Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Alice Mašková

Kolmost v Banachových prostorech

Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Jaroslav Lukeš, DrSc.

Studijní program: Matematika, matematická analýza

2008

Na tomto místě bych chtěla poděkovat panu profesoru Jaroslavu Lukešovi za cenné připomínky, a také své rodině a Michalu Hadravovi za podporu.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 7.8.2008 Alice Mašková

Obsah

1. Úvod 5
2. Různé definice kolmosti 6
3. Birkhoff-Jamesova kolmost 8
4. Příklady a protipříklady 10
5. Charakteristiky hladkých a striktně konvexních prostorů 12
6. Promítání v Banachových prostorech 19
Reference 28

Název práce: Kolmost v Banachových prostorech
Autor: Alice Mašková
Katedra (ústav): Katedra matematické analýzy
Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Jaroslav Lukeš, DrSc.
e-mail vedoucího: Jaroslav.Lukes@mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme vlastnosti kolmosti v Hilbertových prostorech a možnosti rozšíření definice na obecnější typ prostorů, Banachovy prostory. Zaměřujeme se hlavně na Birkhoff-Jamesovu kolmost a zkoumáme, které vlastnosti kolmosti z Hilbertových prostorů zůstaly zachovány, případně uvádíme protipříklady. Protože kolmost obecně není symetrická, je nutné rozlišovat pravé a levé vlastnosti. Pomocí Birkhoff-Jamesovy kolmosti lze rovněž ekvivalentně charakterizovat hladké a striktně konvexní Banachovy prostory. Dále se zabýváme vlastnostmi ortogonální projekce v Hilbertových prostorech a jejich zobecněními pro Banachovy prostory. Zkoumáme projekce s normou rovnou jedné a projekce minimální.

Klíčová slova: kolmost, Birkhoff-Jamesova kolmost, hladké Banachovy prostory, striktně konvexní Banachovy prostory, projekce v Banachových prostorech

Title: Orthogonality in Banach Spaces
Author: Alice Mašková
Department: Department of Mathematical Analysis
Supervisor: prof. RNDr. Jaroslav Lukeš, DrSc.
Supervisor's e-mail address: Jaroslav.Lukes@mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we study properties of orthogonality in Hilbert spaces and possibilities of extending definition to more general type of spaces, Banach spaces. We concentrate mostly on Birkhoff-James orthogonality and investigate, which properties of Hilbert space orthogonality are still valid for Banach spaces, otherwise we provide counter-examples. As the orthogonality is generally not symmetric, we have to distinguish between right and left properties. We use Birkhoff-James orthogonality to characterize smooth and strictly convex Banach spaces. Then we study properties of Hilbert space orthogonal projection and its generalizations for Banach spaces. We study projections of norm equal one and minimal projections.

Keywords: orthogonality, Birkhoff-James orthogonality, smooth Banach spaces, strictly convex Banach spaces, projections in Banach spaces

1. Úvod

Pojem kolmosti se definuje pomocí skalárního součinu. Říkáme, že prvky x, y jsou *kolmé*, pokud je jejich skalární součin roven 0, symbolicky $(x, y) = 0$. K této definici ale potřebujeme, aby na daném prostoru skalární součin existoval. Takto se definuje kolmost na Hilbertově prostoru, což je úplný normovaný lineární prostor se skalárním součinem.

Na obecnější třídě prostorů, kupříkladu v Banachových prostorech, skalární součin obecně nelze zavést, a proto je třeba kolmost definovat jiným způsobem. Přitom ale budeme požadovat, aby kolmost definovaná na Banachově prostoru byla na Hilbertově prostoru ekvivalentní s kolmostí definovanou pomocí skalárního součinu.

V této práci ukážeme některé možnosti definování kolmosti a zaměříme se hlavně na jednu z nich, Birkhoff-Jamesovu. Pomocí této kolmosti lze ekvivalentně charakterizovat hladké a striktně konvexní Banachovy prostory. S pojmem kolmosti souvisí též možnost kolmého promítání. V Hilbertových prostorech lze ortogonalitu projekce vyjádřit různými ekvivalentními podmínkami. Máme-li v Banachových prostorech definovanou kolmost, můžeme kolmo promítat, takže poslední část této práce bude věnována ortogonálním projekcím v Banachových prostorech.

O kolmostech v Banachových prostorech neexistuje žádná monografie, máme tedy většinou pouze články v časopisech. V nich je prezentována škála různých přístupů k definici kolmosti. Základní okruhy otázek, které jsou v souvislosti s kolmostí v Banachových prostorech studovány, jsou:

1) Které z vlastností kolmosti v Hilbertových prostorech jsou v Banachových prostorech zachovány?
2) Jaký je vztah mezi různými definicemi (ekvivalence, implikace...)?
3) Charakteristiky určitých typů prostorů pomocí kolmosti.

Základní přehledovou literaturou shrnující dosažené výsledky jsou dva články Alonso, Benítez [1], [2]. První z nich se týká hlavních vlastností kolmosti v prostorech se skalárním součinem, nejprve vlastností vyjádřených pomocí skalárního součinu a pak vlastností, ve kterých se skalární součin explicitně nevyskytuje. Tyto druhé zároveň tvoří přehled některých možných definic kolmosti v normovaných lineárních prostorech. V článku jsou posléze jednotlivé přístupy ke kolmosti chronologicky seřazeny, i s odkazy na články, kde se prvně objevily. Dále jsou uvedeny některé dosažené výsledky o vlastnostech těchto kolmostí, s odkazem na literaturu, včetně některých vlastností dosud nepotvrzených ani nevyvrácených. Pokračování tohoto článku [2] se zabývá vztahy mezi jednotlivými definicemi kolmosti.

Konkrétně o Birkhoff-Jamesově kolmosti a souvislosti s lineárními funkcionály pojednává např. článek James[4]. Projekcím v Banachových prostorech s využitím této kolmosti se věnuje např. Kinnunen[5].

2. Různé definice kolmosti

V následujícím jsou všechna x, y, z prvky Banachova prostoru X a $\perp$ je relace na $X \times X$. Budeme říkat, že prvek x je *kolmý* na prvek y, pokud $x \perp y$. V dalším budeme zkoumat některé vlastnosti kolmosti. Uveďme jejich přehled.

Symetrie: Jestliže $x \perp y$, potom $y \perp x$.
Aditivita zprava: Jestliže $x \perp y$ a $x \perp z$, potom $x \perp y + z$.
Aditivita zleva: Jestliže $x \perp z$ a $y \perp z$, potom $x + y \perp z$.
Spojitost: Jestliže $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ jsou posloupnosti prvků z X, $x_n \perp y_n$, $x_n \to x$ a $y_n \to y$, potom $x \perp y$.
Homogenita: Jestliže $x \perp y$ a $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, potom $\lambda x \perp \mu y$.
Nedegenerativita: $\lambda x \perp \mu x$, právě když buďto $\lambda x = 0$ nebo $\mu x = 0$.
Existence zprava: Pro $x, y \in X$, $x \neq 0$ existuje α takové, že $x \perp \alpha x + y$.
Existence zleva: Pro $x, y \in X$, $x \neq 0$ existuje α takové, že $\alpha x + y \perp x$.
Jednoznačnost zprava: Pro $x, y \in X$, $x \neq 0$ existuje právě jedno α takové, že $x \perp \alpha x + y$.
Jednoznačnost zleva: Pro $x, y \in X$ $x \neq 0$ existuje právě jedno α, že $\alpha x + y \perp x$.

Všechny tyto vlastnosti platí pro kolmost v Hilbertově prostoru. V následující větě ukážeme několik různých ekvivalentních vyjádření pro kolmost v Hilbertově prostoru.

Věta 2.1. *Nechť H je Hilbertův prostor, $x, y \in H$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $x \perp y$,
(ii) $\|x\| \leq \|x + \lambda y\|$ *pro všechna* $\lambda \in \mathbb{R}$,
(iii) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$,
(iv) $\|x + \lambda y\| = \|x - \lambda y\|$ *pro všechna* $\lambda \in \mathbb{R}$,
(v) $\|x + y\| = \|x - y\|$.

Důkaz. (i)$\Rightarrow$(ii):
Nechť $x \perp y$, tedy $(x, y) = 0$, a nechť $\lambda \in \mathbb{R}$. Pak

$$\|x + \lambda y\|^2 = (x + \lambda y, x + \lambda y) = (x, x) + 2\lambda(x, y) + \lambda^2(y, y) =$$
$$= (x, x) + \lambda^2(y, y) \geq (x, x) = \|x\|^2.$$

Takže $\|x\| \leq \|x + \lambda y\|$ pro všechna $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii)$\Rightarrow$(i):
Z podmínky (ii) plyne, že pro všechna $\lambda \in \mathbb{R}$ platí

$$(x, x) \leq (x, x) + 2\lambda(x, y) + \lambda^2(y, y),$$

tedy

$$2\lambda(x, y) + \lambda^2\|y\|^2 \geq 0.$$

Pro $\lambda > 0$ je

$$2(x, y) + \lambda\|y\|^2 \geq 0,$$

a tedy při limitním přechodu $\lambda \to 0_+$

$$2(x, y) \geq 0,$$

odkud

$$(x, y) \geq 0.$$

Obdobně pro $\lambda < 0$ a limitní přechod $\lambda \to 0_-$ dostaneme

$$(x, y) \leq 0.$$

Z toho vyplývá, že jestliže podmínka (ii) platí pro všechna $\lambda \in \mathbb{R}$, pak $(x, y) = 0$.

(i)$\Rightarrow$(iii):
Nechť $(x, y) = 0$. Pak dostaneme

$$\|x + y\|^2 = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) = (x, x) + (y, y) = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

(iii)$\Rightarrow$(i):
Předpokládejme, že $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ pro všechna $x, y \in H$. Pak dostáváme

$$(x, x) + 2(x, y) + (y, y) = (x, x) + (y, y)$$

a tedy

$$2(x, y) = 0.$$

(i)$\Rightarrow$(iv):
Nechť $x \perp y$. Pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$ platí:

$$\|x+\lambda y\|^2 = (x, x)+2\lambda(x, y)+\lambda^2(y, y) = (x, x)+\lambda^2(y, y) = \|x\|^2+\lambda^2\|y\|^2,$$

a

$$\|x-\lambda y\|^2 = (x, x)-2\lambda(x, y)+\lambda^2(y, y) = (x, x)+\lambda^2(y, y) = \|x\|^2+\lambda^2\|y\|^2.$$

Tedy

$$\|x + \lambda y\|^2 = \|x - \lambda y\|^2.$$

A protože je norma nezáporná, pak

$$\|x + \lambda y\| = \|x - \lambda y\|.$$

(iv)$\Rightarrow$(v):
Zřejmé, stačí dosadit $\lambda = 1$.

(v)$\Rightarrow$(i):
Předpokládejme, že $\|x+y\| = \|x-y\|$. Pak

$$(x,x) + 2(x,y) + (y,y) = (x,x) - 2(x,y) + (y,y),$$

a tedy

$$4(x,y) = 0.$$

□

Nyní přistoupíme k definování kolmosti v Banachových prostorech.

Definice 2.2 (Některé definice kolmosti v Banachových prostorech)**.** *Nechť X je Banachův prostor, $x, y \in X$. Řekneme, že x je kolmé na y, symbolicky $x \perp y$ ve smyslu*

(i) *Birkhoffa-Jamese, jestliže $\|x\| \leq \|x + \lambda y\|$ pro všechna $\lambda \in \mathbb{R}$,*
(ii) *Pythagorovy kolmosti, jestliže $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$,*
(iii) *Robertse, jestliže $\|x + \lambda y\| = \|x - \lambda y\|$ pro všechna $\lambda \in \mathbb{R}$,*
(iv) *úhlopříčkové kolmosti, jestliže $\|x + y\| = \|x - y\|$.*

Ve Větě 2.1 jsme již dokázali, že všechny tyto definice jsou na Hilbertově prostoru ekvivalentní. Existují i další (v Banachových prostorech obecně neekvivalentní) definice kolmosti, viz např. Alonso, Benítez [1].

3. Birkhoff-Jamesova kolmost

V dalším se budeme zabývat pouze Birkhoff-Jamesovou kolmostí, pomocí které lze, jak posléze ukážeme, ekvivalentně charakterizovat hladké a striktně konvexní prostory. Značení $x \perp y$ budeme používat (pokud nebude řečeno jinak) pro kolmost ve smyslu Birkhoff-Jamese. Tedy:

Definice 3.1 (Kolmost)**.** Nechť X je Banachův prostor a $x, y \in X$. Řekneme, že *x je kolmé na y*, symbolicky $x \perp y$, jestliže $\|x\| \leq \|x + \lambda y\|$ pro všechna $\lambda \in \mathbb{R}$.

Tato definice kolmosti má tu výhodu, že je úzce spojena s teorií lineárních funkcionálů a nadrovin. V následující větě ukážeme některé z vlastností této kolmosti.

Věta 3.2. *Birkhoff-Jamesova kolmost je spojitá, homogenní a nedegenerativní.*

Důkaz. Snadno ukážeme, že kolmost je spojitá. Nechť $(x_n), (y_n)$ jsou posloupnosti prvků z X, $x_n \perp y_n$ pro všechna $n \in N$, $x_n \to x$, $y_n \to y$ a $\lambda \in \mathbb{R}$. Protože $x_n \perp y_n$, je

$$\|x_n\| \leq \|x_n + \lambda y_n\|.$$

Pokud $n \to \infty$, pak
$$\|x\| \leq \|x + \lambda y\|.$$
Tedy $x \perp y$, takže kolmost je spojitá.

Homogenita platí pro tuto kolmost taktéž. Máme-li $x \perp y$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pak chceme ukázat, že $\alpha x \perp \beta y$, tedy že pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$ je
$$\|\alpha x\| \leq \|\alpha x + \lambda \beta y\|.$$
Pro $\alpha = 0$ tato nerovnost platí. Rovněž platí pro $\beta = 0$ a α libovolné. Nechť tedy $\alpha, \beta \neq 0$. Z kolmosti $x \perp y$ je
$$\|x\| \leq \|x + \mu y\|$$
a tedy
$$|\alpha|\|x\| \leq |\alpha|\|x + \mu y\|$$
pro každé $\mu \in \mathbb{R}$. Protože $|\alpha|\|x\| = \|\alpha x\|$, je
$$\|\alpha x\| \leq \|\alpha x + \mu \alpha y\|.$$
Položme $\lambda = \frac{\mu\alpha}{\beta}$. Pak $\|\alpha x\| \leq \|\alpha x + \lambda \beta y\|$ pro všechna $\lambda \in \mathbb{R}$.

Birkhoff-Jamesova kolmost je nedegenerativní: Nechť $x \in X$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ jsou libovolná taková, že $\alpha x \perp \beta x$. Pak pro všechna $\lambda \in \mathbb{R}$ je
$$\|\alpha x\| \leq \|\alpha x + \lambda \beta x\|,$$
a tedy
$$|\alpha|\|x\| \leq |\alpha + \lambda\beta|\|x\|.$$
Takže $\|x\| = 0$, což je právě tehdy, když $x = 0$. Pak je již $\alpha x = 0$ a $\beta x = 0$.
Naopak, nechť $\alpha x = 0$ nebo $\beta x = 0$. Pak nerovnost
$$\|\alpha x\| \leq \|\alpha x + \lambda \beta x\|$$
platí pro všechna $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

Kolmost není obecně symetrická. Z toho důvodu je nutné uvažovat některé vlastnosti (aditivitu, existenci, jednoznačnost) zvlášť zprava a zleva.

Poznámka 3.3. Pokud je $dim X \geq 3$ a Birkhoff-Jamesova kolmost je symetrická, pak už je X Hilbertův prostor a na X existuje skalární součin takový, že norma definovaná pomocí něj je rovna původní normě.

Toto tvrzení uvádí Alonso, Benítez [1] včetně odkazů na články, ve kterých bylo postupně dokázáno. Jako jedna z ekvivalentních charakteristik prostorů se skalárním součinem se objevuje bez důkazu též v [3].

4. Příklady a protipříklady

Příklad 4.1. Birkhoff-Jamesova kolmost není obecně symetrická. Např. uvažujeme-li prostor l_2^1 všech dvojic reálných čísel s normou definovanou pro $x = (x_1, x_2)$ předpisem $\|x\| = |x_1| + |x_2|$, pak

$$(1,0) \perp (1,1)$$

a

$$(1,1) \not\perp (1,0).$$

To snadno ověříme. Nerovnost

$$1 \leq |1+\lambda| + |\lambda|$$

platí pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$, a tudíž $(1,0) \perp (1,1)$.
Pokud by $(1,1) \perp (1,0)$, pak by pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$ muselo platit

$$2 \leq |1+\lambda| + |1|,$$

takže

$$1 \leq |1+\lambda|.$$

Ale například pro $\lambda = -1$ tato nerovnost není splněna, tudíž
$(1,1) \not\perp (1,0)$.

Na tomtéž prostoru můžeme ukázat, že ani aditivita zprava a zleva obecně neplatí.

Nejprve pro aditivitu zprava, tedy nalezneme prvky $x, y, z \in l_2^1$ takové, že $x \perp y$, $x \perp z$, ale $x \not\perp y + z$. Vezmeme-li $x = (1,0)$, $y = (1,1)$, $z = (1,-1)$, pak $(1,0) \perp (1,1)$, což jsme již ukázali dříve. Nerovnost

$$\|y\| = 1 \leq |1+\lambda| + |-\lambda| = \|y + \lambda z\|$$

platí pro všechna $\lambda \in \mathbb{R}$, takže $(1,0) \perp (1,-1)$.
Kdyby $(1,0) \perp (1,1)+(1,-1)$, pak by pro všechna $\lambda \in \mathbb{R}$ muselo platit

$$1 \leq |1+2\lambda|.$$

Avšak zvolíme-li $\lambda = -\frac{1}{2}$, pak pravá strana nerovnosti bude rovna 0, takže nerovnost platit nebude. Z toho plyne, že $(1,0) \not\perp (1,1)+(1,-1)$.

Kolmost není zleva aditivní, tj. lze nalézt prvky $x, y, z \in l_2^1$ takové, že $x \perp z$, $y \perp z$ a $x + y \not\perp z$. Vezmeme-li $x = (1,0)$, $y = (0,1)$, $z = (1,1)$, pak opět $(1,0) \perp (1,1)$.
Protože

$$\|y\| = 1$$

a pro všechna $\lambda \in \mathbb{R}$ platí, že

$$\|y + \lambda z\| = |\lambda| + |1+\lambda| \geq 1,$$

pak je $(0,1) \perp (1,1)$.
A dále

$$\|x + y\| = 2,$$
$$\|x + y + \lambda z\| = |1+\lambda| + |1+\lambda|$$

Pokud by bylo $x + y \perp z$, pak by pro všechna $\lambda \in \mathbb{R}$ muselo platit

$$2 \leq |1 + \lambda| + |1 + \lambda|.$$

To ale neplatí, stačí zvolit $\lambda = -1$. Protože $x + y = (1, 1) = z$, můžeme k důkazu tvrzení, že $x + y \not\perp z$, použít též fakt, že Birkoff-Jamesova kolmost je nedegenerativní, takže je-li $z \perp z$, pak musí být $z = 0$.

Příklad 4.2. Dalším příkladem Banachova prostoru, kde kolmost není symetrická, je prostor všech spojitých funkcí na uzavřeném intervalu [0,1], symbolicky $C([0, 1])$, s normou $\|f\| = \max\{|f(x)|, \text{kde } x \in [0, 1]\}$. Vezmeme-li $f(x) = \cos x$ a $g(x) = x^2$, pak platí, že

$$f \perp g$$

a

$$g \not\perp f.$$

To snadno ukážeme. Máme

$$\|f\| = 1$$

a

$$\|f+\lambda g\| = \max\{|f(x)+\lambda g(x)| : x \in [0, 1]\} = \max\{|\cos x+\lambda x^2| : x \in [0, 1]\}$$

Pro $x = 0$ je $|\cos x + \lambda x^2| = 1$ pro všechna $\lambda \in \mathbb{R}$, takže

$$\max\{|\cos x + \lambda x^2| : x \in [0, 1]\} \geq 1.$$

Z toho vyplývá, že pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$ je

$$\|f\| \leq \|f + \lambda g\|,$$

tedy $f \perp g$.
Ukážeme, že $g \not\perp f$. Platí, že

$$\|g\| = 1,$$

$$\|g + \lambda f\| = \|x^2 + \lambda \cos x\|.$$

Pro $\lambda \in (-1, 0)$ je

$$\|x^2 + \lambda \cos x\| < 1,$$

takže pro tato λ je $\|g\| > \|g + \lambda f\|$. Z toho vyplývá, že $g \not\perp f$.

Ještě jednodušší je uvažovat na tomtéž prostoru funkce $f(x) = 1$ a $g(x) = x$. Pak $f \perp g$, protože $\|f\| = 1$ a $\|f + \lambda g\| \geq f(0) = 1$. Naopak $\|g\| = 1$ a $\|g + \lambda f\| = \|x + \lambda\|$. Například pro $\lambda = -\frac{1}{2}$ je $\|x + \lambda\| < 1$. Takže $f \perp g$ a $g \not\perp f$.

5. Charakteristiky hladkých a striktně konvexních prostorů

V této kapitole ukážeme, že pomocí kolmosti můžeme v Banachových prostorech ekvivalentně charakterizovat prostory hladké a prostory striktně konvexní. Nejprve zavedeme označení a několik pojmů. V dalším je X Banachův prostor a $\perp$ je Birkhoff-Jamesova kolmost.

Označení 5.1. Symbol S_X bude značit jednotkovou sféru prostoru X, tedy množinu všech prvků $x \in X$ takových, že $\|x\| = 1$.
Symbol $\operatorname{lin} M$ bude značit lineární obal množiny M.
Nechť f je zobrazení z X do Y. Pak:
$\operatorname{Ker} f$ bude značit jádro zobrazení f, tedy množinu všech $x \in X$ takových, že $f(x) = 0$,
$\mathcal{R}f$ bude značit obor hodnot zobrazení, tedy množinu všech $y \in Y$ takových, pro které existuje $x \in X$ tak, že $f(x) = y$.
Symbolem $\mathcal{L}(X)$ označíme prostor všech spojitých lineárních funkcionálů z X do X.
Symbolem X^* budeme značit prostor všech spojitých lineárních funkcionálů z X do $\mathbb{R}$.

Definice 5.2 (Kolmost bodu a množiny, dvou množin)**.** Řekneme, že *prvek $x \in X$ je kolmý na množinu $M \subset X$*, symbolicky $x \perp M$, jestliže pro každé $m \in M$ je $x \perp m$.
Řekneme, že *množiny $M, N \subset X$ jsou na sebe kolmé*, symbolicky $M \perp N$, jestliže pro každé $m \in M$ a pro každé $n \in N$ je $m \perp n$.

Definice 5.3 (Pravý a levý BJ-ortogonální doplněk)**.** Nechť M je podmnožina X. Množinu $x \in X$ takových, že $x \perp m$ pro všechna $m \in M$, nazveme *pravým BJ-ortogonálním doplňkem množiny M*, symbolicky $M^{\perp}$. Obdobně definujeme *levý BJ-ortogonální doplněk množiny M*, symbolicky ${}^{\perp}M$, jako množinu $x \in X$ takových, že $m \perp x$ pro všechna $m \in M$.

Definice 5.4 (Vlastní podprostor, nadrovina)**.** Nechť Y je podprostorem prostoru X. Řekneme, že *podprostor Y je vlastním podprostorem X*, jestliže $Y \neq X$. Každou množinu tvaru $x + H$, kde $x \in X$ a H je maximální vlastní uzavřený podprostor X, nazveme *nadrovinou.*

Lemma 5.5. *Nechť X je Banachův prostor a H jeho uzavřený podprostor. Pak H je maximálním vlastním uzavřeným podprostorem X právě tehdy, když existuje nenulový lineární funkcionál f na X takový, že $H = \operatorname{Ker} f$.*

Důkaz. Nechť $y \notin H$. Pro $h \in H$ definujme $f(h + \lambda y) = \lambda$. Pak f je nenulový lineární funkcionál. Protože $f(h + \lambda y) = 0$ právě když $\lambda = 0$, a tedy $f(h) = 0$, je $H = \operatorname{Ker} f$.
Pro opačnou implikaci nechť f je nenulový lineární funkcionál na X

takový, že $H = \operatorname{Ker} f$. Pak H je vlastní podprostor X a zbývá dokázat, že je maximálním vlastním podprostorem. Zvolme $y \in X \setminus H$ a ukážeme, že $\operatorname{lin}\{y, H\} = X$. Libovolný prvek $x \in X$ můžeme napsat ve tvaru:

$$x = (x - \frac{f(x)}{f(y)}y) + \frac{f(x)}{f(y)}y$$

$(x - \frac{f(x)}{f(y)}y) \in H$ a $\frac{f(x)}{f(y)}y \in X \setminus H$. Takže H je maximální vlastní podprostor. □

Definice 5.6 (Hladký prostor)**.** Řekneme, že prostor X je *hladký v bodě* $x \in S_X$, jestliže existuje právě jeden funkcionál $f \in X^*$ takový, že $\|f\| = 1$ a $f(x) = 1$.
Řekneme, že prostor X je *hladký*, jestliže X je hladký v každém bodě S_X.

Definice 5.7 (Striktně konvexní prostor)**.** Banachův prostor X se nazývá *striktně konvexní*, jestliže pro $x, y \in S_X$ taková, že $\frac{x+y}{2} \in S_X$, platí $x = y$.

Definice 5.8 (Algebraický součet)**.** Řekneme, že X je *algebraickým součtem* (prostorů) M a N, symbolicky $X = M \oplus N$, jestliže každé $x \in X$ lze rozložit na součet $x = m + n$, kde $m \in M$, $n \in N$, a tento rozklad je určen jednoznačně.

A ještě zformulujeme Hahn-Banachovu větu a její důsledek, neboť obojí později použijeme.

Věta 5.9 (Hahn-Banachova věta - analytická verze)**.** *Nechť X je Banachův prostor, M jeho podprostor a $f \in M^*$. Pak existuje $F \in X^*$ takový, že $F = f$ na M a $\|F\| = \|f\|$.*

Věta 5.10 (Věta o tečně)**.** *Nechť X je Banachův prostor a $x \in X$ nenulový prvek. Potom existuje $f \in X^*$ takový, že $\|f\| = 1$ a $f(x) = \|x\|$.*

A nyní se již budeme zabývat přípravnými tvrzeními a později hlavní větou pro charakteristiku hladkých Banachových prostorů pomocí kolmosti.

Lemma 5.11. *Nechť $f \in X^*$, $x \in X$. Pak $x \perp \operatorname{Ker} f$ právě tehdy, když $|f(x)| = \|f\|\|x\|$.*

Důkaz. "$\Rightarrow$" Nechť $x \perp \operatorname{Ker} f$ a nechť $|f(x)| = \alpha\|x\|$. Pro $y \in \operatorname{Ker} f$ platí

$$|f(x + y)| = |f(x)| = \alpha\|x\| \leq \alpha\|x + y\|,$$

přičemž poslední nerovnost plyne z definice kolmosti.

Pro $x = 0$ je $\|x\| = 0$, tudíž dle předchozího $|f(x)| = 0$. Z toho plyne, že rovnost $|f(x)| = \|f\|\|x\|$ je splněna, neboť jsou obě strany rovny 0.

Nechť $x \neq 0$. Z toho vyplývá, že $x \notin \operatorname{Ker} f$. Kdyby totiž prvek x ležel v $\operatorname{Ker} f$, pak by $x \perp x$, protože dle předpokladu je x kolmé na všechny prvky $\operatorname{Ker} f$. Jenže $x \perp x$ právě tehdy, když $x = 0$. Takže opravdu $x \notin \operatorname{Ker} f$. Protože $\operatorname{Ker} f$ tvoří nadrovinu v X a $x \notin \operatorname{Ker} f$, je

$$X = \operatorname{lin}\{x\} \oplus \operatorname{Ker} f.$$

Protože

$$|f(x)| \leq \|f\|\|x\|,$$

je

$$\alpha\|x\| \leq \|f\|\|x\|$$

a tedy

$$\alpha \leq \|f\|.$$

Zbývá ukázat, že $\|f\| \leq \alpha$ neboli že pro všechna $z \in X$ je $|f(z)| \leq \alpha\|z\|$. Prvek z můžeme zapsat ve tvaru $z = \lambda x + y$, kde $y \in \operatorname{Ker} f$. Máme

$$|f(z)| = |f(x + \lambda y)| = |\lambda||f(x)| = |\lambda|\alpha\|x\|.$$

Protože $x \perp y$, je

$$|\lambda|\alpha\|x\| \leq |\lambda|\alpha\|x + \mu y\|$$

pro všechna $\mu \in \mathbb{R}$. Je-li $\lambda \neq 0$, položíme $\mu = \frac{1}{\lambda}$. Pravou stranu upravíme takto

$$|\lambda|\alpha\|x + \mu y\| = \alpha\|\lambda x + y\| = \alpha\|z\|.$$

Z toho vyplývá, že $|f(z)| \leq \alpha\|z\|$.

"$\Leftarrow$" Předpokládejme, že $|f(x)| = \|f\|\|x\|$. Chceme dokázat, že pro všechna $\lambda \in \mathbb{R}$ a všechna $y \in \operatorname{Ker} f$ je $\|x\| \leq \|x + \lambda y\|$. Zvolme tedy $\lambda \in \mathbb{R}$ a $y \in \operatorname{Ker} f$. Pak platí

$$\|f\|\|x\| = |f(x)| = |f(x + \lambda y)| \leq \|f\|\|x + \lambda y\|.$$

Tedy máme

$$\|x\| \leq \|x + \lambda y\|.$$

Protože jsme volili $\lambda \in \mathbb{R}$ a $y \in \operatorname{Ker} f$ libovolně, platí nerovnost pro všechna $\lambda \in \mathbb{R}$, tedy $x \perp y$, z čehož vyplývá, že $x \perp \operatorname{Ker} f$. $\square$

Důsledek 5.12. *Nechť $x \in X$ a $x \neq 0$. Pak existuje nadrovina H procházející počátkem taková, že $x \perp H$.*

Důkaz. Podle Věty o tečně 5.10 existuje $f \in X^*$ tak, že $\|f\| = 1$ a $f(x) = \|x\|$. Množina $\operatorname{Ker} f$ tvoří nadrovinu procházející počátkem. Definujeme tedy $H = \operatorname{Ker} f$. Protože $x \neq 0$, je $\|x\|$ nenulová, a tedy $f(x) \neq 0$. Z toho vyplývá, že $x \notin \operatorname{Ker} f$. Protože $\|f\| = 1$ a $|f(x)| = \|x\|$, je $|f(x)| = \|f\|\|x\|$ a to je dle Lemmatu 5.11 ekvivalentní s tím, že $x \perp \operatorname{Ker} f$. Tedy $x \perp H$. $\square$

Důsledek 5.13. *Nechť $x, y \in X$, $x \neq 0$. Pak existuje $\alpha \in \mathbb{R}$ takové, že $x \perp \alpha x + y$.*

Důkaz. Z důkazu Důsledku 5.12 víme, že existuje $f \in X^*$ takové, že $\|f\| = 1$, $f(x) = \|x\|$ a $x \perp \operatorname{Ker} f$. Předpokládejme, že máme prvek z $\operatorname{Ker} f$, který je tvaru $\alpha x + y$. Pak platí

$$f(\alpha x + y) = 0.$$

Úpravou dostaneme

$$\alpha f(x) + f(y) = 0.$$

Protože $x \neq 0$, je $\|x\| \neq 0$, a tedy $f(x) \neq 0$. Takže dostáváme

$$\alpha = -\frac{f(y)}{f(x)}.$$

Tedy pro libovolné $x, y \in X$, $x \neq 0$ jsme našli $\alpha \in \mathbb{R}$ takové, že $x \perp \alpha x + y$. Čímž je důkaz hotov. □

Tvrzení 5.14. *Nechť $x, y \in X$. Pak $x \perp \alpha x + y$ právě tehdy, když existuje $f \in X^*$ takové, že $\|f\| = 1$, $f(x) = \|x\|$ a $f(\alpha x + y) = 0$.*

Důkaz. Nejprve pár předběžných úvah:
Označíme $z = \alpha x + y$. Pokud x, z jsou lineárně závislé, pak tvrzení platí triviálně (to plyne z nedegenerativity). Dále nechť tedy x, z jsou lineárně nezávislé. Pro prvky z $\operatorname{lin}\{x, z\}$ definujme lineární zobrazení předpisem $f(ax + bz) = a\|x\|$. Takže

$$f(x) = \|x\|$$

a zřejmě

$$\|f\| \geq 1.$$

Dle definice je $x \perp z$ právě tehdy, když pro všechna $\lambda \in \mathbb{R}$ je

$$\|x\| \leq \|x + \lambda z\|.$$

Neboli

$$\|ax\| \leq \|ax + bz\|$$

pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$. Neboli

$$|f(ax + bz)| \leq \|ax + bz\|.$$

Tedy $\|f\| \leq 1$, takže $x \perp z$ právě když $\|f\| = 1$.
Je-li $x \perp z$, pak definujme funkci f na $\operatorname{lin}\{x, z\}$ jako výše. Pak ji rozšíříme pomocí Hahn-Banachovy věty 5.9 na celé X tak, že norma f zůstane stejná na X. Tím je tvrzení dokázáno. □

Následující věta ukazuje, že hladkost, jednoznačnost zprava a aditivita zprava jsou ekvivalentní.

Věta 5.15 (Ekvivalentní charakteristika hladkých Banachových prostorů)**.** *Nechť X je Banachův prostor. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) *X je hladký,*
(ii) *pro $x, y \in X$, $x \neq 0$ existuje právě jedno α takové, že $x \perp \alpha x + y$,*
(iii) *jestliže $x \perp y$ a $x \perp z$, pak $x \perp (y + z)$.*

Důkaz. (i)⇒(ii)
Nechť $x, y \in X$, $x \neq 0$. Dle Důsledku 5.13 existuje $\alpha \in \mathbb{R}$ takové, že $x \perp \alpha x + y$. Již jsme odvodili, že je tvaru $\alpha = -\frac{f(y)}{f(x)}$, kde $f \in X^*$ takové, že $\|f\| = 1$, $f(x) = \|x\|$. Protože je X hladký, existuje právě jedno takové f, a tedy α je určeno jednoznačně.

(ii)⇒(i):
Stačí dokázat v případě, kdy X je dvourozměrný. Jestliže v bodě x je S_X hladká, pak množina všech bodů takových, že $x \perp y$, je přímka. Když S_X v bodě x není hladká, pak množinou je dvourozměrný kužel (tj. dva úhly omezené dvěma různoběžkami). Pak jistě existuje y takové, že přímka tvaru $\alpha x + y$, kde α je parametr, protíná tento kužel ve více než jednom bodě. To je spor s jednoznačností.

(i)⇔(iii)
Nechť $x \in S_X$ a označme M množinu všech $y \in X$ takových, že $x \perp y$. Z Důsledku 5.12 existuje nadrovina H, že $H \subset M$. Prostor je hladký v bodě x, právě když je nadrovina určena jednoznačně, neboli $H = M$. Aditivita zprava je ekvivalentní s tím, že M je lineární podprostor, neboli $H = M$. Tím je dokázáno, že (i) je ekvivalentní s (iii). □

Dříve než zformulujeme následující větu, uvedeme definici pojmu konvexní funkce. Tento pojem budeme vzápětí potřebovat.

Definice 5.16 (Konvexní funkce)**.** Nechť M je konvexní množina. Funkce f se nazývá *konvexní* na konvexní množině, jestliže pro každé $t, u \in M$ a pro každé $\lambda \in [0,1]$ platí, že

$$f(\lambda t + (1-\lambda)u) \leq \lambda f(t) + (1-\lambda) f(u).$$

Lemma 5.17. *Nechť $x, y \in X$. Pak existuje α takové, že $(\alpha x + y) \perp x$. Navíc pro toto α platí, že $\|\alpha x + y\| \leq \|kx + y\|$ pro každé $k \in \mathbb{R}$. A dále, jestliže $(Ax + y) \perp x$ a $(Bx + y) \perp x$, pak pro každé $\alpha \in [A, B]$ je $(\alpha x + y) \perp x$.*

Důkaz. Definujeme funkci $n : (-\infty, \infty) \to [0, \infty)$ předpisem $n(t) = \|tx + y\|$. Ukážeme, že tato funkce je konvexní. Nechť $x, y \in X$ pevné, $u, v \in \mathbb{R}$ a $\lambda \in [0,1]$. Pak pro funkci n dostáváme

$$\begin{aligned} n(\lambda u + (1-\lambda)v) = \|(\lambda u + (1-\lambda)v)x + y\| \leq \\ \leq \|\lambda u x + \lambda y\| + \|(1-\lambda)vx + (1-\lambda)y\| = \\ \lambda\|ux + y\| + (1-\lambda)\|vx + y\| = \lambda n(u) + (1-\lambda) n(v). \end{aligned}$$

Protože n je spojitá funkce a

$$\lim_{t \to \pm\infty} n(t) = +\infty,$$

existuje bod, ve kterém n nabývá svého minima.

Pro důkaz druhé části lemmatu: $(\alpha x + y) \perp x$ z definice právě tehdy, když

$$\|\alpha x + y\| \leq \|ax + y + \lambda x\| = \|(\alpha + \lambda)x + y\|$$

pro všechna $\lambda \in \mathbb{R}$. To je ekvivalentní s tvrzením, že pro všechna $k \in \mathbb{R}$ je

$$\|\alpha x + y\| \leq \|kx + y\|.$$

Toto α je zároveň bodem, kde nabývá funkce n svého minima. Takže funkce n nabývá svého minima právě v těch bodech α, pro která $(\alpha x + y) \perp x$.

Nechť $(Ax+y) \perp x$, $(Bx+y) \perp x$, $A \leq B$ a $\alpha \in [A, B]$. Pak existuje $\lambda \in [0, 1]$ takové, že $\alpha = \lambda A + (1 - \lambda)B$. Protože n je konvexní funkce, je množina bodů, kde nabývá svého minima, konvexní. $\square$

Následující věta je obdobou Věty 5.15, tentokrát pro striktní konvexitu a jednoznačnost zleva.

Věta 5.18 (Ekvivalentní charakteristika striktně konvexních Banachových prostorů)**.** *Nechť X je Banachův prostor. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *X je striktně konvexní,*
(ii) *pro $x, y \in X$, $x \neq 0$ existuje právě jedno α takové, že $\alpha x + y \perp x$.*

Důkaz. (i)$\Rightarrow$(ii)
Protože je X striktně konvexní, nabývá funkce $n(t) = \|tx + y\|$ minima právě v jednom bodě. Dle Lemmatu 5.17 nabývá funkce n minima právě v těch bodech t, pro které platí $tx + y \perp x$. Tudíž existuje právě jedno α takové, že $\alpha x + y \perp x$.

(ii)$\Rightarrow$(i)
Sporem: Nechť X není striktně konvexní. Pak existují prvky $x, y \in S_X$, $x \neq y$, takové, že $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S_X$ pro každé $\lambda \in [0, 1]$. (Celá úsečka s krajními body x, y leží na S_X, a tedy $\|\lambda x + (1 - \lambda)y\| = 1$ pro každé $\lambda \in [0, 1]$.)
Označíme $u = x + y$ a $v = x - y$ a ukážeme, že $u \perp v$, tedy že $\|u\| \leq \|u + \mu v\|$ pro každé $\mu \in \mathbb{R}$.
Tuto nerovnost stačí dokázat pro $\mu > 0$, protože pokud nahradíme $-v$ pomocí v, dostaneme platnost pro $\mu < 0$. (Pro $\mu = 0$ platí triviálně) Protože $\|\frac{x+y}{2}\| = 1$, je $\|\frac{u}{2}\| = 1$, a tedy $\|u\| = 2$.
Dále máme

$$\begin{aligned} \|u + v\| = \|x + y + x - y\| &= \|2x\| = 2\|x\| &= 2, \\ \|u - v\| = \|x + y - (x - y)\| &= \|2y\| = 2\|y\| &= 2 \end{aligned}$$

a

$$\|u + \mu v\| = \|x + y + \mu(x - y)\| = \|(1 + \mu)x + (1 - \mu)y.\|$$

Pro $0 \leq \mu \leq 1$ je

$$\|(1+\mu)x + (1-\mu)y\| = 2\|(\frac{1+\mu}{2})x + (\frac{1-\mu}{2})y\| = 2,$$

protože $(\frac{1+\mu}{2})x + (\frac{1-\mu}{2})y \in S_X$. Takže pro $0 \leq \mu \leq 1$ je $\|u\| = \|u+\mu v\|$.
Pro $\mu > 1$ platí

$$\|(1+\mu)x+(1-\mu)y\| = \|(\mu+1)x-(\mu-1)y\| \geq \|(\mu+1)x\| - \|(\mu-1)y\| =$$
$$|\mu+1|\|x\| - |\mu-1|\|y\| = |\mu+1| - |\mu-1| = \mu+1-(\mu-1) = 2.$$

Tedy $\|u\| \leq \|u+\mu v\|$ platí pro všechna $\mu \in \mathbb{R}$ a pro $0 \leq \mu \leq 1$ platí dokonce rovnost. Takže $u \perp v$.
Nyní ukážeme, že pro $0 \leq \mu \leq 1$ je $u + \mu v \perp v$ (tedy že $\|u+\mu v\| \leq \|u + \mu v + \lambda v\|$ pro všechna $\lambda \in \mathbb{R}$). To platí, protože

$$\|u+\mu v\| = \|u\| \leq \|u + (\lambda+\mu)v\| = \|u + \lambda v + \mu v\|$$

pro všechna $\lambda \in \mathbb{R}$. Z toho vyplývá, že $u + \mu v \perp v$ pro $0 \leq \mu \leq 1$, a to je spor s jednoznačností zleva. A tedy X je striktně konvexní. □

Příklad 5.19. Pomocí této věty například můžeme ukázat, že prostor všech posloupností reálných čísel, které konvergují k 0, symbolicky c_0, opatřený normou $\|x\| = \max\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$ $(x \in c_0, x = (x_1, x_2, ...))$ není striktně konvexní.
Ukážeme, že existují $x, y \in c_0$, $x \neq 0$ a alespoň dvě různá $\alpha \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\alpha x + y \perp x.$$

Tedy chceme, aby pro všechna $\lambda \in \mathbb{R}$ platilo

$$\|\alpha x + y\| \leq \|\alpha x + y + \lambda x\|$$

Pro

$$x = (1, 0, 0, 0, ...),$$
$$y = (0, 1, 0, 0, ...)$$

máme

$$\|\alpha x + y\| = \|(\alpha, 1, 0, 0, ...)\|,$$
$$\|\alpha x + y + \lambda x\| = \|(\alpha+\lambda, 1, 0, 0...)\|.$$

Pro $\alpha \in [-1, 1]$ je

$$\|\alpha x + y\| = 1$$

a

$$\|\alpha x + y + \lambda x\| \geq 1$$

pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$. Takže $\alpha x + y \perp x$ pro $\alpha \in [-1, 1]$, tudíž není splněna jednoznačnost zleva, tedy není splněna podmínka (ii) z Věty 5.18. Z toho plyne, že prostor c_0 s touto normou není striktně konvexní.

Poznámka 5.20. To je samozřejmě vidět ihned i jinak:
Nechť $x = (1, 1, 0, 0...)$, $y = (1, 0, 0, 0...)$.
Pak $x, y \in S_{c_0}$. A dále:

$$\frac{x+y}{2} = (1, \frac{1}{2}, 0, 0...),$$

takže

$$\frac{x+y}{2} \in S_{c_0}$$

a $x \neq y$. Tudíž c_0 není striktně konvexní.

6. Promítání v Banachových prostorech

S kolmostí souvisí možnost kolmého promítání. Pro ortogonální projekci v Hilbertových prostorech existuje více ekvivalentních charakteristik. Některé z nich zde zformulujeme a dokážeme. Poté se podíváme na možnosti kolmého promítání v Banachových prostorech s využitím Birkhoff-Jamesovy ortogonality. Začněme tedy projekcemi v Hilbertových prostorech. Nechť H je Hilbertův prostor.

Definice 6.1 (Projekce)**.** Zobrazení $P \in \mathcal{L}(H)$ takové, že $P^2 = P$ a P je netriviální (tj. existuje $x \in H$ takové, že $Px \neq 0$), se nazývá *projekce.*

Definice 6.2 (Ortogonální projekce)**.** Projekci P nazveme *ortogonální*, pokud $\mathcal{R}P \perp \operatorname{Ker} P$.

Definice 6.3 (Minimální projekce)**.** Projekci P nazveme *minimální*, pokud pro každou projekci $Q : H \to H$ je $\|x - Px\| \leq \|x - Qx\|$.

Definice 6.4. Označíme P^* zobrazení $H \to H$ takové, že $(Px, y) = (x, P^*y)$ pro všechna $x, y \in H$. Toto zobrazení nazveme *hermiteovsky adjungovaným zobrazením* k P
Řekneme, že P je *hermiteovský*, jestliže $P = P^*$.
Řekneme, že P je *normální*, pokud $PP^* = P^*P$.
Řekneme, že P je *pozitivní*, pokud $(Px, x) \geq 0$ pro všechna $x \in H$.

V následující větě bude symbol $x \perp y$ značit kolmost definovanou skalárním součinem.

Věta 6.5. *Nechť H je Hilbertův prostor, M podprostor P a $P : H \to M$ projekce. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) *P je ortogonální,*
(ii) *$Px \perp x - Px$ pro všechna $x \in H$.*
(iii) *$\|P\| = 1$,*
(iv) *P je minimální,*
(v) *P je hermiteovský,*
(vi) *P je normální,*
(vii) *P je pozitivní,*

(viii) *existuje netriviální uzavřený podprostor* $M \subset\subset H$ *tak, že* $\|x - Px\| = \operatorname{dist}(x, M)$ *pro každé* $x \in H$,

Ještě než tuto větu dokážeme, připomeneme bez důkazu dvě věty z Hilbertových prostorů, které budeme v důkazu potřebovat.

Věta 6.6 (Charakteristika nejbližšího prvku)**.** *Nechť* M *je podprostor Hilbertova prostoru* H, $m \in M$, $x \in H$. *Pak* $\|x - m\| = \operatorname{dist}(x, M)$, *právě když* $x - m \perp M$.

Věta 6.7 (Existence nejbližšího prvku)**.** *Nechť* M *je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru* H *a* $x \in X$. *Pak existuje právě jeden prvek* $m \in M$ *takový, že* $\|x - m\| = \operatorname{dist}(x, M)$.

A nyní se vrátíme k důkazu Věty 6.5.

Důkaz. (i)⇒(ii)
Nechť $\mathcal{R}P \perp \operatorname{Ker} P$ a chceme ukázat, že $Px \perp x - Px$ pro každé $x \in H$. Pro každé $x \in H$ je $Px \in \mathcal{R}P$. Protože

$$P(x - Px) = Px - P^2x = 0,$$

je $x - Px \in \operatorname{Ker} P$.

(ii)⇒(iii)
Protože P je projekce, je

$$\|P\| = \|P^2\| \leq \|P\|^2.$$

Tedy $\|P\| \geq 1$.
Pro odvození opačné nerovnosti nechť pro každé $x \in H$ je

$$Px \perp x - Px.$$

Použijeme Pythagorovu větu, neboli podmínku (iii) z Věty 2.1 a dostaneme

$$\|Px + (x - Px)\|^2 = \|Px\|^2 + \|x - Px\|^2.$$

Z toho pak úpravou získáme

$$\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|x - Px\|^2,$$
$$\|x\|^2 \geq \|Px\|^2,$$
$$\|x\| \geq \|Px\|.$$

Protože

$$\|P\| = \sup\{\|Px\| : \|x\| \leq 1\},$$

je $\|P\| \leq 1$. Takže $\|P\| = 1$.

(iii)⇒(i)
Nechť $\|P\| = 1$ a $x \in (\operatorname{Ker} P)^{\perp}$. Ukážeme, že $x \in \mathcal{R}P$, tedy že $Px = x$. Protože $P(x - Px) = 0$, je

$$x - Px \in \operatorname{Ker} P,$$

a tedy

$$x - Px \perp x.$$

Takže

$$0 = (x - Px, x) = (x, x) - (Px, x),$$

neboli

$$\|x\|^2 = (Px, x).$$

Ze Schwarzovy nerovnosti plyne

$$|(Px, x)| \leq \|Px\|\|x\|$$

a dále úpravou

$$\|Px\|\|x\| \leq \|P\|\|x\|^2 = \|x\|^2,$$

neboť $\|P\| = 1$.
Tedy ve výrazu

$$\|x\|^2 = |(Px, x)| \leq \|Px\|\|x\| \leq \|P\|\|x\|^2 = \|x\|^2$$

nastávají rovnosti, takže

$$\|Px\| = \|x\|$$

a dále

$$\|Px\|^2 = \|x\|^2 = (Px, x).$$

Z toho plyne, že

$$\|Px - x\|^2 = \|Px\|^2 - 2(Px, x) + \|x\|^2 = 0.$$

$\|Px - x\|^2 = 0$ právě když $Px - x = 0$. Tedy $Px = x$, takže $x \in \mathcal{R}P$ pro každé $x \in (\operatorname{Ker} P)^\perp$, a proto

$$(\operatorname{Ker} P)^\perp = \mathcal{R}P,$$

$$\mathcal{R}P \perp \operatorname{Ker} P.$$

(viii)$\Leftrightarrow$(i)
Nechť $\|x - Px\| = \operatorname{dist}(x, M)$. Z Věty 6.6 je tato rovnost ekvivalentní s tvrzením, že $x - Px \perp M$. Protože $Px \in X$, je toto ekvivalentní s tím, že pro každé $x \in H$ je $x - Px \perp Px$, $Px \perp x - Px$ (kolmost je v Hilbertově prostoru symetrická).

(iv)$\Rightarrow$(viii)
Nechť P je minimální projekce, tj. pro všechny projekce $Q : H \to M$ je $\|x - Px\| \leq \|x - Qx\|$. Tedy

$$\|x - Px\| = \inf\{\|x - Qx\| : Q : H \to M \text{ projekce}\}.$$

Protože $Qx \in M$, je

$$\|x - Px\| = \inf\{\|x - Qx\| : Qx \in M\} = \operatorname{dist}(x, M).$$

(viii)⇒(iv)
Nechť $x \in H$. Vzdálenost bodu x od množiny M je z definice

$$\operatorname{dist}(x, M) = \inf\{\|x - y\| : y \in M\}.$$

Jestliže

$$\|x - Px\| = \operatorname{dist}(x, M),$$

je

$$\|x - Px\| = \inf\{\|x - Qx\| : Qx \in M\}.$$

Tedy pro každou projekci Q platí

$$\|x - Px\| \leq \|x - Qx\|.$$

Toto platí pro všechna $x \in H$, takže P je minimální projekce.

(i)⇒(v)
Předpokládejme, že $\mathcal{R}P \perp \operatorname{Ker} P$. Nechť $x, y \in H$. Pak

$$(Px, y) = (Px, y - Py + Py) = (Px, y - Py) + (Px, Py),$$

$$(x, Py) = (x - Px + Px, Py) = (x - Px, Py) + (Px, Py).$$

Protože pro každé $x, y \in H$ je $Px, Py \in \mathcal{R}P$ a $(x - Px), (y - Py) \in \operatorname{Ker} P$, a prvky z $\mathcal{R}P$ jsou dle předpokladu kolmé na prvky z $\operatorname{Ker} P$, je

$$(Px, y - Py) = 0$$

a

$$(x - Px, Py) = 0.$$

Tedy

$$(Px, y) = (Px, Py),$$
$$(x, Py) = (Px, Py).$$

Z toho plyne, že

$$(Px, y) = (x, Py)$$

pro všechna $x, y \in H$, a tudíž P je hermiteovský operátor.

(v)⇒(vi)
Zřejmé.

(vi)⇒(i)
Budeme předpokládat, že P je normální, a ukážeme, že $\mathcal{R}P \perp \operatorname{Ker} P$. Nejprve ukážeme, že P je normální právě tehdy, když $\|Px\| = \|P^*x\|$ pro každé $x \in H$. Nechť P je normální, $x \in H$. Pak

$$\|Px\|^2 = (Px, Px) = (x, P^*Px) = (x, PP^*x) = (P^*x, P^*x) = \|P^*x\|^2.$$

Tedy pro každé $x \in H$ je

$$\|Px\| = \|P^*x\|.$$

Pro opačnou implikaci nechť $\|Px\| = \|P^*x\|$ pro každé $x \in H$. Pak

$$\|Px\|^2 = (Px, Px) = (x, P^*Px)$$

a

$$\|P^*x\|^2 = (P^*x, P^*x) = (x, PP^*x).$$

Tedy pro všechna $x \in H$

$$(x, P^*Px) = (x, PP^*x),$$

$$(x, P^*Px - PP^*x) = 0.$$

Z toho plyne, že $P^*Px - PP^*x = 0$, a to platí právě tehdy, když $P^*P = PP^*$. Takže máme, že P je normální právě tehdy, když $\|Px\| = \|P^*x\|$ pro každé $x \in H$.

Tedy $\|Px\| = 0$, právě když $\|P^*x\| = 0$. Přitom $\|Px\| = 0$, právě když $Px = 0$. A $\|P^*x\| = 0$, právě když $P^*x = 0$. Z toho vyplývá, že $x \in \operatorname{Ker} P$ právě tehdy, když $x \in \operatorname{Ker} P^*$. A tedy $\operatorname{Ker} P = \operatorname{Ker} P^*$.

Nechť $y \in \operatorname{Ker} P^*$. Pak $P^*y = 0$, a proto $(x, P^*y) = 0$ pro každé $x \in H$. Protože

$$(x, P^*y) = (Px, y),$$

je

$$y \perp Px.$$

$\mathcal{R}P$ je množinou všech Px, kde $x \in H$, takže

$$y \perp \mathcal{R}P$$

neboli

$$y \in (\mathcal{R}P)^\perp.$$

Tedy

$$(\mathcal{R}P)^\perp = \operatorname{Ker} P^* = \operatorname{Ker} P.$$

Tím jsme dokázali, že $\mathcal{R}P \perp \operatorname{Ker} P$.

(v)$\Rightarrow$(vii)

Předpokládejme, že P je hermiteovský, a ukážeme, že P je pozitivní, tedy že $(Px, x) \geq 0$ pro všechna $x \in H$. Nechť $x \in H$. Máme

$$(Px, x) = (P^2x, x) = (Px, P^*x).$$

Protože je P hermiteovský, je $(Px, P^*x) = (Px, Px)$. Tedy

$$(Px, x) = \|Px\|^2 \geq 0$$

pro každé $x \in H$, tudíž P je pozitivní.

(vii)$\Rightarrow$(i)

Nechť P je pozitivní, $x \in \mathcal{R}P$, $y \in \operatorname{Ker} P$. Chceme dokázat, že $\mathcal{R}P \perp \operatorname{Ker} P$, neboli že $x \perp y$ pro všechna $x \in \mathcal{R}P$ a $y \in \operatorname{Ker} P$. Máme

$$(P(x+y), x+y) \geq 0.$$

Tedy

$$(Px, x) + (Px, y) + (Py, x) + (Py, y) \geq 0.$$

Protože $x \in \mathcal{R}P$, je $Px = x$. Z toho, že $y \in \operatorname{Ker} P$ dostáváme, že $Py = 0$, a tedy skalární součin Py a libovolného prvku H dává 0. Po dosazení do předchozí nerovnosti dostaneme

$$(x, x) + (x, y) \geq 0.$$

Tedy pro každé $x \in \mathcal{R}P$ a $y \in \operatorname{Ker} P$ je

$$-\|x\|^2 \leq (x, y).$$

Nechť $(x, y) = \lambda \neq 0$. Nerovnost $-\|x\|^2 \leq (x, y)$ platí pro všechna $y \in \operatorname{Ker} P$, tedy i pro prvek $-\frac{2}{\lambda}\|x\|^2 y$, protože

$$P(-\frac{2}{\lambda}\|x\|^2 y) = -\frac{2}{\lambda}\|x\|^2 Py = 0.$$

Dosazením tohoto prvku za y do nerovnosti získáme

$$-\|x\|^2 \leq (x, -\frac{2}{\lambda}\|x\|^2 y) = -\frac{2}{\lambda}\|x\|^2 (x, y) = -2\|x\|^2,$$

což je spor. Takže $(x, y) = 0$, a tedy $\mathcal{R}P \perp \operatorname{Ker} P$. □

Pro zobecnění teorie o projekcích na Banachovy prostory budeme opět uvažovat Birkoff-Jamesovu definici kolmosti a v dalším bude tedy symbol $x \perp y$ značit opět kolmost ve smyslu Birkoffa-Jamese.

Definice 6.8 (Projekce v Banachových prostorech)**.** Nechť X je Banachův prostor. Lineární zobrazení $P : X \to X$ nazveme *projekcí*, pokud $P^2 = P$ a existuje $x \in X$, že $P(x) \neq 0$.

Definice 6.9 (Topologický součet)**.** Nechť $X = M \oplus N$. Pak každé $x \in X$ lze napsat jednoznačně ve tvaru $x = x_M + x_N$, kde $x_M \in M$, $x_N \in N$. Definujme projekce

$$P_M : X \to M,$$

$$P_N : X \to N,$$

tak, že

$$P_M(x) = x_M,$$

$$P_N(x) = x_N.$$

Řekneme, že X je *topologickým součtem* (prostorů) M a N, symbolicky $X = M \oplus_t N$, jestliže X je algebraickým součtem M a N a projekce P_M a P_N jsou spojité.

Definice 6.10 (Komplementovaný podprostor)**.** Řekneme, že M je *komplementovaný* podprostor X, jestliže existuje podprostor $N \subset X$ takový, že $X = M \oplus_t N$.

Každý komplementovaný podprostor je uzavřený. Pokud M není komplementovaný, projekce na M nemusí být spojitá.
Protože kolmost ve smyslu Birkhoffa-Jamese obecně není symetrická, je nutné definovat ortogonalitu projekce zleva a zprava.

Definice 6.11 (Zleva/zprava ortogonální projekce)**.** Projekci P nazveme *zleva ortogonální*, pokud $Px \perp x - Px$ pro každé $x \in X$, a *zprava ortogonální*, pokud $x - Px \perp Px$ pro každé $x \in X$.

V Banachových prostorech jsou důležité zejména projekce s normou rovnou jedné a minimální projekce. Na obě se blížeji podíváme.

Definice 6.12 (Minimální projekce)**.** Projekci P nazveme *minimální*, pokud pro každou projekci $Q : X \to X$ a pro každé $x \in X$ je
$\|x - Px\| \leq \|x - Qx\|$.

Věta 6.13. *Nechť X je Banachův prostor, M komplementovaný podprostor X. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) *existuje zleva ortogonální projekce X na M,*
(ii) *existuje (uzavřený) $N \subset\subset M$ tak, že $X = M \oplus N$ a $M \perp N$,*
(iii) *existuje projekce $Q : X \to M$ taková, že $\|Q\| = 1$.*

Důkaz. (i)⇒(ii)
Nechť P je zleva ortogonální projekce X na X. Označíme $N = \operatorname{Ker} P$ a $M = \mathcal{R}P$ a ukážeme, že $X = M \oplus N$.
Nechť $y \in M$, $z \in N$ libovolné. Tedy

$$Py = y,$$

$$Pz = 0.$$

Nechť $x = y + z$.
Pak

$$Px = Py + Pz = y,$$

a

$$z = x - y = x - Px.$$

Protože je P zleva ortogonální, je $y \perp z$. Kolmost platí pro všechna $y \in M$, $z \in N$, takže $M \perp N$.

(ii)⇒(i)
Nechť N je podprostor X takový, že $X = M \oplus_t N$ a $M \perp N$. Nechť P je projekce X na M taková, že $\operatorname{Ker} P = N$. Pro každé $x \in X$ je $Px \in M$, $x - Px \in N$. Protože $M \perp N$, je

$$Px \perp x - Px.$$

To platí pro každé $x \in X$ a tedy P je zleva ortogonální projekce.

(i)⇒(iii)
Nechť P je zleva ortogonální projekce X na M. Pak pro každé $x \in X$ a pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$ platí

$$\|Px\| \leq \|Px + \lambda(x - Px)\|.$$

Speciálně pro $\lambda = 1$ je

$$\|Px\| \leq \|x\|.$$

Protože

$$\|P\| = \sup\{\|Px\| : \|x\| \leq 1\},$$

je $\|P\| \leq 1$.
Pro $x \in M$ je $Px = x$, a tedy

$$\|Px\| = \|x\|,$$

tudíž $\|P\| = 1$.

(iii)⇒(ii)
Nechť P je projekce X na M taková, že $\|P\| = 1$. Označíme $N = \operatorname{Ker} P$. Nechť $y \in M$, $z \in N$ libovolné, pak tedy $Py = y$, $Pz = 0$. Ukážeme, že $y \perp z$, tedy že pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$ platí

$$\|y\| \leq \|y + \lambda z\|,$$

$$\frac{\|y\|}{\|y + \lambda z\|} \leq 1.$$

Protože $\|P\| = 1$ a $\|\frac{y+\lambda z}{\|y+\lambda z\|}\| = 1$, platí

$$\|P(\frac{y + \lambda z}{\|y + \lambda z\|})\| \leq 1,$$

$$\|\frac{y}{\|y + \lambda z\|} \leq 1\|.$$

Takže $\frac{\|y\|}{\|y+\lambda z\|} \leq 1$ pro všechna $\lambda \in \mathbb{R}$, tedy $y \perp z$ pro každé $y \in M$ a $z \in N$, a tudíž $M \perp N$. □

Věta 6.14. *Nechť X je Banachův prostor, M komplementovaný podprostor X. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) *existuje zprava ortogonální projekce X na M,*
(ii) *existuje (uzavřený) $N \subset\subset M$ tak, že $X = M \oplus_t N$ a $N \perp M$,*
(iii) *existuje minimální projekce X na M.*

Důkaz. (i)⇒(ii)
Nechť P je zprava ortogonální projekce X na X, tj. $x - Px \perp Px$ pro každé $x \in X$. Označíme $N = \operatorname{Ker} P$ a $M = \mathcal{R}P$ a ukážeme, že $X = N \oplus M$.
Nechť $y \in M$, $z \in N$ libovolné. Tedy

$$Py = y,$$

$$Pz = 0.$$

Nechť $x = y + z$.
Opět

$$Px = Py + Pz = y,$$

$$z = x - y = x - Px.$$

Protože je P zprava ortogonální, je $z \perp y$ pro všechna $y \in M$ a $z \in N$, tedy $N \perp M$.

(ii)⇒(i)
Nechť N je podprostor X takový, že $X = M \oplus_t N$ a $N \perp M$. Nechť P je projekce X na Mtaková, že $\operatorname{Ker} P = N$. Pro každé $x \in X$ je $Px \in M$, $x - Px \in N$. Protože $N \perp M$, je

$$x - Px \perp Px.$$

To platí pro každé $x \in X$ a tedy P je zprava ortogonální projekce.

(ii)⇒(iii)
Nechť N je podprostor X takový, že $X = M \oplus_t N$ a $N \perp M$, a nechť P je projekce z X do M taková, že $\operatorname{Ker} P = N$. Pro $x \in X$ a libovolnou projekci $Q : X \to M$ platí

$$Px - Qx \in M$$

a

$$x - Px \in N.$$

Protože $N \perp M$, je

$$x - Px \perp Px - Qx,$$

tedy

$$\|x - Px\| \leq \|x - Px + \lambda(Px - Qx)\|.$$

To platí pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$, speciálně pro $\lambda = 1$ dostáváme

$$\|x - Px\| \leq \|Px - Qx\|.$$

Tato nerovnost platí pro všechny projekce $Q : X \to M$, takže P je minimální projekce.

(iii)⇒(ii)
Nechť P je minimální projekce X do M. Označíme $N = \operatorname{Ker} P$. Nechť $y \in M$, $z \in N$ a y, z jsou nenulové.
Ukážeme, že $z \perp y$, tedy že pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$ platí

$$\|z\| \leq \|z + \lambda y\|.$$

Nechť $x = y + z$. Pak

$$Px = y.$$

Protože M je podprostor a $y \in M$, pak pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$ je i

$$\lambda y \in M.$$

A dále

$$Px - \lambda y \in M.$$

Protože $z \neq 0$, pak $x \notin M$. Z toho plyne, že

$$x - (Px - \lambda y) \notin M.$$

Nechť N_0 je podprostor X takový, že $N = N_0 \oplus \mathrm{lin}\{z\}$. Existuje projekce $Q : X \to M$ taková, že $x - (Px - \lambda y) \in \operatorname{Ker} Q$.
Položíme

$$\operatorname{Ker} Q = N_0 \oplus \mathrm{lin}\{x - (Px - \lambda y)\}.$$

Platí, že

$$Q(x - (Px - \lambda y)) = 0.$$

Protože $Px - \lambda y \in M = \mathcal{R}Q$, je

$$Q(x - (Px - \lambda y)) = Qx - (Px - \lambda y) = 0,$$

a tedy

$$Qx = (Px - \lambda y).$$

Protože předpokládáme, že P je minimální, je

$$\|x - Px\| \leq \|x - Qx\|.$$

Z předchozího dostáváme

$$\|x - Px\| = \|x - y\| = \|z\|$$

a

$$\|x - Qx\| = \|x - Px + \lambda y\| = \|x - y + \lambda y\| = \|z + \lambda y\|.$$

Takže

$$\|z\| \leq \|z + \lambda y\|.$$

To platí pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$, a tedy $z \perp y$. □

Reference

[1] Alonso J., Benítez C.: *Orthogonality in Normed Linear Spaces: a Survey. Part I: Main Properties*, Extracta Mathematicae **3**, (1988), n.1, 1–15.

[2] Alonso J., Benítez C.: *Orthogonality in Normed Linear Spaces: a Survey. Part II: Relations between Main Orthogonalities*, Extracta Mathematicae **4**, (1989), n.3, 121–131.

[3] Amir D.: *Characterizations of Inner Product Spaces*, Birkhäuser, Basel - Boston - Stuttgart, 1986

[4] James R. C.: *Orthogonality and Linear Functionals in Normed Linear Spaces* Trans. Amer. Math. Soc. **61**, (1947), 265–292

[5] Kinnunen S.: *On Projections and Birkhoff-James Orthogonality in Banach Spaces*, Nieuw Archief voor Wiskunde **4**, Vol. 2, (1984) 235–255