb{H}$ do algebry $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$. Snadno se ověří, že $\sigma(\overline{q}) = \sigma(q)^*$, kde * je hermitovské sdružení, a že $|q|^2 = \det \sigma(q)$.

Je-li navíc $q \in S^3$, pak $q^{-1} = \overline{q}$, a tedy $\sigma(q)^{-1} = \sigma(q)^*$. Zároveň platí $\det \sigma(q) = |q| = 1$. Dohromady je tak $\sigma(q) \in \mathrm{SU}(2)$ a σ tak indukuje grupový izomorfismus $S^3 \simeq \mathrm{SU}(2)$.

A.1.3 Matice nad tělesem kvaternionů

Sčítání a násobení kvaternionových matic je stejné jako nad libovolným jiným tělesem, pouze skalární násobení se liší tím, že pro $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{H})$ a $q \in \mathbb{H}$ obecně neplatí $qA = Aq$. Pro matici $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{H})$ definujeme konjugovanou matici $\overline{A}^T$ jako $(\overline{a_{ji}})$.

Pozorování A.2. *Konjugace kvaternionových matic má následující vlastnosti:*

- *pro* $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{H})$ *je* $\overline{(\overline{A}^T)}^T = A$,
- *pro* $A,B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{H})$ *je* $\overline{AB}^T = \overline{B}^T\overline{A}^T$.

Díky pozorování A.2 tvoří množina $\{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{H})\ ;\ A^{-1} = \overline{A}^T\}$ spolu s operací maticového násobení grupu, kterou značíme $\mathrm{Sp}(n)$.

A.2 Cartan-Dieudonného věta

Buď V reálný vektorový prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$ spolu se symetrickou nedegenerovanou bilineární formou $B : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$.

Definice A.2. *Ortogonální transformace vektorového prostoru V je zobrazení $f \in \operatorname{Aut} V$ takové, že pro každé $x,y \in V$ je $B(f(x),f(y)) = B(x,y)$. Je-li navíc $\det f = 1$, pak f je speciální ortogonální transformace. Všechny ortogonální transformace, resp. všechny speciální ortogonální transformace, prostoru V tvoří grupu, kterou značíme $\mathrm{O}(V)$, resp. $\mathrm{SO}(V)$.*

Definice A.3. *Buď $v \in V$ takový prvek, že $B(v,v) \neq 0$. Pak reflexe podle nadroviny $N_v = \{x \in V\ ;\ B(v,x) = 0\}$ je zobrazení $T_v \in \operatorname{Aut} V$ definované tak, že pro $x \in V$ je*

$$T_v(x) = x - 2\frac{B(v,x)}{B(v,v)}v.$$

Potom $T_v \in \mathrm{O}(V)$.

Věta A.3 (Cartan-Dieudonné)**.** *Buď V reálný vektorový prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$ spolu se symetrickou nedegenerovanou bilineární formou $B : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$. Potom každý prvek grupy $\mathrm{O}(V)$ lze vyjádřit jako složení nejvýše n reflexí.*

Důkaz věty je možné najít v [8]. Pro případy, kdy je B definitní, je důkaz věty možné najít také v [9].

A.3 Maticová exponenciála

Definice A.4. *Pro $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ definujeme exponenciálu matice X jako*

$$e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k,$$

přičemž definujeme $X^0 = I_n$.

Dále uvedeme několik základních vlastností maticové exponenciály.

Tvrzení A.4. *Buďte* $X,Y \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$*. Potom*

- *pokud* $XY = YX$*, pak* $e^{X+Y} = e^X e^Y = e^Y e^X$,
- e^X *je invertibilní, přičemž* $(e^X)^{-1} = e^{-X}$,
- $(e^X)^* = e^{X^*}$,
- *je-li* $R \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ *invertibilní, pak* $e^{RXR^{-1}} = Re^X R^{-1}$,
- $\det e^X = e^{\mathrm{Tr}(X)}$,
- *speciálně* $e^0 = I_n$.

Důkazy jednotlivých vlastností lze najít v knize [7].

Seznam použité literatury

[1] J. Baez and J. Huerta. The Algebra of Grand Unified Theories. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 47(3):483–552, 2010.

[2] P. Garrett. Sporadic Isogenies to Orthogonal Groups. `https://www-users.cse.umn.edu/~garrett/m/v/sporadic_isogenies.pdf`.

[3] T. Friedrich. *Dirac Operators in Riemannian Geometry*, volume 25. American Mathematical Soc., 2000.

[4] R. Delanghe, F. Sommen, and V. Souček. *Clifford Algebra and Spinor-valued Functions: A Function Theory for the Dirac Operator*, volume 53. Springer Science & Business Media, 2012.

[5] S. Bertini, S. L. Cacciatori, and B. L. Cerchiai. On the Euler Angles for su(n). *Journal of Mathematical Physics*, 47(4):043510, 2006.

[6] T. Tilma, M. Byrd, and E. C. G. Sudarshan. A Parametrization of Bipartite Systems Based on su(4) Euler Angles. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 35(48):10445, 2002.

[7] B. C. Hall. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction*, volume 10. Springer, 2003.

[8] M. A. Rodrı, G. Aragón-González, J. L. Aragón, L. Verde-Star, et al. An Algorithm for the Cartan–Dieudonné Theorem on Generalized Scalar Product Spaces. *Linear Algebra and Its Applications*, 434(5):1238–1254, 2011.

[9] J. Stillwell. *Naive Lie Theory.* Springer Science & Business Media, 2008.