Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Petr Staněk

Solowův model růstu ekonomiky

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Stanislav Hencl, Ph.D.
Studijní program: Matematika, obecná matematika

2008

Rád bych poděkoval všem, kteří mi zapůjčili potřebnou literaturu nebo mě jakkoliv podpořili při psaní této bakalářské práce. Zejména děkuji mému vedoucímu RNDr. Stanislavu Henclovi, Ph.D., který se mnou podrobně prokonzultoval náplň práce a diskutoval o problémech při psaní práce.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 5. 8. 2008 Petr Staněk

Contents

Název práce: Solowův model růstu ekonomiky
Autor: Petr Staněk
Katedra (ústav): Katedra matematické analýzy
Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Stanislav Hencl, Ph.D.
e-mail vedoucího: hencl@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme vztah mezi produkcí, kapitálem, znalostmi a prací. Hlavní náplní práce je popsání chování ekonomiky ve stavu rovnoměrného růstu. V první části dokazujeme, že ekonomika se blíží ke stavu rovnoměrného růstu. Následně popíšeme vlastnosti investic a spotřeby, pokud se ekonomika nachází v tomto stavu. Na závěr naznačíme, jakým způsobem je možné model rozšířit o přírodní zdroje a půdu.

Klíčová slova: Produkční funkce, Kapitál, Znalosti, Práce, Stav rovnoměrného růstu, Investice, Spotřeba

Title: The Solow growth model
Author: Petr Staněk
Department: Department of Mathematical Analysis
Supervisor: RNDr. Stanislav Hencl Ph.D.
Supervisor's e-mail address: hencl@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In the present thesis we study relation between production, capital, labor and knowledge. Our goal is the description of behavior of economy at balanced growth path. In the first part we prove existence of the balanced growth path. We will describe behavior of the investment and the consumption if the economy is at balanced growth path. In the last chapter we show how we can extend model to include natural resources and land.

Keywords: Production function, Capital, Knowledge, Labor, Balanced growth path, Investment, Consumption

CHAPTER 1

Úvod

V této práci se budeme snažit popsat chování zjednodušeného ekonomického modelu růstu ekonomiky. Pozorované vlastnosti ekonomiky zavedeme pomocí podmínek na jednotlivé funkce, které model využívá. Průběh jednotlivých funkcí budeme popisovat pomocí diferenciálních rovnic a následně budeme odvozovat jejich analytické vlastnosti. Čerpali jsme z knihy Davida Romera Advanced Macroeconomics [**1**]. Převzali jsme výsledky knihy o Solowově modelu. Kniha Advaced Macroeconomics je psána pro ekonomy a neopírá se tedy o detailní matematické zdůvodnění. Doplnil jsem tedy poznatky o matematická zdůvodnění, která byla jen naznačena nebo chyběla zcela.

Solowův model využívá 4 proměnné

- Y . . . . produkce.
- K . . . . kapitál.
- L . . . . práce.
- A . . . . znalosti nebo efektivita práce.

Hledáme funkci definovanou ve všech bodech času (tj. $t \in [0, \infty)$). Tato funkce není přímo funkcí času, ale kapitálu, práce a efektivity práce, které jsou závislé na času t.

- $Y(t) = F(K(t), A(t)L(t))$.

Proměnné Y, K, L, A bereme vždy jako spojité funkce času, i když to není explicitně napsáno. Zmíněnou funkci F, která vyjádří výstup Y pomocí ostatních tří proměnných budeme nazývat produkční funkce. Produkční funkcí se budeme podrobněji zabývat v první části práce.

Efektivita práce A a práce L vstupují do produkční funkce jako součin, a proto zavádíme pojem efektivní práce značí se AL.

Dalšími základními pojmy, se kterými se v práci setkáme, jsou

- kapitál za jednotku vstupu K/Y
- kapitál za jednotku efektivní práce $K/(AL)$.

Ve druhé kapitole se seznámíme podrobněji s produkční funkcí. Řekneme, co je to její intenzivní verze a jak souvisí s původní funkcí. Následně budeme přidávat předpoklady (podle toho, jak by se produkce měla chovat ekonomicky) na tuto intenzivní produkční funkci. Uvedeme známý modelový příklad takové funkce. Nakonec si popíšeme chování Y, K, L, A v závislosti na čase.

V třetí části se budeme zabývat intezivní produkční funkcí v závislosti na kapitálu za jednotku efektivní práce. Řekneme si, co je to rovnovážná investice a skutečná investice. Definujeme bod rovnovážné investice a ukážeme, že každá ekonomika se k tomuto bodu blíží. Zjistíme, proč se konvergence k bodu rovnovážné investice někdy nazývá konvergencí k rovnoměrnému růstu.

Ve čtvrté části se budeme věnovat situaci, jak se změní bod rovnovážné investice (bod ve kterém nastane stav rovnoměrného růstu) při změně podílu kapitálu věnového investicím, pokud se ekonomika již nacházela v bodě rovnovážné investice. Definujeme, co je to spotřeba a jak souvisí s kapitálem věnovaného investici. Tedy budeme zkoumat vliv stejné situace na spotřebu.

V páté kapitole se zaměříme na velikosti těchto změn. Pokusíme se také odhadnout rychlost konvergence k bodu rovnovážné investice. Krátce se zmíníme, jak tyto poznatky mohou pomoci při odhadu vyspělosti ekonomiky.

V poslední šesté části si ilustrujeme na konkrétní intenzivní produkční funkci, jak lze model rozšířit o přírodní zdroje a půdu.

CHAPTER 2

Vlastnosti produkční funkce

Nyní budeme postupně přidávat předpoklady na produkční funkci v závislosti na proměnných K, L, A v pevném bodě času t a následně odvozovat její matematické vlastnosti.

2.1. Základní vlastnosti produkční funkce

- Základním předpokladem jsou rovnoměrné výnosy. (tj. c-násobek kapitálu a efektivní práce dá c-násobek produkce)

$$F(cK, cAL) = cF(K, AL) \text{ pro všechny } c \geq 0. \tag{2.1}$$

- Solowův model předpokládá, že jiné vstupy než již zmíněné práce, kapitál a znalosti jsou zanedbatelné a též zanebává přírodní zdroje. Pokud přírodní zdroje jsou důležité, pak z rovnice (2.1) dostaneme nerovnost

$$F(cK, cAL) < cF(K, AL) \text{ pro všechny } c \geq 0.$$

Tímto směrem se však nyní ubírat nebudeme, neboť přírodní zdroje nebývají hlavní důvod růstu produkce a předpoklad rovnoměrných výnosů nám poskytuje dobrou aproximaci.

- Za předpokladu rovnoměrných výnosů položme

$$c = \frac{1}{AL}. \tag{2.2}$$

Vidíme tedy, že přímým dosazením (2.2) do (2.1)

$$f\Big(\frac{K}{AL}\Big) = F\Big(\frac{K}{AL}, 1\Big) = \frac{F(K, AL)}{AL}. \tag{2.3}$$

Funkci $f(k) = F(k, 1)$, kde

$$k = \frac{K}{AL} \tag{2.4}$$

nazýváme intezivní formou produkční funkce. Definujme $y = \frac{Y}{AL}$. Protože platí $\frac{F(K,AL)}{AL} = \frac{Y}{AL}$, pak můžeme psát (2.3) ve tvaru

$$y = f(k). \tag{2.5}$$

2.2. Vlastnosti intenzivní formy produkční funkce

Nyní budeme definovat matematické vlastnosti $f(k)$.

Definice 2.1. Funkci f :$[0, \infty) \to [0, \infty)$ budeme nazývat intenzivní produkční funkcí, pokud má následující analytické vlastnosti

(i) $f(0) = 0$ a f spojitá na $[0, \infty)$
(ii) $f'(k) > 0$ pro všechna $k > 0$
(iii) $f''(k) < 0$ pro všechna $k > 0$

Symbolem k značíme kapitál za jednotku efektivní práce.

Intenzivní produkční funkce je tedy spojitá, ryze rostoucí, konkávní na své definičním oboru $[0, \infty)$ a bez kapitálu není žádný výstup.

Poznámka. *Protože platí* $F(K, AL) = ALf(\frac{K}{AL})$, *pak tedy také*

$$\frac{\partial F(K, AL)}{\partial K} = ALf'\Big(\frac{K}{AL}\Big)\frac{1}{AL} = f'(k). \tag{2.6}$$

Definice 2.2. Řekneme, že intenzivní produkční funkce splňuje Inadovy podmínky, jestliže
(i) $\lim_{k\to\infty} f'(k) = 0$.
(ii) $\lim_{k\to 0+} f'(k) = \infty$.

Nyní si ukážeme příklad produkční funkce.

Příklad 2.3. Cobb-Douglasova funkce je produkční funkce daná předpisem

$$F(K, AL) = K^\alpha (AL)^{1-\alpha}, \text{ kde } 0 < \alpha < 1.$$

Snadno ověříme, že se jedná o produkční funkci. (tj. splňuje podmínku (2.1))

$$\begin{aligned} F(cK, cAL) &= (cK)^\alpha (cAL)^{1-\alpha} \\ &= c^\alpha c^{1-\alpha} K^\alpha (AL)^{1-\alpha} \\ &= cF(K, AL). \end{aligned}$$

Intezivní forma Cobb-Douglasovy funkce je

$$f(k) = F\Big(\frac{K}{AL}, 1\Big) = \Big(\frac{K}{AL}\Big)^\alpha = k^\alpha. \tag{2.7}$$

Jelikož $f'(k) = \alpha k^{\alpha-1}$ a $f^{(2)}(k) = \alpha(\alpha-1)k^{\alpha-2}$, je splnění podmínky intenzivní produkční funkce a Inadových podmínek zřejmé.

2.3. Vliv vstupu na produkci

- Práce, kapitál a znalosti jsou v tomto modelu brány jako funkce času. Počáteční množství práce, kapitálu a znalostí jsou dány. V této části předpokládáme, že funkce $L(t), A(t), K(t)$ mají spojitou derivaci na $[0, \infty)$ a $L(0) > 0$, $A(0) > 0$. Předpokládáme, že práce a znalosti rostou stálým tempem

$$L'(t) = nL(t), n > 0 \tag{2.8}$$

$$A'(t) = gA(t), g > 0. \tag{2.9}$$

Řešíme homogenní diferenciální rovnici

$$\frac{L'(t)}{L(t)} = n.$$

Integrací dostaneme

$$\log(L(t)) = nt + C,$$

a tedy

$$L(t) = e^{nt}\tilde{C}.$$

Zjevně $\tilde{C} = L(0)$, dostáváme tedy

$$L(t) = L(0)e^{nt} \tag{2.10}$$

a podobně dostaneme

$$A(t) = A(0)e^{gt}. \tag{2.11}$$

- Dále předpokládáme, že výstup je rozdělen mezi spotřebu a investice. Podíl vstupu věnovaný investici označme s. Jednotka výstupu věnovaná investicím přináší jednotku nového kapitálu. Kapitál K se časem znehodnocuje, to je vyjádřeno konstantou δ. Tedy máme rovnici

$$K'(t) = sY(t) - \delta K(t), s \in [0, 1], \delta > 0. \tag{2.12}$$

Řešme (2.12). Z homogenní rovnice

$$K'(t) = -\delta K(t)$$

dostaneme

$$K(t) = ce^{-\delta t}. \tag{2.13}$$

Použijeme variaci konstant. Z (2.13)

$$K'(t) = c'(t)e^{-\delta t} - \delta c(t)e^{-\delta t}$$

a dosazením do (2.12) dostaneme

$$c'(t)e^{-\delta t} - \delta c(t)e^{-\delta t} = sY(t) - \delta c(t)e^{-\delta t},$$

a proto

$$c'(t)e^{-\delta t} = sY(t).$$

Tedy řešení je

$$c(t) = s\int_0^t Y(\tau)e^{\delta\tau}d\tau.$$

Hledané řešení soustavy (2.12) je

$$K(t) = K(0)e^{-\delta t} + \Big(s\int_0^t Y(\tau)e^{\delta\tau}d\tau\Big)e^{-\delta t}.$$

Funkce $K(t)$, $A(t)$, $L(t)$ jsou spojité na $[0, \infty)$ a podle (2.3) máme

$$Y(t) = f\Big(\frac{K(t)}{A(t)L(t)}\Big)A(t)L(t).$$

Funkce $Y(t)$ je spojitá na $[0, \infty)$, pokud $L(t) \neq 0$ a $A(t) \neq 0$. To je ale podle (2.10)a (2.11) a předpokladů $L(0) > 0$ a $A(0) > 0$ splněno, a tedy Y je spojitá. Integrál tedy existuje.

Ještě poznamenejme, že $K(t)$, $A(t)$, $L(t)$, $Y(t)$ jsou spojité na $[0, \infty)$, tedy podle (2.8), (2.9),(2.12) jsou $K(t)$, $A(t)$, $L(t)$ spojitě diferencovatelné.

CHAPTER 3

Kapitál za jednotku efektivní práce

V předchozí části jsme zkoumali vlastnosti kapitálu K, práce L a znalostí A jako samostatných funkcí času. V této části budeme zkoumat tyto tři komponenty najednou prostřednictvím kapitálu za jednotku efektivní práce.

3.1. Rovnice pro kapitál za jednotku efektivní práce

Kapitál za jednotku efektivní práce k bereme jako funkci času a z rovnice $k(t) = K(t)/(A(t)L(t))$ dostáváme podle derivace součinu, podílu a složené funkce

$$\begin{aligned} k'(t) &= \frac{K'(t)}{A(t)L(t)} + K(t)\Big(\frac{1}{A(t)L(t)}\Big)' \\ &= \frac{K'(t)}{A(t)L(t)} - \frac{K(t)\,[A(t)L'(t) + A'(t)L(t)]}{[A(t)L(t)]^2} \\ &= \frac{K'(t)}{A(t)L(t)} - \frac{K(t)}{A(t)L(t)}\frac{L'(t)}{L(t)} - \frac{K(t)}{A(t)L(t)}\frac{A'(t)}{A(t)}. \end{aligned}$$

Z předpokladu, že práce a znalosti rostou stálým tempem (2.8) dostáváme $L'(t)/L(t) = n$ a (2.9) $A'(t)/A(t) = g$. Jelikož jsou funkce $K(t)$, $A(t)$, $L(t)$ spojitě diferencovatelné na $[0,\infty)$ a $L(t) > 0$ a $A(t) > 0$, tak tedy i $k(t)$ je spojitě diferencovatelná na $[0,\infty)$.

Dále vidíme, že v poslední rovnosti se vyskytuje samotné $k(t)$. Dosazením z rovnosti (2.12)

$$\begin{aligned} k'(t) &= \frac{sY(t) - \delta K(t)}{A(t)L(t)} - k(t)n - k(t)g \\ &= s\frac{Y(t)}{A(t)L(t)} - \delta k(t) - nk(t) - gk(t). \end{aligned}$$

Nakonec dosadíme fakt (2.3) a (2.5), tj ($Y/AL = f(K/AL)$)a dostáváme

$$k'(t) = sf(k(t)) - (n + g + \delta)k(t). \tag{3.1}$$

Z definice funkce f má (3.1) smysl jen když k: $[0,\infty) \to [0,\infty)$. Označíme-li $k_0 = k(0)$, pak má smysl uvažovat jen $k_0 \neq 0$. V opačném případě $k'(0) = 0$, a tedy $k(t) = 0$ na $[0,\infty)$, což nemá žádný ekonomický význam.

Definice 3.1. V diferenciální rovnici (3.1) nazýváme

- výraz $sf(k(t))$ skutečnou investicí za jednotku efektivní práce (tj. výstup za jednotku efektivní práce $f(k)$ a podíl z výstupu, který je investován s).
- výraz $(n + g + \delta)k(t)$ rovnovážnou investicí za jednotku efektivní práce .

Rovnice (3.1) má velký ekonomický význam pro investice do kapitálu, které musí dosáhnout alespoň rovnovážné investice, určuje tedy jak veliká musí investice být, abychom udrželi kapitál za jednotku efektivní práce k na zvolené hodnotě. Tímto se budeme dál zabývat.

Nyní se vrátíme k intenzivní produkční funkci $f(k)$. Nechť $f(k)$ splňuje Inadovy podmínky. Pak ukážeme, že existuje k^* nenulové, takové že rovnovážná investice se rovná skutečné investici.

VĚTA 3.2. *Nechť* $(n+g+\delta) > 0$, $s > 0$ *a nechť intenzivní produkční funkce* $f(k)$ *splňuje Inadovy podmínky. Pak existuje* $k^* > 0$ *takové, že*

$$sf(k^*) = (n+g+\delta)k^*. \tag{3.2}$$

DŮKAZ. Zkoumejme funkci definovanou na $[0,\infty)$

$$g(k) = sf(k) - (n+g+\delta)k. \tag{3.3}$$

Tato funkce je diferencovatelná na $(0,\infty)$ (v nule existuje derivace nevlastní)

$$g'(k) = sf'(k) - (n+g+\delta). \tag{3.4}$$

Z $f(0) = 0$ máme $g(0) = 0$. Z $\lim_{k\to 0_+} f'(k) = \infty$ dostáváme $\lim_{k\to 0_+} g'(k) = \infty$. Tedy existuje $a \in (0,\infty)$ takové, že $g(a) > 0$.

Další vlastnosti Inadovy intenzivní produkční funkce jsou $f''(k) < 0$ a $\lim_{k\to\infty} f'(k) = 0$. Z druhého předpokladu a (3.3) víme, že

$$\lim_{k\to\infty} g'(k) = -(n+g+\delta).$$

Dále

$$g(x) = \int_1^x g'(t)dt + g(1),$$

a tedy existuje $b \in (0,\infty)$ takové, že $g(b) < 0$.

Nyní shrneme výsledky. Existuje $a \in (0,\infty)$, kde $g(a) > 0$, respektive $b \in (0,\infty)$ a $g(b) < 0$. Funkce $g(k)$ je rozdíl dvou spojitých funkcí, tedy spojitá funkce. Proto existuje $k^* \in (a,b)$, že $g(k^*) = 0$. Z $f''(k) < 0$ plyne, že g' je klesající funkce a g je zjevně v k^* klesající. Tedy $g(k)$ je klesající pro všechna $k > k^*$, a tudíž k^* existuje jediné. □

Je nutné si vědomit, zda diferenciální rovnice (3.1) má nějaké řešení.

VĚTA 3.3 (existence a jednoznačnost). *Nechť* $k_0 > 0$ *a nechť* $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *splňuje vlastnosti intenzivní produkční funkce* (2.1) *a* (2.2). *Potom existuje právě jedno řešení diferenciální rovnice*

$$k'(t) = sf(k(t)) - (n+g+\delta)k(t),$$

splňující počáteční podmínku $k_0 = k(0)$.

DŮKAZ. V tomto důkazu použijeme značení z důkazu Věty 3.2. Označme k^* bod rovnovážné investice z Věty 3.2. Je-li $k_0 < k^*$, pak $k'(0) > 0$, neboť

$$sf(k_0) > (n+g+\delta)k_0.$$

Platí tedy, že $k(t) \in [k_0, k^*]$ pro všechna $t > 0$. Naopak, jestliže $k_0 > k^*$, pak $k'(0) < 0$, neboť

$$sf(k_0) < (n+g+\delta)k_0.$$

Platí tedy, že $k(t) \in [k^*, k_0]$. Fakt, že $k(t)$ nepřesáhne k^* z jedné či z druhé strany je důsledek spojité diferencovatelnosti $k(t)$. Pokud $k(t_1) = k^*$, pak $k'(t_1) = 0$ a $k(t) = k^*$ na $[t_1,\infty)$. Víme tedy, že existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $k(t) \notin [0,\varepsilon)$. Funkce $k(t)$ nenabývá pro všechna t z intervalu $[0,\infty)$ hodnot z okolí 0.

Použijme Picardovu Větu 7.3 na interval $[0,\infty)$, jediný předpoklad který je třeba ověřit je lipchitzovskost $G(t,k)$, dané rovnicí

$$G(t,k) = sf(k) - (n+g+\delta)k.$$

Nyní budeme odhadovat

$$|G(t,k_1) - G(t,k_2)| \leq (n+g+\delta)\,|k_1 - k_2| + s\,|f(k_1) - f(k_2)|\,.$$

Na $[\varepsilon,\infty)$ existuje f'' a nabývá záporných hodnot, tedy f' je omezená konstantou $f'(a) = N$, jelikož f' klesající a nezáporná. Mějme $k_1, k_2 \in [a,\infty)$, rozšíříme druhý sčítanec na pravé straně hodnotou $|k_1 - k_2|$ a podle Lagrangeovy věty (7.1)

$$|G(t,k_1) - G(t,k_2)| \leq (n+g+\delta)\,|k_1 - k_2| + s\,|k_1 - k_2|\,N.$$

Tedy platí

$$|G(t,k_1) - G(t,k_2)| \leq M\,|k_1 - k_2|\,,$$

kde $M = (n+g+\delta) + Ns$. Řešení tedy existuje je tedy jednoznačné. □

Nyní si spočítáme bod rovnovážné investice v konkrétním případě.

PŘÍKLAD 3.4. Vrátíme se ke Cobb-Douglasově funkci. V Příkladu 2.3 jsme spočítali intenzivní produkční funkci$f(k) = k^\alpha$, $\alpha \in (0,1)$. Teď spočtěme podle (3.2) bod rovnovážné investice

$$s(k^*)^\alpha = (n+g+\delta)k^*$$

$$(k^*)^{\alpha-1} = \frac{n+g+\delta}{s}, s \neq 0$$

$$k^* = \sqrt[\alpha-1]{\frac{n+g+\delta}{s}}. \tag{3.5}$$

3.2. Konvergence k rovnoměrnému růstu

Nyní se podíváme na konvergenci $k(t)$ k bodu rovnovážné investice k^*, definonaným větou (3.2). Dále si popíšeme, jak se ekonomika v tomto bodě chová.

VĚTA 3.5. *Nechť $k_0 > 0$, $(n+g+\delta) > 0$, $s > 0$ a nechť intezivní produkční funkce $f(k)$ splňuje Inadovy podmínky. Pak každé řešení diferenciální rovnice* (3.1) *s počáteční podmínkou $k(0) = k_0$ splňuje*

$$k(t) \overset{t\to\infty}{\to} k^* \ a\ k'(t) \overset{t\to\infty}{\to} 0,$$

kde k^* je konstanta z Věty 3.2.

DŮKAZ. V tomto důkaz budeme používat používat výsledky a značení z důkazu Věty 3.2. Nechť $g(k)$ je dána rovnicí (3.3). Pokud $k < k^*$, pak podle předchozí Věty 3.2 k roste ($g(k) > 0$), jestliže $k > k^*$ tak podle předchozí Věty 3.2 k klesá ($g(k) < 0$).

Mějme autonomní difereciální rovnici $k' = g(k)$, kde $g(k)$ je daná rovnicí (3.3). Víme, že $g(k)$ je diferencovatelná na $(0,\infty)$ a $g'(k)$ je tvaru (3.4). Podle Věty 7.5 stačí ověřit, že $g'(k^*) < 0$, kde k^* je klidovým stavem rovnice $k' = g(k)$.

Je dobré si uvědomit, že fakt $g'(k^*) < 0$ plyne přímo z důkazu Věty 3.2. Za prvé víme, že $g'(k)$ je funkce klesající, tedy může změnit znaménko pouze jednou. Následně víme, že $g(0) = 0$ a existuje a, že $g(k)$ je rostoucí na $(0,a]$. Tedy $g(k)$

musí být v bodě k^* klesající, neboť $k^* > a$, $g(k^*) = 0$, a tudíž $g'(k^*) < 0$. Tedy proto
$$k(t) \stackrel{t\to\infty}{\to} k^*.$$
Jelikož k^* je klidovým stavem $k' = g(k)$, pak také
$$k'(t) \stackrel{t\to\infty}{\to} 0.$$
Tento důsledek je také možno odvodit z Lagrangeovy věty, protože z $k(t) \stackrel{t\to\infty}{\to} k^*$ vyplývá
$$k(t+1) - k(t) \stackrel{t\to\infty}{\to} 0.$$
Na tento výraz může již Lagrangeovu větu použít a dostaneme
$$k'(t) \stackrel{t\to\infty}{\to} 0.$$
□

Ekonomickým důsledkem této věta je fakt, že ať ekonomika začíná v jakémkoliv počátečním stavu $k(0)$, pak vždy dokonverguje ke k^*. Nyní ilustrujeme konvergenci na konkrétním příkladě Cobb-Douglasovy intenzivní produkční funkce.

PŘÍKLAD 3.6. Nechť $f(k)$ je Cobb-Douglasova intenzivní produkční funkce, pak
$$k(t) \stackrel{t\to\infty}{\to} k^*,$$
kde $k(t)$ je dána rovnicí (3.1) a k^* je dáno (3.5).

DŮKAZ. Z příkladu 2.3 máme $f(k) = k^\alpha, \alpha \in (0,1)$. Tedy rovnice (3.1) má tvar
$$k'(t) = s(k(t))^\alpha - (n+g+\delta)k(t). \tag{3.6}$$
Dostali jsme Bernoulliovu rovnici. Vydělme obě strany rovnice $(k(t))^\alpha$ a označme
$$z(t) = \frac{1}{(k(t))^{\alpha-1}}.$$
Pak
$$z'(t) = \frac{1-\alpha}{(k(t))^\alpha}k'(t),$$
dostáváme tedy
$$\frac{1}{1-\alpha}z'(t) = s - (n+g+\delta)z(t). \tag{3.7}$$
Homogenní část diferenciální rovnice rovnice dává
$$\frac{z'(t)}{z(t)} = -(n+g+\delta)(1-\alpha).$$
Klasickou úpravou dostaneme
$$z_h(t) = e^{(n+g+\delta)(\alpha-1)t}C. \tag{3.8}$$
Zbývá ještě určit nějaké partikulární řešení. Variací konstant (3.8) dostáváme
$$z'(t) = (n+g+\delta)(\alpha-1)e^{(n+g+\delta)(\alpha-1)t}C(t) + e^{(n+g+\delta)(\alpha-1)t}C'(t).$$
Dosazením do (3.7) dostáváme
$$e^{(n+g+\delta)(\alpha-1)t}C'(t) = s(1-\alpha).$$

Tedy
$$C'(t) = s(1-\alpha)e^{(n+g+\delta)(1-\alpha)t},$$
a tedy
$$\begin{aligned} C(t) &= s(1-\alpha)\int\limits_0^t e^{(n+g+\delta)(1-\alpha)x}dx \\ &= \frac{s}{n+g+\delta}e^{(n+g+\delta)(1-\alpha)t} - \frac{s}{n+g+\delta}. \end{aligned}$$
Hledané partikulární řešení tedy je
$$\begin{aligned} z_p(t) &= e^{(n+g+\delta)(\alpha-1)t}\Big(\frac{s}{n+g+\delta}e^{(n+g+\delta)(1-\alpha)t} - \frac{s}{n+g+\delta}\Big) \\ &= \frac{s}{n+g+\delta} - e^{(n+g+\delta)(\alpha-1)t}\frac{s}{n+g+\delta}. \end{aligned}$$
Tedy dostáváme
$$k(t) = \Big(e^{(n+g+\delta)(\alpha-1)t}C + \frac{s}{n+g+\delta} - e^{(n+g+\delta)(\alpha-1)t}\frac{s}{n+g+\delta}\Big)^{\frac{-1}{\alpha-1}}.$$
Chceme ověřit, zda (3.6) je stabilní, tedy podle (3.5) musíme ověřit zda

$$\lim_{t\to\infty} k(t) = \sqrt[\alpha-1]{\frac{n+g+\delta}{s}}. \tag{3.9}$$

Počítejme

$$\lim_{t\to\infty} k(t) = \sqrt[\alpha-1]{\frac{1}{\lim_{t\to\infty} z(t)}}. \tag{3.10}$$

Zbývá
$$\lim_{t\to\infty} z(t) = \lim_{t\to\infty} z_h(t) + \lim_{t\to\infty} z_p(t) = \frac{s}{n+g+\delta}.$$
Druhá rovnost platí, protože se jedná o jediný člen, ve kterém není exponenciála se záporným exponentem, a který navíc nezávisí na t. Limita (3.9) je evidentně splněna a tím je $k(t) \to k^*$ ukázáno. □

Přirozenou otázkou je, jak se chová ekonomika v tomto bodě rovnovážné investice. Pro kapitál platí (2.4) $K(t) = A(t)L(t)k(t)$ a
$$K'(t) = A'(t)L(t)k(t) + A(t)L'(t)k(t) + A(t)L(t)k'(t),$$
kde poslední člen je nulový, protože $k'(t) = 0$. Tedy výraz se zjednodušší a
$$\begin{aligned} K'(t) &= k(t)(A'(t)L(t) + A(t)L'(t)) \\ &= \frac{K(t)}{A(t)L(t)}(A'(t)L(t) + A(t)L'(t)) \\ &= K(t)(n+g). \end{aligned}$$

Dostáváme tedy homogenní diferenciální rovnici, a tedy $K(t) = K(0)e^{(n+g)t}$. Také víme, že platí (2.12) $K'(t) = sY(t) - \delta K(t)$, tedy dostáváme $\frac{sY(t)}{K(t)} = n+g+\delta$. Z toho plyne, že produkce
$$Y(t) = \frac{K(0)e^{(n+g)t}(n+g+\delta)}{s}$$

roste v bodě rovnovážné investice také tempem $n+g$. Každá z veličiny A, L, K, Y má tedy v bodě rovnovážné investice rovnoměrný růst, neboť u veličin A, L rovnoměrný růst předpokládáme. Říkáme tedy, že ekonomika je ve stavu rovnoměrného růstu. Proto nazýváme $k(t) \to k^*$ konvergencí k rovnoměrnénu růstu.

CHAPTER 4

Dopad změny kapitálu věnovaného investicím

V této části se budeme věnovat změnám parametru s (podíl kapitálu věnovaného investicím, a tedy $s \in [0,1]$) v Solowově modelu. Tedy budeme zkoumat, jak s ovlivňuje bod rovnovážné investice a spotřebu.

4.1. Změna bodu rovnovážné investice

Parametr, který pravděpodobně nejvíce ovlivňuje Solowův model je míra úspor. Obchody uskutečněné vládou, daně, úrokové sazby ovlivňují podíl produkce věnovaným investicím. Tedy první problém, který budeme řešit je zvýšení podílu kapitálu na investice.

Nyní přepokládejme, že se ekonomika nachází v bodě rovnovážné investice $k^* = k(t_0)$, a tedy

$$k'(t_0) = sf(k^*) - (n+g+\delta)k^* = 0.$$

Zvýšíme-li podíl kapitálu věnovaný investicím v čase t_0 z s na $s + \theta s$, pak

$$k'(t_0) = (s+\theta s)f(k^*) - (n+g+\delta)k^* = \theta s f(k^*) > 0.$$

Podle Věty 3.5 $k(t)$ roste k nové hodnotě $\hat{k}^*$ a $k'(t)$ klesá k nule. Pro $k'(t)$ v čase $t < t_0$ platí $k'(t) = 0$. V čase t_0 má skok o velikosti $\theta s f(k^*)$. Následně opět klesá k nule pro $t \to \infty$. Náš cíl je popsat chování výstupu. Z ekonomického hlediska je lepší popsat chování výstupu za pracovníka Y/L. Díky (2.3) a (2.5) víme

$$\frac{Y}{L} = Af(k).$$

V bodě rovnovážné investice k^* je $f(k^*)$ konstanta. Funkce Y/L roste tedy stejným tempem jako A.

Zvýšený podíl investic v čase t_0 způsobí $k(t) \nearrow \hat{k}^*$ podle Věty 3.5, neboť $k(t)$ již není kostanta a $k(t) < \hat{k}^*$. Funkce $f(k)$ je jako funkce k spojitá a rostoucí na $[0,\infty)$, tedy

$$A(t)f(k(t)) - A(t)f(\hat{k}^*) \searrow 0 \ , \ t \to \infty.$$

Situaci popíšeme na funkci $\log(Y/L)$. Pro $t < t_0$ platí

$$\begin{aligned}\frac{d\log(Y(t)/L(t))}{dt} &= \frac{d\log(A(t)f(k^*))}{dt} \\ &= \frac{d\log A(t)}{dt} = \frac{d\log(A(0)e^{gt})}{dt} \\ &= (\log A(0) + gt)' = g,\end{aligned}$$

neboť $f(k^*)$ je konstanta. V čase t_0 podíl investic vzroste na $s + \theta s$, tedy $k(t)$ roste a také $f(k)$. Tedy

$$\begin{aligned}\frac{d\log(Y(t)/L(t))}{dt} &= \frac{d\log(A(t)f(k(t)))}{dt} \\ &= \frac{d\log(A(t))}{dt} + \frac{d\log(f(k(t)))}{dt} \\ &= g + \frac{f'(k(t))k'(t)}{f(k(t))}.\end{aligned}$$

Tedy Y/L roste rychleji, jelikož je poslední člen nezáporná hodnota. Ale $k(t) \nearrow \hat{k}^*$ a $k'(t) \to 0$. Proto platí

$$\frac{f'(k(t))k'(t)}{f(k(t))} \overset{t\to\infty}{\to} 0$$

a tempo růstu Y/L se vrací k původnímu stavu.

Při náhlém zvýšení podílu kapitálu věnovaného investicím s se zvýší hodnota bodu rovnovážné investice k^*. Tato změna také způsobí rychlejší růst veličiny Y/L v čase, ale tato změna se postupně vrací k původnímu stavu.

4.2. Chování spotřeby při změně investic

Označme opět podíl kapitálu věnovaný investicím $s \in (0, 1)$. Pak zřejmě podíl kapitálu, který je spotřebován je $1 - s$. Spotřeba za jednotku efektivní práce c je rovna výstup za jednotku efektivní práce $f(k)$ vynásobenou konstantou $1 - s$. Zavedeme si novou funkci $c(k(t))$, která značí spotřebu v bodě k, eventuálně v závislosti na čase t

$$c(k(t)) = (1 - s)f(k(t)) = f(k(t)) - sf(k(t)). \tag{4.1}$$

Vrátíme se k předchozí situaci, kdy se ekonomika nachází v bodě rovnovážné investice k^*. Nyní zvýšíme podíl kapitálu věnovanému investicím s na $s + \theta s$ v čase t_0. Jelikož k^* a s jsou konstanty pro $t < t_0$, tedy $c(k^*) = c^*$ je také konstanta. V čase t_0 díky provedené změně dostaneme

$$c(k^*) = f(k^*) - (s + \theta s)f(k^*) = c^* - \theta s f(k^*).$$

Odečítáme kladnou hodnotu, takže funkce $c(k)$ má v čase t_0 skok o velikosti $-\theta s f(k^*)$, tedy spotřeba klesne. Z přechozí části víme (model je totožný), že následně $k(t)$ roste k nové hodnotě $\hat{k}^*$ a $f(k(t)) \nearrow f(\hat{k}^*)$, $t \to \infty$. Proto také

$$c(k) \nearrow (1 - s - \theta s)f(\hat{k}^*). \tag{4.2}$$

Funkce $c(k(t))$ je v čase $t > t_0$ rostoucí podle (4.1) a konverguje k (4.2) .

Nyní se podíváme, jak se chová spotřeba v bodě rovnovážné investice v závislosti na s. Z (4.1)a (3.2) máme

$$c^* = f(k^*) - sf(k^*) = f(k^*) - (n + g + \delta)k^*,$$

kde k^* bereme jako funkci o proměnné s, neboť již víme z předchozí části, že zvýšení s má za následek růst k^*. Budeme psát $k^* = k^*(s)$ a n, g, δ jsou parametry funkce. Předpokládejme nyní, že funkce k^*, respektive c^* je diferencovatelná pro $s \in (0, 1)$. Pak platí

$$\frac{\partial c^*}{\partial s} = [f'(k^*(s)) - (n + g + \delta)]\,\frac{\partial k^*(s)}{\partial s}.$$

Již víme, že zvýšení podílu kapitálu do investic s znamená, že k^* roste ke $\hat{k}^*$. Jinak řečeno k^* je rostoucí funkce proměnné s . Platí tedy

$$\frac{\partial k^*(s)}{\partial s} > 0.$$

Mohou nastat dva případy. Když

$$f'(k^*(s)) > n + g + \delta, \tag{4.3}$$

pak spotřeba v bodě rovnovážné investice roste. Dodatečného výstupu je dostatek k udržení k na své zvýšené hladině.

Pokud

$$f'(k^*(s)) < n + g + \delta, \tag{4.4}$$

spotřeba naopak klesá. Dodatečný výstup z rostoucího kapitálu není dost velký na to, aby udržel zásobu kapitálu na této vyšší úrovni. Z definice intezivní produkční funkce plyne, že $f'(k)$ je klesající funkce k a zároveň $k^*(s)$ je rostoucí funkce s. Podle derivace složené funkce dostaneme

$$\frac{\partial f'(k^*(s))}{\partial s} < 0.$$

Funkce $f'(k^*(s))$ je tedy klesající funkce proměnné s. Jestliže označíme s_0 hodnotu s, pro kterou $f'(k^*(s)) = n + g + \delta$, pak zřejmě pro $s > s_0$ nastane druhý případ (4.4). Tedy spotřeba klesá, pokud stát proinvestuje příliš mnoho svého kapitálu. Pro $s < s_0$ platí (4.3), nastane tedy první případ.

VĚTA 4.1. *Nechť $s \in [0, 1]$. Nechť $k^*(s)$ je hodnota bodu rovnovážné investice v závislosti na proměnné s a je diferencovatelná pro $s \in (0, 1)$. Definujme*

$$c^*(s) = f(k^*(s)) - sf(k^*(s)) = f(k^*(s)) - (n + g + \delta)k^*(s),$$

kde $n + g + \delta > 0$. Pak existuje s_0, který je stacionárním bodem $c^*(s)$.

DŮKAZ. Budeme se snažit ověřovat předpoklady Rolleovy věty 7.2. Podívejme se na hraniční situace. Pokud $s = 0$ (žádný kapitál není investován), pak zřejmě podle (3.2) platí

$$(n + g + \delta)k^*(0) = 0.$$

Pro $(n+g+\delta) > 0$ musí nutně platit $k^*(0) = 0$. Tedy po dosazení $c^*(0) = f(0) = 0$ a spotřeba je nulová. Pokud investujeme celý kapitál $s = 1$, pak opět z (3.2) zřejmě platí

$$f(k^*) = (n + g + \delta)k^*.$$

Po dosazení $c^*(1) = 0$. Musí tedy existovat podle Rolleovy věty $s_0 \in (0, 1)$ takové, že $(c^*)'(s_0) = 0$. □

Vždy tedy existuje optimální hodnota s_0, což je nejlepší možný podíl kapitálu, který se investuje. Pokud spotřeba roste, tak roste riziko, že ekonomické objekty ztratí schopnost splácet své závazky. Klesá-li spotřeba, tedy ochota utrácet za výrobky firem, tedy klesá HDP země.

CHAPTER 5

Odhad změny růstu při změně podílu kapitálu věnovaného investicím

V této části se budeme zabývat vlivem změny míry úspor (tj. podílu kapitálu věnovaného investicím s) na výstup v bodě rovnovážné investice k^*. Nakonec budeme odhadovat rychlost konvergence $k(t)$ ke k^*.

5.1. Elasticita výstupu vzhledem k podílu kapitálu věnovaného investicím s

Definujme y^* ze vztahu (2.5) jako hodnotu v bodě $k(t) = k^*$, tedy

$$y^* = f(k^*). \tag{5.1}$$

Nyní budeme uvažovat " všechny funkce o proměnné k^* " jako funkce s. V dlouhodobém horizontu má růst v úsporách na produkci za jednotku efektivní práce $y(t)$ v bodě rovnovážné investice $k(t) = k^*$ tvar podle (5.1)

$$\frac{\partial y^*}{\partial s} = \frac{\partial f(k^*)}{\partial s} = f'(k^*)\frac{\partial k^*(s)}{\partial s}. \tag{5.2}$$

Bod rovnovážného růstu k^* je definován z Věty 3.2 a splňuje podle (3.2) rovnici

$$sf(k^*(s)) = (n + g + \delta)k^*(s). \tag{5.3}$$

Rovnice (5.3) platí pro všechna $s \in [0, 1]$ a $(n+g+\delta) > 0$. Obě strany rovnice zderivujem podle s a dostaneme

$$sf'(k^*)\frac{\partial k^*}{\partial s} + f(k^*) = (n + g + \delta)\frac{\partial k^*}{\partial s}. \tag{5.4}$$

U k^* vynecháváme argumenty pro jednodušší tvar. Z rovnice (5.4) dostáváme

$$\frac{\partial k^*}{\partial s} = \frac{f(k^*)}{(n + g + \delta) - sf'(k^*)}. \tag{5.5}$$

Dosazením (5.5) do (5.2) obdržíme

$$\frac{\partial y^*}{\partial s} = \frac{f'(k^*)f(k^*)}{(n + g + \delta) - sf'(k^*)}. \tag{5.6}$$

Definice 5.1. Elasticitou výstupu vzhledem k podílu investovaného kapitálu nazveme veličinu $\frac{s}{y^*}\frac{\partial y^*}{\partial s}$.

Elasticita je ekonomický pojem, který charakterizuje pružnost změny jedné veličiny v poměru k změně druhé veličiny. V našem případě změny výstupu v závislosti na změně podílu investovaného kapitálu. Nyní si vyjádříme (5.6) pomocí elasticity a užijeme vztah (5.3)

$$\begin{aligned}\frac{s}{y^*}\frac{\partial y^*}{\partial s} &= \frac{s}{f(k^*)}\frac{f'(k^*)f(k^*)}{(n+g+\delta)-sf'(k^*)}\\ &= \frac{(n+g+\delta)k^*f'(k^*)}{f(k^*)\left[(n+g+\delta)-(n+g+\delta)k^*f'(k^*)/f(k^*)\right]}\\ &= \frac{k^*f'(k^*)/f(k^*)}{1-[k^*f'(k^*)/f(k^*)]},\end{aligned}$$

kde $k^*f'(k^*)/f(k^*)$ je elasticita výstupu vzhledem ke kapitálu v bodě $k = k^*$ a budeme ji značit $\alpha_K(k^*)$. Dostaneme tedy

$$\frac{s}{y^*}\frac{\partial y^*}{\partial s} = \frac{\alpha_K(k^*)}{1-[\alpha_K(k^*)]}.$$

Elasticita výstupu vzhledem k proměnné s závisí na elasticitě výstupu vzhledem k proměnné k v bodě $k = k^*$.

5.2. Odhad rychlosti konvergence $k(t)$ ke k^* v okolí bodu k^*

Jako základ si vezmeme rovnici $k'(t) = sf(k(t)) - (n+g+\delta)k(t)$. Jedná se o diferenciální rovnici typu $k' = g(k)$, kde $g(k)$ je tvaru (3.3). Funkce $g(k)$ je obecně nelineární, takže ji musíme linearizovat. Definujme

$$\tilde{g}(k) = \left[\left.\frac{\partial g(k)}{\partial k}\right|_{k=k^*}\right](k-k^*).$$

Funkce $\tilde{g}(k)$ je aproximací prvního řádu Taylorova rozvoje v bodě $k = k^*$ funkce $g(k)$, kde k^* je klidový stav rovnice $k' = g(k)$ a podle Věty 3.5 platí

$$k(t) \overset{t\to\infty}{\to} k^*.$$

V okolí bodu k^* je $g(k)$ zhruba rovna $\tilde{g}(k)$. Místo $k' = g(k)$, teď řešme $k' = \tilde{g}(k)$.

Označme $\lambda = -\partial g(k)/\partial k|_{k=k^*}$. Pak z odhadu dostáváme

$$k'(t) \cong -\lambda\left[k(t)-k^*\right]. \tag{5.7}$$

Řešení homogenní části diferenciální rovnice (5.7) je

$$k_h(t) \cong e^{-\lambda t}C = e^{\lambda t}k(0).$$

Variací konstant dostaneme

$$k'(t) \cong e^{-\lambda t}\lambda C(t) + e^{-\lambda t}C'(t).$$

Dosadíme do (5.7)

$$-e^{-\lambda t}\lambda C(t) + e^{-\lambda t}C'(t) \cong -\lambda\left[e^{-\lambda t}C(t)-k^*\right]. \tag{5.8}$$

Z (5.8)

$$C'(t) \cong e^{\lambda t}\lambda k^* \text{ a}$$

$$C(T) \cong \lambda k^*\int_0^T e^{\lambda t}dt = \lambda k^*\frac{(e^{\lambda T}-1)}{\lambda} = k^*(e^{\lambda T}-1).$$

Partikulární řešení tedy je

$$k_p(t) \cong e^{-\lambda t}C(t) = e^{-\lambda t}k^*(e^{\lambda t}-1) = k^* - k^*e^{-\lambda t}.$$

Konečně dostáváme

$$k(t) = k_p(t) + k_h(t) \cong k^* + e^{-\lambda t}\left[k(0) - k^*\right] \tag{5.9}$$

jako odhad chování k v okolí bodu $k(t) = k^*$. V rovnici (5.9) zbývá určit λ.

$$\begin{aligned}\lambda \equiv -\frac{\partial g(k)}{\partial k}\Big|_{k=k^*} &= -\left[sf'(k^*) - (n+g+\delta)\right]\\ &= (n+g+\delta) - \frac{(n+g+\delta)k^* f'(k^*)}{f(k^*)}\\ &= \left[1 - \alpha_K(k^*)\right](n+g+\delta).\end{aligned}$$

Druhá rovnost je substituce za s z rovnosti $sf(k^*) = (n+g+\delta)k^*$. Víme, že platí $y^* = f(k^*)$, což je spojitá funkce k v bodě k^*. Funkce$f(k)$ splňuje Inadovy podmínky, a tedy je spojitě diferencovatená na okolí k^*. Platí tedy také

$$y(t) \cong y^* + e^{-\lambda t}\left[y(0) - y^*\right],$$

ale opět pouze v okolí bodu $k(t) = k^*$.

Odhady tedy říkají, že na okolí bodu $k(t) = k^*$ platí $k(t) \to k^*$ a $y(t) \to y^*$ exponenciálně. Z (5.9) máme odhad rychlosti konvergence. To odpovídá Příkladu 3.6.

5.3. Empirické aplikace - vyspělost ekonomiky

Nakonec se krátce zmíníme jakým způsobem je pozorován růst ekonomiky. Veličiny Y, K, L, A se těžko pozoruje. Naproti tomu tempo růstu X'/X se snadno pozoruje z dat, kde X je jedna ze zmíněných proměnných, a proto si vyjádříme rovnice pro tempa růstu zmíněných veličin. Označme si

$$\partial F(K, AL)/\partial X = \partial Y(t)/\partial X(t) \tag{5.10}$$

pro X nabývající K, L, A.

Nyní si dokažme dvě pomocné věty.

Lemma 5.2. Označme $\alpha_K(t) = \frac{K(t)}{Y(t)}\frac{\partial Y(t)}{\partial K(t)}$ a $\alpha_L(t) = \frac{L(t)}{Y(t)}\frac{\partial Y(t)}{\partial L(t)}$, pak platí

$$\alpha_K(t) + \alpha_L(t) = 1. \tag{5.11}$$

Důkaz. Počítejme

$$\begin{aligned}\alpha_K(t) + \alpha_L(t) &= \frac{K(t)}{Y(t)}\frac{\partial Y(t)}{\partial K(t)} + \frac{L(t)}{Y(t)}\frac{\partial Y(t)}{\partial L(t)}\\ &= \frac{1}{Y(t)}\left[K(t)\frac{\partial Y(t)}{\partial K(t)} + L(t)\frac{\partial Y(t)}{\partial L(t)}\right].\end{aligned}$$

Takže nám stačí ukázat, že výraz v hranaté závorce je roven produkci $Y(t)$. Podle (2.6) máme

$$\frac{\partial Y(t)}{\partial K(t)} = f'(k(t)). \tag{5.12}$$

Z (2.3) snadnou úpravou

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(K, AL)}{\partial L} &= Af\Big(\frac{K}{AL}\Big) - ALf'\Big(\frac{K}{AL}\Big)\frac{K}{A}\frac{1}{L^2}\\ &= Af\Big(\frac{K}{AL}\Big) - \frac{K}{L}f'\Big(\frac{K}{AL}\Big).\end{aligned}$$

Tedy dostáváme, že

$$\frac{\partial Y(t)}{\partial L(t)} = A(t)f\Big(\frac{K(t)}{A(t)L(t)}\Big) - \frac{K(t)}{L(t)}f'\Big(\frac{K(t)}{A(t)L(t)}\Big). \tag{5.13}$$

Nyní již můžeme dokončit výpočet

$$\begin{aligned} K(t)\frac{\partial Y(t)}{\partial K(t)} + L(t)\frac{\partial Y(t)}{\partial L(t)} &= K(t)f'\Big(\frac{K(t)}{A(t)L(t)}\Big) + L(t)A(t)f\Big(\frac{K(t)}{A(t)L(t)}\Big) \\ &\quad - K(t)f'\Big(\frac{K(t)}{A(t)L(t)}\Big) \\ &= L(t)A(t)f\Big(\frac{K(t)}{A(t)L(t)}\Big) = Y(t). \end{aligned}$$

Poslední rovnost plyne z (2.3) a tím je důkaz hotov. □

VĚTA 5.3. *Nechť F je produkční funkce, platí tedy $Y(t) = F(K(t), A(t)L(t))$. Pro derivaci $Y(t)$ podle t platí*

$$Y'(t) = \frac{\partial Y(t)}{\partial K(t)}K'(t) + \frac{\partial Y(t)}{\partial L(t)}L'(t) + \frac{\partial Y(t)}{\partial A(t)}A'(t)$$

se značením (5.10).

DŮKAZ. Z (2.3) máme

$$Y(t) = A(t)L(t)f\Big(\frac{K(t)}{A(t)L(t)}\Big).$$

Derivací podle t dostaneme

$$\begin{aligned} Y'(t) &= A'(t)L(t)f\Big(\frac{K(t)}{A(t)L(t)}\Big) + A(t)L'(t)f\Big(\frac{K(t)}{A(t)L(t)}\Big) \\ &\quad + A(t)L(t)f'\Big(\frac{K(t)}{A(t)L(t)}\Big)\frac{K'(t)A(t)L(t) - K(t)\left[A'(t)L(t) + A(t)L'(t)\right]}{\left[A(t)L(t)\right]^2}. \end{aligned}$$

Výraz můžeme upravit do tvaru

$$\begin{aligned} Y'(t) &= K'(t)\Big[f'\Big(\frac{K(t)}{A(t)L(t)}\Big)\Big] + L'(t)\Big[A(t)f\Big(\frac{K(t)}{A(t)L(t)}\Big) - \frac{K(t)}{L(t)}f'\Big(\frac{K(t)}{A(t)L(t)}\Big)\Big] \\ &\quad + A'(t)\Big[L(t)f\Big(\frac{K(t)}{A(t)L(t)}\Big) - \frac{K(t)}{A(t)}f'\Big(\frac{K(t)}{A(t)L(t)}\Big)\Big]. \end{aligned}$$

Z (5.12) dostáváme

$$\frac{\partial Y(t)}{\partial K(t)} = f'\Big(\frac{K(t)}{A(t)L(t)}\Big),$$

dále z (5.13)

$$\frac{\partial Y(t)}{\partial L(t)} = A(t)f\Big(\frac{K(t)}{A(t)L(t)}\Big) - \frac{K(t)}{L(t)}f'\Big(\frac{K(t)}{A(t)L(t)}\Big).$$

Jelikož $A(t)L(t)$ vystupují jako součin v $Y(t) = F(K(t), A(t)L(t))$, pak tedy

$$\frac{\partial Y(t)}{\partial A(t)} = L(t)f\Big(\frac{K(t)}{A(t)L(t)}\Big) - \frac{K(t)}{A(t)}f'\Big(\frac{K(t)}{A(t)L(t)}\Big).$$

Tedy tímto je věta dokázána.

□

Podle Věty 5.3 z $Y(t) = F(K(t), A(t)L(t))$ dostaneme derivací podle t

$$Y'(t) = \frac{\partial Y(t)}{\partial K(t)} K'(t) + \frac{\partial Y(t)}{\partial L(t)} L'(t) + \frac{\partial Y(t)}{\partial A(t)} A'(t). \tag{5.14}$$

Vydělením rovnice (5.14) $Y(t)$ a vhodným rozšířením pravé strany

$$\begin{aligned} \frac{Y'(t)}{Y(t)} &= \frac{K(t)}{Y(t)} \frac{\partial Y(t)}{\partial K(t)} \frac{K'(t)}{K(t)} + \frac{L(t)}{Y(t)} \frac{\partial Y(t)}{\partial L(t)} \frac{L'(t)}{L(t)} + \frac{A(t)}{Y(t)} \frac{\partial Y(t)}{\partial A(t)} \frac{A'(t)}{A(t)} \\ &= \alpha_K(t) \frac{K'(t)}{K(t)} + \alpha_L(t) \frac{L'(t)}{L(t)} + R(t), \end{aligned}$$

kde veličinu

$$R(t) \equiv \frac{\partial Y(t)}{\partial A(t)} \frac{A'(t)}{Y(t)}$$

nazveme Solowův reziduál. Odečtením $\frac{L'(t)}{L(t)}$ a dosazením faktu $\alpha_L(t) + \alpha_K(t) = 1$ dostaneme

$$\frac{Y'(t)}{Y(t)} - \frac{L'(t)}{L(t)} = \alpha_K(t) \left[\frac{K'(t)}{K(t)} - \frac{L'(t)}{L(t)} \right] + R(t). \tag{5.15}$$

Kde $\alpha_K(t)$ může být měřeno jako podíl příjmů, které jdou do kapitálu a $R(t)$ se měří jako reziduál. Pro snadnější interpretaci rovnice (5.15) dokážeme následující lemma.

LEMMA 5.4. Nechť $X(t)$ je diferencovatelná na $[0, \infty)$. Dále označme $g_X(t) = \frac{X'(t)}{X(t)}$ tempo růstu veličiny X. Pak platí

$$g_{P/Q}(t) = g_P(t) - g_Q(t).$$

DŮKAZ. Spočítáme si tempo růstu veličiny P/Q

$$\begin{aligned} g_{P/Q}(t) &= \left(\frac{P(t)}{Q(t)} \right)' \frac{Q(t)}{P(t)} = \frac{P'(t)Q(t) - Q'(t)P(t)}{(Q(t))^2} \frac{Q(t)}{P(t)} \\ &= \frac{P'(t)}{P(t)} - \frac{Q'(t)}{Q(t)} = g_P(t) - g_Q(t). \end{aligned}$$

□

Rovnici (5.15) můžeme podle Lemmatu 5.4 zapsat ve tvaru

$$g_{Y/L}(t) = \alpha_K(t) g_{K/L}(t) + R(t). \tag{5.16}$$

Rovnice (5.16) ukazuje způsob chování ekonomiky pomocí rozkladu tempa růstu produkce za pracovníka ($g_{Y/L}(t)$) na příspívání tempa růstu kapitálu za pracovníka ($g_{K/L}(t)$) plus Solowův reziduál. Solowův reziduál se velmi často interpretuje jako příspěvěk technologického pokroku. Pokud dvě ekonomiky mají shodné $g_{K/L}(t)$, pak zřejmě ekonomika, která má vyšší $g_{Y/L}(t)$, je vyspělejší.

CHAPTER 6

Přírodní zdroje a půda

V této části se budeme snažit model rozšířit o přírodní zdroje a půdu. Pro názornou ilustraci budeme pracovat s Cobb-Douglasovou produkční funkcí. Cobb-Douglasovou produkční funkcí zohledňující přírodní zdroje a půdu rozumíme

$$Y(t) = K(t)^{\alpha} R(t)^{\beta} T(t)^{\gamma} [A(t)L(t)]^{1-\alpha-\beta-\gamma}, \tag{6.1}$$

kde $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ a $\alpha + \beta + \gamma < 1$. Dále R značí přírodní zdroje a T množství půdy. V platnosti nadále zůstávají předpoklady (2.8), (2.9), (2.12) tedy

$$L'(t) = nL(t) \ , \ A'(t) = gA(t) \text{ a } K'(t) = sY(t) - \delta K(t).$$

6.1. Omezené zdroje půdy a přírodních surovin

Jelikož množství půdy T je z dlouhodobého horizontu fixní, proto požadujeme $T'(t) = 0$. Pro přírodní zdroje R předpokládáme rovnoměrný růst, nicméně je důležité si uvědomit, že zdroje se časem vyčerpávají, tedy dostáváme

$$R'(t) = -bR(t), b > 0. \tag{6.2}$$

Přítomnost půdy a přírodních zdrojů znamená, že $K(t)/(A(t)L(t))$ nemusí konvergovat k nějaké hodnotě a nemůžeme použít předchozí analýzu $K(t)/(A(t)L(t))$. Naším cílem je popsat, kdy je ekonomika ve stavu rovnoměrného růstu, tedy kdy všechny její parametry mají rovnoměrný růst. Z předpokladů máme rovnoměrný růst pro A, L, T a R. Zbývá tedy určit, kdy K, Y mají rovnoměrný růst.

Z (2.12) dostáváme

$$\frac{K'(t)}{K(t)} = s\frac{Y(t)}{K(t)} - \delta. \tag{6.3}$$

Aby tempo růstu K bylo konstantní, tak $Y(t)/K(t)$ musí být konstantní podle (6.3). Jinak řečeno tempo růstu K a Y je stejné. Vyjdeme z produkční funkce (6.1), kterou upravíme, abychom mohli použít předchozích úvah. Nejprve danou funkci (6.1) zlogaritmujeme. Dostáváme tedy

$$\log Y(t) = \alpha \log K(t) + \beta \log R(t) + \gamma \log T(t) + (1-\alpha-\beta-\gamma)[\log A(t) + \log L(t)]. \tag{6.4}$$

Nyní funkci (6.4) zderivujeme podle t a získáme

$$g_Y(t) = \alpha g_K(t) + \beta g_R(t) + \gamma g_T(t) + (1-\alpha-\beta-\gamma)[g_A(t) + g_L(t)], \tag{6.5}$$

kde $g_X(t) = X'(t)/X(t)$ je tempo růstu X. Do (6.5) můžeme dosadit přepoklady $g_R(t) = -b$, $g_T(t) = 0$, $g_A(t) = g$ a $g_L(t) = n$. Tedy máme

$$g_Y(t) = \alpha g_K(t) - \beta b + (1-\alpha-\beta-\gamma)(n+g). \tag{6.6}$$

Pokud je ekonomika ve stavu rovnoměrného růstu, pak platí $g_Y^{rs} = g_K^{rs}$, tedy tempa růstu Y, K při rovnoměrném růstu jsou shodná. Dosazením do (6.6) dostáváme

$$g_Y^{rs} = g_K^{rs} = \frac{-\beta b + (1-\alpha-\beta-\gamma)(n+g)}{1-\alpha}. \tag{6.7}$$

Zdá se, že máme hledanou hodnotu $g_Y^{rs} = g_K^{rs}$, nicméně podle (6.3) máme

$$g_K^{rs} = s\frac{Y(t)}{K(t)} - \delta.$$

Dosadíme-li do (6.7) dostaneme

$$s\frac{Y(t)}{K(t)} = \frac{-\beta b + (1-\alpha-\beta-\gamma)(n+g) + (1-\alpha)\delta}{1-\alpha}. \tag{6.8}$$

Víme, že $1-\alpha > 0$ podle (6.1) a s je podíl kapitálu věnovaný investicím, tedy $s \in [0,1]$. Pokud nastane

$$-\beta b + (1-\alpha-\beta-\gamma)(n+g) + (1-\alpha)\delta < 0,$$

pak musí platit $\frac{Y(t)}{K(t)} < 0$. Ovšem z ekonomického hlediska má smysl jen $\frac{Y(t)}{K(t)} > 0$, pro $Y(t) > 0, K(t) > 0$. Proto navíc předpokládejme

$$-\beta b + (1-\alpha-\beta-\gamma)(n+g) + (1-\alpha)\delta > 0.$$

Povšimněme si, že podle (6.7) platí

$$Y_{rs}(t) = Y(0)e^{(\frac{-\beta b + (1-\alpha-\beta-\gamma)(n+g)}{1-\alpha})t}, \tag{6.9}$$

a tudíž podle (6.3) následně

$$K_{rs}(t) = \frac{s(1-\alpha)}{-\beta b + (1-\alpha-\beta-\gamma)(n+g) + (1-\alpha)\delta} Y(0)e^{(\frac{-\beta b + (1-\alpha-\beta-\gamma)(n+g)}{1-\alpha})t}. \tag{6.10}$$

Funkce $Y_{rs}(t)$,$K_{rs}(t)$ splňují veškeré požadované rovnosti. Stav rovnoměrného růstu tedy existuje.

Nyní se podíváme, zda ekonomika konverguje k rovnoměrnému růstu. Jestliže $g_K(t) > g_Y^{rs}$, pak platí $g_K(t) = \Delta + g_Y^{rs}$, (kde $\Delta > 0$). Podle (6.6) dostaneme

$$g_Y(t) = \alpha(\Delta + g_Y^{rs}) - \beta b + (1-\alpha-\beta-\gamma)(n+g). \tag{6.11}$$

Z faktu $g_Y^{rs} = g_K^{rs}$ plyne, že

$$g_Y^{rs} = \alpha g_Y^{rs} - \beta b + (1-\alpha-\beta-\gamma)(n+g).$$

Dosadíme-li tento fakt do (6.11) dostaneme

$$g_Y(t) - g_Y^{rs} = \alpha\Delta. \tag{6.12}$$

To znamená, že platí $g_K(t) > g_Y(t) > g_Y^{rs}$, neboť podle (6.1) je $\alpha \in (0,1)$. Z $Y(t) > 0, K(t) > 0$ vyplývá, že $\frac{Y(t)}{K(t)}$ je klesající, protože

$$g_{Y/K}(t) = g_Y(t) - g_K(t) < 0$$

z Lemmatu 5.4. Z rovnice (6.3) je $g_K(t)$ je klesající. Funkce $g_K(t)$ je omezená, neboť $g_K(0) \geq g_K(t) \geq g_Y^{rs}$, tedy $g_K(t)$ má limitu. Tvrdíme, že $g_K(t) \searrow g_Y^{rs}$, a tedy ekonomika konverguje k rovnoměrnému růstu. Podobnou úvahu lze zopakovat pro $g_K(t) < g_Y^{rs}$. Nyní konvergenci k rovnoměrnému růstu dokážeme pomocí následující Věty.

VĚTA 6.1 (Konvergence k rovnoměrnému růstu). *Nechť se ekonomika řídí Cobb-Douglasovou produkční funkcí* (6.1). *Dále nechť jsou splněny předpoklady* $g_R(t) = -b$, $g_T(t) = 0$, $g_A(t) = g$ *a* $g_L(t) = n$ *a* $K'(t) = sY(t) - \delta K(t)$, *pak ekonomika konverguje k rovnoměrnému růstu právě tehdy, když*

$$-\beta b + (1-\alpha-\beta-\gamma)(n+g) + (1-\alpha)\delta > 0.$$

To znamená

$$g_K(t) \overset{t\to\infty}{\to} \frac{-\beta b + (1-\alpha-\beta-\gamma)(n+g)}{1-\alpha},$$

$$g_Y(t) \overset{t\to\infty}{\to} \frac{-\beta b + (1-\alpha-\beta-\gamma)(n+g)}{1-\alpha}.$$

Značíme $g_K^{rs}(t)$ *a* $g_Y^{rs}(t)$.

DŮKAZ. Tento důkaz staví na rovnici (6.3)

$$g_K(t) = s\frac{Y(t)}{K(t)} - \delta.$$

Dále na rovnici (6.6)

$$g_Y(t) = \alpha g_K(t) - \beta b + (1-\alpha-\beta-\gamma)(n+g).$$

Odečtením $g_K(t)$ z obou stran rovnice (6.6) dostaneme

$$g_{Y/K}(t) = g_Y(t) - g_K(t) = (\alpha-1)g_K(t) - \beta b + (1-\alpha-\beta-\gamma)(n+g). \tag{6.13}$$

Označme si $M(t) = Y(t)/K(t)$ a $H = \beta b + (1-\alpha-\beta-\gamma)(n+g)$. Dosazením (6.3) do (6.13) dostaneme

$$\frac{M'(t)}{M(t)} = (\alpha-1)(sM(t)-\delta) + H. \tag{6.14}$$

Jedná se o tvar Bernoulliovy rovnice, kterou umíme vyřešit. Nyní si dále označme $v = (\alpha-1)s$ a $\tilde{H} = H + (1-\alpha)\delta$. Pak lze (6.14) zapsat ve tvaru

$$\frac{M'(t)}{(M(t))^2} = v + \frac{\tilde{H}}{M(t)}. \tag{6.15}$$

Teď provedeme substituci

$$N(t) = \frac{1}{M(t)}$$

do (6.15) a dostaneme

$$N'(t) = -v - \tilde{H}N(t). \tag{6.16}$$

Řešení homogenní části diferenciální rovnice (6.16) je

$$N_h(t) = e^{-\tilde{H}t}C. \tag{6.17}$$

Variací konstant dostaneme

$$N'(t) = (-\tilde{H})e^{-\tilde{H}t}C(t) + e^{-\tilde{H}t}C'(t).$$

Nyní máme podle (6.16)

$$e^{-\tilde{H}t}C'(t) = -v. \tag{6.18}$$

Z (6.18) vyplývá

$$C(t) = -v \int_0^t e^{\tilde{H}\tau} d\tau = \frac{-v}{\tilde{H}}(e^{\tilde{H}t} - 1).$$

Hledané partikulární řešení je tedy

$$N_p(t) = \frac{-v}{\tilde{H}}(1 - e^{-\tilde{H}t}). \tag{6.19}$$

Řešení diferenciální rovnice (6.16) je podle (6.17) a (6.19)

$$N(t) = N_h(t) + N_p(t) = e^{-\tilde{H}t}C + \frac{-v}{\tilde{H}}(1 - e^{-\tilde{H}t}). \tag{6.20}$$

Podle označení $M(t)$ a $N(t)$ platí

$$N(t) = K(t)/Y(t).$$

Podle (6.9) a (6.10) pro rovnoměrný růst platí

$$\frac{K_{rs}(t)}{Y_{rs}(t)} = \frac{s(1-\alpha)}{-\beta b + (1-\alpha-\beta-\gamma)(n+g) + (1-\alpha)\delta}. \tag{6.21}$$

Z toho plyne podle (6.3)

$$g_K^{rs}(t) = s\frac{Y_{rs}(t)}{K_{rs}(t)} - \delta.$$

Následně získáme z $g_Y^{rs}(t)$ z rovnice (6.6).

Je dobré si nyní připomenout označení

$$\tilde{H} = -\beta b + (1-\alpha-\beta-\gamma)(n+g) + (1-\alpha)\delta,$$
$$v = (\alpha - 1)s.$$

Nyní budeme řešit tři případy .

- Nechť $\tilde{H} > 0$, pak

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} N(t) &= \lim_{t\to\infty} \frac{K(t)}{Y(t)} \\ &= \lim_{t\to\infty} e^{-\tilde{H}t}C + \frac{-v}{\tilde{H}}(1 - e^{-\tilde{H}t}) \\ &= \frac{-v}{\tilde{H}} = \frac{s(1-\alpha)}{-\beta b + (1-\alpha-\beta-\gamma)(n+g) + (1-\alpha)\delta}.\end{aligned}$$

  Tedy také

$$g_K(t) \overset{t\to\infty}{\to} g_K^{rs}(t) \text{ a } g_Y(t) \overset{t\to\infty}{\to} g_Y^{rs}(t).$$

  Ekonomika tedy konverguje podle (6.21) a (6.7) k rovnoměrnému růstu.

- Nechť $\tilde{H} < 0$, pak

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} N(t) &= \lim_{t\to\infty} \frac{K(t)}{Y(t)} \\ &= \lim_{t\to\infty} e^{-\tilde{H}t}C + \frac{-v}{\tilde{H}}(1 - e^{-\tilde{H}t}) \\ &= +\infty,\end{aligned}$$

což znamená

$$\lim_{t\to\infty} \frac{Y(t)}{K(t)} = 0.$$

Tudíž podle (6.3) dostáváme

$$\lim_{t\to\infty} g_K(t) = -\delta.$$

Ekonomika podle (6.21) k rovnoměrnému růstu nekonverguje.

- Nechť $\tilde{H} = 0$, pak podle (6.16)

$$N'(t) = -v.$$

Z toho vyplývá

$$N(t) = -vt + C.$$

Jelikož $\alpha - 1 < 0$ a $s > 0$, pak platí

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} N(t) &= \lim_{t\to\infty} \frac{K(t)}{Y(t)}\\ &= \lim_{t\to\infty} N(t) = -vt + C\\ &= +\infty,\end{aligned}$$

protože $v < 0$. Tudíž také

$$\lim_{t\to\infty} \frac{Y(t)}{K(t)} = 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} g_K(t) = -\delta.$$

Ekonomika opět podle (6.21) nekonverguje k rovnoměrnému růstu.

Ekonomika konverguje k rovnoměrnému růstu pouze tehdy, když

$$-\beta b + (1-\alpha-\beta-\gamma)(n+g) + (1-\alpha)\delta > 0.$$

□

Z Věty 6.1 plyne, že intuitivní ekonomický předpoklad $\frac{Y(t)}{K(t)} > 0$ se ukazuje býti zásadní. Pro případ $\frac{Y(t)}{K(t)} \leq 0$ ekonomika k rovnoměrnému růstu nekonverguje, pokud lze o nějakém vůbec uvažovat.

Nakonec se podíváme na tempo růstu produkce za pracovníka ve stavu rovnoměrného růstu

$$\begin{aligned} g^{rs}_{Y/L} &= g^{rs}_Y - g^{rs}_L\\ &= \frac{-\beta b + (1-\alpha-\beta-\gamma)(n+g)}{1-\alpha} - n\\ &= \frac{-\beta b + (1-\alpha-\beta-\gamma)g - (\beta+\gamma)n}{1-\alpha}.\end{aligned}$$

Nyní si shrneme výsledky. Pro

$$(1-\alpha-\beta-\gamma)(n+g) + (1-\alpha)\delta < \beta b$$

neexistuje stav rovnoměrného růstu, když

$$(1-\alpha-\beta-\gamma)(n+g) + (1-\alpha)\delta > \beta b,$$

pak stav rovnoměrného růstu existuje. V rozšířeném modelu neexistuje stav rovnoměrného růstu vždy, ale pokud existuje, pak ekonomika konverguje k rovnoměrnému růstu.

6.2. Neomezené zdroje půdy a přírodních surovin

V této části vyjdeme opět z rovnice (6.1). Pro neomezené přírodní zdroje a půda předpokládáme, že $R'(t) = nR(t)$, $T'(t) = nT(t)$. Tento model můžeme použít pro méně zalidněné státy. Tedy tempo růstu půdy a přírodní zdrojů je stejný jako růst populace (práce). Dosazením do (6.5) dostáváme

$$g_Y(t) = \alpha g_K(t) + (\beta + \gamma)n + (1 - \alpha - \beta - \gamma)(n + g). \tag{6.22}$$

Podle (6.3) máme $g_Y^{\tilde{rs}} = g_K^{\tilde{rs}}$ a z (6.22) získáme

$$g_Y^{\tilde{rs}} = \frac{(\beta + \gamma)n + (1 - \alpha - \beta - \gamma)(n + g)}{1 - \alpha} = \frac{(1 - \alpha - \beta - \gamma)g}{1 - \alpha} + n. \tag{6.23}$$

Z (6.3) a z (6.23) vidíme, že

$$\frac{(1 - \alpha - \beta - \gamma)g}{1 - \alpha} + n + \delta = s\frac{Y(t)}{K(t)} > 0,$$

jelikož

$$n > 0,\ \delta > 0,\ g > 0,\ s > 0,\ 1 - \alpha - \beta - \gamma > 0,\ 1 - \alpha > 0$$

podle (6.1), (2.8), (2.9), (2.12). Pro všechny hodnoty povolených parametrů tedy rovnoměrný stav existuje. Konvergence k rovnoměrnému růstu je stejná jako pro omezené zásoby půdy a přírodních zdrojů.

Opět se podíváme na tempo růstu produkce za pracovníka ve stavu rovnoměrného růstu

$$g_{Y/L}^{\tilde{rs}} = g_Y^{\tilde{rs}} - g_L^{\tilde{rs}} = \frac{(1 - \alpha - \beta - \gamma)g}{1 - \alpha}. \tag{6.24}$$

Rovnice (6.24) říká, že tempo růstu produkce za pracovníka ve stavu rovnoměrného růstu nezávisí na tempu růstu populace (práce) n.

Na závěr se podívejme, jak moc se liší situace s omezenými-neomezenými přírodními zdroji a půdou. Dostáváme, že

$$\begin{aligned} g_{Y/L}^{\tilde{rs}} - g_{Y/L}^{rs} &= \frac{(1 - \alpha - \beta - \gamma)g - [-\beta b + (1 - \alpha - \beta - \gamma)g - (\beta + \gamma)n]}{1 - \alpha} \\ &= \frac{\beta b + (\beta + \gamma)n}{1 - \alpha}. \end{aligned}$$

Rozdíl v tempu růstu produkce za pracovníka mezi situací s omezenými-neomezenými přírodními zdroji a půdou nezávisí na tempu růstu znalostí g. Veličina Y/L roste rychleji pro neomezené zdroje.

CHAPTER 7

Appendix

Věta 7.1 (Lagrangeova věta o střední hodnotě). [**3**, Věta 133]*Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $[a,b]$ a má derivaci všude v otevřeném intervalu (a,b) : Pak existuje $c \in (a,b)$ taková, že*

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Věta 7.2 (Rolleova věta). [**3**, Věta 132]*Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $[a,b]$ a nechť derivace fukce f existuje ve všech bodech $x \in (a,b)$. Dále nechť je $f(a) = f(b)$. Pak existuje $c \in (a,b)$ taková, že*

$$f'(c) = 0.$$

Věta 7.3 (Picard). [**2**, Věta 1.2]*Nechť $\gamma > 0$, $t_0 \in R$ a nechť*

$$I = (t_0 - 2\gamma, t_0 + 2\gamma) \times (k_0 - 2\gamma, k_0 + 2\gamma).$$

Předpokládejme, že platí

$$k' = G(t,k), \tag{7.1}$$

že G je spojitá funkce v intervalu I, a že existuje kladné číslo M takové, že pro všechna $t \in (t_0 - 2\gamma, t_0 + 2\gamma)$ a pro všechna $k \in (k_0 - 2\gamma, k_0 + 2\gamma)$ platí

$$|G(t,k_1) - G(t,k_2)| \leq M\,|k_1 - k_2|\,. \tag{7.2}$$

Potom platí

(i) *existuje interval (c,d) a řešení k rovnice* (7.1) *na intervalu (c,d) takové ,že $t_0 \in (c,d)$ a řešení vyhovuje počáteční podmínce $k(t_0) = k_0$.*

(ii) *jestliže k_1, k_2 splňují*

$$k_1(t_0) = k_2(t_0) = k_0,$$

existuje okolí t_0 na kterém tato řešení splývají.

Definice 7.4. Mějme autonomní diferenciální rovnici $x' = f(x)$, pak x_0 je klidovým stavem rovnice jestliže $f(x_0) = 0$.

Věta 7.5 (stabilita). [**2**, Věta 11.11] *Nechť $f(x)$ je spojitá. Je-li bod x_0 jediným klidovým stavem rovnice $x' = f(x)$ a existuje-li $f'(x_0)$, pak pro $f'(x_0) < 0$ pro klidový stav x_0 platí*

$$x(t) \stackrel{t\to\infty}{\to} x_0.$$

Bibliography

[1] David Romer: *Advanced macroeconomics*, University of Califonia, M^c Graw Hill, 2005.
[2] Josef Kofroň: *Obyčejné diferenciální rovnice*, Karolinum, 2004.
[3] Vojtěch Jarník: *Diferenciální počet*, Academia, 1984.