Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Martin Tůma

Diskrétní Fourierova transformace

Katedra numerické matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Karel Najzar, CSc.
Studijní program: Obecná matematika

2008

Na tomto místě bych rád poděkoval svému vedoucímu doc. RNDr. Karlovi Najzarovi, CSc. za vedení práce, cenné rady a zapůjčenou literaturu.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne Martin Tůma

Obsah

Název práce: Diskrétní Fourierova transformace
Autor: Martin Tůma
Katedra: Katedra numerické matematiky
Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Karel Najzar, CSc.
e-mail vedoucího: Karel.Najzar@mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme diskrétní Fourierovu transformaci (DFT). Nejprve uvádíme definice DFT a její inverze (IDFT) v prostorech $l^2(\mathbb{Z}_N), l^2(\mathbb{Z})$ a v součinovém prostoru $l^2(\mathbb{Z}_{N_1}) \times \ldots \times l^2(\mathbb{Z}_{N_d})$. Dále podáváme výklad jejich základních vlastností. Definujeme některé operace s vektory, jako jsou translace, konvoluce a konjugovaná reflexe. Následně studujeme jejich vztahy a souvislosti s DFT a věnujeme se lineárním operacím při DFT. Nakonec představujeme myšlenku tzv. rychlé Fourierovy transformace (FFT). Používáme vyloženou teorii na výpočet vlastních čísel translačně invariantních transformací a aplikujeme DFT na kompresi dat.

Klíčová slova: diskrétní Fourierova transformace, Fourierova báze, rychlá Fourierova transformace

Title: Discrete Fourier transform
Author: Martin Tůma
Department: Department of Numerical Mathematics
Supervisor: Doc. RNDr. Karel Najzar, CSc.
Supervisor's e-mail address: Karel.Najzar@mff.cuni.cz

Abstract: In the present Thesis we study the discrete Fourier transform (DFT). First we introduce definitions of the DFT and of its inversion (IDFT) in the spaces $l^2(\mathbb{Z}_N), l^2(\mathbb{Z})$ and in the product space $l^2(\mathbb{Z}_{N_1}) \times \ldots \times l^2(\mathbb{Z}_{N_d})$. Then we summarize elementary features of DFT and IDFT. We define some operations with vectors as the translation, the convolution and the conjugate reflection. In the following we study their properties and their relations to DFT. We take a look at the relation between DFT and the linear operators as well. Then we explain the main idea of the fast Fourier transform (FFT). We finalize the Thesis by using the DFT to find eigenvalues of the translation invariant transformations, and to compress data more efficiently.

Keywords: discrete Fourier transform, Fourier basis, fast Fourier transform

Kapitola 1

Úvod

Bakalářská práce je členěna do čtyř kapitol. První a poslední jsou úvod a závěr. Druhá kapitola je věnovaná teorii diskrétní Fourierovy transformace (DFT). Studujeme DFT postupně ve třech různých prostorech. Jsou to $l^2(\mathbb{Z}_N), l^2(\mathbb{Z})$ a součinový prostor $l^2(\mathbb{Z}_{N_1}) \times \ldots \times l^2(\mathbb{Z}_{N_d})$. Dále ukazujeme její základní vlastnosti. Věnujeme se teorii týkající se některých operací s vektory, jako jsou translace, konvoluce a konjugovaná reflexe. Nakonec uvádíme několik tvrzení ke vztahu DFT a lineárních operací. Nejdůležitější pro následné aplikace je DFT v $l^2(\mathbb{Z}_N)$. Také proto je jí věnováno nejvíce prostoru a všechny tvrzení jsou uvedeny s důkazy. Třetí kapitola je věnovaná praktickým aplikacím vyložené teorie. Nejdříve představíme myšlenku algoritmu tzv. rychlé Fourierovy transformace (FFT). Uvedeme jeho časovou složitost a srovnáme ji s časovou složitostí prosté implementace DFT. Poté aplikujeme DFT na výpočet vlastních čísel translačně invariantních transformací a na kompresi dat.

Podkapitoly (2.1) − (2.4) , (3.1) a (3.2) tvoří text, který je zčásti převzatý z [2] a [3] s doplněním chybějících důkazů a některých příkladů. V (2.5) bylo čerpáno z [1]. Při práci byla také využita kniha [4]. Vzhledem k všeobecné známosti většiny vzorců není v dalším textu nikde explicitně citována. Závěr práce, který tvoří ukázka aplikace DFT na kompresi dat, je původní. Přínos v této bakalářské práci tvoří doplnění některých důkazů, které chybějí v citovaných publikacích, snad přehledné zpracování celé problematiky, sjednocení terminologie tak, aby v práci tvořila homogenní celek, předvedení názorných příkladů a aplikace diskrétní Fourierovy transformace na kompresi dat.

Kapitola 2

Teorie diskrétní Fourierovy transformace

2.1 Definice DFT v $l^2(\mathbb{Z}_N)$ a její vlastnosti

Pomocí $\mathbb{Z}$ budeme značit množinu všech celých čísel. Pod symbolem $\mathbb{Z}_N$ rozumíme konečnou množinu $(0, 1, \ldots, N-1)$. V textu pracujeme s vektory

$$z = (z(0), \ldots, z(N-1)).$$

Na vektor z lze tedy nahlížet jako na funkci definovanou na konečné množině $\mathbb{Z}_N$. Pokud nebude na některém místě řečeno jinak, uvažujeme vždy sloupcové vektory. Prostor $l^2(\mathbb{Z}_N)$ je normovaný lineární prostor vektorů $z = (z(0), \ldots, z(N-1)); z(n) \in \mathbb{C}, n = 0, \ldots, N-1$. Skalární součin a normu pro vektory $z, w \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ definujeme takto

$$(z, w) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n)\overline{w(n)}, \qquad \| z \| = \sqrt{(z, z)}.$$

Definice 2.1.1. *(Kroneckerovo delta) Funkce δ_{jk}, definovaná předpisem*

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 0, & \textit{pokud} \quad j \neq k, \\ 1, & \textit{pokud} \quad j = k, \end{cases}$$

se nazývá Kroneckerovo delta.

Definice 2.1.2. *Systém $\mathcal{E} = (e_0, \ldots, e_{N-1})$, kde $e_k \in l^2(Zn), e_k(j) = \delta_{kj}; k, j = 0, \ldots, N-1$ se nazývá Euklidova báze v $l^2(\mathbb{Z}_N)$.*

Definice 2.1.3. *Systém* $E = (E_0, \dots, E_{N-1})$, *kde* $E_m(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i m n/N}$ *se nazývá trigonometrická báze v* $l^2(\mathbb{Z}_N)$.

Nyní je třeba ukázat, že právě definovaná trigonometrická báze skutečně tvoří bázi v $l^2(\mathbb{Z}_N)$ a naše definice je tedy oprávněná.

Lemma 2.1.1. *Trigonometrická báze je ortonormální báze v* $l^2(\mathbb{Z}_N)$.

Důkaz. Vezměme jakékoli $j, k \in (0, 1, \dots, N-1)$ a spočítáme skalární součin E_j a E_k

$$\begin{aligned}(E_j, E_k) &= \sum_{n=0}^{N-1} E_j(n)\overline{E_k(n)} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i j n/N} \overline{\frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i k n/N}} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} e^{2\pi i (j-k) n/N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (e^{2\pi i (j-k)/N})^n.\end{aligned}$$

Pokud $j = k$, pak

$$(E_j, E_j) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} 1 = 1.$$

Pokud $j \neq k$, pak $|e^{2\pi i (j-k)/N}| < 1$ a sumu v posledním výrazu můžeme zapsat jako částečný součet geometrické řady

$$\sum_{n=0}^{N-1} (e^{2\pi i (j-k)/N})^n = \frac{1 - (e^{2\pi i (j-k)/N})^N}{1 - e^{2\pi i (j-k)/N}}.$$

Nyní vidíme, že

$$(e^{2\pi i (j-k)/N})^N = e^{2\pi i (j-k)} = e^{2\pi i l}, \qquad l \in \mathbb{Z}.$$

Tedy platí

$$(E_j, E_k) = \delta_{jk}.$$

Norma $\|E_j\| = \sqrt{(E_j, E_j)} = 1; j \in (0, \dots, N-1)$. Trigonometrická báze proto tvoří ortonormální množinu v $l^2(\mathbb{Z}_N)$. Z ortonormality plyne lineární nezávislost celého systému a jde tedy skutečně o bázi. $\square$

Díky ortonormalitě trigonometrické báze můžeme každý vektor $z \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ napsat ve tvaru

$$z = \sum_{m=0}^{N-1} (z, E_m) E_m, \tag{2.1}$$

kde pro skalární součin (z, E_m) platí

$$(z, E_m) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{2\pi imn/N}.$$

Definice 2.1.4. *Systém $F = (F_0, \dots, F_{N-1})$, kde $F_m(n) = \frac{1}{N} e^{2\pi imn/N}$ se nazývá Fourierova báze v $l^2(\mathbb{Z}_N)$.*

Lemma 2.1.2. *Fourierova báze je ortogonální báze v $l^2(\mathbb{Z}_N)$.*

Důkaz. Stačí, když si uvědomíme vztah mezi trigonometrickou a Fourierovou bází. Platí

$$F_m(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} E_m(n).$$

Jde tedy o ortogonální bázi. □

Definice 2.1.5. *Pro vektor $z = (z(0), \dots, z(N-1)) \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ definujeme diskrétní Fourierovu transformaci (DFT) jako zobrazení*

$$\wedge : l^2(\mathbb{Z}_N) \to l^2(\mathbb{Z}_N),$$

$$z \mapsto \hat{z},$$

kde

$$\hat{z} = (\hat{z}(0), \hat{z}(1), \dots, \hat{z}(N-1)),$$

$$\hat{z}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi imn/N}.$$

Definice 2.1.6. *Pro vektor $z \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ definujeme periodické rozšíření po složkách takto*

$$z(n+N) = z(n), \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Nyní se podívejme, jak vypadá DFT pro periodicky rozšířený vektor $z \in l^2(\mathbb{Z}_N)$. Protože

$$e^{-2\pi iNn/N} = e^{-2\pi in} = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{Z},$$

platí

$$\hat{z}(m+N) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n)e^{-2\pi i(m+N)n/N} = \sum_{n=0}^{N-1} z(n)e^{-2\pi imn/N}e^{-2\pi iNn/N} = \hat{z}(m).$$

Z výpočtu je vidět, že výsledný vektor $\hat{z}$ je také periodický s periodou N. V dalším textu budeme pro periodicky rozšířené vektory z a $\hat{z}$ užívat stejné označení jako pro jejich nerozšířené verze.

Věta 2.1.1. *Pro každé $z, w \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ platí*

1. *Fourierova inverzní formule*

$$z(n) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m)e^{2\pi imn/N} = \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m)F_m(n). \tag{2.2}$$

2. *Parsevalova rovnost*

$$(z, w) = \frac{1}{N}(\hat{z}, \hat{w}). \tag{2.3}$$

3. *Plancherelova formule*

$$\| z \|^2 = \frac{1}{N} \| \hat{z} \|^2 . \tag{2.4}$$

Důkaz.

1. Především

$$(z, E_m) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n)\overline{\frac{1}{\sqrt{N}}e^{2\pi imn/N}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=0}^{N-1} z(n)e^{-2\pi imn/N} = \frac{1}{\sqrt{N}}\hat{z}(m).$$

Podle (2.1) víme, že

$$z(n) = \sum_{m=0}^{N-1}(z, E_m)E_m(n).$$

Takže

$$\begin{aligned} z(n) &= \sum_{m=0}^{N-1}(z,E_m)E_m(n) = \sum_{m=0}^{N-1}\frac{1}{\sqrt{N}}\hat{z}(m)\frac{1}{\sqrt{N}}e^{2\pi imn/N} = \\ &= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\hat{z}(m)e^{2\pi imn/N} = \sum_{m=0}^{N-1}\hat{z}(m)F_m(n). \end{aligned}$$

2. Stačí si uvědomit, že

$$(z,w) = \sum_{m=0}^{N-1}(z,E_m)\overline{(w,E_m)} = \sum_{m=0}^{N-1}\frac{1}{\sqrt{N}}\hat{z}(m)\frac{1}{\sqrt{N}}\overline{\hat{w}(m)} = \frac{1}{N}(\hat{z},\hat{w}).$$

3. Plyne po dosazení $w = z$ v 2.

□

Poznámka 2.1.1. Díky Fourierově inverzní formuli a definici DFT vidíme, že DFT je lineární zobrazení, které je *prosté* a *na*. Jde tedy o *bijekci*.

První část předcházející věty nám také dává nový pohled na složky vektoru $\hat{z}$ při DFT vektoru $z \in l^2(\mathbb{Z}_N)$,

$$z = \sum_{m=0}^{N-1}\hat{z}(m)F_m.$$

Víme, že $F = (F_0, \ldots, F_{N-1})$ je ortogonální báze prostoru $l^2(\mathbb{Z}_N)$. Složky vektoru $\hat{z}$ jsou tedy souřadnicemi vektoru z vzhledem k ortogonální Fourierově bázi,

$$\hat{z} = [z]_F.$$

DFT je lineární zobrazení z $l^2(\mathbb{Z}_N)$ do $l^2(\mathbb{Z}_N)$. Dim $l^2(\mathbb{Z}_N) = N$. Každé lineární zobrazení na konečném prostoru lze reprezentovat maticí. Nyní tedy ukážeme matici reprezentující DFT.

Definujeme

$$\omega_N = e^{-2\pi i/N}.$$

Pak můžeme psát

$$\hat{z}(m) = \sum_{n=0}^{N-1}z(n)e^{-2\pi imn/N} = \sum_{n=0}^{N-1}z(n)\omega_N^{mn}.$$

Definice 2.1.7. *Definujeme* $W_N = [w_{mn}]_{m,n=0}^{N-1}$ *jako takovou čtvercovou matici, že pro její prvky platí* $w_{mn} = \omega_N^{mn}$.

$$W_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & . & . & 1 \\ 1 & \omega_N^1 & \omega_N^2 & \omega_N^3 & . & . & \omega_N^{N-1} \\ 1 & \omega_N^2 & \omega_N^4 & \omega_N^6 & . & . & \omega_N^{2(N-1)} \\ 1 & \omega_N^3 & \omega_N^6 & \omega_N^9 & . & . & \omega_N^{3(N-1)} \\ 1 & . & . & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & . & . & . \\ 1 & \omega_N^{N-1} & \omega_N^{2(N-1)} & \omega_N^{3(N-1)} & . & . & \omega_N^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}.$$

Pro Fourierovu transformaci vektoru $z \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ platí

$$\hat{z} = W_N z.$$

Uvedeme příklady matic pro $N = 2$ a $N = 4$,

$$W_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

$$W_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Nyní zavedeme pojem inverzní diskrétní Fourierovy transformace.

Definice 2.1.8. *Pro vektor* $w = (w(0), \ldots, w(N-1)) \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ *definujeme inverzní diskrétní Fourierovu transformaci (IDFT) jako zobrazení*

$$\vee : l^2(\mathbb{Z}_N) \to l^2(\mathbb{Z}_N),$$

$$w \mapsto \check{w},$$

kde

$$\check{w} = (\check{w}(0), \check{w}(1), \ldots, \check{w}(N-1)),$$

$$\check{w}(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} w(m) e^{2\pi i m n/N}.$$

Věta 2.1.2. *Nechť* $z \in l^2(\mathbb{Z}_N)$. *Pak*

$$\check{z} = \frac{1}{N}\overline{W_N}z.$$

Důkaz. Plyne přímo z definice IDFT. Díky Fourierově inverzní formuli (2.2) a tomu, že

$$z = W_N^{-1}\hat{z},$$

platí

$$W_N^{-1} = \frac{1}{N}\overline{W_N}.$$

$\square$

Z typografických důvodů budeme občas v následujícím textu užívat toto označení

$$z^\wedge = \hat{z} \text{ a } z^\vee = \check{z}.$$

Věta 2.1.3. *(vztahy mezi DFT a IDFT)*

1. *Zobrazení* $\wedge$ *(DFT) a* $\vee$ *(IDFT) jsou vzájemně jednozačná zobrazení prostoru* $l^2(\mathbb{Z}_N)$ *na sebe, přičemž* $(\wedge)^{-1} = \vee$, *tedy pro každé* $z \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ *platí* $(z^\wedge)^\vee = z$ *a* $(z^\vee)^\wedge = z$.

2. *Pro každé periodické rozšíření vektoru* $z \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ *platí* $\check{z}(n) = \frac{1}{N}\hat{z}(-n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

3. *Pro každé* $z, w \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ *platí* $(\check{z}, \check{w}) = \frac{1}{N}(z, w)$.

4. *Nechť* $z \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ *a* $\overline{z}$ *je vektor k němu komplexně sdružený (tj.* $\overline{z}(m) = \overline{z(m)}$*). Pak*
$$(\overline{z})^\wedge(m) = \overline{z^\wedge(-m)} = \overline{z^\wedge(N-m)}.$$

Důkaz.

1. Přímo z definice IDFT a Fourierovy inverzní formule (2.2) plyne
$$(z^\wedge)^\vee(n) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\hat{z}(m)e^{2\pi imn/N} = z(n).$$
Dále využijeme, že DFT je bijekce.
$$\forall z \in l^2(\mathbb{Z}_N), \qquad \exists w : w^\wedge = z,$$

$$z^{\vee} = (w^{\wedge})^{\vee} = w,$$

a proto

$$(z^{\vee})^{\wedge} = w^{\wedge} = z.$$

2.

$$\check{z}(n) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} z(m)e^{2\pi imn/N} = \frac{1}{N}\hat{z}(-n), \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

3.

$$\forall z, w \in l^2(\mathbb{Z}_N) \qquad \exists u, v \in l^2(\mathbb{Z}_N),$$
$$u^{\wedge} = z, \qquad v^{\wedge} = w,$$

a proto

$$\begin{aligned} z^{\vee} &= (u^{\wedge})^{\vee} = u, \\ w^{\vee} &= (v^{\wedge})^{\vee} = v. \end{aligned}$$

Tvrzení nyní plyne z Parsevalovy rovnosti (2.3),

$$(\check{z}, \check{w}) = (u, v) = \frac{1}{N}(\hat{u}, \hat{v}) = \frac{1}{N}(z, w).$$

4.

$$\overline{z}^{\wedge}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} \overline{z(n)} e^{-2\pi imn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} \overline{z(n)e^{2\pi imn/N}} = \overline{z^{\wedge}(-m)},$$

a protože

$$e^{2\pi i(-N)n/N} = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{Z},$$

platí

$$\overline{z^{\wedge}(-m)} = \sum_{n=0}^{N-1} \overline{z(n)e^{2\pi i(-N+m)n/N}} = \overline{z^{\wedge}(N-m)}.$$

$\square$

2.2 Základní operace v teorii DFT

Definice 2.2.1. *(Operátor translace) Nechť $z \in l^2(\mathbb{Z}_N)$. Definujeme operátor translace (posunutí) předpisem*

$$(R_k z)(n) = z(n-k), \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Lemma 2.2.1. *Nechť z je periodická funkce s periodou N, která je definovaná na $\mathbb{Z}$, tedy*

$$z(n+N) = z(n), \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Pak $\forall m \in \mathbb{Z}$ platí

$$\sum_{n=m}^{N+m-1} z(n) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n).$$

Důkaz. Předpokládejme, že $-N+1 \leq m \leq 0$, potom

$$\sum_{n=m}^{N+m-1} z(n) = \sum_{n=m}^{-1} z(n+N) + \sum_{n=0}^{N+m-1} z(n).$$

Substituce $i = n + N$ dává

$$\sum_{n=m}^{N+m-1} z(n) = \sum_{i=N+m}^{N-1} z(i) + \sum_{i=0}^{N+m-1} z(i) = \sum_{i=0}^{N-1} z(i).$$

Pokud $m \in \mathbb{Z}$, pak $\exists r \in \mathbb{Z}$ takové, že $m' = m + rN$ a platí $-N+1 \leq m' \leq 0$. Pomocí substituce $n = n' - rN$ a s využitím periodicity z máme

$$\sum_{n=m}^{N+m-1} z(n) = \sum_{n'=m+rN}^{N+m+rN-1} z(n'-rN) = \sum_{n'=m'}^{N+m'-1} z(n').$$

□

Lemma 2.2.2. *Nechť $z \in l^2(\mathbb{Z}_N)$, $k \in \mathbb{Z}$. Pak pro každé $m \in \mathbb{Z}$ platí*

$$(R_k z)^\wedge(m) = e^{-2\pi i m k/N} \hat{z}(m).$$

Důkaz. Rozepíšeme podle definice

$$(R_k z)^\wedge(m) = \sum_{n=0}^{N-1} (R_k z)(n) e^{-2\pi i m n/N} = \sum_{n=0}^{N-1} z(n-k) e^{-2\pi i m n/N}.$$

Nyní provedeme substituci $j = n - k$. Protože $j = -k$ pro $n = 0$ a $j = N - k - 1$ pro $n = N - 1$, získáme

$$(R_k z)^\wedge(m) = \sum_{j=-k}^{N-k-1} z(j)e^{-2\pi i m(j+k)/N} = e^{-2\pi i mk/N} \sum_{j=-k}^{N-k-1} z(j)e^{-2\pi i mj/N}.$$

Díky tomu, že $z(j+N)e^{-2\pi i m(j+N)/N} = z(j)e^{-2\pi i mj/N}$ nám předchozí lemma dává

$$\sum_{j=-k}^{N-k-1} z(j)e^{-2\pi i mj/N} = \sum_{n=0}^{N-1} z(n)e^{-2\pi i mn/N} = \hat{z}(m).$$

Z čehož plyne dokazované tvrzení. □

Definice 2.2.2. *(Operátor konvoluce) Nechť $z, w \in l^2(\mathbb{Z}_N)$. Pak definujeme konvoluci $z * w$ takto*

$$(z * w)(m) = \sum_{n=0}^{N-1} z(m-n)w(n), \qquad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Definice 2.2.3. *(Operátor konjugované reflexe) Nechť $z \in l^2(\mathbb{Z}_N)$. Pak definujeme konjugovanou reflexi vektoru z pomocí předpisu*

$$\tilde{z}(m) = \overline{z(-m)} = \overline{z(N-m)}, \qquad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Nyní zavedeme diskrétní Diracovu delta funkci.

Definice 2.2.4. *Vektor $\delta \in l^2(\mathbb{Z}_N)$, definovaný předpisem*

$$\delta(n) = \delta_{0,n}, \qquad n = 0, \ldots, N.$$

nazveme diskrétní Diracovou delta funkcí.

V následující větě uvedeme některé vlastnosti a vzájemné vztahy právě definovaných pojmů.

Věta 2.2.1.

1. *Konvoluce je zobrazení do $l^2(\mathbb{Z}_N)$: $z * w \in l^2(\mathbb{Z}_N)$.*

2. *Konvoluce je komutativní: $z * w = w * z$.*

3. *Konvoluce je asociativní: $(x * z) * w = x * (z * w)$.*

4. $w * \delta = w$.

5. $(z * w)(k) = (z, R_k\tilde{w})$.

6. $(z * \tilde{w})(k) = (z, R_k w)$.

7. $(\tilde{z})^\wedge(m) = \overline{z^\wedge(m)}$.

8. $(z * w)^\wedge(m) = z^\wedge(m)w^\wedge(m)$.

9. $z * w = (z^\wedge w^\wedge)^\vee$.

Důkaz. V celém důkazu mlčky používáme lemma **2.2.1** a jeho důsledek

$$\sum_{n=0}^{N-1} z(n) = \sum_{n=-N+1}^{0} z(-n) = \sum_{n=0}^{N-1} z(-n).$$

1. Zřejmé z definice konvoluce.

2.
$$(z * w)(m) = \sum_{n=0}^{N-1} z(m-n)w(n) = \sum_{n=-N+1}^{0} z(m+n)w(-n) =$$

   po substituci $l = m + n$

$$= \sum_{l=-N+m+1}^{m} z(l)w(m-l) = \sum_{l=0}^{N-1} w(m-l)z(l) = (w * z)(m).$$

3.
$$\begin{aligned} ((x * z) * w)(m) &= ((z * x) * w)(m) = \sum_{n=0}^{N-1} (z * x)(m-n)w(n) = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} w(n) \sum_{n'=0}^{N-1} z(m-n-n')x(n') = \\ &= \sum_{n'=0}^{N-1} x(n') \sum_{n=0}^{N-1} z(m-n'-n)w(n) = \\ &= \sum_{n'=0}^{N-1} (z * w)(m-n')x(n') = \\ &= ((z * w) * x)(m) = (x * (z * w))(m). \end{aligned}$$

4.

$$(w * \delta)(m) = \sum_{n=0}^{N-1} w(m-n)\delta(n) = \sum_{n=0}^{N-1} w(m-n)\delta_{0n} = w(m).$$

5.

$$R_k\tilde{w}(n) = \tilde{w}(n-k) = \overline{w(-n+k)},$$

a proto

$$(z, R_k\tilde{w}) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n)w(-n+k) = \sum_{n=-N+1}^{0} z(-n)w(n+k) =$$

po substituci $l = n + k$

$$= \sum_{l=-N+k+1}^{k} z(k-l)w(l) = \sum_{n=0}^{N-1} z(k-n)w(n) = (z * w)(k).$$

6.

$$(z, R_k w) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n)\overline{w(n-k)} =$$

po substituci $l = n - k$

$$= \sum_{l=-k}^{N-k-1} z(l+k)\overline{w(l)} = \sum_{l=0}^{N-1} z(k-l)\overline{w(-l)} = (z * \tilde{w})(k).$$

7.

$$\begin{aligned} (\tilde{z})^\wedge(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{z}(n)e^{-2\pi imn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} \overline{z(-n)}e^{-2\pi imn/N} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \overline{z(n)e^{-2\pi imn/N}} = \overline{z^\wedge(m)}. \end{aligned}$$

8.

$$(z * w)^\wedge(m) = \sum_{n=0}^{N-1} (z * w)(n)e^{-2\pi imn/N} =$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} z(n-k)w(k)e^{-2\pi imn/N} = \\
&= \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} z(n-k)w(k)e^{-2\pi im(n-k)/N}e^{-2\pi imk/N} = \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} w(k)e^{-2\pi imk/N}\sum_{n=0}^{N-1} z(n-k)e^{-2\pi im(n-k)/N} =
\end{aligned}
$$

po substituci $l = n - k$ ve druhé sumě

$$
= \sum_{k=0}^{N-1} w(k)e^{-2\pi imk/N}\sum_{l=-k}^{N-k-1} z(l)e^{-2\pi iml/N} = \hat{z}(m)\hat{w}(m).
$$

9. Podle předchozího bodu a s využitím Fourierovy inverzní formule (2.2) platí

$$
\begin{aligned}
(z^{\wedge}w^{\wedge})^{\vee}(n) &= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} z^{\wedge}(m)w^{\wedge}(m)e^{2\pi imn/N} = \\
&= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} (z*w)^{\wedge}(m)e^{2\pi imn/N} = (z*w)(n).
\end{aligned}
$$

□

2.3 Lineární operátory a DFT

V teorii DFT a v jejích aplikacích jsou velmi důležité lineární operátory, které jsou invariantní vůči translaci (posunutí). Vzhledem k zaběhnuté terminologii budeme často pro lineární operátor používat název lineární transformace.

Definice 2.3.1. *Nechť $T : l^2(\mathbb{Z}_N) \to l^2(\mathbb{Z}_N)$ je lineární transformace, pro kterou platí*

$$T(R_k z) = R_k(Tz), \qquad \forall z \in l^2(\mathbb{Z}_N) \text{ a } k \in \mathbb{Z}.$$

Pak řekneme, že transformace T je translačně invariantní.

Definice 2.3.2. *(Cirkulantní matice) Nechť pro prvky matice $A = [a_{m,n}]_{m,n=0}^{N-1}$ platí $a_{m+N,n} = a_{m,n}$, $a_{m,n+N} = a_{m,n}$ $\forall m, n \in (0, \dots, N-1)$. Pak řekneme, že matice A je cirkulantní, pokud*

$$a_{m+k,n+k} = a_{m,n}, \qquad \forall m, n, k \in \mathbb{Z}.$$

Lemma 2.3.1. *Nechť $T : l^2(\mathbb{Z}_N) \to l^2(\mathbb{Z}_N)$ je translačně invariantní transformace. Pak každý prvek F_m Fourierovy báze $F = (F_0, \dots, F_{N-1})$ v prostoru $l^2(\mathbb{Z}_N)$ je vlastním vektorem transformace T a příslušné vlastní číslo je m-tá složka ve vyjádření vektoru $T(F_m)$ vyhledem k této bázi, tj. $T(F_m) = a(m)F_m$, kde $a(m)$ je složka rozkladu vektoru $T(F_m) = \sum_{k=0}^{N-1} a(k)F_k$.*

Důkaz. Označíme $a = (a(0), \dots, a(N-1))$ jako vektor koeficientů v rozkladu $T(F_m)$. Tedy

$$a = [T(F_m)]_F.$$

Rozepíšeme obě strany rovnosti, kterou získáme díky tomu, že T je translačně invariantní. Platí

$$(R_l F_m)(n) = F_m(n-l) = e^{-2\pi ilm} F_m(n), \qquad l = 0, \dots, N-1.$$

Nyní díky linearitě T získáme první stranu rovnosti,

$$T(R_l F_m)(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a(k) e^{-2\pi ilm} F_k(n).$$

Napíšeme druhou stranu zmíněné rovnosti,

$$R_l(T(F_m))(n) = T(F_m)(n-l) = \sum_{k=0}^{N-1} a(k) e^{-2\pi ilk} F_k(n).$$

Porovnáním obou stran a uvážením lineární nezávislosti trigonometrických funkcí zjistíme, že $a(k) = 0 \forall k \neq m$. Z toho již plyne dokazované tvrzení.

$\square$

Definice 2.3.3. *(Konvoluční transformace) Nechť $b \in l^2(\mathbb{Z}_N)$, pak operátor $T_b : l^2(\mathbb{Z}_N) \to l^2(\mathbb{Z}_N)$ definovaný předpisem*

$$T_b(z) = b * z, \qquad \forall z \in l^2(\mathbb{Z}_N),$$

nazveme konvoluční transformací.

Definice 2.3.4. *(Fourierova transformace součinu) Nechť $m \in l^2(\mathbb{Z}_N)$. Pak transformaci $T_{(m)} : l^2(\mathbb{Z}_N) \to l^2(\mathbb{Z}_N)$ definovanou předpisem*

$$T_{(m)}(z) = (m\hat{z})^{\vee}, \qquad \forall z \in l^2(\mathbb{Z}_N),$$

nazveme Fourierovou transformací součinu.

Poznámka 2.3.1. Díky Fourierově inverzní formuli (2.2) platí

$$z = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{z}(k) F_k.$$

Vidíme, že

$$T_{(m)}(z) = \sum_{k=0}^{N-1} (T_{(m)}(z))^{\wedge}(k) F_k = \sum_{k=0}^{N-1} m(k)\hat{z}(k) F_k.$$

Tedy k-tý člen v rozvoji z vzhledem k Fourierově bázi je násoben k-tým členem vektoru m. Proto se pro tuto lineární transformaci užívá daný název.

V poslední větě této kapitoly uvedeme vztahy mezi právě definovanými pojmy.

Věta 2.3.1. *Nechť $T : l^2(\mathbb{Z}_N) \to l^2(\mathbb{Z}_N)$ je lineární transformace. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

1. *Transformace T je translačně invariantní.*

2. *Matice $A_{T,\mathcal{E}}$ reprezentující transformaci T ve standardní bázi $\mathcal{E}$ je cirkulantní.*

3. *Transformace T je konvoluční.*

4. *Transformace T je Fourierova transformace součinu.*

5. *Matice $A_{T,F}$ reprezentující transformaci T ve Fourierově bázi je diagonální.*

Důkaz. V důkazu budeme postupovat následujícím způsobem

$$1. \Rightarrow 2. \Rightarrow 3. \Rightarrow 1., \qquad 3. \Leftrightarrow 4. \text{ a } 4. \Leftrightarrow 5.$$

a) 1. $\Rightarrow$ 2. $A_{T,\mathcal{E}} = [a_{m,n}]_{m,n=0}^{N-1}$ je periodicky rozšířená matice, reprezentující T v Euklidově bázi, kde uvažujeme periodické rozšíření jednotkových vektorů $e_{n+N} = e_n$. Pak díky definici R_k a tomu, že $T(R_k) = R_k(T)$ máme

$$a_{m+k,n+k} = (A_{T,\mathcal{E}}e_{n+k})(m+k) = (T(R_k e_n))(m+k) =$$

$$= (R_k(T(e_n)))(m+k) = T(e_n)(m) = (A_{T,\mathcal{E}}e_n)(m) = a_{m,n},$$

$$\forall m, n, k \in \mathbb{Z}.$$

b) 2. $\Rightarrow$ 3. Písmenem b označíme vektor prvního sloupce matice $A_{T,\mathcal{E}} = [a_{m,n}]_{m,n=0}^{N-1}$, $b(n) = a_{n,0}$. Jelikož je matice $A_{T,\mathcal{E}}$ cirkulantní, tak platí

$$a_{m,n} = a_{m-n,0} = b(m-n).$$

Z toho plyne

$$T(z)(m) = (Az)(m) = \sum_{n=0}^{N-1} a_{m,n}z(n) = \sum_{n=0}^{N-1} b(m-n)z(n) = (b * z)(m).$$

Což znamená, že $T = T_b$.

c) 3. $\Rightarrow$ 1. Nechť T_b je konvoluční transformace, $b \in l^2(\mathbb{Z}_N)$. Nejdříve nahlédneme, že

$$(b * (R_k z))(m) = \sum_{n=0}^{N-1} b(m-n)z(n-k) =$$

po substituci $l = n - k$, s využitím lemmatu **2.2.1** a jeho důsledku

$$= \sum_{l=0}^{N-1} b(m-k-l)z(l) = (b * z)(m-k).$$

Pak stačí napsat

$$\begin{aligned} T_b(R_k z)(m) &= (b * (R_k z))(m) = (b * z)(m-k) = R_k(b * z)(m) = \\ &= R_k T_b(z)(m). \end{aligned}$$

d) 3. $\Leftrightarrow$ 4. Nechť T_b je konvoluční transformace, $b \in l^2(\mathbb{Z}_N)$. Položíme $m = \hat{b}$. Pak díky větě **2.2.1** můžeme napsat

$$T_b(z) = b{*}z = ((b{*}z)^\wedge)^\vee = (\hat{b}\hat{z})^\vee = (m\hat{z})^\vee = T_{(m)}(z), \qquad \forall z \in l^2(\mathbb{Z}_N).$$

Lze postupovat i z druhé strany rovnosti a proto platí ekvivalence.

e) 4. $\Leftrightarrow$ 5. Nejprve nechť $T_{(m)}$ je Fourierova transformace součinu, kde $m \in l^2(\mathbb{Z}_N)$. Sestrojíme diagonální matici $D = [d_{k,n}], d_{n,n} = m(n), n = 0, \ldots, N-\ 1; d_{k,n} = 0$ pro $k \neq n$. Máme $(T_{(m)}(z))^\wedge = m\hat{z}$. Platí

$$[T_{(m)}(z)]_F = D\hat{z} = D[z]_F.$$

Tedy $T_{(m)}$ je reprezentována diagonální maticí D vzhledem k Fourierově bázi. Obrácená implikace: Nechť $D = [d_{k,n}]$ je diagonální matice, která reprezentuje operátor T vzhledem k Fourierově bázi F. Položíme $m(n) = d_{n,n}, n = 0, \ldots, N-1$ a sestrojíme Fourierovu transformaci součinu $T_{(m)}$. Pak platí

$$[T(z)]_F = D[z]_F = [T_{(m)}(z)]_F.$$

Takže $T = T_{(m)}$.

$\square$

2.4 DFT v $l^2(\mathbb{Z})$

V této části ukážeme zobecnění teorie DFT pro vektory $z \in l^2(\mathbb{Z})$. Nejprve uvedeme několik pro další text důležitých pojmů. Prostor $l^2(\mathbb{Z})$ je normovaný lineární prostor vektorů $z = (z(n))_{n\in\mathbb{Z}}$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |z(n)|^2 < \infty, z(k) \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}$. Skalární součin a normu pro vektory $z, w \in l^2(\mathbb{Z})$ definujeme takto

$$(z, w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z(n)\overline{w(n)}, \qquad \| z \| = \sqrt{(z, z)}.$$

Prostor $l^2(\mathbb{Z})$ je Hilbertův a separabilní. Prostor $l^1(\mathbb{Z})$ je normovaný lineární prostor vektorů $z = (z(n))_{n\in\mathbb{Z}}$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |z(n)| < \infty, z(k) \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}$. Normu pro vektory $z \in l^1(\mathbb{Z})$ definujeme takto

$$\| z \|_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |z(n)|.$$

Prostor $l^1(\mathbb{Z})$ je Banachův a separabilní. Prostor $L^2([-\pi, \pi])$ je prostor funkcí $f = f(t), \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 < \infty, f(t) \in \mathbb{C}, t \in [-\pi, \pi]$ Skalární součin a normu pro funkce $f, g \in L^2([-\pi, \pi])$ definujeme takto

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt, \qquad \| f \| = \sqrt{(f, f)}.$$

Jde o Hilbertův a separabilní prostor.

Poznámka 2.4.1. *Dá se ukázat, že množina funkcí $\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tvoří v prostoru $L^2([-\pi, \pi])$ úplný a ortonormální systém.*

Definice 2.4.1. *Pro vektor $z \in l^2(\mathbb{Z})$ definujeme diskrétní Fourierovu transformaci (DFT) jako zobrazení*

$$\wedge : l^2(\mathbb{Z}) \to L^2([-\pi, \pi]),$$

$$z \mapsto \hat{z},$$

kde

$$\hat{z}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z(n)e^{-int}, \qquad t \in [-\pi, \pi].$$

Definice 2.4.2. *Pro funkci $f \in L^2([-\pi,\pi])$ definujeme inverzní diskrétní Fourierovu transformaci (IDFT) jako zobrazení*

$$\vee : L^2([-\pi,\pi]) \to l^2(\mathbb{Z}),$$

$$f \mapsto \check{f},$$

kde

$$\check{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int}dt, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Podobně jako v případě DFT a IDFT v $l^2(\mathbb{Z}_N)$ jde nyní o lineární bijekce mezi prostory $l^2(\mathbb{Z})$ a $L^2([-\pi,\pi])$.

Další poznatky o DFT a IDFT v $l^2(\mathbb{Z}_N)$ shrneme do následujících definic a vět.

Věta 2.4.1. *Pro každé $z, w \in l^2(\mathbb{Z})$ platí*

1.
$$(z^{\wedge})^{\vee} = z.$$

2. *Parsevalova rovnost*
$$(z, w) = (\hat{z}, \hat{w}).$$

3. *Plancherelova formule*
$$\|z\|^2 = \|\hat{z}\|^2.$$

Důkaz. Vektor $z \in l^2(\mathbb{Z})$, a proto $\sum_{n\in\mathbb{Z}} z(n)e^{-int}$ konverguje stejnoměrně $\forall t \in [-\pi,\pi]$. Můžeme tedy prohodit sumu a integrál

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} z(n)e^{-int}dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z(n)\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}dt.$$

1.

$$\begin{aligned}(z^{\wedge})^{\vee}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \hat{z}(t)e^{int}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{m\in\mathbb{Z}} z(m)e^{-imt}e^{int}dt = \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} z(m)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t}dt.\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t}dt = \begin{cases} 1, & \text{pokud} \quad n = m, \\ \frac{e^{i(n-m)\pi}-e^{-i(n-m)\pi}}{2\pi i(n-m)}, & \text{pokud} \quad n \neq m. \end{cases}$$

Podle definice funkce sin platí

$$\frac{e^{i(n-m)\pi} - e^{-i(n-m)\pi}}{2\pi i(n-m)} = \frac{\sin(\pi(n-m))}{\pi(n-m)} = 0, \qquad n \neq m.$$

Máme tedy

$$(z^{\wedge})^{\vee}(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} z(m)\delta_{n,m} = z(n).$$

2.

$$(\hat{z}, \hat{w}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m\in\mathbb{Z}} z(m)e^{-imt} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{w(n)}e^{int}dt =$$

podle předchozího bodu

$$\begin{aligned} &= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} z(m)\overline{w(n)}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\pi}dt = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} z(m)\overline{w(n)}\delta_{n,m} = \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} z(m)\overline{w(m)} = (z, w). \end{aligned}$$

3. Plyne po dosazení $w = z$ v 2.

□

Definice 2.4.3. *Nechť $z, w \in l^2(\mathbb{Z})$, pak definujeme*

1. *Konvoluci*

$$(z * w)(m) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z(m-n)w(n), \qquad m \in \mathbb{Z}.$$

2. *Konvoluční transformaci $T_b : l^2(\mathbb{Z}) \to l^2(\mathbb{Z}), b \in l^1(\mathbb{Z})$*

$$T_b(z) = b * z, \qquad z \in l^2(\mathbb{Z}).$$

3. *Translaci* $R_k : l^2(\mathbb{Z}) \to l^2(\mathbb{Z})$

$$(R_k z)(n) = z(n-k), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

4. *Translačně invariantní transformaci* $T : l^2(\mathbb{Z}) \to l^2(\mathbb{Z})$

$$T(R_k) = R_k(T).$$

5. *Konjugovanou reflexi*

$$\tilde{z}(n) = \overline{z(-n)}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

6. *Diskrétní delta funkci*

$$\delta(n) = \delta_{0,n}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

7. *Vektor* z^*

$$z^*(n) = (-1)^n z(n), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

V následujících větách jsou tvrzení vztahující se k právě definovaným pojmům. Jde v podstatě o to samé, jako v případě $l^2(\mathbb{Z}_N)$. Uvedeme proto pouze znění bez důkazů.

Věta 2.4.2. *Nechť* $z \in l^2(\mathbb{Z}), w \in l^1(\mathbb{Z})$, *pak*

$$z * w \in l^2(\mathbb{Z}) \text{ a } \|z * w\| \leq \|w\|_1 \|z\|.$$

Věta 2.4.3. *Nechť* $v, w \in l^1(\mathbb{Z}), z \in l^2(\mathbb{Z})$, *pak*

1. *skoro všude platí*
$$(z * w)^\wedge(t) = \hat{z}(t)\hat{w}(t).$$

2. $z * w = w * z$.

3. $v * (w * z) = (v * w) * z$.

4. $v * w \in l^1(\mathbb{Z})$.

5. $z * \delta = z$.

Věta 2.4.4. *Lineární transformace* T *je translačně invariantní, právě když je konvoluční. Platí*

$$T = T_b, \qquad b = T(\delta).$$

Věta 2.4.5. *Nechť* $z, w \in l^2(\mathbb{Z})$. *Pak*

1. $\tilde{z}, z^*, R_k z \in l^2(\mathbb{Z}), \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$
2. $(\tilde{z})^\wedge(t) = \overline{\hat{z}(t)}.$
3. $(z^*)^\wedge(t) = \hat{z}(t+\pi).$
4. $(R_k z)^\wedge(t) = e^{-ikt}\hat{z}(t).$
5. $(R_j z, R_k w) = (z, R_{k-j} w), \qquad j, k \in \mathbb{Z}.$
6. $(z, R_k w) = z * \tilde{w}(k), \qquad k \in \mathbb{Z}.$
7. $(z, R_k \tilde{w}) = z * w(k), \qquad k \in \mathbb{Z}.$
8. $\hat{\delta}(t) = 1, \qquad t \in [-\pi, \pi].$

Věta 2.4.6. *Nechť* $z \in l^1(\mathbb{Z})$. *Pak* $\hat{z}(t)$ *je spojitou funkcí proměnné* t.

2.5 DFT v $l^2(\mathbb{Z}_{N_1}) \times \ldots \times l^2(\mathbb{Z}_{N_d})$

V praxi je často potřeba použít DFT ve více dimenzích. Například obrázky můžeme mít v počítači uložené jako matice. Pokud pak chceme provést kompresi takovýchto dat pomocí DFT, nabízí se použití její dvourozměrné formy. Při aplikaci na řešení parciálních diferenciálních rovnic je důležitý trojrozměrný případ. Lze nalézt další příklady, kdy se hodí DFT v různých dimenzích.

Definice 2.5.1. *Pro vektor $z = \{z(n_1, \ldots, n_d)\} \in l^2(\mathbb{Z}_{N_1}) \times \ldots \times l^2(\mathbb{Z}_{N_d})$ definujeme diskrétní Fourierovu transformaci (DFT) jako zobrazení*

$$\wedge : l^2(\mathbb{Z}_{N_1}) \times \ldots \times l^2(\mathbb{Z}_{N_d}) \to l^2(\mathbb{Z}_{N_1}) \times \ldots \times l^2(\mathbb{Z}_{N_d}),$$

$$z \mapsto \hat{z},$$

kde

$$\hat{z} = \{\hat{z}(m_1, \ldots, m_d)\},$$

$$\hat{z}(m_1, \ldots, m_d) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \cdots \sum_{n_d=0}^{N_d-1} z(n_1, \ldots, n_d) e^{-2\pi i m_1 n_1 / N_1} \ \ldots \ e^{-2\pi i m_d n_d / N_d}.$$

Kvůli přehlednému zápisu uvedeme některé definice a vlastnosti týkající se vícerozměrné DFT nikoli obecně, ale zaměříme se pouze na případ $d = 2$. Případné rozšíření do vyšších dimenzí pak není nic těžkého. Skalární součin a normu pro vektory $z, w \in l^2(\mathbb{Z}_{N_1}) \times l^2(\mathbb{Z}_{N_2})$ definujeme takto

$$(z, w) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} z(n_1, n_2) \overline{w(n_1, n_2)}, \qquad \| z \| = \sqrt{(z, z)}.$$

DFT je pro $z \in l^2(\mathbb{Z}_{N_1}) \times l^2(\mathbb{Z}_{N_2})$ definovaná takto

$$\hat{z}(m_1, m_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} z(n_1, n_2) e^{-2\pi i m_1 n_1 / N_1} e^{-2\pi i m_2 n_2 / N_2}.$$

Definice 2.5.2. *Pokud F_1 a F_2 jsou Fourierovy báze v $l^2(\mathbb{Z}_{N_1})$, resp. v $l^2(\mathbb{Z}_{N_2})$, pak definujeme Fourierovu bázi F v $l^2(\mathbb{Z}_{N_1}) \times l^2(\mathbb{Z}_{N_2})$ pomocí předpisu*

$$F = F_1 \times F_2 \equiv \{F_{n,m} = F_n F_m, n = 0, \ldots, N_1 - 1, m = 0, \ldots, N_2 - 1\}.$$

Podobně jako v jednorozměrném případě potom platí obdoba Fourierovy inverzní formule (2.2).

$$z = \sum_{n=0}^{N_1-1} \sum_{m=0}^{N_2-1} \hat{z}(n,m) F_{n,m},$$

což znamená

$$\hat{z} = [z]_F.$$

Tento pohled na $\hat{z}$ nás opět jako v jednorozměrném případě motivuje k definici inverzní diskrétní Fourierovy transformace.

Definice 2.5.3. *Pro vektor $w = \{w(m_1, m_2)\} \in l^2(\mathbb{Z}_{N_1}) \times l^2(\mathbb{Z}_{N_2})$ definujeme inverzní diskrétní Fourierovu transformaci (IDFT) jako zobrazení*

$$\vee : l^2(\mathbb{Z}_{N_1}) \times l^2(\mathbb{Z}_{N_2}) \to l^2(\mathbb{Z}_{N_1}) \times l^2(\mathbb{Z}_{N_2}),$$

$$w \mapsto \check{w},$$

kde

$$\check{w} = \{\check{w}(n_1, n_2)\},$$

$$\check{w}(n_1, n_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} w(m_1, m_2) e^{2\pi i m_1 n_1 / N_1} e^{2\pi i m_2 n_2 / N_2}.$$

Definice 2.5.4. *(Operátor translace) Nechť $z \in l^2(\mathbb{Z}_{N_1}) \times l^2(\mathbb{Z}_{N_2})$. Definujeme operátor translace(posunutí) předpisem*

$$(R_k z)(n_1, n_2) = z(n_1 - k, z_2 - k), \qquad \forall n_1, n_2 \in \mathbb{Z}.$$

Definice 2.5.5. *(Operátor konvoluce) Nechť $z, w \in l^2(\mathbb{Z}_{N_1}) \times l^2(\mathbb{Z}_{N_2})$. Pak definujeme konvoluci $z * w$ takto*

$$(z*w)(m_1, m_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} z(m_1 - n_1, m_2 - n_2) w(n_1, n_2), \qquad \forall m_1, m_2 \in \mathbb{Z}.$$

Definice 2.5.6. *(Operátor konjugované reflexe) Nechť $z \in l^2(\mathbb{Z}_{N_1}) \times l^2(\mathbb{Z}_{N_2})$. Pak definujeme konjugovanou reflexi vektoru z pomocí předpisu*

$$\tilde{z}(m_1, m_2) = \overline{z(-m_1, -m_2)} = \overline{z(N_1 - m_1, N_2 - m_2)}, \qquad \forall m_1, m_2 \in \mathbb{Z}.$$

Na předcházejících definicích je vidět, že přechodem k vyšší dimenzi nedošlo k velkým změnám. Stejně tak platí podobná tvrzení, která jsme uvedli pro DFT v $l^2(\mathbb{Z}_N)$. V praxi se vícerozměrná DFT může počítat jako několik jednorozměrných výpočtů po sobě a pro dimenzi $d = 2$ se to tak opravdu dělá. Pro dimenzi $d > 2$ se provádí optimalizace, které berou ohled na rozdíly mezi jednou a více dimenzemi. Další výklad k tomuto tématu lze nalézt například v [1].

Kapitola 3

Aplikace DFT na konkrétní úlohy

3.1 Rychlá Fourierova transformace (FFT)

Ukážeme myšlenku metody rychlé Fourierovy transformace (FFT). Rychlá Fourierova transformace je algoritmus, pomocí kterého se DFT v praxi počítá. Bez jeho objevu by praktické využití DFT bylo minimální. Jak vidíme přímo z definice nebo z maticového zápisu, při jednoduché implementaci DFT je potřeba N^2 komplexních násobení. Tento počet je nutné pro efektivní použití snížit. Začneme lemmatem pro N sudé. Důkaz lze najít například v [2].

Lemma 3.1.1. *(Danielsonovo-Lanczosovo lemma) Nechť $N = 2M$, $m \in M$ a $z \in l^2(\mathbb{Z}_N)$. Definujeme $u, v \in l^2(\mathbb{Z}_M)$ pomocí předpisu*

$$u(k) = z(2k), k = 0, \ldots, M-1 \quad \text{a} \quad v(k) = z(2k+1), k = 0, \ldots, M-1.$$

Pak pro $m = 0, \ldots, M-1$ platí

$$\hat{z}(m) = \hat{u}(m) + e^{-2\pi i m/N}\hat{v}(m).$$

Pro $m = M, \ldots, N-1$ platí

$$\hat{z}(m) = \hat{z}(l+M) = \hat{u}(l) - e^{-2\pi i l/N}\hat{v}(l), \quad \text{kde} \quad l = m - M.$$

Vidíme, že počet komplexních násobení pro výpočet DFT vektoru z je $2M^2 + M = (N^2 + N)/2$. Nyní definujeme p_N jako počet komplexních násobení potřebný k výpočtu DFT vektoru $z \in l^2(\mathbb{Z}_N)$. Pokud $N = 2M$, pak podle předchozího lemmatu platí

$$p_N \leq 2p_M + M. \tag{3.1}$$

To nás vede k myšlence jeho rekurentního použítí při $N = 2^n$.

Lemma 3.1.2. *Nechť $N = 2^n, n \in \mathbb{Z}$. Potom platí*

$$p_N \leq \frac{1}{2} N \log_2 N.$$

Důkaz. Postupujeme indukcí dle n. Pokud $n = 1$, pak $z = (n_1, n_2)$. Spočítáme DFT vektoru z

$$\hat{z} = (n_1 + n_2, n_1 - n_2).$$

Při tomto výpočtu jsme nepotřebovali žádné komplexní násobení. Máme $p_2 = 0 < \log_2 2$. Nyní předpokládejme, že tvrzení platí pro $n = k - 1$. Pro $n = k$ využijeme indukční předpoklad a (3.1). Platí tedy

$$p_{2^k} \leq 2p_{2^{k-1}} + 2^{k-1} \leq 2\frac{1}{2}2^{k-1}(k-1) + 2^{k-1} =$$

$$= k2^{k-1} = \frac{1}{2}k2^k = \frac{1}{2}N \log_2 N.$$

□

Pro speciální případ $N = 2^n$ jsme tedy dosáhli výrazného snížení počtu komplexních násobení. Postup lze dále zobecnit pro $N = pq$. Důkaz pro tento případ a další informace o FFT lze najít například v [2].

3.2 Výpočet vlastních čísel translačně invariantních transformací

Nejdříve předvedeme algoritmus, podle kterého budeme postupovat. Potom uvedeme tři příklady, které budou ilustrovat užitečnost věty **2.3.1**.

Algoritmus 1.

1. Sestrojíme matici $A = A_{T,\mathcal{E}}$, která reprezentuje transformaci T vzhledem k Euklidově bázi $\mathcal{E}$. Díky větě **2.3.1** víme, že matice A je cirkulantní.

2. Z důkazu věty **2.3.1** víme, že $T = T_b$, kde b je první sloupec matice A.

3. Spočítáme $m = \hat{b}$, pak víme, že $T = T_{(m)}$.

4. Sestrojíme diagonální matici $D = [d_{k,n}]$, $d_{n,n} = m(n)$. Víme, že D reprezentuje transformaci T vzhledem k Fourierově bázi F, tj. $[T(z)]_F = D[z]_F$.

5. Protože platí $(Az)^\wedge = W_N Az = [Az]_F = [Tz]_F = D[z]_F = D\hat{z} = DW_N z$. Vidíme, že
$$D = W_N A W_N^{-1}.$$
A proto diagonální prvky matice D tvoří vlastní čísla transformace T a vlastní vektory jsou sloupce matice W_N^{-1}, což jsou prvky Fourierovy báze.

Nyní pomocí algoritmu spočítáme konkrétní příklady. Ve všech příkladech je úkolem najít vlastní čísla a vlastní vektory transformace T.

Příklad 1. Transformace $T : l^2(\mathbb{Z}_4) \to l^2(\mathbb{Z}_4)$ je zadaná pomocí předpisu

$$(Tz)(n) = z(n) + 2z(n+1) + z(n+3), \qquad n = 0, \ldots, 3.$$

Dosadíme $n = 0, \ldots, 3$, abychom zjistili, jak vypadá matice $A_{T,\mathcal{E}}$, která reprezentuje transformaci T v Euklidově bázi.

$$(Tz)(0) = z(0) + 2z(1) + z(3),$$

$$(Tz)(1) = z(1) + 2z(2) + z(4) = z(1) + 2z(2) + z(0),$$
$$(Tz)(2) = z(2) + 2z(3) + z(5) = z(2) + 2z(3) + z(1),$$

$$(Tz)(3) = z(3) + 2z(4) + z(6) = z(3) + 2z(0) + z(2).$$

Z toho plyne, jak má vypadat matice $A_{T,\mathcal{E}}$.

$$A_{T,\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice je cirkulantní, a proto je T translačně invariantní transformace. Vezmeme první sloupec b dané matice a spočítáme DFT b. Díky (2.6) víme, jak vypadá W_4.

$$W_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}.$$

Provedeme výpočet

$$m = \hat{b} = W_4 b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1+i \\ -2 \\ 1-i \end{pmatrix}.$$

Složky vektoru m tvoří vlastní čísla transformace T. Vlastní vektory jsou prvky Fourierovy báze $F = (F_0, F_1, F_2, F_3)$.

Příklad 2. Transformace $T : l^2(\mathbb{Z}_N) \to l^2(\mathbb{Z}_N)$ je zadaná pomocí předpisu

$$(Tz)(n) = z(n+1) - 2z(n) + z(n-1), \qquad n = 0, \ldots, N-1.$$

Dosadíme $n = 0, \ldots, N-1$, abychom zjistili, jak vypadá matice $A_{T,\mathcal{E}}$, která reprezentuje transformaci T v Euklidově bázi.

$$(Tz)(0) = z(1) - 2z(0) + z(-1) = z(1) - 2z(0) + z(N-1),$$

$$(Tz)(1) = z(2) - 2z(1) + z(0),$$

$$\vdots$$

$$(Tz)(N-1) = z(N) - 2z(N-1) + z(N-2) = z(0) - 2z(N-1) + z(N-2).$$

Z toho plyne, jak má vypadat matice $A_{T,\mathcal{E}}$.

$$A_{T,\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & . & . & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & . & . \\ . & 0 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & . & . & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Matice je cirkulantní, a proto je T translačně invariantní transformace. Vezmeme první sloupec b dané matice a spočítáme DFT b. Tedy

$$\begin{aligned} m(k) &= \hat{b}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} b(n)e^{-2\pi ikn/N} = -2 + e^{-2\pi ik/N} + e^{-2\pi ik(N-1)/N} = \\ &= -2 + e^{-2\pi ik/N} + e^{2\pi ik/N} = -2 + 2\cos\frac{2\pi k}{N} = \\ &= -4(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi k}{N}) = -4\sin^2\frac{\pi k}{N}. \end{aligned}$$

Nyní už stačí vytvořit diagonální matici D, kde $D = [d_{k,n}]$, $d_{n,n} = m(n)$. Díky vztahu

$$D = W_N A W_N^{-1},$$

vidíme, že prvky matice D tvoří vlastní čísla matice A. Vlastní vektory jsou prvky Fourierovy báze $F = (F_0, \ldots, F_{N-1})$.

Příklad 3. Transformace $T : l^2(\mathbb{Z}_N) \to l^2(\mathbb{Z}_N)$ je zadaná pomocí předpisu

$$(Tz)(n) = z(n+1) - z(n), \qquad n = 0, \ldots, N-1.$$

Dosadíme $n = 0, \ldots, N-1$, abychom zjistili, jak vypadá matice $A_{T,\mathcal{E}}$, která reprezentuje transformaci T v Euklidově bázi.

$$(Tz)(0) = z(1) - z(0),$$

$$(Tz)(1) = z(2) - z(1),$$

$$\vdots$$

$$(Tz)(N-1) = z(N) - z(N-1) = z(0) - z(N-1).$$

Z toho plyne, jak má vypadat matice $A_{T,\mathcal{E}}$.

$$A_{T,\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & -1 & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & . & . & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Matice je cirkulantní, a proto je T translačně invariantní transformace. Vezmeme první sloupec b dané matice a spočítáme DFT b. Tedy

$$m(k) = \hat{b}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} b(n)e^{-2\pi ikn/N} = -1 + e^{-2\pi ik(N-1)/N}.$$

Nyní už stačí vytvořit diagonální matici D, kde $D = [d_{k,n}]$, $d_{n,n} = m(n)$. Díky vztahu

$$D = W_N A W_N^{-1},$$

vidíme, že prvky matice D tvoří vlastní čísla matice A. Vlastní vektory jsou prvky Fourierovy báze $F = (F_0, \ldots, F_{N-1})$.

3.3 Aplikace DFT na kompresi dat

V této části využijeme diskrétní Fourierovu transformaci ke kompresi dat. Nejprve popíšeme, co pod tímto pojmem rozumíme. Nechť $z \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ a $B = \{v_j\}_{j=0}^{N-1}$ je ortonormální báze prostoru $l^2(\mathbb{Z}_N)$. Platí tedy

$$z = \sum_{m=0}^{N-1} (z, v_m)v_m.$$

Zvolíme číslo $K < N$ a uspořádáme sestupně posloupnost $\{|(z, v_m)|\}_{m=0}^{N-1}$. Vezmeme prvních K členů této posloupnosti a z jejich indexů vytvoříme indexovou množinu S_K. Sestrojíme aproximaci w vektoru z,

$$w = \sum_{m \in S_K} (z, v_m)v_m.$$

Pod pojmem komprese dat rozumíme právě sestrojený vektor w. Relativní chyba komprese je definovaná poměrem $\|z - w\|/\|z\|$. Provedeme kompresi dat u 4 vektorů. Zvolíme $N = 512$ a $K = 8, 16, 20, 50, 75, 100, 200, 400$. Za bázi B volíme postupně Euklidovu a Fourierovu. Fourierova báze není ortonormální, je ale ortogonální. Na postupu pro kompresi dat to nic nemění. Každý vektor $z \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ lze zapsat takto,

$$z = N \sum_{m=0}^{N-1} (z, F_m) F_m = \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m) F_m.$$

Pro sestrojení indexové množiny S_M musíme sestupně uspořádat $\{|\hat{z}(m)|\}_{m=0}^{N-1}$ a vzít indexy prvních M členů vzniklé posloupnosti. Algoritmus implementujeme v softwarovém balíku Matlab. Zde je nutné upozornit, že v Matlabu se vektory vždy indexují od 1, což je rozdíl oproti konvenci v této práci. V průběhu výpočtu komprese ve Fourierově bázi využijeme standardní funkce FFT a IFFT, což jsou algoritmy rychlé Fourierovy transformace a její inverze, jejichž myšlenku jsme ukázali v první části této kapitoly. Vektory, které budeme používat uvedeme s indexováním od 1, tak, jak je potřeba pro výpočty v Matlabu. Všechny vektory $z \in l^2(\mathbb{Z}_{512})$,

$$z = (z(1), z(2), \ldots, z(512)).$$

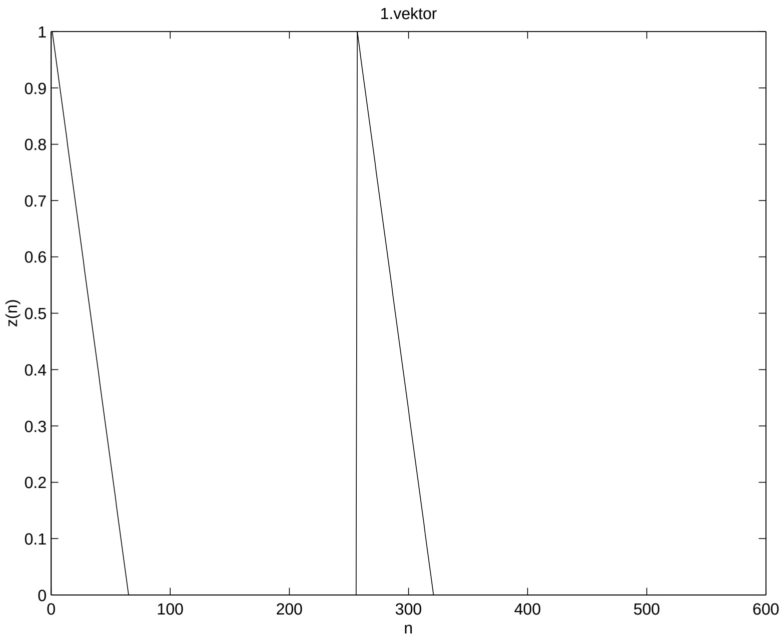
1. vektor
$$z(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n-1}{64} & \text{pro} \quad 1 \leq n \leq 64, \\ 5 - \frac{n-1}{64} & \text{pro} \quad 257 \leq n \leq 320, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

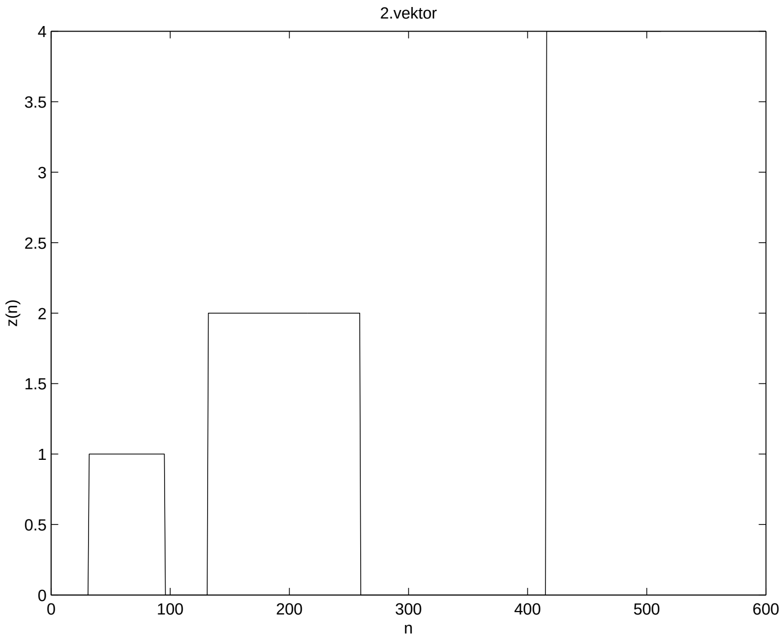
2. vektor
$$z(n) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad 32 \leq n \leq 95, \\ 2 & \text{pro} \quad 132 \leq n \leq 259, \\ 4 & \text{pro} \quad 416 \leq n \leq 512, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

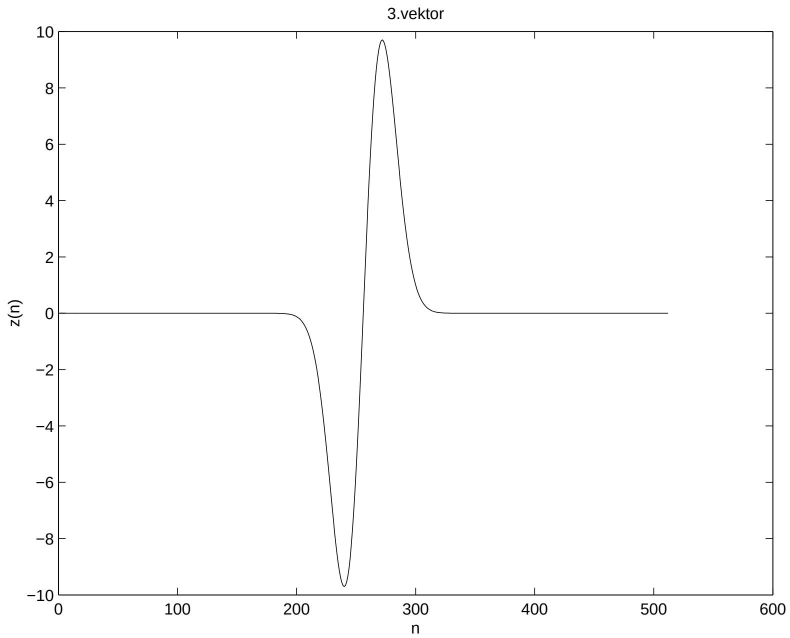
3. vektor
$$z(n) = (n - 256) e^{-(n-256)^2/512}, \qquad n = 1, \ldots, 512,$$

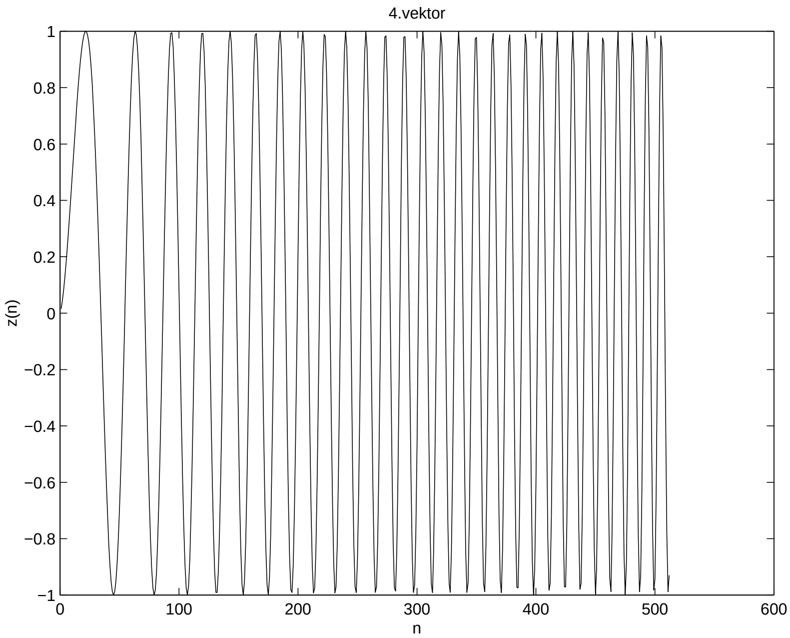
4. vektor
$$z(n) = \sin(n^{1,5}/64), \qquad n = 1, \ldots, 512.$$

Následují obrázky a tabulky, které obsahují výsledky provedené komprese. Na prvních čtyřech obrázcích jsou znázorněny vektory, se kterými pracujeme. Následují tabulky s číselnými výsledky relativních chyb komprese v obou použitých bázích. Poslední čtyři obrázky obsahují graficky znázorněný průběh relativní chyby komprese. Průběh chyby při použití Euklidovy báze je značen plnou čarou, pro Fourierovu bázi pak máme čáru přerušovanou.


1.vektor
z(n)
n
0
100
200
300
400
500
600
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


2.vektor
z(n)
n
0
100
200
300
400
500
600
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4


3.vektor
z(n)
n
10
8
6
4
2
0
−2
−4
−6
−8
−10
0
100
200
300
400
500
600

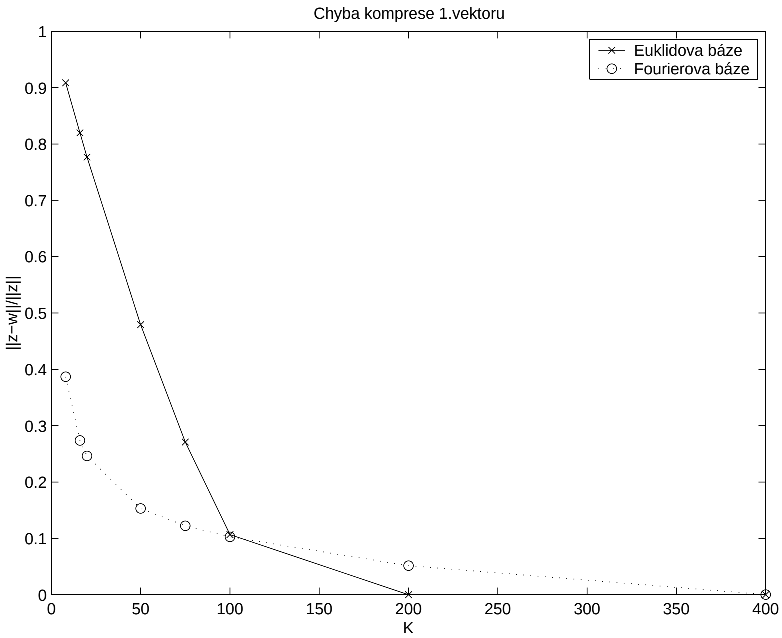

4.vektor
z(n)
n
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
0
100
200
300
400
500
600

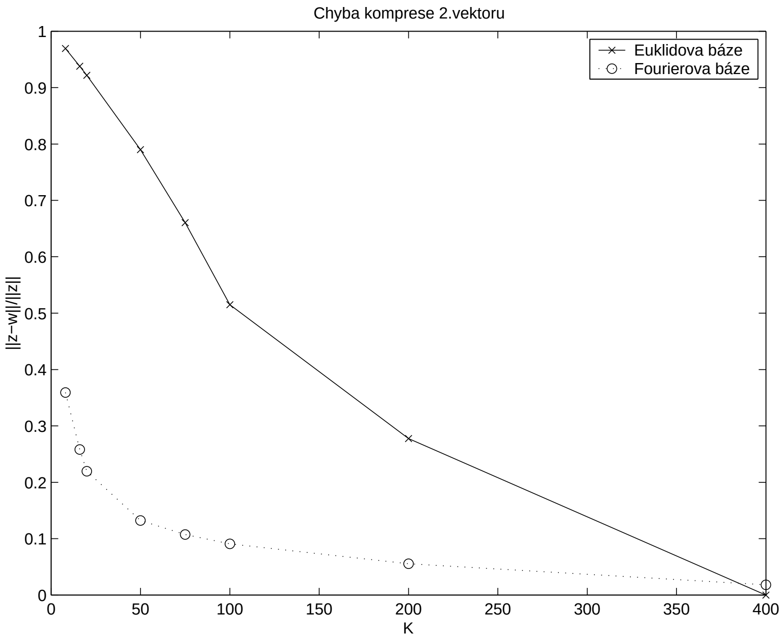
Komprese 1.vektoru				
K	8	16	20	50
$\frac{\|z-w\|}{\|z\|}$, Euklidova báze	0,9084	0,8198	0,7767	0,4792
$\frac{\|z-w\|}{\|z\|}$, Fourierova báze	0,3868	0,2738	0,2463	0,1529
K	75	100	200	400
$\frac{\|z-w\|}{\|z\|}$, Euklidova báze	0,2709	0,1065	0,0000	0,0000
$\frac{\|z-w\|}{\|z\|}$, Fourierova báze	0.1223	0,1025	0,0515	0,0000

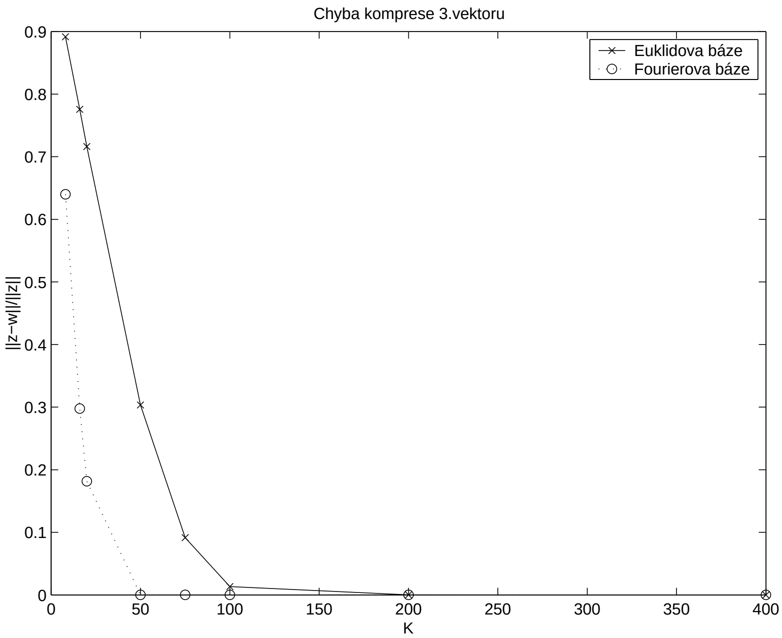
Komprese 2.vektoru				
K	8	16	20	50
$\frac{\|z-w\|}{\|z\|}$, Euklidova báze	0,9695	0,9379	0,9218	0,7900
$\frac{\|z-w\|}{\|z\|}$, Fourierova báze	0,3592	0,2581	0,2196	0,1321
K	75	100	200	400
$\frac{\|z-w\|}{\|z\|}$, Euklidova báze	0,6604	0,5148	0.2776	0,0000
$\frac{\|z-w\|}{\|z\|}$, Fourierova báze	0,1074	0,0907	0.0554	0,0182

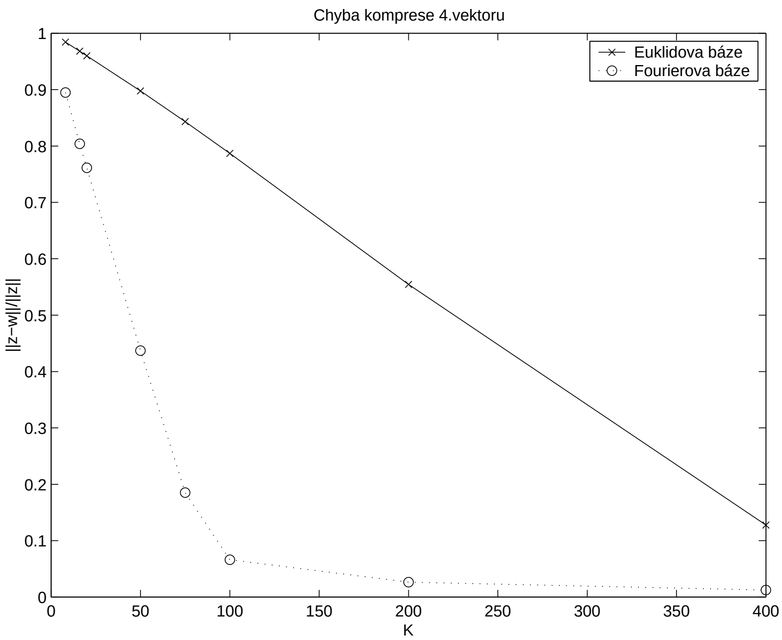
Komprese 3.vektoru				
K	8	16	20	50
$\frac{\|z-w\|}{\|z\|}$, Euklidova báze	0,8915	0,7757	0,7163	0,3034
$\frac{\|z-w\|}{\|z\|}$, Fourierova báze	0,6399	0,2977	0,1816	0,0000
K	75	100	200	400
$\frac{\|z-w\|}{\|z\|}$, Euklidova báze	0,0915	0,0132	0,0000	0,0000
$\frac{\|z-w\|}{\|z\|}$, Fourierova báze	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Komprese 4.vektoru				
K	8	16	20	50
$\frac{\|z-w\|}{\|z\|}$, Euklidova báze	0,9842	0,9681	0,9599	0,8975
$\frac{\|z-w\|}{\|z\|}$, Fourierova báze	0,8949	0,8038	0,7614	0,4370
K	75	100	200	400
$\frac{\|z-w\|}{\|z\|}$, Euklidova báze	0,8431	0,7870	0,5544	0,1277
$\frac{\|z-w\|}{\|z\|}$, Fourierova báze	0,1852	0,0662	0,0265	0,0125


Chyba komprese 1.vektoru
Euklidova báze
Fourierova báze
||z−w||/||z||
K
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0
50
100
150
200
250
300
350
400


Chyba komprese 2.vektoru
Euklidova báze
Fourierova báze
||z−w||/||z||
K
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0
50
100
150
200
250
300
350
400


Chyba komprese 3.vektoru
Euklidova báze
Fourierova báze
||z−w||/||z||
K
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
50
100
150
200
250
300
350
400


Chyba komprese 4.vektoru
Euklidova báze
Fourierova báze
||z−w||/||z||
K
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
50
100
150
200
250
300
350
400

Jak je z předcházejících tabulek a obrázků hezky vidět, použití Fourierovy báze při kompresi dat přináší své výhody. Zvláště při malých K dosahujeme výrazně lepších výsledků ve smyslu menší relativní chyby, než když použijeme Euklidovu bázi. Jen dvakrát jsme dosáhli lepšího výsledku při použití Euklidovy báze. Bylo to pro $K = 200$ u prvního vektoru a pro $K = 400$ u druhého vektoru. Rozdíl je však v těchto případech velmi malý a byl způsoben zaokrouhlovací chybou při výpočtu transformací.

Kapitola 4

Závěr

V této práci jsme studovali diskrétní Fourierovu transformaci (DFT) a aplikovali poznatky z teorie na konkrétní úlohy. Přínos v první části spočívá v doplnění důkazů, které chybějí v citovaných publikacích. Ve druhé části potom především v předvedené ukázce aplikace DFT na kompresi dat. Ukázali jsme, že při použití Fourierovy báze lze v této úloze dosáhnout velmi dobrých výsledků.

Literatura

[1] Bracewell R. N.: *The Fourier transform and its applications*, McGraw-Hill Companies, 2000.

[2] Frazier M. W.: *An introduction to wawelets through linear algebra*, Springer-Verlag, New York, 1999.

[3] Najzar K.: *Základy teorie waveletů*, Karolinum, Praha, 2004.

[4] Rektorys K.: *Přehled užité matematiky*, SNTL, Praha, 1981.