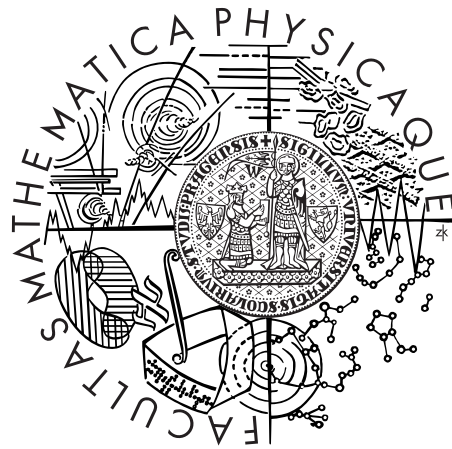


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikálna fakulta

# DIPLOMOVÁ PRÁCA



*Kristína Kyslerová*

*Generácia a anizotropná adaptácia  
hybridných sietí pre numerickú  
simuláciu stlačiteľného prúdenia*

*Katedra numerickej matematiky*

Vedúci diplomovej práce: *Doc. RNDr. Vít Dolejší, Ph.D.*

Študijný program: *Výpočtová matematika*

Ďakujem môjmu vedúcemu diplomovej práce Doc.RNDr.Vítovi Dolejšímu, Ph.D. za trpezlivý dohľad a cenné rady pri vypracovávaní diplomovej práce. Veľké poďakovanie patrí tiež mojim rodičom, ktorí ma sprevádzali, podporovali a boli mi veľkou oporou počas dlhej cesty štúdiom. Na záver ďakujem všetkým tým, ktorých tu nemenujem, no akýmkoľvek spôsobom mi pomohli pri vypracovávaní diplomovej práce či počas štúdia.

Vyhlasujem, že som svoju diplomovú prácu napísala samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov. Súhlasím so zapožičiavaním práce.

V Prahe dňa 3.augusta 2008

Kristína Kyslerová

# Obsah

Abstrakt	1
Prehľad použitých skratiek a symbolov	2
<b>1 Úvod</b>	<b>3</b>
<b>2 Formulácia úlohy a jej riešenie</b>	<b>4</b>
2.1 Formulácia . . . . .	4
2.2 Diskrétna Galerkinova formulácia . . . . .	6
2.3 Diskrétno riešenie . . . . .	8
2.4 Semi-implicitná schéma riešenia . . . . .	9
<b>3 Generovanie hybridných sietí</b>	<b>10</b>
3.1 Výpočetná oblasť . . . . .	10
3.1.1 Pás štvoruholníkov . . . . .	10
3.2 Algoritmus generovania . . . . .	11
3.3 Generovanie štvoruholníkov . . . . .	11
3.4 Výpočet . . . . .	12
<b>4 Popis programov na generovanie hybridných sietí</b>	<b>13</b>
4.1 Siete a riešenie na nich . . . . .	13
4.2 Algoritmus generovania trojuholníkových sietí . . . . .	13
4.3 Hybridné siete . . . . .	14
4.3.1 Voľba parametrov . . . . .	14
4.3.2 1. fáza . . . . .	14
4.3.3 Gridgen . . . . .	16
<b>5 Výsledky a vizualizácia</b>	<b>21</b>
5.1 Stlačiteľné prúdenie bez viskozity . . . . .	21
5.2 Stlačiteľné viskózne prúdenie . . . . .	25
5.3 Koeficienty odporu a vztlaku . . . . .	29
<b>6 Záver</b>	<b>32</b>
Appendix	33
Literatúra	36

**Názov práce:** *Generácia a anizotropná adaptácia hybridných sietí pre numerickú simuláciu stlačiteľného prúdenia*

**Autor:** *Kristína Kyslerová*

**Katedra:** *Katedra numerickej matematiky*

**Vedúci diplomovej práce:** *Doc. RNDr. Vít Dolejší, Ph.D.*

**e-mail vedúceho:** *dolejsi@karlin.mff.cuni.cz*

**Abstrakt:** Pre Navierove-Stokesove rovnice popisujúce prúdenie stlačiteľného viskózneho plynu boli doterajšie výpočty prevádzané na sieťach s trojuholníkovými alebo štvoruholníkovými elementami. Pri obtekaní telesa tekutinou všeobecne platí, že fyzikálne javy prebiehajúce v medznej vrstve a na úplave je vhodné zachytiť pomocou štvoruholníkových sietí a na druhú stranu mimo tieto oblasti je vhodnejšie použiť siete trojuholníkové. V tejto práci skúmame použitie hybridných sietí, čiže kombináciu trojuholníkov so štvoruholníkmi.

**Kľúčové slová:** stlačiteľné viskózne prúdenie, nespojitá Galerkinova metóda, generovanie sietí, hybridné siete

**Title:** *Generation and mesh adaptation of hybrid meshes for numerical simulation of compressible flows*

**Author:** *Kristína Kyslerová*

**Department:** *Department of Numerical Mathematics*

**Supervisor:** *Doc. RNDr. Vít Dolejší, Ph.D.*

**Supervisor's e-mail address:** *dolejsi@karlin.mff.cuni.cz*

**Abstract:** The Navier-Stokes equations describe the viscous compressible flow. They can be solved using triangular or quadrilateral meshes. For a flow past an airfoil, physical effects proceeding in the boundary layer and the wake can be captured with the quadrilateral meshes while out of this area it is more effective to use the triangular meshes. In this work we investigate the use of hybrid meshes - combination of triangles and quadrilaterals.

**Keywords:** compressible viscous flow, discontinuous Galerkin method, grid generation, hybrid meshes

## Prehľad použitých skratiek a symbolov

$\Omega$	výpočetná oblasť zadaného problému
$\partial\Omega$	hranica výpočetnej oblasti $\Omega$
$\rho$	hustota
$p$	tlak
$E$	celková energia
$\mathbf{v}$	rýchlosť
$\theta$	teplota
$\gamma$	Poissonova adiabatická konštanta
$\delta_{ij}$	Kroneckerova delta
$Re$	Reynoldsovo číslo
$Pr$	Prandtlovo číslo
$\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_N)$	vektor vonkajšej normály k hranici oblasti $\partial\Omega$
$\mathcal{T}_h$	triangulácia oblasti $\Omega$
$K$	element triangulácie $\mathcal{T}_h$
$\partial\Omega_{in,out,w}$	hranica oblasti na vstupe, výstupe, nepriepustných stenách
$\mathcal{F}_h$	množina hrán (stien) elementov $K \in \mathcal{T}_h$
$\mathcal{F}_h^I$	množina hrán elementov $K \in \mathcal{T}_h$ vo vnútri oblasti $\Omega$
$\mathcal{F}_h^D$	množina hrán elementov $K \in \mathcal{T}_h$ s dirichletovskou okrajovou podmienkou
$\mathcal{F}_h^N$	množina hrán elementov $K \in \mathcal{T}_h$ s newtonovskou okrajovou podmienkou
NACA	druh profilu krídla používaného vo výpočtoch v oblasti aerodynamiky
CFD	Computational Fluid Dynamics
DGFEM	Discontinuous Galerkin Finite Element Method
BDF	Backward Difference Formula
CFP	Compressible Flow Problem

# 1 Úvod

S prúdením tekutín sa môžeme stretnúť všade. Je dôležité poznať jeho zákonitosti pri zdokonaľovaní strojov pre rôzne odvetvia priemyslu a má tiež veľký význam pre medicínu. V tejto práci sa budeme zaoberať jeho využitím v aerodynamike.

V súčasnosti môžeme k teoretickým poznatkom o stlačiteľnom prúdení pridať aj rozsiahle počítačové výpočty a simulácie, ktoré nám postupne umožňujú spresňovať doposiaľ získané vedomosti. Stlačiteľné prúdenie tekutín je skúmané vednou oblasťou označovanou ako CFD, z anglického Computational Fluid Dynamics (voľný preklad: Počítačová dynamika tekutín). Pri jeho popise využívame fyzikálne-matematický aparát, ktorý popíšeme v kapitolách 2–4. K hlbším poznatkom čitateľ môže siahnuť po [1], [2] a [9].

Fyzikálnym modelom prúdenia sú Navierove-Stokesove rovnice, ktoré bližšie popisuje kapitola *Formulácia úlohy a jej riešenie*. Ide o systém parciálnych diferenciálnych rovníc, ktorý bol odvodený nezávisle v Anglicku a vo Francúzsku v 19. storočí. Keďže ide o systém rovníc, v ktorom môžu vznikáť nespojitosti v riešení, jeho čisto analytické riešenie neprichádza do úvahy. Je však možné previesť ho do diskrétného tvaru a v takomto tvare plne využiť numerické poznatky (slabú formuláciu problému, riešenie pomocou metódy konečných prvkov), a riešiť ho ďalej pomocou kombinácie nespojitej Galerkinovej metódy – DGFEM (z anglického Discontinuous Galerkin Finite Element Method) a metódy časovej diskretizácie – BDF (z anglického Backward Difference Formula), viď [5].

Numericky môžeme problém stlačiteľného prúdenia (označovaného tiež skratkou CFP) riešiť na trojuholníkových alebo štvoruholníkových sieťach. Na zachytenie prúdenia v medznej vrstve okolo profilu je u trojuholníkových sietí potrebné príliš veľké zjemnenie, čo vedie k sieťam s veľkým počtom elementov a to je nevýhodné z hľadiska výpočetného času. Na druhej strane je však používanie trojuholníkov vďaka anizotropnej adaptácii výhodné vo väčšej vzdialenosti od profilu, a tak celkovo volíme kombináciu štvoruholníkov v blízkosti profilu a trojuholníkov ďalej od profilu. Ďalšou výhodou je aj jednoduchá implementácia algebraických modelov turbulencie.

Kapitola *Generovanie hybridných sietí* popisuje algoritmus vytvárania hybridných sietí –kombinácie štvoruholníkov a trojuholníkov. Rozdiely v štruktúre súborov pre siete trojuholníkové a kombinované nájdeme v kapitole nasledujúcej *Popis programov na generovanie hybridných sietí*. Dopĺňa tiež parametre potrebné pre vygenerovanie vrstvy štvoruholníkov okolo profilu a pre ďalší výpočet na hybridnej sieti.

Nasleduje kapitola *Výsledky a vizualizácia dát*, v ktorej sú zhrnuté výsledky riešenia Navier-Stokesových rovníc na sieti čisto trojuholníkovej v porovnaní s výsledkami na sieťach hybridných.

*Appendix* –doplnujúca kapitola je venovaná vysvetleniu použitia trojuholníkových sietí a ich adaptívnemu zjemňovaniu tak, ako je to popísané v [3] a v [4].

## 2 Formulácia úlohy a jej riešenie

Systém Navierových-Stokesových rovníc, ktorý definujeme v sekcii 2.1 prevedieme v nasledujúcej sekcii 2.2 do slabej formy a vytvoríme príslušný diskretný priestor, na ktorom počítame diskrétno (resp. semidiskrétno) riešenie 2.3 a ďalej približné riešenie s prihliadnutím na premennú času 2.4.

### 2.1 Formulácia

Nech  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N = 2, 3$  je ohraničená oblasť s hranicou  $\partial\Omega$  a nech  $Q_T = \Omega \times (0, T)$ , kde  $T > 0$ ,  $t$  je časová premenná z intervalu  $(0, T)$ ,  $x$  je priestorová premenná (vektor) oblasti  $\Omega$ .

Systém **Navierových-Stokesových** rovníc opisuje prúdenie stlačiteľného viskózneho plynu (1). Je doplnený termodynamickými vzťahmi pre ideálny plyn (2), počiatočnými podmienkami (3) a uzatvárajú ho okrajové podmienky (4)–(6):

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathbf{f}_i(\mathbf{w})}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathbf{R}_i(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w})}{\partial x_i}, \quad (1)$$

$$\text{kde : } \quad \mathbf{w} = (\rho, \rho v_1, \dots, \rho v_N, E)^T \in \mathbb{R}^m,$$

$$m = N + 2, \mathbf{w} = \mathbf{w}(x, t), \quad x \in \Omega, t \in (0, T),$$

$$\begin{aligned} \text{ďalej : } \quad \mathbf{f}_i(\mathbf{w}) &= (f_{i1}, \dots, f_{im})^T \\ &= (\rho v_i, \rho v_1 v_i + \delta_{1i} p, \dots, \rho v_N v_i + \delta_{Ni} p, (E + p)v_i)^T, \\ \mathbf{R}_i(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w}) &= (R_{i1}, \dots, R_{im})^T \\ &= (0, \tau_{i1}, \dots, \tau_{iN}, \tau_{i1} v_1 + \dots + \tau_{iN} v_N + \frac{\gamma}{RePr} \frac{\partial \theta}{\partial x_i})^T, \end{aligned}$$

$$i, j = 1, \dots, N$$

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} \delta_{ij} + 2\mu d_{ij}(\mathbf{v}), \quad d_{ij}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \\ \mu &\geq 0, \\ \lambda &= \frac{-2}{3} \mu, \end{aligned}$$

$\mathbf{f}_i(\mathbf{w})$  sú takzvané Eulerove (neviskózne) toky a  $\mathbf{R}_i(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w})$  predstavujú viskózne toky. S vynechaním viskózných tokov by systém rovníc (1) predstavoval stlačiteľné prúdenie bez uvažovania vnútorného trenia (viskozity) v kvapaline.

Systém dopĺňa stavová rovnica ideálneho plynu, definícia celkovej energie

$$p = (\gamma - 1)(E - \rho|\mathbf{v}|^2/2), \quad E = c_v \theta \rho + \rho|\mathbf{v}|^2/2 \quad (2)$$

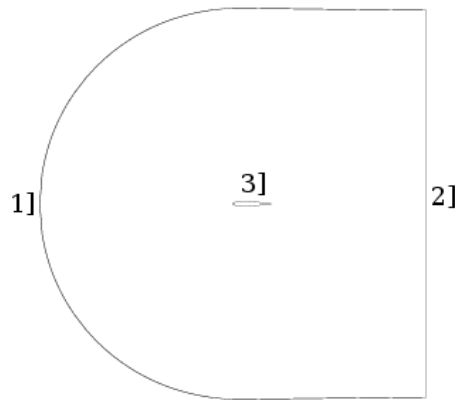
a počiatkové podmienky dané

$$\mathbf{w}(x, 0) = \mathbf{w}^0(x), x \in \Omega, \quad (3)$$

kde  $\mathbf{w}^0(x)$  je daná vektorová funkcia na  $\Omega$ .

Hranicu oblasti  $\partial\Omega = \Omega_{in} \cup \Omega_{out} \cup \Omega_w$  rozdeľujeme na časti:

- $\Omega_{in} \dots 1]$  na obrázku ... časť hranice na vstupe prúdenia
- $\Omega_{out} \dots 2]$  na obrázku ... časť hranice na výstupe prúdenia
- $\Omega_w \dots 3]$  na obrázku ... časť hranice s nepriepustnými pevnými stenami  
3] predstavuje zároveň profil krídla NACA



Obrázok 1: Ilustračný obrázok hraníc oblasti okolo profilu NACA

Podľa fyzikálneho typu úlohy (t.z. podľa časti hranice a druhu prúdenia) určujeme jej okrajové podmienky. Pre časť  $\Omega_{in}$  predpisujeme nasledujúcu sadu okrajových podmienok:

$$a) \quad \rho|_{\Omega_{in} \times (0, T)} = \rho_D, \quad \mathbf{v}|_{\Omega_{in} \times (0, T)} = \mathbf{v}_D, \quad \sum_{k=1}^N \left( \sum_{i=1}^N \tau_{ik} n_i \right) v_k + \frac{\gamma}{RePr} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad (4)$$

$\rho_D$  a  $v_D$  sú zadané funkcie.

Pre  $\Omega_{out}$  ide o tieto okrajové podmienky:

$$b) \quad \sum_{k=1}^n \tau_{ik} n_k = 0, i = 1, \dots, n, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad (5)$$



Na nepriepustných stenách  $\Omega_w$  zadávame nasledovné podmienky:

$$c) \quad \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} = 0. \quad (6)$$

Takto formulovaný problém Navierových-Stokesových rovníc so zadanými počiatočnými a okrajovými podmienkami označujeme ako CFP (z anglického Compressible Flow Problem) a snažíme sa nájsť riešenie systému diferenciálnych rovníc (hyperbolicko-parabolického typu). Analytické riešenie zadaného systému rovníc je dosiaľ neznáme, a tak prechádzame k numerickému riešeniu problému CFP.

## 2.2 Diskrétna Galerkinova formulácia

Oblasť  $\Omega$  rozdelíme na konečný počet navzájom disjunktných mnohouholníkov (mnohostenov). Delenie nazývame trianguláciou oblasti  $\Omega$  a značíme  $\mathcal{T}_h$ . Zároveň platí:  $\bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K = \overline{\Omega}$ . V prípade 2D úlohy volíme elementy  $K$  ako trojuholníky alebo štvoruholníky.

Jednotlivé elementy  $K$  majú spoločné hrany označené  $\mathcal{F}_h$ . Hrany obsiahnuté vo vnútri oblasti  $\Omega$  označujeme  $\mathcal{F}_h^I$ , hrany s dirichletovským typom okrajových podmienok  $\mathcal{F}_h^D$  a hrany s neumannovským typom okrajových podmienok označujeme  $\mathcal{F}_h^N$ . Zároveň platí:  $\mathcal{F}_h = \mathcal{F}_h^I \cup \mathcal{F}_h^D \cup \mathcal{F}_h^N$ .

Priestor  $H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$  definujeme ako

$$H^2(\Omega, \mathcal{T}_h) \equiv \left\{ v; v|_K \in H^2(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\},$$

kde  $H^2(K)$  je Sobolevov priestor na elemente  $K \in \mathcal{T}_h$ .

Od systému Navierových-Stokesových rovníc prejdeme k diskkrétnej Galerkinovej formulácii nasledujúcimi formálnymi úpravami:

- rovnicu vynásobíme testovacou funkciou  $\varphi \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ , kde  $\mathcal{T}_h$  je zvolená triangulácia,
- zintegrujeme cez element  $K \in \mathcal{T}_h$ ,
- použijeme Greenovu vetu a
- nakoniec sčítame cez všetky elementy triangulácie  $\mathcal{T}_h$ .

Po zmiených úpravách a označení dostaneme tvar rovnice:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{w}, \varphi) + \tilde{\mathbf{a}}_h(\mathbf{w}, \varphi) + \tilde{\mathbf{b}}_h(\mathbf{w}, \varphi) + \mathbf{J}_h^\sigma(\mathbf{w}, \varphi) = 0, \quad (7)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}(t), \varphi \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)^{N+2}, t \in (0, T).$$

Formy v rovnici (7) predstavujú:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{a}}_h(\mathbf{w}, \varphi) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \vec{\mathbf{R}}(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w}) \cdot \nabla \varphi dx \\
&\quad - \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h^{ID}} \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^N \left\langle \sum_{k=1}^N \mathbf{K}_{i,k}(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \right\rangle n_i \cdot [\varphi] dS \\
&\quad - \eta \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h^{ID}} \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^N \left\langle \mathbf{K}_{k,i}^T(\mathbf{w}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right\rangle n_i \cdot [\mathbf{w}] dS \\
&\quad + \eta \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h^D} \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^N \mathbf{K}_{k,i}^T(\mathbf{w}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} n_i \cdot \mathbf{w}_B dS,
\end{aligned} \tag{8}$$

kde:

$$\vec{\mathbf{R}}(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w}) = (\mathbf{R}_1(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w}), \dots, \mathbf{R}_N(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w})),$$

prvé dva členy pravej strany rovnice (8) vznikli z viskózneho členu prechodom k slabej formulácii a použitím vzťahu:

$$\mathbf{R}_i(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w}) = \sum_{k=1}^N \mathbf{K}_{i,k}(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k}, i = 1, \dots, N,$$

posledné dva členy rovnice (8) sú tzv. stabilizačnými členmi a používame ich, pretože približné riešenie môže v blízkosti hrán elementov oscilovať.

Výrazy  $\mathbf{K}_{i,k}(\mathbf{w})$  a  $\mathbf{K}_{k,i}^T(\mathbf{w})$  vzniknú pri úpravách viskózneho členu rovnice (1) a vektor  $\mathbf{w}_B$  je daný okrajovými podmienkami na  $\partial\Omega_{in} \cup \partial\Omega_w$ .

Koeficient  $\eta$  môžeme zvoliť ako:

- $\eta = 1 \dots$  v prípade symetrickej interior penalizačnej Galerkinovej schémy (SIPG),
- $\eta = -1 \dots$  v prípade nesymetrickej interior penalizačnej Galerkinovej schémy (NIPG),
- $\eta = 0 \dots$  v prípade nekompletnej interior penalizačnej Galerkinovej schémy (IIPG).

Formy  $\tilde{\mathbf{b}}_h(\mathbf{w}, \varphi)$  predstavujúce Eulerove (neviskózne) toky v ďalšej sekcii pri prechode k numerickému riešeniu upravíme nahradením integrálov cez hranicu elementov triangulácie tzv. numerickými tokmi

$$\tilde{\mathbf{b}}_h(\mathbf{w}, \varphi) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \int_{\partial K} \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i(\mathbf{w}) n_i \cdot \varphi dS - \int_K \sum_{i=1}^N \mathbf{f}(\mathbf{w}) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \right\}, \tag{9}$$

a ďalej

$$\mathbf{J}_h^\sigma(\mathbf{w}, \varphi) = \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h^{ID}} \int_{\Gamma} \sigma[\mathbf{w}] \cdot [\varphi] dS - \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h^D} \int_{\Gamma} \sigma \mathbf{w}_B \cdot \varphi dS, \tag{10}$$

kde výraz  $\sigma|_{\Gamma}$  je tzv. penalizačný člen.

Podrobné vysvetlenie a popis spomenutých výrazov môžeme nájsť v článku [5].

## 2.3 Diskrétné riešenie

V rovnici (9) aproximujeme integrál cez hranicu elementu  $K \in \mathcal{T}_h$  pomocou numerického toku rovnako ako u metódy konečných objemov:

$$\mathbf{H}(\mathbf{w}|_{\Gamma}^{(p)}, \mathbf{w}|_{\Gamma}^{(n)}, n_{\Gamma}) \cdot \varphi|_{\Gamma}.$$

V tomto výraze znamená:

- $\Gamma$  hranica elementu triangulácie
- $\mathbf{w}|_{\Gamma}^{(p)}$  stopa funkcie  $\mathbf{w}$  na  $\partial K$  zvnútra elementu
- $\mathbf{w}|_{\Gamma}^{(n)}$  stopa funkcie  $\mathbf{w}$  na  $\partial K$  zvonku elementu.

K tomu, aby sme mohli použiť rovnicu (7) k ďalšiemu numerickému výpočtu, je nutné zaviesť diskretný priestor a definovať diskrétné riešenie problému CFP.

Po zavedení označenia:

$$S_{hp} \equiv \{v; v \in L^2(\Omega), v|_K \in P_{p_K}(K) \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

$$\mathbf{S}_{hp} \equiv \underbrace{S_{hp} \times \dots \times S_{hp}}_{N+2 \text{ krát}}$$

kde  $S_{hp}$  je priestor nespojitých po častiach polynomiálnych funkcií a  $P_{p_K}(K)$  je priestor všetkých polynómov na  $K$  stupňa  $\leq p_k$ ,  $K \in \mathcal{T}_h$ , hovoríme, že

$$C^1(0, T; \mathbf{S}_{hp})$$

je priestor spojite diferencovateľných zobrazení intervalu  $(0, T)$  do  $\mathbf{S}_{hp}$ .

**Definícia 2.1** Funkcia  $\mathbf{w}_h$  je semidiskrétnym riešením CFP, ak:

- a)  $\mathbf{w}_h \in C^1(0, T, \mathbf{S}_{hp})$
- b)  $\left(\frac{\partial \mathbf{w}_h(t)}{\partial t}, \varphi_h\right) + \tilde{\mathbf{a}}_h(\mathbf{w}_h(t), \varphi_h) + \bar{\mathbf{b}}_h(\mathbf{w}_h(t), \varphi_h) + \mathbf{J}_h^\sigma(\mathbf{w}_h(t), \varphi_h) = 0$   
 $\forall \varphi_h \in \mathbf{S}_{hp}, \forall t \in (0, T),$
- c)  $\mathbf{w}_h(0) = \mathbf{w}_h^0,$

kde  $\mathbf{w}_h^0$  je  $\mathbf{S}_{hp}$  aproximácia počiatočnej podmienky.

K tomu, aby sme mohli riešiť systém obyčajných diferenciálnych rovníc popísaných v definícii 2.1 implicitnou metódou, by sme v každom časovom kroku museli spočítať systém nelineárnych algebraických rovníc, a to je značne nevýhodné.

Preto používame metódu semi-implicitnú po tom, ako linearizujeme formy  $\tilde{\mathbf{a}}_h(\mathbf{w}, \boldsymbol{\varphi})$ ,  $\tilde{\mathbf{b}}_h(\mathbf{w}, \boldsymbol{\varphi})$ .

Definujeme formu  $\mathbf{a}_h : \mathcal{S}_{hp} \times \mathcal{S}_{hp} \times \mathcal{S}_{hp} \longrightarrow \mathbb{R}$  tak, že pôvodná forma je s novou konzistentná

$$\mathbf{a}_h(\mathbf{w}_h, \mathbf{w}_h, \boldsymbol{\varphi}_h) = \tilde{\mathbf{a}}_h(\mathbf{w}_h, \boldsymbol{\varphi}_h) \quad \forall \mathbf{w}_h, \boldsymbol{\varphi}_h \in \mathcal{S}_{hp}.$$

Podobne pre formu  $\tilde{\mathbf{b}}_h$  definujeme formu  $\mathbf{b}_h$  :

$$\mathbf{b}_h(\mathbf{w}_h, \mathbf{w}_h, \boldsymbol{\varphi}_h) = \tilde{\mathbf{b}}_h(\mathbf{w}_h, \boldsymbol{\varphi}_h) \quad \forall \mathbf{w}_h, \boldsymbol{\varphi}_h \in \mathcal{S}_{hp}.$$

Vzniknuté formy  $\mathbf{a}_h$ ,  $\mathbf{b}_h$  sú lineárne vzhľadom k druhej a tretej premennej. Celkový popis linearizácie je podrobnejšie popísaný v [5].

## 2.4 Semi-implicitná schéma riešenia

V semi-implicitnej schéme zachováme lineárne členy foriem  $\tilde{\mathbf{a}}_h(\mathbf{w}, \boldsymbol{\varphi})$  a  $\tilde{\mathbf{b}}_h(\mathbf{w}, \boldsymbol{\varphi})$  implicitné a nelineárne členy explicitné. K aproximácii vzhľadom k premennej času používame metódu spätných diferencií označovanú ako BDF. Vzhľadom k nelineárnym častiam problému používame extrapoláciu vyššieho stupňa, ktorá zároveň zachová linearitu problému. Celkovo tak metódu riešenia daného CFP skrátene nazveme BDF-DGFEM metódou.

Interval  $(0, T)$  rozdelíme na časové hladiny nasledovne:  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = T$  a  $\tau \equiv t_{k+1} - t_k$ , kde  $k = 0, 1, \dots, r - 1$ .

Označíme

$$\mathbf{c}_h(\bar{\mathbf{w}}_h, \mathbf{w}_h, \boldsymbol{\varphi}_h) \equiv \mathbf{a}_h(\bar{\mathbf{w}}_h, \mathbf{w}_h, \boldsymbol{\varphi}_h) + \mathbf{b}_h(\bar{\mathbf{w}}_h, \mathbf{w}_h, \boldsymbol{\varphi}_h) + \mathbf{J}_h^\sigma(\mathbf{w}_h, \boldsymbol{\varphi}_h), \quad \bar{\mathbf{w}}_h, \mathbf{w}_h, \boldsymbol{\varphi}_h \in \mathcal{S}_{hp} \quad (11)$$

a s pomocou (11) definujeme približné riešenie:

**Definícia 2.2** *Približné riešenie CFP je množina funkcií  $\mathbf{w}_h^k$ , kde  $k = 1, \dots, r$ , ak:*

- a)  $\mathbf{w}_h^{k+1} \in \mathcal{S}_{hp}$ ,
- b)  $\frac{1}{\tau_k} \left( \sum_{l=0}^n \alpha_l \mathbf{w}_h^{k+1-l}, \boldsymbol{\varphi}_h \right) + \mathbf{c}_h \left( \sum_{l=1}^n \beta_l \mathbf{w}_h^{k+1-l}, \mathbf{w}_h^{k+1}, \boldsymbol{\varphi}_h \right) = 0$   
 $\forall \boldsymbol{\varphi}_h \in \mathcal{S}_{hp}, k = n - 1, \dots, r - 1,$
- c)  $\mathbf{w}_h^0$  je  $\mathcal{S}_{hp}$  aproximácia  $\mathbf{w}^0$ ,
- d)  $\mathbf{w}_h^l \in \mathcal{S}_{hp}, l = 1, \dots, n - 1$  sú dané vhodnou jednokrokovou metódou,

kde  $n \geq 1$  je stupeň BDF schémy, koeficienty  $\alpha_l, l = 0, \dots, n$  a  $\beta_l, l = 1, \dots, n$  závisia na časovom kroku  $\tau_{k-l}, l = 0, \dots, n$ .

Systém a) až d) v definícii 2.2 predstavuje systém lineárnych algebraických rovníc pre  $k = n - 1, \dots, r - 1$ , a ten je ďalej riešiteľný vhodným algebraickým riešičom.

### 3 Generovanie hybridných sietí

V tejto kapitole predstavíme algoritmus generovania hybridných sietí, nasledujúca bude obsahovať popis programov, ktoré sú na generovanie potrebné.

#### 3.1 Výpočetná oblasť

Výpočty v kapitole 5 boli vytvorené pre profil krídla NACA0012, pre ktorý sú (v súbore profiles) popísané 2 krivé časti hranice výpočetnej oblasti, ako je vidieť na obrázku 2.



Obrázok 2: Ilustračný obrázok krivých hraníc výpočetnej oblasti profilu NACA0012

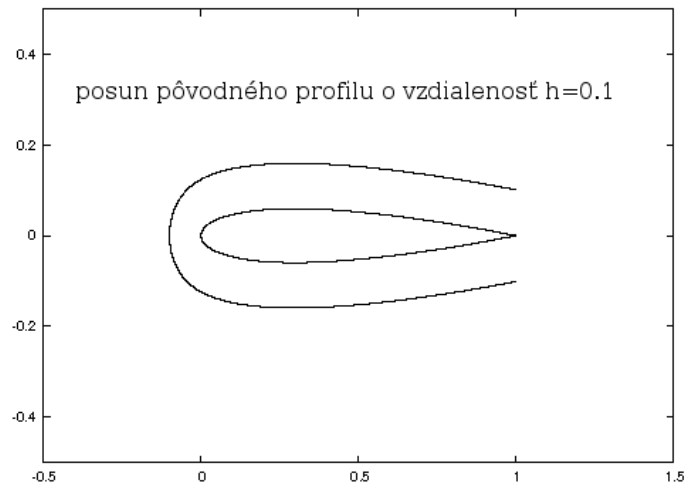
Pri generovaní sietí trojuholníkových sa oblasť na obrázku 2 nemení, ale pre hybridné siete je potrebné ju upraviť.

To v našom prípade znamená, že pôvodná výpočetná oblasť  $\Omega$  sa rozdelí na:

- pás o šírke  $h$  okolo profilu krídla s obdĺžnikovým pokračovaním za krídlom (tzv. náplav), v ktorom budeme ďalej vytvárať štvoruholníkové elementy
- oblasť  $\Omega^*$ , ktorá vznikne z pôvodnej oblasti  $\Omega$  "vystrihnutím" pásu štvoruholníkov, a v ktorej sa budú generovať elementy trojuholníkové.

##### 3.1.1 Pás štvoruholníkov

Na začiatku úlohy dostaneme profil krídla zadaný bod po bode, a ten je potrebné posunúť a vytvoriť tak okolo neho pás, ako to vidíme na obrázku 3. Za krídlom spojíme koncové body posunutého profilu úsečkami s hranicou výpočetnej oblasti  $\Omega_{out}$  (viď sekcia 2.1). Takto máme pripravenú novú výpočetnú oblasť, potrebnú pre generovanie hybridných sietí.



Obrázok 3: Profil a jeho posunutie

### 3.2 Algoritmus generovania

V novej výpočetnej oblasti bude postup nasledovný:

1. vytvorenie trojuholníkovej siete v oblasti  $\Omega^*$  a získanie uzlov na hranici pásu posunutého profilu  $\partial\Omega^* \setminus \partial\Omega$ ,
2. použitie získaných uzlov na vygenerovanie štvoruholníkov v páse  $\Omega \setminus \Omega^*$ ,
3. výpočet na novovzniknutej hybridnej sieti.

Tento postup opakujeme až kým nevznikne dostatočne presné riešenie na sieti niekoľkokrát upravenej procesom 3.2.

### 3.3 Generovanie štvoruholníkov

Uzly, ktoré získame pri vygenerovaní trojuholníkovej siete na posunutom profile, budú vrcholmi vznikajúcich štvoruholníkových elementov v páse okolo profilu.

Najskôr získané uzly premietneme späť na pôvodný profil, kde vzniknú nové uzly ako priesečníky krivky pôvodného profilu a pomyselných vektorov vznikajúcich pri projekcii uzlov na profil. Podľa potreby ďalšieho zjemňovania vytvárame na pomyselných vektoroch ďalšie uzly tak, aby boli vždy v rovnakej vzdialenosti od profilu (čiže vytvoríme tak akési hladiny uzlov, z ktorých budeme v ďalšom kroku vytvárať štvoruholníky).

Následne formujeme štvoruholníky (číslujeme ich po jednotlivých hladinách).

Vrstvy vznikajúcich štvoruholníkov sa smerom k pôvodnému profilu môžu zužovať.

Podobne ako okolo krivého profilu vytvoríme štvoruholníky aj na náplave, postupujeme v dvoch fázach, zvlášť vytvoríme hornú polovicu pásu a zvlášť dolnú.

Tu môže nastať komplikácia: rôzny počet vygenerovaných uzlov na hornej a dolnej hranici náplavu. Vtedy nie je možné na náplave generovať iba štvoruholníkové elementy, ale je nutné vygenerovať aj niekoľko trojuholníkových. To sa dá zabezpečiť rôznymi spôsobmi.

Smerom od profilu krídla so zväčšujúcou sa vzdialenosťou vytvárať štvoruholníky až kým nenarazíme na predposledný uzol náplavu (a to na hranici náplavu, ktorá obsahuje menej uzlov), a tento uzol spájať do trojuholníkov so všetkými zvyšnými uzlami z protiaľhlej hranice náplavu. Toto má v niektorých prípadoch za následok nie celkom peknú geometriu vzniknutých elementov (t.z. elementy sú príliš kosé).

Iným možným postupom by bolo prvú vrstvu štvoruholníkov (na tej strane náplavu, ktorá obsahuje menej uzlov) vhodne rozdeliť trojuholníkovými elementami tak, aby na nasledujúcej vrstve vznikol rovnaký počet uzlov ako na protiaľhlej hranici náplavu. Tento a iné možné spôsoby prenechávame na ďalšie skúmanie a testovanie.

### 3.4 Výpočet

Po vytvorení štvoruholníkovej siete zároveň dostávame kompletnú hybridnú sieť vhodnú pre výpočet.

Je iba nutné zabezpečiť vhodný tvar vstupných dát siete pre program (Adgfem), ktorý je numerickým riešičom systému rovníc pre stlačiteľné prúdenie viskózneho (príp. neviskózneho) plynu. Ďalšie informácie potrebné ku konkrétnemu priebehu výpočtu čitateľ nájde v kapitole 4.

## 4 Popis programov na generovanie hybridných sietí

V úvodnej sekcii 4.1 uvedieme, aký softvér bol použitý v práci na generovanie sietí a výpočty na sieťach a v nasledujúcich dvoch sekciách najskôr priblížime postup generovania sietí trojuholníkových a na základe toho opíšeme zmeny pri použití sietí hybridných.

### 4.1 Siete a riešenie na nich

Ako je spomenuté v Úvode, okolo zadaného profilu krídla je možné generovať trojuholníkové, prípadne štvoruholníkové siete.

Sieť je možné adaptívne upravovať (softvér použitý v tejto práci na generovanie a adaptívnu úpravu trojuholníkových sietí – *angener3.1* – bol vytvorený na Katedre numerickej matematiky MFF UK v Prahe). Podrobný popis procesu adaptívneho zjemňovania siete pomocou *angeneru* je možné nájsť v jeho manuále na <http://www.karlin.mff.cuni.cz/dolejsi/angen/angen3.1.htm>.

Po vytvorení siete nasleduje ďalší krok – výpočet riešenia na sieti. Prebieha v programe *Adgfem*, ktorý je podobne ako *angener3.1* dielom Katedry numerickej matematiky MFF UK. *Adgfem* používa na riešenie metódu DGFEM-BDF, podrobnejšie popísanú v kapitole 2.

V sekcii 4.2 – *Algoritmus generovania trojuholníkových sietí* – je stručne vysvetlený postup vytvárania sietí bez štvoruholníkov a je pripojená informatívna tabuľka obsahujúca vstupné a výstupné súbory programu *angener3.1* a *Adgfem*. Štruktúru vstupných súborov môžeme nájsť buď v manuále *angeneru* alebo v appendixe na konci práce.

Pre porovnanie algoritmu na trojuholníkových sieťach a sieťach hybridných nájdete v sekcii 4.3 – *Hybridné siete* – tabuľky so vstupnými a výstupnými súbormi a tiež štruktúru súborov, ktoré sa odlišujú od súborov používaných na sieťach trojuholníkových.

### 4.2 Algoritmus generovania trojuholníkových sietí

Pre názornosť predstavíme doterajší algoritmus generovania trojuholníkových sietí pomocou programu *angener3.1* a výpočtu systému rovníc na týchto sieťach pomocou programu *Adgfem*.

Algoritmus spočíva vo vytvorení siete a následnom výpočte na danej sieti. Tento proces sa opakuje na základe už spočítaných výsledkov (ktoré prikkladáme ako súbor *results* na vstupe do *angeneru* s výnimkou prvého generovania siete *angenerom*) až kým riešenie dostatočne neskonverguje.

Program *Adgfem* v priebehu výpočtu vygeneruje ďalej súbory *tri*, *sol*, ktoré je možné použiť pre vizualizáciu výsledných dát. Vizualizovať je možné izokrivky Machovho čísla (2D), hodnoty rýchlosti, energie, tlaku a hustoty (3D).

Celý proces je zhrnutý v tabuľke 1 a bližší popis všetkých súborov môžeme nájsť v appendixe práce.

Stručný popis ďalších fáz algoritmu vidíme v tabuľke 2.



Tabuľka 1: Štruktúra algoritmu pre trojuholníky

1. fáza			
INPUT:	profiles triang paramet	↘ → ↗	<b>angener3.1</b>
OUTPUT:	triangx	(→*mesh.grid)	
INPUT:	mesh.grid	→	<b>Adgfem</b>
OUTPUT:	tri, sol results		

Tabuľka 2:

každá ďalšia fáza			
INPUT:	results profiles triang paramet	↘ ↘ → ↗	<b>angener3.1</b>
OUTPUT:	triangx	(→*mesh.grid)	
INPUT:	mesh.grid	→	<b>Adgfem</b>
OUTPUT:	tri, sol results		

## 4.3 Hybridné siete

### 4.3.1 Voľba parametrov

V predchádzajúcej sekcii sme používali celý rad parametrov, ktoré vstupovali do procesu vytvárania trojuholníkových sietí. Pri vytváraní sietí hybridných budeme okolo krivého profilu generovať vrstvu štvoruholníkov, ktorú v ďalších fázach budeme deliť na viac užších vrstiev. Dôležitou súčasťou procesu generovania hybridných sietí tak bude voľba parametrov súvisiacich s vrstvou štvoruholníkov:

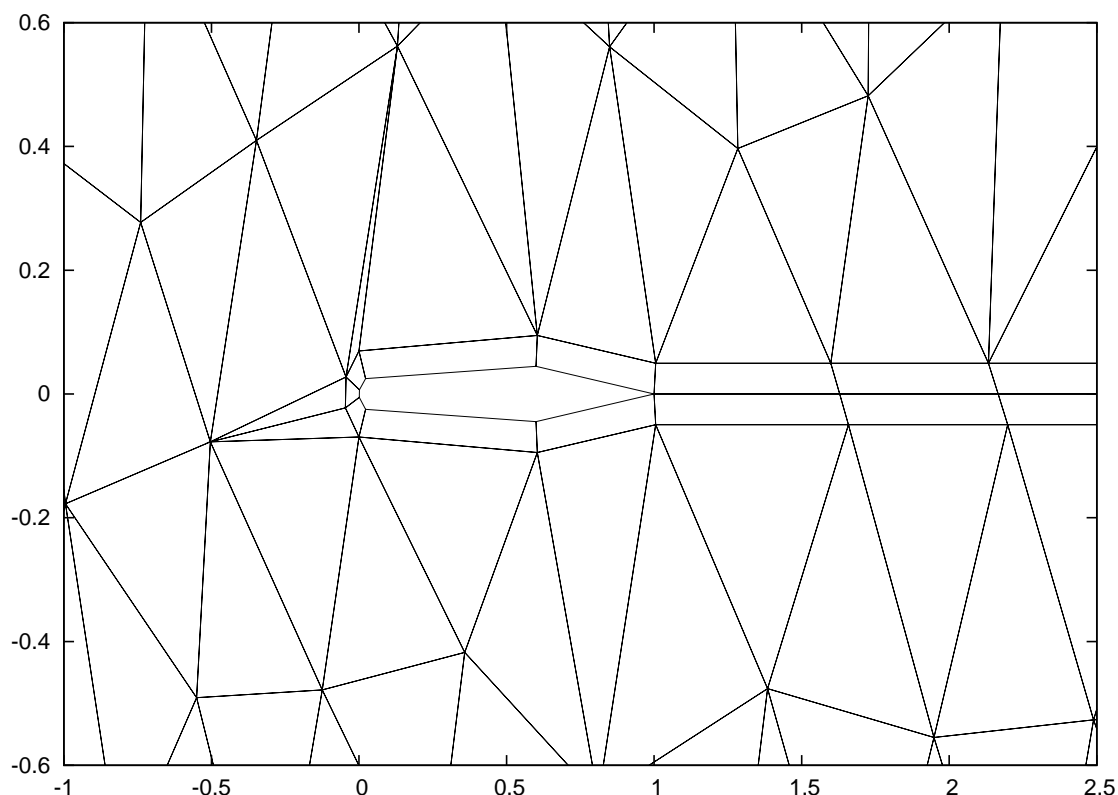
$h$  ... šírka štvoruholníkovej vrstvy (t.z.vzdialenosť trojuholníkov od profilu)

$q$  ... počet vrstiev štvoruholníkov.

Parametrom, ktorý musíme zohľadniť pri vytváraní prvého súboru *triang*, je aj uhol náplavu prúdenia vzduchu  $\alpha$ .

### 4.3.2 1. fáza

Pri vytváraní trojuholníkových sietí bolo na začiatku nutné definovať súbory *paramet*, *triang* a *profiles*. Inak tomu nebude ani pri vytváraní sietí hybridných, predtým než sa spustí proces generovania siete, je potrebné upraviť súbor *profiles* tak, aby okrem doterajších krivých hraníc výpočetnej oblasti obsahoval aj posunutý profil o zadanú vzdialenosť  $h$ .



Obrázok 4: Hybridná sieť s 1 štvoruholníkovou vrstvou okolo profilu–detail,  $h = 0.05$ ,  $q = 2$ , uhol náplavu  $\alpha = 0$

### Posunutie profilu

U profilu krídla NACA0012 bola na posunutie profilu použitá projekcia bodov profilu v smere vonkajšej normály k profilu. Body, ktoré sme takto získali, boli preložené splinom (program *spline* je napríklad súčasťou balíka *angener3.1*), aby vzniknutá krivka bola dostatočne hladká pre ďalšie výpočty. Ukážku pôvodného profilu a jeho posunutia môžeme nájsť v kapitole 3.

### Súbor *profiles*

Vytvorený posunutý profil použijeme k úprave súboru *profiles* pre hybridné siete tak, že doplníme pôvodný súbor o body z posunutej krivej časti hranice (pričom zostane zachovaná štruktúra súboru *profiles*, počet krivých častí *nbp* sa zvýši o 1). Pre správnu kooperáciu hybridných sietí s programom *angener3.1* body z posunutej hranice vložíme na začiatok súboru *profiles* tak, aby nasledujúci za sebou so zvyšujúcim sa indexom popisovali posunutú krivku v takej orientácii, aby výpočetná oblasť bola vľavo od popísanej krivky.

### Súbor *paramet*

Súbor *paramet* sa štruktúrou nemení. Je vhodné iba pripomenúť, že na začiatku (vo fáze 1), sa vytvára sieť jednotková (parameter *ityp* sa nastaví na 0), v ďalších fázach sa sieť generuje na základe predošlých výsledkov z *Adgfemu* (parameter *ityp*  $\neq 0$ ).

### Súbor *triang*

Štruktúra súboru *triang* neprechádza zmenami, treba však zohľadniť dva dôležité fakty:

1. prvú trianguláciu je nutné napísať s použitím hodnôt z posunutej krivej časti hranice profilu (z nového *profiles*),
2. za profilom vzniká úplav, ktorý zväčší počet hraničných komponent, pričom ako poslednú komponentu nadefinujeme pôvodný profil krídla.

Súbory *profiles*, *triang* a *paramet* putujú na vstupe do *angeneru*, ktorý ich spracuje a vygeneruje unitárnu sieť a súbor *triangx*. *Triangx* slúži pre vytvorenie súboru *mesh.grid* pomocou novovzniknutého programu *Gridgen*.

#### 4.3.3 Gridgen

Na tomto mieste nastáva hlavná zmena pôvodného algoritmu generovania siete, a tou je program *Gridgen*, ktorý vytvára vrstvy štvoruholníkov okolo profilu a na úplave. Ako jeho vstupné parametre je potrebné špecifikovať už zmienenu šírku pásu štvoruholníkových vrstiev  $h$  a počet vrstiev, ktorý je daný parametrom  $q$ , kde  $q$  je číslo o 1 väčšie než je počet vznikajúcich vrstiev.

*Gridgen* potrebuje na vstupe súbory *profiles* a *triangx*. Z prvého z nich získava informácie o krivých častiach pôvodného a posunutého profilu. Zo súboru *triangx* program *Gridgen* preberie body (uzly trojuholníkov) vygenerované *angenerom* na krivke posunutého profilu a tieto body premietne na profil pôvodný. Zároveň podľa nastavenia parametru  $q$  vytvorí  $q-1$  vrstiev, ktoré sa smerom od posunutého profilu k pôvodnému zhutňujú tak, že šírka  $k$ -tej vrstvy pásu bude:

$$h_k = k \times \frac{h}{\sum_{i=1}^{q-1} i}, \quad (12)$$

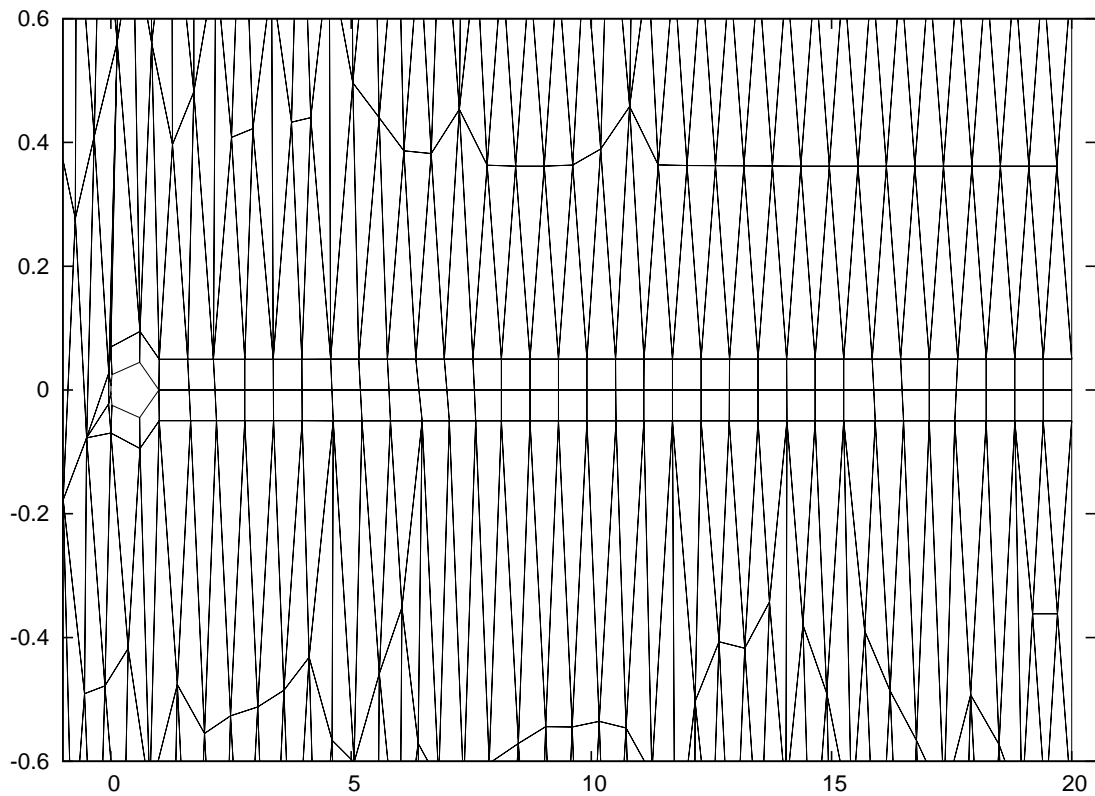
pričom platí, že

$$\sum_{k=1}^{q-1} h_k = h, \quad (13)$$

čiže súčet šírok všetkých vrstiev dáva šírku pásu.

Na úplave za profilom môže nastať, že *angener* vygeneruje na hornej a dolnej hranici pásu štvoruholníkov rôzny počet uzlov. To má za následok nemožnosť vytvorenia iba štvoruholníkových elementov na úplave. Túto situáciu *Gridgen* rieši tak, že so zväčšujúcou sa vzdialenosťou od profilu spája elementy do štvoruholníkov s výnimkou predposledného uzlu jednej z častí (hornej v prípade väčšieho počtu dolných uzlov, dolnej časti v opačnom prípade). S týmto uzlom spojí viac než jeden uzol z protiahlej hranice a vytvorí tak na ( $k$  danému uzlu) najbližšej vrstve trojuholníky.

Na obrázku 5 vidieť rovnaký počet uzlov po oboch stranách úplavu a na obrázku 6 je znázornená situácia popísaná v tomto odseku.



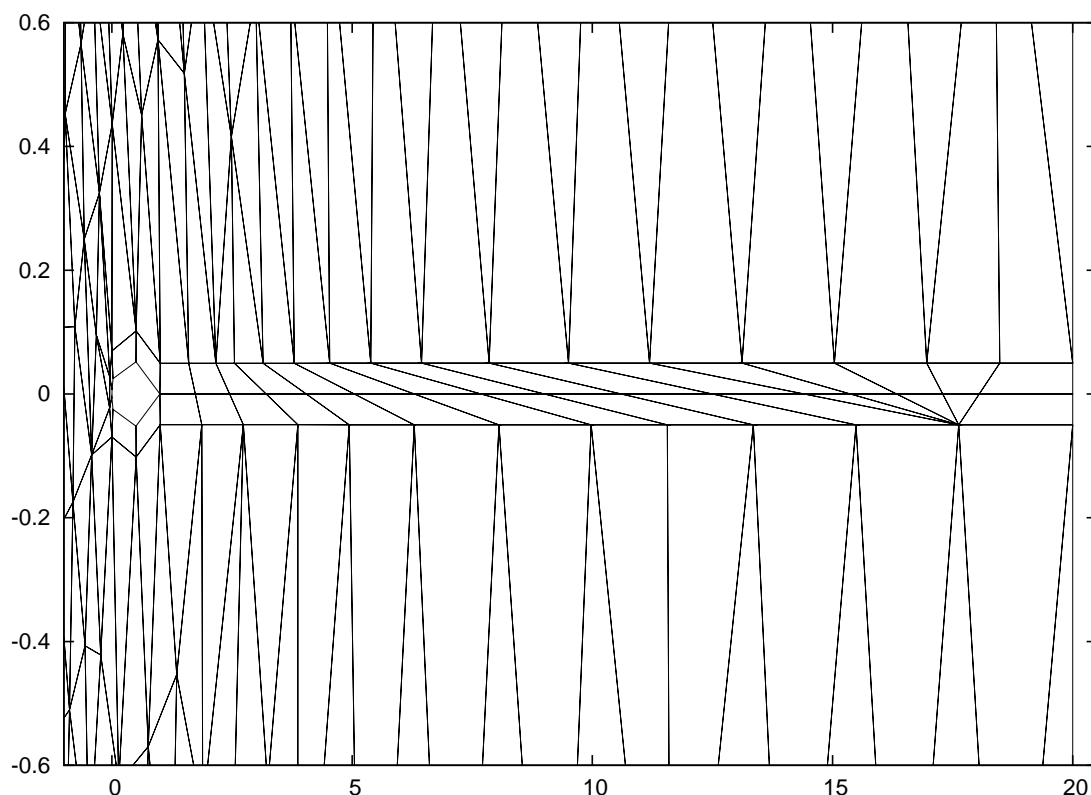
Obrázok 5: Úplav s rovnakým počtom uzlov na hornej a dolnej hranici, uhol náplavu  $\alpha = 0$

### Súbor *mesh.grid*

Súbor *mesh.grid* vygenerovaný *Gridgenom* má nasledujúci tvar:

Tvar súboru *mesh.grid*:

<i>newnpoin</i>	<i>newnelem</i>	<i>newnbelm</i>	<i>newnbc</i>			
0.	0.	0	0	0.	0	0
<i>x(1)</i>	<i>y(1)</i>					
⋮	⋮	⋮				
<i>x(newnpoin)</i>	<i>y(newnpoin)</i>					
3	<i>lnd(1,1)</i>	<i>lnd(1,2)</i>	<i>lnd(1,3)</i>			
⋮	⋮	⋮	⋮			
3	<i>lnd(nelem,1)</i>	<i>lnd(nelem,2)</i>	<i>lnd(nelem,3)</i>			
4	<i>lnd(1,1)</i>	<i>lnd(1,2)</i>	<i>lnd(1,3)</i>	<i>lnd(1,4)</i>		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		
4	<i>lnd(num,1)</i>	<i>lnd(num,2)</i>	<i>lnd(num,3)</i>	<i>lnd(num,4)</i>		
<i>lbn(1,1)</i>	<i>lbn(1,2)</i>	<i>ibc(1,3)</i>				
⋮	⋮	⋮				
<i>lbn(newnbelm,1)</i>	<i>lbn(newnbelm,2)</i>	<i>ibc(newnbelm)</i>				



Obrázok 6: Úplav s vyšším počtom uzlov na hornej hranici, uhol náplavu  $\alpha = 0$

kde:

<i>newnpoin</i>	... počet vrcholov elementov siete
<i>newnelem</i>	... počet elementov siete (trojuholníkov alebo štvoruholníkov)
<i>newnbelm</i>	... počet hraničných segmentov oblasti
<i>newnbc</i>	... počet komponent hranice oblasti
<i>num</i>	... počet štvoruholníkov, $num = newnelem - nelelem$
<i>lnd(i,j)</i>	... súradnice i-tého trojuholníka, kde $j=1,2,3$ alebo štvoruholníka, kde $j=1,2,3,4$
<i>lbn(i,j)</i>	... súradnice počiatočného a koncového uzla hraničnej komponenty
<i>ibc</i>	... index hraničnej komponenty označeného hraničného segmentu.

Po vytvorení súboru *mesh.grid* je postup rovnaký ako pri trojuholníkových sieťach, Adgfem spočíta výsledky na hybridnej sieti, vytvorí súbor *results*, ktorý spolu so súborami *paramet*, *profiles* a novým *triangom* (v prvom kole vznikol ako *triangx*) vložíme do *angeneru* a proces sa opakuje.

V nasledujúcich tabuľkách vidíme prehľadnejšie, ktoré súbory vstupujú a vystupujú do a z jednotlivých fáz procesu generovania sietí a výpočtu na sieťach.

Tabuľka 3: Štruktúra algoritmu pre hybridné siete

1. fáza	
INPUT:	profil → <b>projekcia, spline</b>
OUTPUT:	profiles*
INPUT:	profiles ↘ triang → <b>angener3.1</b> paramet ↗
OUTPUT:	triangx
INPUT:	profiles ↘ triangx → <b>Gridgen</b>
OUTPUT:	mesh.grid
INPUT:	mesh.grid → <b>Adgfem</b>
OUTPUT:	tri,sol results

Tabuľka 4:

každá ďalšia fáza	
INPUT:	results ↘ profiles ↘ triang → <b>angener3.1</b> paramet ↗
OUTPUT:	triangx
INPUT:	profiles ↘ triangx → <b>Gridgen</b>
OUTPUT:	mesh.grid
INPUT:	mesh.grid → <b>Adgfem</b>
OUTPUT:	tri, sol results

V tabuľke 3 vidíme vytvorenie posunutého profilu pomocou programov *projekcia* a *spline*, vstupným súborom pre projekciu je ľubovoľný súbor obsahujúci profil krídla, ktorý máme posunúť. Výstupom je súbor *profiles*<sup>1</sup>, ktorý predtým, ako ho použijeme pre *angener* musíme skontrolovať, prípadne "orezať" krajné body vzniknuté navyše pri prechode splinom.

<sup>1</sup>súbor *profiles* je v tabuľke 3 označený hviezdíčkou, kvôli zdôrazneniu, že ďalej bude používaný jeho upravený tvar

### Balíček *Gridgen*

Cieľom tejto práce je aplikácia poznatkov o štvoruholníkových a trojuholníkových sieťach a ich kombinácii do sietí hybridných. K tomu bol vytvorený nasledujúci softvér:

*Gridgen* ...obsahuje program *Gridgen.f* na generovanie vrstvy štvoruholníkov okolo profilu NACA,  
...obsahuje tiež testovacie súbory: *parameters*, *profiles* a *triangx*,  
*projekcia.f.*.. posúva profil o zadanú vzdialenosť.

Súčasťou balíčku je ďalej:

*angener3.1* ...balíček programov na generovanie a adaptáciu trojuh. sietí,  
*Adgfem* ... numerický riešič systému rovníc pre stlačiteľné prúdenie na sieťach,  
*gridtriangle.f.*.. prispôsobuje súbor *triangx* (obsahujúci len trojuholníky) do tvaru vhodného pre výpočet *Adgfemom*,  
*readme* ... inštrukcie k používaniu vyššie vymenovaných programov.

*Angener3.1* obsahuje program *spline*, použitie ktorého je opísané v sekcii 4.3.2 v odseku *Posunutie profilu*. Balíček programov je možné nájsť ako samostatnú prílohu tejto práce na CD.

## 5 Výsledky a vizualizácia

### 5.1 Stlačiteľné prúdenie bez viskozity

Stlačiteľné prúdenie je opísané systémom rovníc (1)–(6) z kapitoly 2.

V úlohe testovanej v sekcii 5.1 neuvažujeme viskozitu (čiže vnútorné trenie medzi časticami tekutiny), a tak Reynoldsovo číslo je zanedbateľne malé (resp. rovné nule). Pri prúdení okolo profilu NACA za profilom nezostáva úplav a prúdenie je bezvírové. Uhol nábehu je  $2^\circ$  a hodnota Machovho čísla 0.5. Machovo číslo počítame zo vzťahu

$$M = \frac{|v|}{c},$$

kde  $c$  je lokálna rýchlosť zvuku a platí:

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}.$$

#### Hybridné siete

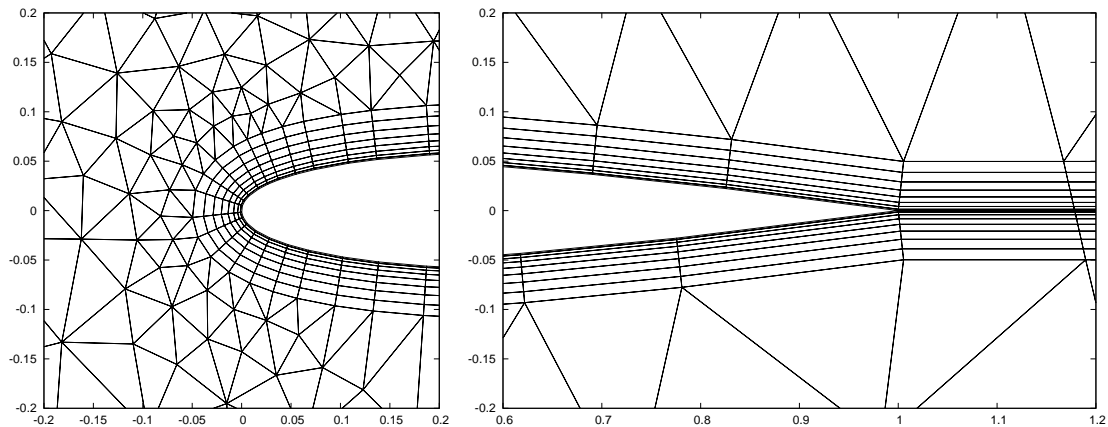
Siete na obrázkoch 7, 9 a 11 boli vytvorené pomocou programov angener3.1 a Gridgen.

Angener3.1 v niekoľkých iteráciách adaptívne upraví počiatočnú sieť na základe spočítaných výsledkov úlohy prúdenia stlačiteľného neviskózneho plynu, ktoré poskytuje program Adgfm. Zároveň od prvej iterácie v programe Gridgen zvyšujeme (upravujeme) počet štvoruholníkových vrstiev okolo skúmaného profilu. Toto robíme na základe toho, ako sú angenerom vygenerované uzly na krivke posunutého profilu. Všeobecne platí, že čím jemnejšiu sieť angener vygeneruje, tým viac vrstiev štvoruholníkov je možné zvoliť, zároveň však nie je potrebné voliť príliš veľký počet, pri ktorom zmena vo výsledkoch nie je až taká výrazná. V konkrétnej úlohe sme postupne dospeli k počtu 7-8.

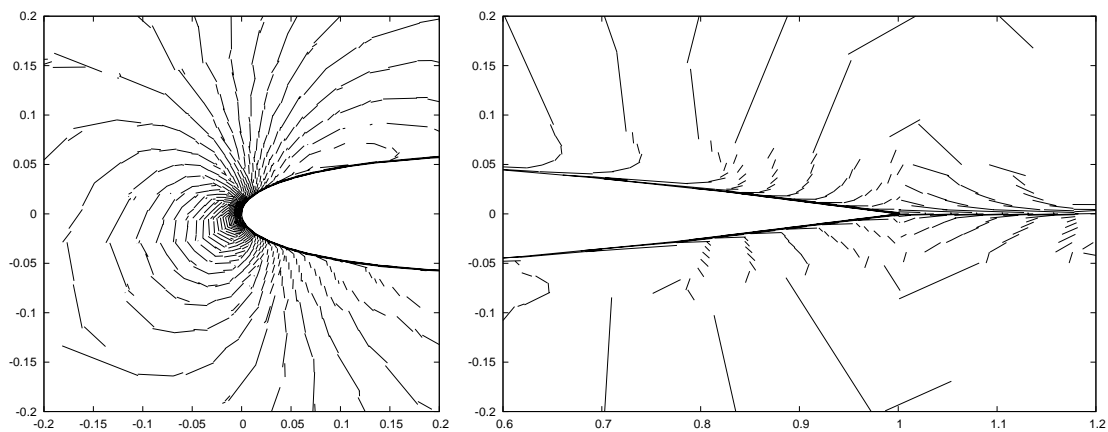
$P_1$  aproximácia nedáva tak dobré výsledky ako aproximácia vyššieho stupňa. Izokrivky sa v blízkosti profilu stáčajú smerom k profilu, čo je spôsobené chybou použitej numerickej schémy. Lepšie výsledky sú dosiahnuté pri sieťach s vyšším počtom elementov, ako je ukázané na obrázkoch 9 a 10.



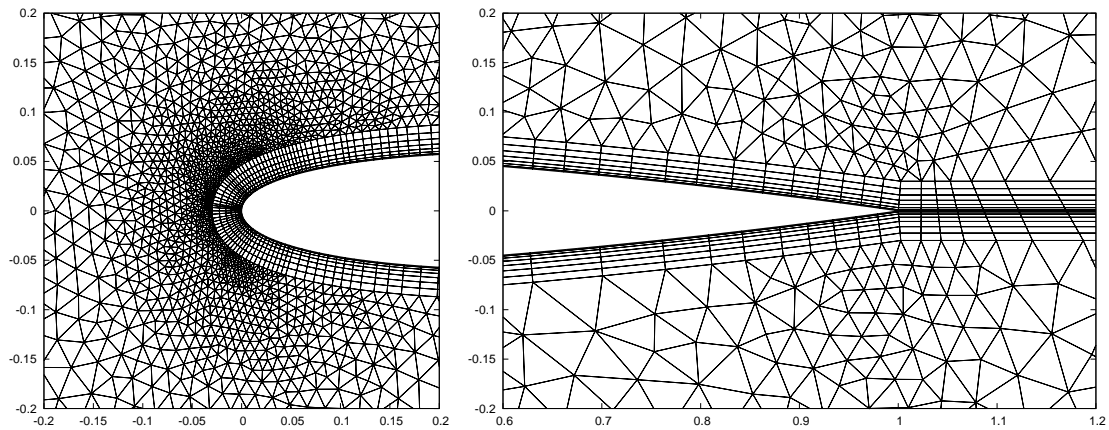
Obrázok 7 je útržkami hybridnej siete zloženej z 1114 elementov (trojuholníkov a štvoruholníkov).



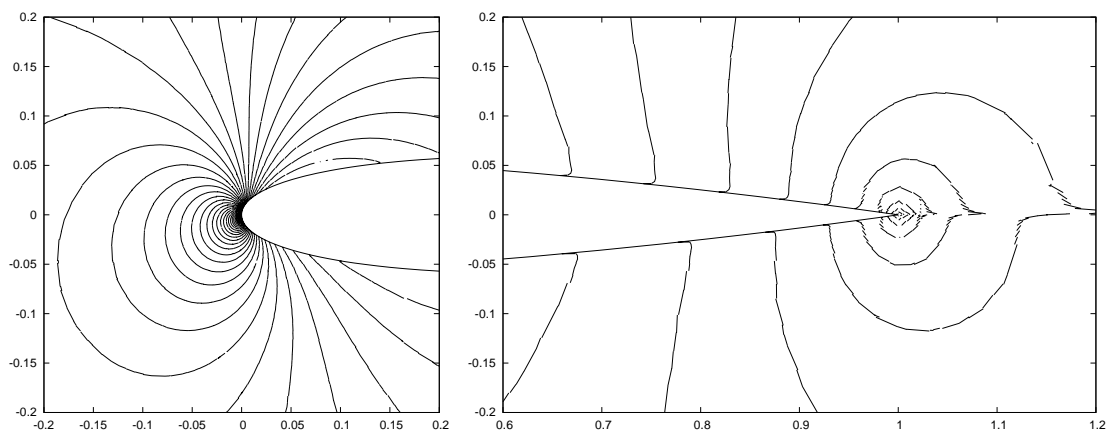
Obrázok 7: Detail hybridnej siete okolo čelnej a zadnej časti profilu NACA0012, šírka štvoruholníkového pásu  $h = 0.05$ , uhol náplavu  $\alpha = 2^\circ$ , počet štvoruholníkových vrstiev 7, počet elementov siete 1114



Obrázok 8: Izokrivky Machovho čísla, detail čelnej a zadnej časti profilu NACA, spočítané  $P_1$  aproximáciou

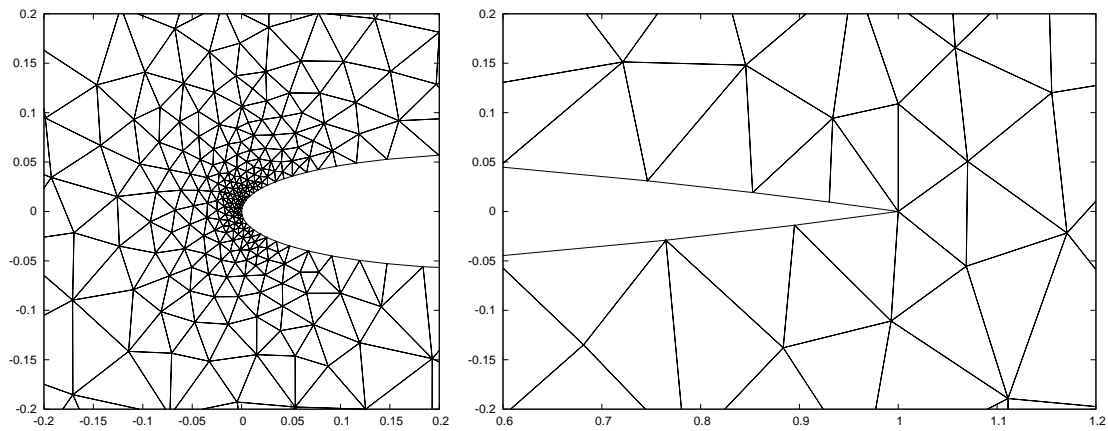


Obrázok 9: Detail hybridnej siete okolo čelnej a zadnej časti profilu NACA0012, šírka štvoruholníkového pásu  $h = 0.03$ , uhol náplavu  $\alpha = 2^\circ$ , počet štvoruholníkových vrstiev 8, počet elementov siete 9006

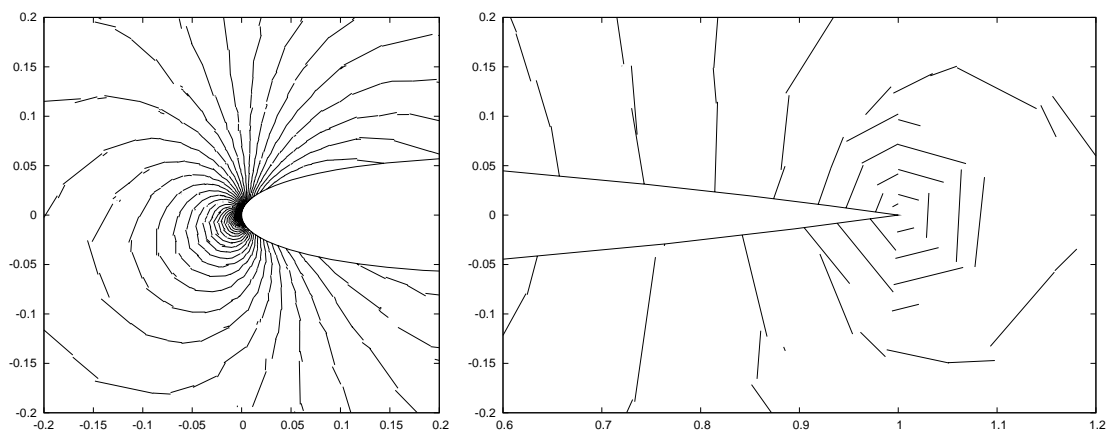


Obrázok 10: Izokrivky Machovho čísla, detail čelnej a zadnej časti profilu NACA, spočítané  $P_1$  aproximáciou

### Trojuholníková sieť



Obrázok 11: Detail trojuholníkovej siete okolo čelnej a zadnej časti profilu NACA0012, počet elementov siete 1116



Obrázok 12: Izokrivky Machovho čísla, detail čelnej a zadnej časti profilu NACA0012, spočítané  $P_1$  aproximáciou na trojuholníkovej sieti

V úlohe prúdenia stlačiteľného neviskózneho plynu nie je na dosiahnutých výsledkoch vidieť výrazný pokrok. Trochu lepšia situácia nastáva v ďalšej sekcii pre prúdenie stlačiteľného viskózneho plynu.

## 5.2 Stlačiteľné viskózne prúdenie

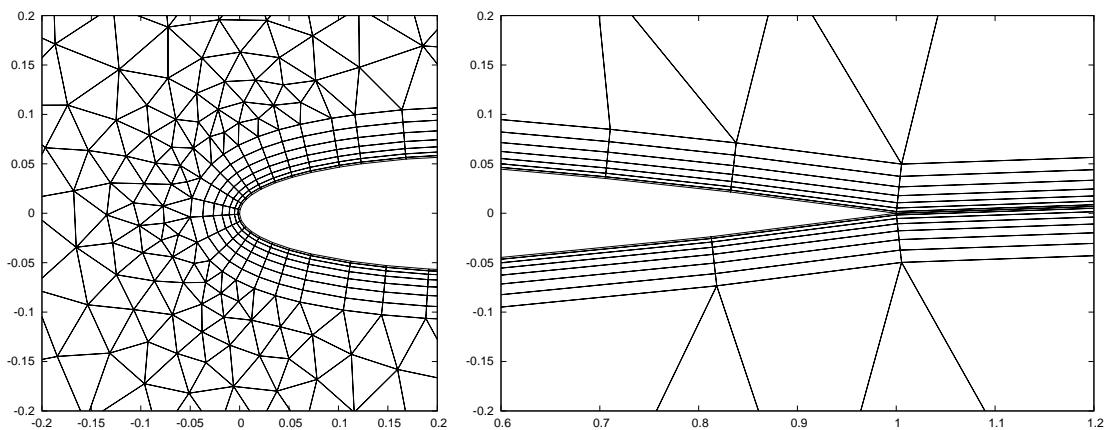
Stlačiteľné viskózne prúdenie sa narozdiel od neviskózneho prúdenia vyznačuje vnútorným trením.

V nasledujúcej úlohe je hodnota Reynoldsovho čísla zvolená ako 5000, čo predstavuje hornú hranicu prúdenia, ktoré nie je turbulentné.

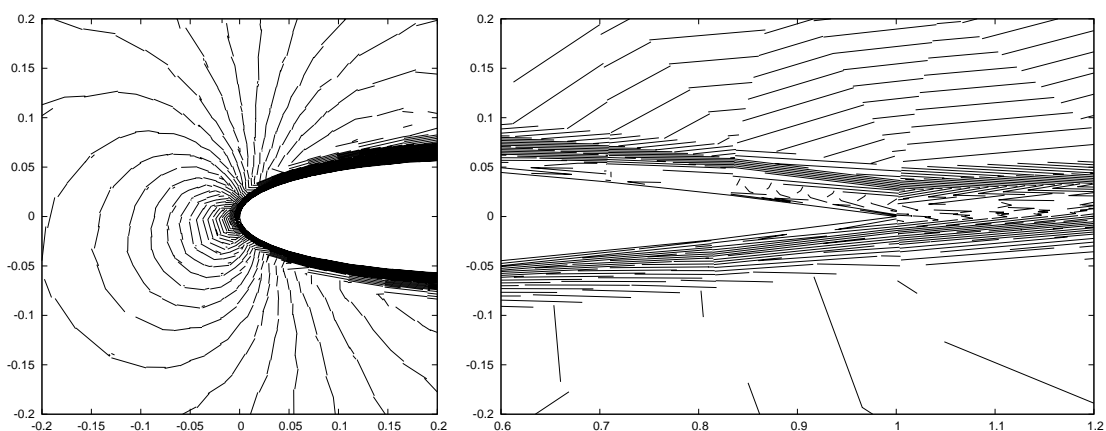
Uhol nábehu bol znovu zvolený  $2^\circ$  a Machovo číslo 0.5.

Testovanie úlohy pre prúdenie viskózneho plynu prebiehalo podstatne dlhšie než tomu bolo u neviskózneho plynu. Zároveň boli dosiahnuté lepšie výsledky.

### Hybridné siete



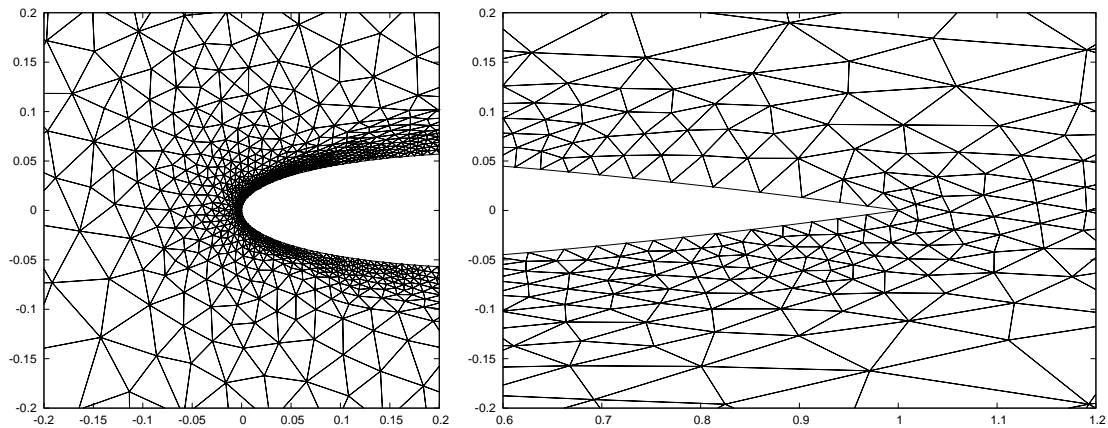
Obrázok 13: Detail hybridnej siete okolo čelnej a zadnej časti profilu, šírka štvoruholníkového pásu  $h = 0.05$ , uhol náplavu  $\alpha = 2$ , počet štvoruholníkových vrstiev 6, počet elementov siete 1243



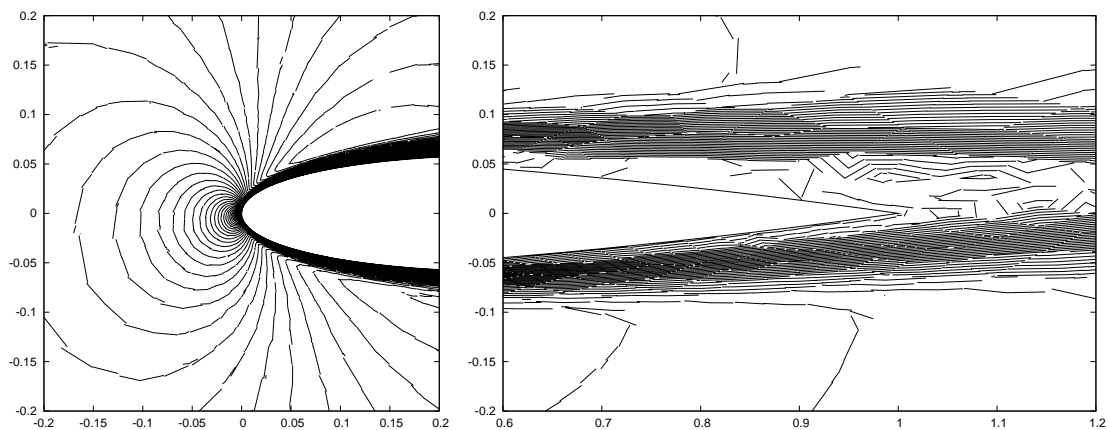
Obrázok 14: Izokrivky Machovho čísla, detail čelnej a zadnej časti profilu NACA0012, spočítané  $P_1$  aproximáciou

Rozdiel medzi prvou dvojicou obrázkov 13, 14 (výsledky spočítané na hybridnej sieti) a druhou dvojicou 15, 16 (siete trojuholníkové) vidieť najmä v oblasti medznej vrstvy. Dôležité je tiež spomenúť, že trojuholníková sieť je takmer 3krát jemnejšia (počtom elementov) oproti sieti hybridnej. Napriek tomu sú dosiahnuté výsledky lepšie na sieti hybridnej.

### Trojuholníkové siete

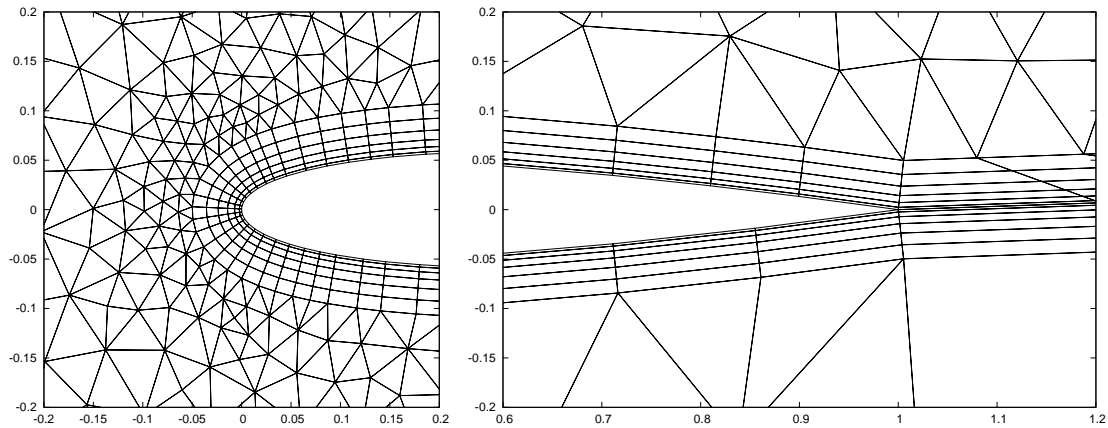


Obrázok 15: Detail trojuholníkovej siete okolo čelnej a zadnej časti profilu, počet elementov siete 3419

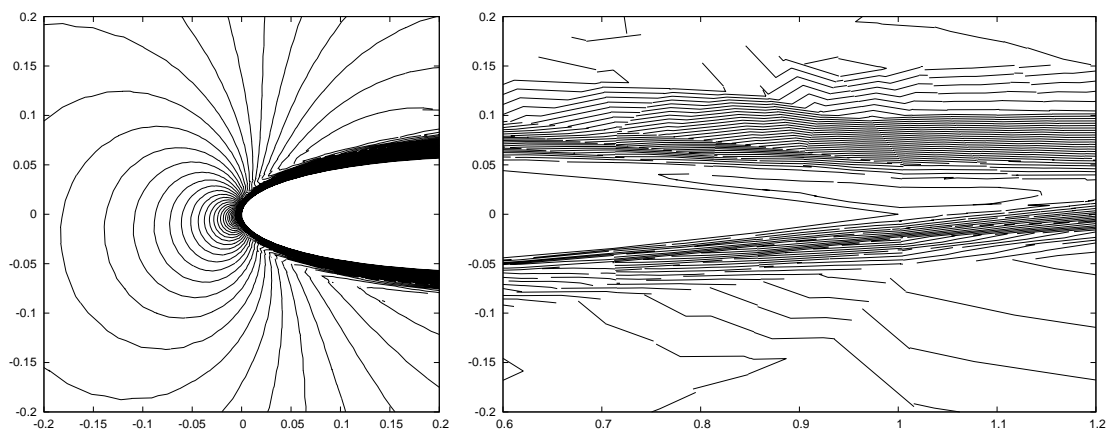


Obrázok 16: Izokrivky Machovho čísla, detail čelnej a zadnej časti profilu NACA0012, spočítané  $P_1$  aproximáciou na trojuholníkovej sieti

Pre zaujímavosť je priložený obrázok riešenia na hybridných sieťach s aproximáciou  $P_2$ :

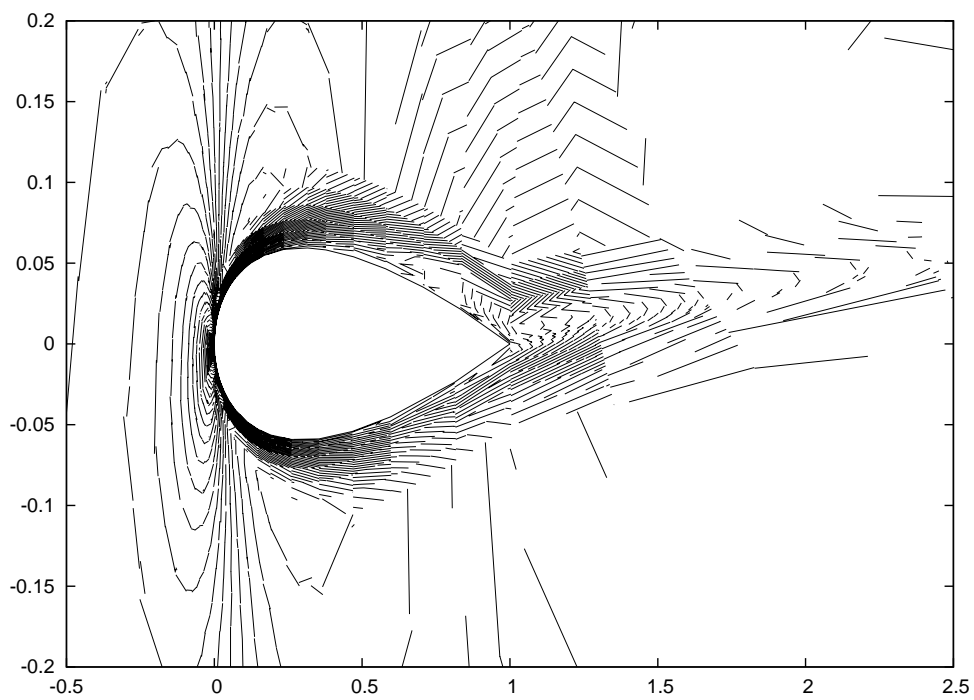
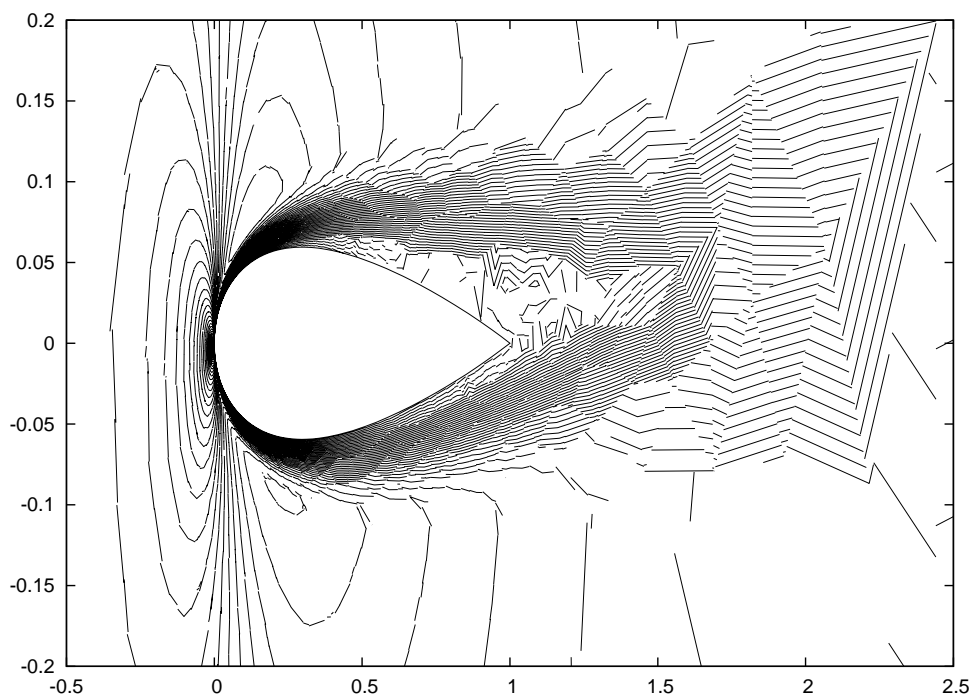


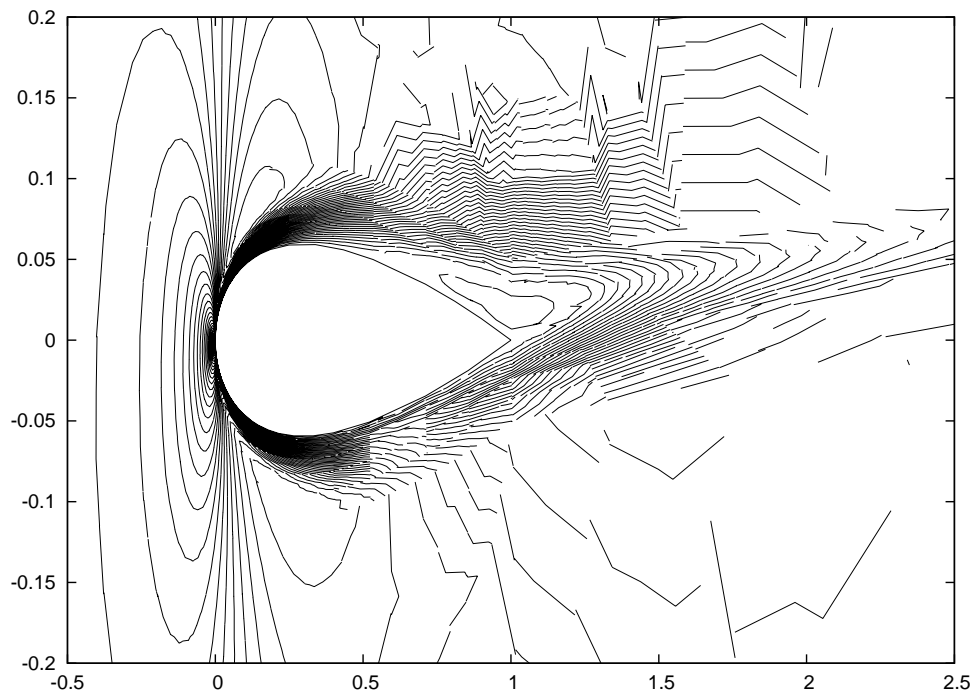
Obrázok 17: Detail hybridnej siete použitej pre  $P_2$  aproximáciu, počet elementov siete 1208, počet štvoruholníkových vrstiev 6



Obrázok 18: Izokrivky Machovho čísla, detail čelnej a zadnej časti profilu NACA0012, spočítané  $P_2$  aproximáciou na hybridnej sieti s počtom elementov 1208

Pre lepšiu názornosť sú ďalej uvedené neproporcionálne obrázky izokriviek spočítaných na hybridnej a na trojuholníkovej sieti ( $P_1$  aproximácia), a tiež pomocou  $P_2$  aproximácie na sieti hybridnej.

Obrázok 19: *Detail riešenia na hybridnej sieti - 1243 elementov*Obrázok 20: *Detail riešenia na trojuholníkovej sieti - 3419 elementov*



Obrázok 21: Detail riešenia na hybridnej sieti - 1208 elementov, aproximácia 2.stupňa

### 5.3 Koeficienty odporu a vztlaku

Ako ďalšiu charakteristiku výsledkov prúdenia počítaných na hybridných sieťach uvedieme koeficienty odporu a vztlaku.

Pre koeficienty odporu a vztlaku  $c_D$  a  $c_L$  platí

$$\begin{pmatrix} c_D \\ c_L \end{pmatrix} = \frac{1}{\frac{1}{2}f_\infty v_\infty^2} \int_\Gamma (-pI + \tau)n \, dS. \quad (14)$$

V rovnici (14) znamenajú:

$f_\infty, v_\infty^2$  ... hustota a rýchlosť v nekonečne,

$\Gamma$  ... profil,

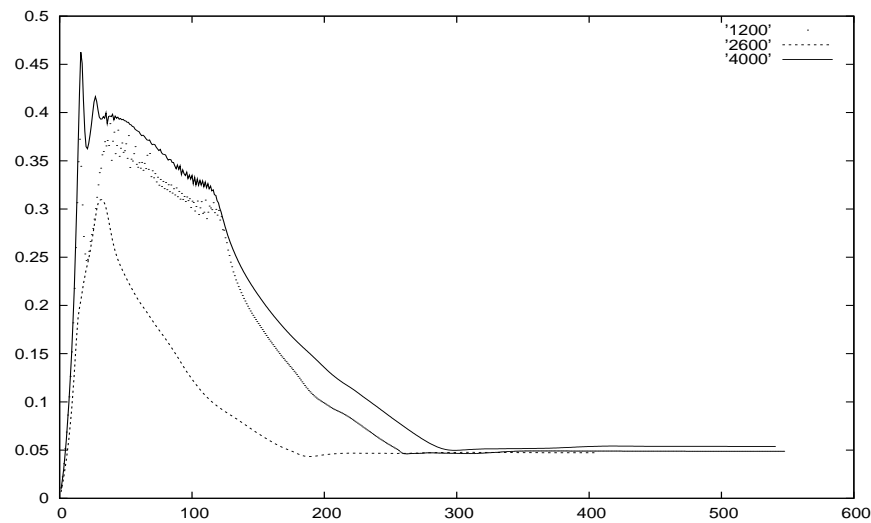
$p$  ... tlak,

$I$  ... jednotková matica,

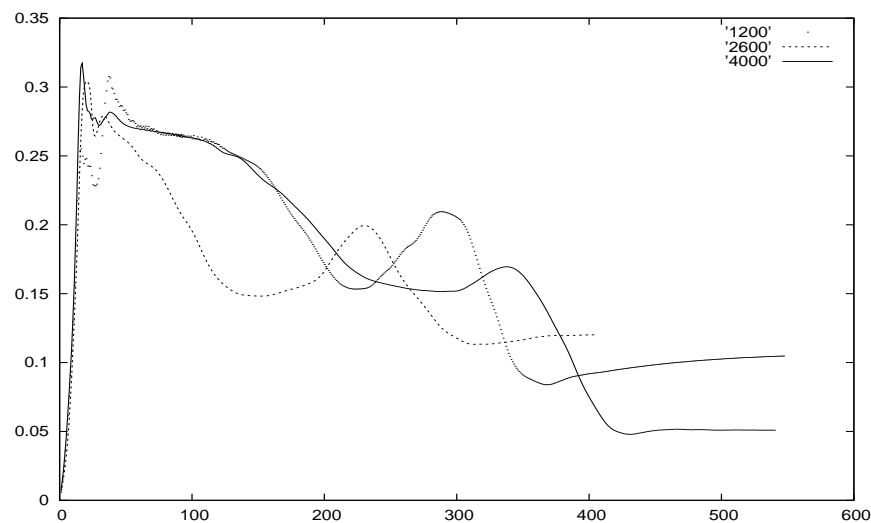
$\tau = (\tau_{ij})_{i,j=1}^2$  ... viskózná časť tenzoru napätia a

$n$  je vonkajšia jednotková normála k profilu  $\Gamma$ .





Obrázok 22: Koeficient odporu  $c_D$  na hybridných sieťach pre približný počet elementov sietí 1200, 2600 a 4000



Obrázok 23: Koeficient vztlaku  $c_L$  na hybridných sieťach pre približný počet elementov sietí 1200, 2600 a 4000

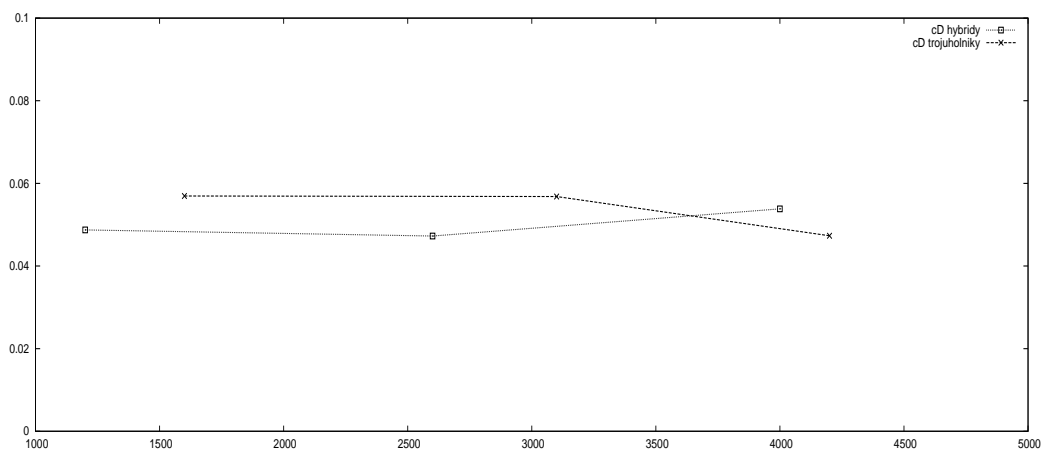
Z obrázku 22 vidieť, že hodnota koeficientu odporu skonvergovala pre rôzne zjemnené siete správne k nule. Avšak z obrázku 23 už výsledok nie je jednoznačne pozitívny.

Hodnoty síce konvergujú pre všetky zjemnené siete, ale bohužiaľ k rôznym číslam, a navyše nie sú usporiadané monotónne.

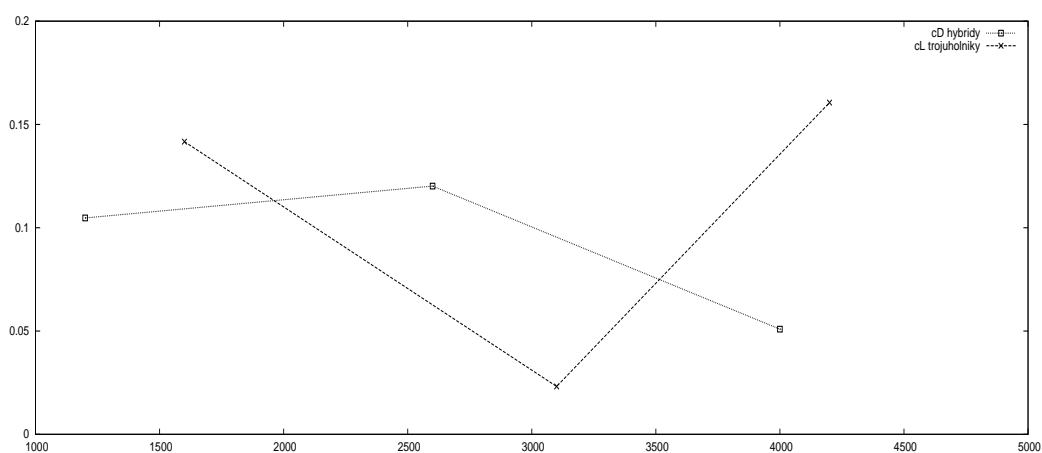
Posledná tabuľka a príslušné obrázky znázorňujú hodnoty koeficientov odporu a vztlaku pre rôzne počty elementov sietí hybridných a trojuholníkových.

Tabuľka 5: Hodnota koeficientov odporu a vztlaku v úlohe viskózneho prúdenia

$\#T_h$	$c_D$	$c_L$
1200	0.487438E-01	0.104739E+00
2600	0.472526E-01	0.120179E+00
4000	0.538343E-01	0.509086E-01
hybridné siete:		
trojuholníkové siete:		
1600	0.569480E-01	0.141680E+00
3100	0.568084E-01	0.231700E-01
4200	0.473289E-01	0.160594E+00



Obrázok 24: Hodnoty koeficientu odporu  $c_D$ .



Obrázok 25: Hodnoty koeficientu vztlaku  $c_L$ .

## 6 Záver

Vzhľadom k výsledkom z kapitoly 5 nemožno jednoznačne usúdiť, že hybridné siete sú lepšie než siete pozostávajúce výlučne z trojuholníkových elementov.

Výsledky prvej úlohy popísané v sekcii 5.1 nedávajú dostatočnú informáciu o kvalite hybridných sietí.

V sekcii 5.2 sme dospeli k viditeľnému zlepšeniu, ktoré však nie je jednoznačne potvrdené hodnotami koeficientov odporu či vztlaku.

Domnievam sa, že k lepším výsledkom by bolo možné prísť ďalším testovaním na ešte jemnejších sieťach než boli použité, ďalej je tiež možné upravovať algoritmus vytvárania štvoruholníkových sietí vznikajúcich za pomoci programu Gridgen (a to napr. v časti náplavu, kde by bolo možné niektoré vygenerované štvoruholníky spájať do trojuholníkov, prípadne rozšíriť pás štvoruholníkov okolo zadnej časti profilu).

## Appendix

### ANGENER3.1

#### Generovanie trojuholníkových sietí

Na začiatku vstupujú do procesu generovania trojuholníkovej siete súbory: *profiles*, *paramet*, *triang*.

Súbor *profiles* obsahuje bod po bode krivú časť hranice výpočetnej oblasti  $\Omega$  a má tvar:

<i>nbp</i>	počet krivých častí hranice oblasti $\partial\Omega$
<i>ibpoin1</i>	počet bodov prvej časti hranice
⋮	⋮
<i>ibpoin2</i>	počet bodov druhej časti hranice
⋮	⋮
⋮	⋮
<i>ibpoin_nbp</i>	počet bodov poslednej časti hranice
⋮	⋮

Adgfem narozdiel od angeneru vie pracovať iba s 1 krivou časťou hranice, a tak sa súbor popisujúci hranicu profilu v programe Adgfem odlišuje od *profiles* v angeneri.

Súbor *paramet* je výčtom vstupných parametrov potrebných pre angenerovské generovanie siete. Pritom jednotlivé parametre majú nasledujúci význam:

<i>ityp</i>	typ konštruovanej siete (0...unitárna)
<i>ndim</i>	počet komponent hľadaného riešenia
⋮	⋮
<i>numel</i>	predpísaný počet elementov
<i>eps1</i>	$\epsilon_1$
<i>p</i>	p

Súbor *triang* je nutné napísať pred prvým spustením angeneru "ručne". Obsahuje informácie o vstupnej triangulácii a má tvar:

<i>npoin</i>	<i>nelem</i>	<i>nbelm</i>	<i>abc</i>				
<i>xper1</i>	<i>yper1</i>	<i>iper1</i>	<i>jper1</i>	<i>xper2</i>	<i>yper2</i>	<i>iper2</i>	<i>jper2</i>
<i>x(1)</i>	<i>y(1)</i>						
⋮	⋮						
<i>x(npoin)</i>	<i>y(npoin)</i>						
<i>lnd(1,1)</i>	<i>lnd(1,2)</i>	<i>lnd(1,3)</i>					
⋮	⋮	⋮					
<i>lnd(nelem,1)</i>	<i>lnd(nelem,2)</i>	<i>lnd(nelem,3)</i>					
<i>lbn(1,1)</i>	<i>lbn(1,2)</i>	<i>ibc(1,3)</i>					
⋮	⋮	⋮					
<i>lbn(nbelm,1)</i>	<i>lbn(nbelm,2)</i>	<i>ibc(nbelm)</i>					

kde:

*npoin* ... počet vrcholov trojuholníkov siete  
*nelem* ... počet elementov-trojuholníkov siete  
*nbelm* ... počet hraničných segmentov oblasti  
*abc* ... počet komponent hranice oblasti  
*lnd(i,j)* ... súradnice i-tého trojuholníka, kde j=1,2,3  
*lbn(i,j)* ... súradnice počiatočného a koncového uzla hraničnej komponenty  
*ibc* ... index hraničnej komponenty označeného hraničného segmentu

*xper1,yper1*,  
*xper2,yper2* ... súradnice vektorov periodickej časti hranice  
*iper1,jper1*,  
*iper2,jper2* ... počet komponent s periodickou okrajovou podmienkou

Druhý riadok súboru je dôležitý pre problémy s periodickou okrajovou podmienkou, pre neperiodické okrajové podmienky predpisujeme:  $xper1 = yper1 = xper2 = yper2 = 0$ . a  $iper1, \dots, jper2$  môžu byť ľubovoľné prirodzené čísla (v ďalšom texte budeme pre názornosť používať nuly).

Tieto 3 vstupné súbory sú nutnou súčasťou spustenia angeneru, ktorý v 1.fáze vygeneruje unitárnu sieť zloženú z trojuholníkov a na výstupe vytvorí súbor *triangx*, ktorý je štruktúrou rovnaký ako súbor *triang* (*triang* však obsahuje vždy vstupnú trianguláciu  $\mathcal{T}_{old}$ , *triangx* naopak obsahuje trianguláciu výstupnú  $\mathcal{T}_{new}$ ).

Súbor *triangx* slúži po malej úprave k vytvoreniu súboru *mesh.grid*, ktorý je vstupným súborom pre program *Adgfem* – riešič systému rovníc stlačiteľného prúdenia (bez uvažovanej viskozity či s ňou) okolo zadaného profilu. V prvom stĺpci označujú číslie 3, že v danom riadku sa jedná o súradnice vrcholov trojuholníkového elementu a program (*Adgfem*) na danom mieste očakáva 3 hodnoty.

Tvar súboru *mesh.grid*:

$npoin$	$nelem$	$nbelm$	$nb$				
0.	0.	0	0	0.	0.	0	0
$x(1)$	$y(1)$						
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$					
$x(npoin)$	$y(npoin)$						
3	$lnd(1,1)$	$lnd(1,2)$	$lnd(1,3)$				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
3	$lnd(nelem,1)$	$lnd(nelem,2)$	$lnd(nelem,3)$				
$lbn(1,1)$	$lbn(1,2)$	$ibc(1,3)$					
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$					
$lbn(nbelm,1)$	$lbn(nbelm,2)$	$ibc(nbelm)$					

Pre úplnosť, súbor *results* má tento tvar:

$w(1,1)$	$w(1,2)$	...	$w(1,ndim)$
$w(2,1)$	$w(2,2)$	...	$w(2,ndim)$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$w(nelem,1)$	$w(nelem,2)$	...	$w(nelem,ndim)$

v prípade, že ide o bunkovo-centrovanú schému (t.z. hodnoty riešení sa počítajú v ťažiskách elementov a  $ifv = 1$  v súbore paramet),

$w(1,1)$	$w(1,2)$	...	$w(1,ndim)$
$w(2,1)$	$w(2,2)$	...	$w(2,ndim)$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$w(npoin,1)$	$w(npoin,2)$	...	$w(npoin,ndim)$

v prípade, že ide o vrcholovo-centrovanú schému (t.z. hodnoty riešení sa počítajú vo vrcholoch elementov a  $ifv = 0$  v súbore paramet).

## Literatúra

- [1] Feistauer M.: *Mathematical Methods in Fluid Dynamics*. Longman Scientific & Technical, Harlow, 1993.
- [2] Feistauer M., Felcman J., Straškraba I.: *Mathematical and Computational Methods for Compressible Flow*. Oxford University Press, Oxford, 2003.
- [3] Dolejší V.: *Anisotropic mesh adaptation for finite volume and finite element methods on triangular meshes*. *Comput.Vis.Sci.*, 1(3):165-178, 1998.
- [4] Dolejší V.: *Anisotropic mesh adaptation technique for viscous flow simulation*. *East-West J.Numer.Math.*, 9(1):1-24, 2001.
- [5] Dolejší V.: *Semi-implicit Interior Penalty Discontinuous Galerkin Methods for Viscous Compressible Flows*. *Commun.Comput.Phys.*, 4(2):231-274, 2008.
- [6] Cockburn B., Karniadakis G.E., Shu C.-W., editors: *Discontinuous Galerkin Methods*. Springer, Berlin, 2000.
- [7] Bourouchaki H., Frey P.J.: *Adaptive triangular-quadrilateral mesh generation*. *Int.J.Numer.Methods Eng.* 41, No.5, 915-934, 1998.
- [8] Dolejší V., Felcman J.: *Anisotropic Mesh Adaptation for Numerical Solution of Boundary Value Problems*. published online ([www.interscience.wiley.com](http://www.interscience.wiley.com)), 2004
- [9] Wesseling P.: *Principles of Computational Fluid Dynamics*. Springer, Berlin, 2002.