Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jan Martínek

Vybrané hry založené na náhodě

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Zbyněk Pawlas, Ph.D.

Studijní program: Matematika
Studijní obor: Finanční matematika

2008

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 4.8.2008 Jan Martínek

Obsah

Název práce: Vybrané hry založené na náhodě
Autor: Jan Martínek
Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Zbyněk Pawlas, Ph.D.
e-mail vedoucího: pawlas@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme výherní strategie z pravděpodobnostního hlediska v různých hrách. Cílem této práce je dané hry rozebrat a určit optimální postup, při kterém maximalizujeme naši šanci na výhru. Jsou popsány tři odlišné typy her: ruleta, karetní hry a kostkové hry. Každá z těchto her je založená na stavech, ke kterým dochází s odlišnou pravděpodobností. Z tohoto důvodu u každé z těchto her uplatňujeme odlišný způsob hledání optimální strategie.

Klíčová slova: Hry, strategie, ruleta, kostkové hry, karetní hry

Title: Selected games based on chance
Author: Jan Martínek
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: RNDr. Zbyněk Pawlas, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: pawlas@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we study winning strategies from a probability sight in different games. The aim of this work is to analyze those games and settle the optimal strategy, which helps us to maximalize our winning chance. There are described three different games: roullete, card games and games with dices. Every of these games are based on probability of different states, with different probability. That's why in each of those games we're using different way how to find out optimal strategy.

Keywords: games, strategy, roullete, game with dices, card games

Úvod

Historie her a hazardních her sahá daleko do minulosti a za tuto dlouhou dobu se vyvinula celá řada nejrůznějších variant. Hry založené na náhodě lze roztřídit do různých skupin, každá skupina má určitý společný rys (např. karetní hry, kostkové hry). Karetní a kostkové hry patří k vůbec nejstarším hrám, které byly vyvinuty. Během vývoje došlo k mnoha modifikacím do nejrůznějších podob.

Všechny hry mají jednu společnou vlastnost a to, že jsou založeny na náhodě. Záleží, jak jsou karty zamíchány, jaké číslo padne na kostce aj. Toto nemůžeme nijak ovlivnit a jsme tedy zcela odkázáni na náhodu. Co ale můžeme ovlivnit? Můžeme ovlivnit celou řadu věcí dle pravidel jednotlivé hry, např. jaké karty vyneseme, jakých karet se zbavíme, s kolika kostkami budeme pokračovat. Za dobu existence her si lidé vytvořili celou řadu systémů a mýtů, jak neprohrát nebo jak zvolit zaručenou výherní strategii. V této práci ukazuji, že existují určité optimální strategie. To však neznamená, že pokud se jimi budeme řídit, tak zcela jistě vyhrajeme. Tyto strategie nám pouze říkají, jak maximálně zvýšit svoji šanci na výhru, ale jestli náš soupeř hodí lépe nebo bude mít lepší karty, o tom už nám nic neříkají a v tomto ohledu jsme stále odkázáni na náhodu.

Zvolený systém rozhodování je založen na poměru 50:50, hrajeme dál pokud máme šanci na zlepšení větší než 50%. Ve skutečnosti se preference jednotlivých lidí liší, a každý z nás je ochoten přijmou větší či menší riziko. Jsou uvedeny analýzy odlišných typů her, které se dají aplikovat i na jiné než uvedené hry.

Existuje i druh her, které jsou založeny na odlišném poměru mezi matematickou pravděpodobností a výherním poměrem, zejména hazardní hry. Tyto hry nejsou fér, a i když v nich lze najít optimální strategii, tak z dlouhodobého hlediska budeme vždy ve ztrátě. Na tyto hry je potřeba si dávat pozor a pokud možno se do nich vůbec nepouštět, i když výhra působí lákavě, tak pravděpodobnost prohry je mnohem vyšší než pravděpodobnost výhry. Před každou hrou bychom si měli pečlivě rozmyslet, kolik jsme ochotni prohrát, spočítat si pravděpodobnost výhry a posoudit, jestli je podstoupené riziko adekvátní možné výhře.

Kapitola 1

Ruleta

1.1 Obecné vlastnosti

Z obecného hlediska se jedná u her typu 'Ruleta' o velice jednoduchý princip založený na náhodném výběru jednoho čísla z určitého rozsahu. Pravděpodobnost výběru je u všech čísel stejná, jelikož každé číslo je zde zastoupeno pouze jednou a tudíž je pravděpodobnost hodu čísla a daná jako:

$$P(a) = \frac{1}{n},$$

kde n značí počet čísel na ruletě.

Tato vlastnost často vede k velice naivní hypotéze, že každé číslo se objeví právě jednou v každých n hodech (viz [1]), ovšem tato varianta je velice nepravděpodobná a je rovna

$$P(1, n) = \frac{n!}{n^n}.$$

***Příklad**: ve francouzské ruletě je 37 čísel a tudíž je pravděpodobnost, že se ve 37 hodech právě jednou objeví každé číslo je*

$$P(1, 37) = \frac{37!}{37^{37}} = 1{,}304 \cdot 10^{-15}.$$

Tato pravděpodobnost je téměř rovna 0. Jaká je tedy pravděpodobnost, že se v n hodech objeví právě k-krát zvolená hodnota. Tato pravděpodobnost je daná binomickým rozdělením

$$P[X=k]=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},$$

kde X označuje počet výskytů dané hodnoty v n hodech.

Příklad *: ve francouzské ruletě je n=37 (počet čísel) a p=1/37*

$$P[X=k]=\binom{37}{k}\left(\frac{1}{37}\right)^k\left(1-\frac{1}{37}\right)^{37-k}$$

Zkusme se nyní podívat co se stane v případě, že čísel na ruletě bude nekonečno. Označíme $\lambda = n \cdot p$, v předchozím případě bylo tedy $\lambda = 1$. Potom

$$P[X=k]=\tbinom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\tbinom{n}{k}\tfrac{\lambda}{n}^k\left(1-\tfrac{\lambda}{n}\right)^{n-k}=\tfrac{1}{k!}\tfrac{n!}{(n-k)!}\lambda^k\left(1-\tfrac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$
$$=\tfrac{1}{k!}\tfrac{n!}{(n-k)!}^k\left(1-\tfrac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\tfrac{\lambda}{n}\right)^{-k}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\tfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

Z tohoto rozvoje vidíme, že binomické rozdělení s parametry n a p lze apro-ximovat Poissonovým rozdělením s parametrem $\lambda = n \cdot p$. Následující tabulka znázorňuje kvalitu aproximace binomického rozdělení Poissonovým rozdělením, že v n hodech padne právě k-krát daná hodnota.

Tabulka 1.1. Aproximace binomického rozdělení Poissonovým pro $n = 37$.

k	**Binomické rozdělení**	**Poissonovo rozdělení**	**|chyba|**
0	0,36285	0,36787	0,00503
1	0,37293	0,36787	0,00505
2	0,18646	0,18393	0,00253
3	0,06042	0,06131	0,00088
4	0,01426	0,01532	0,00106
5	0,00261	0,00306	0,00045
...	...	...	...

Kolik různých čísel se tedy objeví v 37 hodech za sebou?

Definujeme proměnné Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4,$\cdots$, Z_{36}, kde každá z těchto proměnných nabývá hodnoty:

$$Z_i=\begin{cases}1, & \text{pokud se číslo } i \text{ neobjeví ani jednou v dané sérii 37 hodů,}\\ 0, & \text{jinak.}\end{cases}$$

Střední hodnoty těchto čísel jsou stejné, neboť pravděpodobnost hodu každého čísla je stejná. Pravděpodobnost, že se dané číslo neobjeví:

$$E[Z_0]=E[Z_1]=E[Z_2]=...=E[Z_{36}]=0{,}36285.$$

Určíme počet čísel, které se v 37 hodech za sebou neobjeví

$$E[Z_0] + E[Z_1] + E[Z_2] + ... + E[Z_{36}] = 37 \cdot 0{,}36285 \approx 13.$$

Ze zákona velkých čísel plyne, že v dlouhých sériích po 37 hodech se zhruba 36,2% $\approx$ 13 čísel v každé jednotlivé sérii vůbec neobjeví, viz [1].

***Příklad**: ve francouzské ruletě je $n = 37$ (počet čísel), tudíž v dlouhých seriích po 37 hodech se 13 čísel vůbec neobjeví.*

Typickým znakem u tohoto typu her je hrací plán, na kterém každé pole vyznačuje určitou výši výplatního poměru, jež bude vyplacen, pokud padne číslo splňující daná kritéria. Tuto vlastnost lze interpretovat maticí výher

$$V\{a_{ij}\},$$

která je jednoznačně určena následovně:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

kde a_{ij} značí výplatu hráče při sázce i při výsledku j.

Sázku hráče lze interpretovat jako vektor $\vec{s}$:

$$\vec{s} \stackrel{\text{def}}{=} (s_1, s_2, s_3, \dots, s_n); \qquad \forall i, s_i \geq 0, \quad \sum_i s_i = 1,$$

kde s_i značí sázku hráče na i-tou sázkovou možnost.

Celkovou výhru hráče při hodu čísla j, lze definovat jako:

$$v_j = \sum_{k=1}^{n} s_k.V_{k,j} \tag{1.1}$$

Tento vztah lze zapsat i maticově, jako j-tou složku vektoru $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \vec{s}.V$$

Jelikož výhra závisí pouze na hodu čísla, tak pravděpodobnost, že ve vektoru $\vec{v}$, bude naši výhru značit složka j, je stejná jako, že naši výhru bude značit složka $j + m$. Tato vlastnost nám pomůže při hledání optimální sázky.

$$P(X = j) = P(X = k); \qquad j, k \in \{1, 2, 3, ..., n\}. \tag{1.2}$$

1.1.1 Optimální strategie

Optimální strategie by měla být založena na minimalizaci ztráty nebo maximalizaci zisku, tudíž hledáme takové rozložení sázek (rozložení vektoru $\vec{s}$), pro které bude součet složek vektoru $\vec{v}$ maximální (jelikož všechna čísla mají stejnou pravděpodobnost, že padnou viz (1.2))

$$\max \sum_i v_i, \tag{1.3}$$

pak po dosazení (1.1) do (1.3) předchozího vzorce platí:

$$\max \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} s_k . V_{k,j},$$

kde n značí počet čísel a m značí počet různých sázek.

Dále můžeme spočítat střední hodnotu výhry při dané sázce s, jako

$$E[v] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (s.V)_i.$$

Další možnosti hledání optimálního řešení je založena na maximalizaci střední hodnoty výhry, tedy jako

$$\max \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (s.V)_i.$$

.

1.2 Francouzská ruleta

1.2.1 Základní informace

Ruleta se skládá ze dvou kol. Menší kolo má 37 čísel (čísla nejdou popořadě za sebou), z toho 36 čísel je červených nebo černých (rovnoměrně 18 červených, 18 černých čísel), nula je zelená. Barvy (červená a černá) se na kole střídají. Čísla jsou uspořádána tak, aby poskytovala co nejpestřejší kombinace malých-velkých a sudých-lichých čísel. Ruleta je poměrně snadná a srozumitelná i pro začátečníky. Poskytuje velmi široké možnosti sázek a je tak přímo zrozená pro různé systémy sázek, viz [3].

1.2.2 Sázky

V ruletě existuje dvanáct základních sázek a několik zvláštních sázek. Jejich kompletní přehled a výplatní poměry naleznete v níže uvedené tabulce.

Patří mezi ně sázka na jedno číslo s výplatním poměrem 35:1. Dále lze sázet kombinované sázky (dvojice, trojice, čtyři čísla a šest čísel).

Velmi oblíbené jsou tzv. jednoduché, či rovné sázky, tj. malá (1-18) nebo velká čísla (19-36), červená nebo černá, sudá nebo lichá. Výplatní poměr u rovných sázek činí 1:1. Kromě rovných sázek lze také sázet na 12 čísel, a to prostřednictvím sázek na tucty (první 1-12, druhý 13-24 a třetí 25-36) a sloupce. Výplatní poměr je v obou případech 2:1. Je možné vsadit také na sousední tucty a sousední sloupce. Veškeré sázky lze v ruletě libovolně kombinovat, viz [3].

Pravděpodobnost výhry pro určitou kombinaci se spočítá podle základního vzorce pro výpočet pravděpodobnosti, jako podíl počtu příznivých událostí k celkovému počtu událostí.

Z tabulky 1.2. je patrné, že výplatní poměr není roven matematicky vypočtené pravděpodobnosti, tudíž hra není spravedlivá a je výhodnější pro kasino. Tato výhoda se nazývá **výhoda kasina** a plyne z rozdílu mezi skutečným matematickým sázkovým poměrem a výherním poměrem vypláceným kasinem, který je způsoben zařazením nuly do hracího plánu:

$$VK = \frac{SVP - VPK}{SVP + 1},$$

kde VK značí výhodu kasina, SVP značí spravedlivý výplatní poměr a VPK je výplatní poměr kasina, viz [6].

Výhoda kasina je pro všechny druhy sázek stejná a je rovna 2,7%.

Tabulka 1.2. Pravděpodobnost výhry při konkrétní sázce.

Typ sázky	**Výplatní poměr kasina**	**Spravedlivý výplatní poměr**	**Pravděpodobnost výhry**
jedno číslo	35:1	36:1	2,7%
dvojice	17:1	35:2	5,4%
trojice	11:1	34:3	8,1%
čtveřice	8:1	33:4	10,8%
šest čísel	5:1	31:6	16,2%
tucet	2:1	25:12	32,4%
sousední tucty	1:2	13:24	64,9%
sloupec	2:1	25:12	32,4%
sousední sloupce	1:2	13:24	64,9%
červená čísla	1:1	19:18	48,6%
černá čísla	1:1	19:18	48,6%
lichá čísla	1:1	19:18	48,6%
sudá čísla	1:1	19:18	48,6%
malá čísla	1:1	19:18	48,6%
velká čísla	1:1	19:18	48,6%

Kapitola 2

Kostkové hry

2.1 Kostkový poker

Kostkový poker je jednoduchá hra s rychlým spádem. Hra je inspirována známější karetní verzí pokeru. Hraje se s pěti kostkami, které mají různé obrázky (v našem případě místo obrázků použijeme klasickou kostku s čísly 1 až 6). Cílem hry je hodit co nejvyšší kombinaci. Oproti karetnímu pokeru zde odpadá princip blufování.

Hru může hrát libovolný počet hráčů. Každý hráč vsází stejnou částku a hráč s nejvyšší kombinací bere bank. První hráč hodí pět kostek. Pokud mu kombinace vyhovuje, může se rozhodnout zůstat pouze u jednoho hodu. Ostatní hráči pak mají také pouze jeden hod. Může tak nastat situace, kdy si první hráč myslí, že má dobrou kombinaci, kterou bude pro ostatní hráče těžké v jednom hodu překonat. Obecně platí, že počet hodů se řídí podle prvního hráče.

První hráč si může ovšem ponechat určitou kombinaci vyhovujících kostek, např. tři pětky, vezme zbývající dvě kostky a pokračuje druhým hodem. Poté předá kostky dalšímu hráči. Varianta s dvěma hody je nejobvyklejší, hráči se ale mohou dohodnout ještě na třetím hodu. Opět vyhrává hráč s nejsilnější kombinací.

Pokud mají dva či více hráčů rovnocennou kombinaci, o vítězi se rozhoduje v dalších hodech pěti kostkami. Hráči se mohou také dohodnout, že rozhodne hod kostkou navíc, převzato z [2].

2.1.1 Bodování v kostkovém pokeru

Bodování v kostkovém pokeru (pro pět kostek) opět vychází z karetní verze a je následující (od nejsilnější kombinace k nejslabší), viz [2].

Tabulka 2.1: Kvalita kombinace v kostkovém pokeru pro pět kostek

pět stejných	(*five of a kind*)
čtyři stejné	(*poker*)
sekvence	(*streight*)
plný dům	(*full-house*)
trojice	(*three of a kind*)
dva páry	(*two pairs*)
jeden pár	(*one pair*)

Základem pro určení optimální strategie je určení pravděpodobnosti hodu jednotlivých variant.

Nechť n je počet kostek a k je počet čísel na kostce a předpokládejme, že $n < k$, pak:

Celkový počet možností je dán počtem variací n-té třídy z k prvků s opakováním:

$$V(n,k) = k^n.$$

Počet možností pro jednotlivé kombinace lze spočítat pomocí klasických kombinatorických úvah.

1. n stejných čísel na n-kostkách:
$$k,$$
2. $(n-1)$ stejných čísel na n-kostkách:
$$k \cdot (k-1) \cdot n,$$
3. $(n-2)$ stejných čísel a 2 jiná stejná čísla:
$$\frac{k(k-1)n!}{(n-2)!2!}$$
4. Sekvence délky n:
$$(k-n+1)n!$$

5. $(n-2)$ stejných čísel a 2 jiná různá čísla:

$$\frac{n!}{(n-2)!}k\frac{(k-1)!}{(k-3)!2!}$$

6. n liché, při kterém padne $(n-1)/2$ stejných čísel a $(n-1)/2$ jiných stejných čísel a jedno jiné číslo:

$$\frac{k!}{(k-2)!2!}\ \frac{n!}{\frac{(n-1)}{2}!\frac{(n-1)}{2}!}\cdot(k-2)$$

7. n sudé, při kterém padne $n/2$ stejných čísel a $n/2$ jiných stejných čísel:

$$\frac{k!}{(k-2)!2!}\ \frac{n!}{\frac{n}{2}!\frac{n}{2}!}$$

8. u stejných čísel a v jiných různých čísel:

$$\frac{n!}{u!}\frac{(k-1)!}{(k-v-1)!v!}\cdot k$$

V příkladu kostkového pokeru má hráč možnost hodit i méně než všemi pěti kostkami, proto je důležité spočítat pravděpodobnosti pro hody s menším počtem kostek.
Uvedené vzorce aplikujeme a po dosazení za $n=5, k=6$ dostáváme:

Tabulka 2.2: Pravděpodobnosti pro hod pěti kostkami.

Kombinace	Četnost	Pravděpodobnost
pět stejných	6	0,08%
čtyři stejné	150	1,93%
sekvence	240	3,09%
plný dům	300	3,86%
trojice	1200	15,43%
dva páry	1800	23,15%
jeden pár	3600	46,30%
nic	480	6,17%
Celkový počet možností	7776	

Uvedené vzorce aplikujeme a po dosazení za $n = 4, k = 6$ dostáváme:

Tabulka 2.3: Pravděpodobnosti pro hod čtyřmi kostkami.

Kombinace	Četnost	Pravděpodobnost
čtyři stejné	6	0,46%
trojice	120	9,26%
dva páry	90	6,94%
jeden pár	720	55,56%
nic	360	27,78%
Celkový počet možností	1296	

Uvedené vzorce aplikujeme a po dosazení za $n = 3, k = 6$ dostáváme:

Tabulka 2.4: Pravděpodobnosti pro hod třemi kostkami.

Kombinace	Četnost	Pravděpodobnost
trojice	6	2,77%
jeden pár	90	41,67%
nic	120	55,56%
Celkový počet možností	216	

Pro $n = 2, k = 6$ je to zřejmé:

Tabulka 2.5: Pravděpodobnosti pro hod dvěma kostkami.

Kombinace	Četnost	Pravděpodobnost
jeden pár	6	16,67%
nic	30	83,33%
Celkový počet možností	36	

Pro $n = 1, k = 6$ je to zřejmé:

Tabulka 2.6: Pravděpodobnosti pro hod jednou kostkou

Kombinace	Četnost	Pravděpodobnost
hod určitého čísla	1	16,67%
Celkový počet možností	6	

2.1.2 Zjednodušená varianta

Nejprve si danou hru trošku zjednodušíme a řekneme, že hráč může házet celkem dvakrát, ale pokaždé musí hodit znovu všemi kostkami.

V této kapitole určíme optimální strategii pro hru o dvou hráčích a budeme hledat optimální strategii pro začínajícího hráče.

Pro analýzu optimální strategie je nutné nejprve spočítat četnosti konkrétních kombinací, čili kolika způsoby můžeme například hodit dvojici '11':

Tabulka 2.7: Četnosti při hodu pěti kostkami pro jednotlivé kombinace.

Kombinace	Unikátní četnost	Počet různých
pět stejných	1	6
čtyři stejné	25	6
sekvence	120	2
plný dům	10	30
trojice	200	6
dva páry	120	15
jeden pár	600	6

Nyní můžeme spočítat pravděpodobnost, že v následujícím hodu pěti kostkami padne lepší kombinace.

Nechť vektor $\vec{v}$ značí, jaká čísla padla na pěti kostkách a definujeme funkci $F[x]$, která každé kombinaci přiřadí ohodnocení dle kvality kombinace:

$$F[x] = \begin{cases} 0; & \text{hod neobsahuje žádnou výherní kombinaci} \\ 1; & \text{hod obsahuje kombinaci '11'} \\ 2; & \text{hod obsahuje kombinaci '22'} \\ \vdots & \vdots \\ 71; & \text{hod obsahuje kombinaci '66666'} \end{cases}$$

A nyní spočítáme pravděpodobnosti konkrétních kombinací seřazených podle ohodnocení.

Tabulka 2.8: Pravděpodobnost, že opakovaným hodem s pěti kostkami hodíme lepší kombinaci.

$P[F[v_{t+1}]>F[v_t]]$ pro hod 5-ti kostkami					
Hod	Pravd. hodu	$P[F[v_{t+1}]>F[v_t]]$	Hod	Pravd. hodu	$P[F[v_{t+1}]>F[v_t]]$
nic	6,17%	93,83%	22255	0,13%	7,79%
11	7,72%	86,11%	22266	0,13%	7,66%
22	7,72%	78,04%	33311	0,13%	7,54%
33	7,72%	70,68%	33322	0,13%	7,41%
44	7,72%	62,96%	33344	0,13%	7,28%
55	7,72%	55,25%	33355	0,13%	7,15%
66	7,72%	47,53%	33366	0,13%	7,02%
1122	1,54%	45,99%	44411	0,13%	6,89%
1133	1,54%	44,44%	44422	0,13%	6,76%
2233	1,54%	42,90%	44433	0,13%	6,64%
1144	1,54%	41,36%	44455	0,13%	6,51%
2244	1,54%	39,81%	44466	0,13%	6,38%
3344	1,54%	38,27%	55511	0,13%	6,25%
1155	1,54%	36,73%	55522	0,13%	6,12%
2255	1,54%	35,19%	55533	0,13%	5,99%
3355	1,54%	33,64%	55544	0,13%	5,86%
4455	1,54%	32,10%	55566	0,13%	5,74%
1166	1,54%	30,56%	66611	0,13%	5,61%
2266	1,54%	29,01%	66622	0,13%	5,48%
3366	1,54%	27,47%	66633	0,13%	5,35%
4466	1,54%	25,93%	66644	0,13%	5,22%
5566	1,54%	24,38%	66655	0,13%	5,09%
111	2,57%	21,81%	12345	1,54%	3,55%
222	2,57%	19,24%	23456	1,54%	2,01%
333	2,57%	16,67%	1111	0,32%	1,68%
444	2,57%	14,09%	2222	0,32%	1,36%
555	2,57%	11,52%	3333	0,32%	1,04%
666	2,57%	8,95%	4444	0,32%	0,72%
11122	0,13%	8,82%	5555	0,32%	0,40%
11133	0,13%	8,69%	6666	0,32%	0,08%
11144	0,13%	8,56%	11111	0,01%	0,06%
11155	0,13%	8,44%	22222	0,01%	0,05%
11166	0,13%	8,31%	33333	0,01%	0,04%
22211	0,13%	8,18%	44444	0,01%	0,03%
22233	0,13%	8,05%	55555	0,01%	0,01%
22244	0,13%	7,92%	66666	0,01%	0,00%

- Uvedená tabulka ukazuje začínajícímu hráči, jaká je pravděpodobnost, že v druhém hodu docílí lepší kombinace.
- Ukazuje pravděpodobnost, že druhý hráč hodí lepší kombinaci, pokud se první hráč rozhodne házet pouze jednou (druhý hráč má potom také jenom jeden hod).

- Z uvedené tabulky se dá spočítat pravděpodobnost, že druhý hráč hodí ve dvou hodech (pokud se první hráč rozhodne pro dva hody) lepší kombinaci než začínající hráč. Tato pravděpodobnost je dána jako:

$$1 - (1 - P[F[v_{t+1}]] > F[v_t]])^2.$$

2.1.3 Optimální strategie

Nyní zkusme analyzovat případ, kdy si hráč z prvního hodu může nechat, jaký chce počet kostek. Spočítáme, kdy je pro prvního hráče výhodné ponechat si kombinaci z prvního hodu nebo házet ještě jednou a pokusit se zlepšit svoji situaci.

Vycházíme z tabulky 2.2., kde je patrné, že pokud první hráč hodí v prvním kole pouze jednu dvojici (tj. 11, 22, 33, ...), tak pravděpodobnost, že ho soupeř v jednom hodu porazí nebo remizuje je větší než 50%.

Jaká je tedy pravděpodobnost, že si v druhém kole hráč polepší (tj. dosáhne lepší kombinace)? Pravděpodobnosti jsou uvedeny v tabulce 2.9.

Tabulka 2.9: Pravděpodobnost zlepšení, pokud jsme v prvním kole dosáhli kombinace uvedené v prvním sloupci a do druhého hodu si ponecháme kombinaci 11.

Kombinace dosažená prvním hodem	Pravděp. hodu stejného		Pravděp. zlepšení	Pravděp. zhoršení
11	60/216	27,78%	72,22%	0,00%
1122	12/216	5,56%	66,67%	27,78%
1133	12/216	5,56%	61,11%	33,33%
1144	12/216	5,56%	55,56%	38,89%
1155	12/216	5,56%	50,00%	44,44%
1166	12/216	5,56%	44,44%	50,00%
111	60/216	27,78%	16,67%	55,56%
11122	3/216	1,39%	15,28%	83,33%
11133	3/216	1,39%	13,89%	84,72%
11144	3/216	1,39%	12,50%	86,11%
11155	3/216	1,39%	11,11%	87,50%
11166	3/216	1,39%	9,72%	88,89%
22211	1/216	0,46%	9,26%	90,28%
33311	1/216	0,46%	8,80%	90,74%
44411	1/216	0,46%	8,33%	91,67%
55511	1/216	0,46%	7,87%	92,13%
66611	1/216	0,46%	7,41%	92,13%
1111	15/216	6,94%	0,46%	92,59%
11111	1/216	0,46%	0,00%	99,54%

Z tabulky 2.9 je patrné, že v případě, kdy hodíme jednu dvojici (tj. 11, 22, ...), tak se vyplatí házet podruhé třemi kostkami, jelikož naše šance na zlepšení v druhém hodu je 72,22%. Dále je vidět, že v případě hodu dvou dvojic tj. 1122, 1133 atd. se vyplatí ponechat si dvojici (lepší je nechat si větší dvojici) a házet podruhé třemi kostami, jelikož šance na zlepšení je 66,67% až 50% (ale nesmíme opomenout vzrůstající riziko, že si pohoršíme).

Tabulka 2.10: Pravděpodobnost zlepšení, pokud jsme v prvním kole dosáhli kombinace uvedené v prvním sloupci a do druhého hodu si ponecháme kombinaci 1122.

Kombinace dosažená prvním hodem	Pravděp. hodu stejného		Pravděp. zlepšení	Pravděp. zhoršení
1122	4/6	66,67%	33,33%	0,00%
11122	1/6	16,67%	16,67%	66,67%
11222	1/6	16,67%	0,00%	83,33%

Z tabulek 2.9 a 2.10 je patrné, že pokud se rozhodujeme ponechat si z prvního hodu kombinaci dvou dvojic nebo jedné dvojice. Pak je ovšem mnohem výhodnější ponechat si pouze jednu dvojici a házet znovu třemi kostkami, než házet jednou kostkou(pravděpodobnost zlepšení je v tomto případě větší).

Tabulka 2.11: Pravděpodobnost zlepšení, pokud jsme v prvním kole dosáhli kombinace uvedené v prvním sloupci a do druhého hodu si ponecháme kombinaci 111.

Kombinace dosažená prvním hodem	Pravděp. hodu stejného		Pravděp. zlepšení	Pravděp. zhoršení
111	20/36	55,56%	44,44%	0,00%
11122	1/36	2,78%	41,67%	55,56%
11133	1/36	2,78%	38,89%	58,33%
11144	1/36	2,78%	36,11%	61,11%
11155	1/36	2,78%	33,33%	63,89%
11166	1/36	2,78%	30,56%	66,67%
1111	10/36	27,78%	2,78%	69,44%
11111	1/36	2,78%	0,00%	97,22%

Zde je vidět, že pokud v prvním kole hodíme trojici, pak se nevyplatí házet v druhém kole, neboť pravděpodobnost, že nás soupeř jedním hodem předčí je max. 28,1% (když hodíme kombinaci 111, viz. tabulka 2.2.). Naše šance na zlepšení v druhém hodu (dvěmi kostkami) je 44,44%.

Tabulka 2.12: Pravděpodobnost zlepšení, pokud jsme v prvním kole dosáhli kombinace uvedené v prvním sloupci a do druhého hodu si ponecháme kombinaci 1111.

Kombinace dosažená prvním hodem	Pravděp. hodu stejného		Pravděp. zlepšení	Pravděp. zhoršení
1111	5/6	83,33%	16,67%	0,00%
11111	1/6	16,67%	0,00%	83,33%

Tato situace je podobná té předcházející. Pokud si budeme chtít z prvního hodu ponechat čtveřici a házet podruhé, tak šance že se zlepšíme je 16,67%. Kdežto pravděpodobnost, že nás soupeř přehodí v jednom pokusu je 1,67%. Tedy nevyplatí se nám házet podruhé, neboť naším druhým hodem zvyšujeme pravděpodobnost, že nás soupeř přehodí.

Pokud v prvním kole hodíme pět stejných a nebo sekvenci nerozebíráme, neboť v těchto případech je patrné, že se nevyplatí házet podruhé a optimální je tedy zůstat u jednoho hodu.

2.2 Nejvyšší součet vyhrává

Dalším příkladem kostkových her jsou hry, při kterých se snažíme dosáhnout co největšího součtu na kostkách.

Uvažujme hru s následujícími pravidly: Máme n kostek a snažíme se dosáhnout co největšího součtu na všech kostkách. Po každém hodu musíme alespoň jednu kostku odložit a dál házíme se zbytkem kostek dokud nenecháme ležet všechny kostky (budeme spokojeni s naším součtem).

Naším úkolem je najít optimální strategii, tj. postup kterým hráč bude maximalizovat svůj celkový součet.

Uvedenou hru budeme analyzovat od spodu (myšleno od nejnižšího počtu házených kostek), jelikož do těchto situací se hráč dostane pokud bude začínat s vyšším počtem kostek.

Pro další analýzy definujeme zřejmá základní pravidla:

- Hráč odkládá vždy kostku s maximální hodnotou.
- Hráč odkládá všechny hozené šestky.

Uvažujme dva rozdílné přístupy pro hledání optimální strategie. V prvním přístupu zkoumáme, kdy si můžeme dalšími hody polepšit s pravděpodobností větší než 50%. Druhý přístup se snaží maximalizovat očekávanou hodnotu dosažených hodů.

2.2.1 Pravděpodobnost zlepšení

I. n-1 kostek stojí a můžeme hodit jednou kostkou

Následující tabulka shrnuje pravidlo rozhodování pokud nám již $(n-1)$ kostek stojí a rozhodujeme se, jestli hodíme poslední kostkou znovu nebo ji už necháme ležet.

Tabulka 2.13: Pravidlo rozhodování pro hod jednou kostkou.

Hodnota na poslední kostce	Pravděp. zlepšení nebo zůstaneme na svém
1	100,00%
2	83,33%
3	66,67%
4	50,00%
5	33,33%
6	16,67%

V mezní situaci v bodě 4 je sice pravděpodobnost zlepšení 50%, ale střední hodnota z dodatečného hodu je 3,5, což je menší než 4, tudíž se již nevyplatí házet znovu.

II. n-2 kostek stojí a můžeme hodit dvěma kostkami

Pro jednotlivé součty na dvou kostkách tj. (2, 3, 4, 5, ..., 12) potřebujeme spočítat pravděpodobnost, že buď v následujícím hodu (dvěmi kostkami) nebo následně ještě dohozením jednou kostkou tento součet překonáme.

Tato situace se dá řešit dvěma různými způsoby:

A)

Jako pravděpodobnost, že v následujícím hodu přehodíme součet naší současné kombinace plus pravděpodobnost, že hodíme nižší součet a z tohoto hodu si ponecháme větší číslo a dalším hodem jednou kostkou původní součet překonáme. Dané pravděpodobnosti znázorňuje tabulka 2.14.

Tabulka 2.14: Pravděpodobnost, že v následujícím hodu překonáme náš současný hod.

součet	Pravděp. zlepšení nebo zůstaneme na svém	
2	36/36	100,00%
3	35/36+1/36·5/6	99,54%
4	33/36+2/36·5/6+1/36·4/6	98,15%
5	30/36+2/36·5/6+3/36·4/6+1/36·3/6	94,91%
6	26/36+2/36·5/6+4/36·4/6+3/36·3/6+1/36·2/6	89,35%
7	21/36+2/36·5/6+4/36·4/6+5/36·3/6+3/36·2/6+1/36·1/6	80,56%
8	15/36+2/36·5/6+4/36·4/6+6/36·3/6+5/36·2/6+3/36·1/6	68,06%
9	10/36+4/36·4/6+6/36·3/6+7/36·2/6+5/36·1/6	52,31%
10	6/36+7/36·1/6+8/36·2/6+6/36·3/6	35,65%
11	3/36+9/36·1/6+8/36·2/6	19,91%
12	1/36+10/36·1/6	7,41%

Z tabulky 2.14 je patrné, že mezní hodnota je součet 10. Při tomto součtu (hod bez šestky, tj. pouze dvě pětky), necháváme obě kostky na stole a dále už neházíme.

B)

Daná situace *hod dvěma kostkami* a posléze ještě možnost dohodit jednou kostkou se dá převést na situaci, kdy házíme třemi kostkami a z těchto tří kostek si ponecháme dvě kostky na kterých jsou největší čísla.

Celkový počet kombinací při hodu třemi kostkami je 6^3=216 a četnost jednotlivých součtů pokud si ponecháme pouze dvě kostky (s největšími hodnotami) znázorňuje tabulka 2.15:

Z těchto četností se dá spočítat pravděpodobnost, s jakou hodíme jednotlivé kombinace a dále také pravděpodobnost, s jakou daný součet na dvou kostkách přehodíme, jak ukazuje tabulka 2.15:

Tabulka 2.15 : Pravděpodobnosti pro hod dvěma kostkami.

součet na 2 kostkách	četnost	Pravděpodobnost hodu kombinace	Pravděpodobnost zlepšení nebo zůstaneme na svém
2	1	0,46%	100,00%
3	3	1,39%	99,54%
4	7	3,24%	98,15%
5	12	5,56%	94,91%
6	19	8,80%	89,35%
7	27	12,50%	80,56%
8	34	15,74%	68,06%
9	36	16,67%	52,31%
10	34	15,74%	35,65%
11	27	12,5%	19,91%
12	16	7,41%	7,41%

Mezní situace nastává pokud součet na dvou kostkách je roven 9, pak máme dvě možnosti

- 6 a 3 ... 6 necháváme a analyzujeme trojku (viz předchozí případ)
- 5 a 4 ... pravděpodobnost zlepšení nebo zůstaneme na svém je 52.31%, házíme dvěma kostkami znovu.

III. n-3 kostek stojí a můžeme hodit třemi kostkami

Tuto situaci budeme počítat postupně. Na třech kostkách máme součet x a rozhodujeme se, zda-li budeme házet znovu nebo si tuto kombinaci necháme. Pravděpodobnost, že zlepšíme nebo znovu hodíme součet x budeme počítat rekurentně. Například, chceme určit pravděpodobnost zlepšení pokud nám zbývají tři pětky, jinými slovy pravděpodobnost součtu alespoň 15. Situaci rozdělíme na případy podle toho, co padne při prvním hodu třemi kostkami:

Pravděpodobnost, že při hodu třemi kostkami bude maximum k je:

$$\frac{k^3 - (k-1)^3}{6^3}$$

Tabulka 2.16: Pravděpodobnost maxima k.

k	Pravděpodobnost maxima k
1	1/216
2	7/216
3	19/216
4	37/216
5	61/216
6	91/216

Potom

- s pravděpodobností 1/216 bude maximum 1 (pak součtu 15 nedosáhneme),

- s pravděpodobností 7/216 bude maximum 2 (pak součtu 15 nedosáhneme),

- s pravděpobobností 19/216 bude maximum 3 a pak musíme dvěma kostkami hodit aspoň 12 (z tabulky pro dva hody víme, že tato pravděpodobnost je rovna 16/216),

- s pravděpodobností 37/216 bude maximum 4, pak musíme dvěma kostkami hodit aspoň 11 (tato pravděpodobnost je rovna 43/216),

- s pravděpodobností 61/216 bude maximum 5, pak musíme dvěma kostkami hodit aspoň 10 (z toho již jeden hod je roven 15 (5,5,5)),

- s pravděpodobností 91/216 bude maximum 6, pak musíme dvěma kostkami hodit aspoň 9 (z toho již 19 hodů má součet větší nebo rovno 15 a 6 hodů obsahuje dvě šestky a jejich součet je menší než 15).

Celková pravděpodobnost, že zlepšíme nebo zůstaneme na svém je rovna

$$\frac{19}{216}\cdot\frac{16}{216}+\frac{37}{216}\cdot\frac{43}{216}+\frac{60}{216}\cdot\frac{77}{216}+\frac{1}{216}+\frac{66}{216}\cdot\frac{113}{216}+\frac{19}{216}+\frac{6}{216}\cdot\frac{4}{6}=0{,}4106,$$

což znamená, že se nevyplatí házet znovu.

Uvedený postup aplikujeme i na ostatní součty a výsledek znázorňuje tabulka 2.17:

Tabulka 2.17: Pravděpodobnosti hodu jednotlivých součtů pro tři kostky

K=Součet na 3 kostkách	**Pravděpodobnost hodu součtu alespoň K**	
3	$\frac{216}{216}$	100,00%
4	$\frac{1}{216} \cdot \frac{215}{216} + \frac{7}{216} + \frac{19}{216} + \frac{37}{216} + \frac{61}{216} + \frac{91}{216}$	100,00%
5	$\frac{1}{216} \cdot \frac{212}{216} + \frac{4}{216} + \frac{3}{216} \frac{215}{216} + \frac{19}{216} + \frac{37}{216} + \frac{61}{216} + \frac{91}{216}$	99,99%
6	$\frac{1}{216} \cdot \frac{205}{216} + \frac{6}{216} \cdot \frac{212}{216} + \frac{1}{216} + \frac{16}{216} + \frac{3}{216} \frac{215}{216} + \frac{37}{216} + \frac{61}{216} + \frac{91}{216}$	99,92%
7	$\frac{1}{216} \cdot \frac{193}{216} + \frac{7}{216} \cdot \frac{205}{216} + \frac{10}{216} + \frac{9}{216} \cdot \frac{212}{216} + \frac{3}{216} \cdot \frac{215}{216} + \frac{34}{216} + \frac{61}{216} + \frac{91}{216}$	99,70%
8	$\frac{1}{216} \cdot \frac{174}{216} + \frac{7}{216} \cdot \frac{193}{216} + \frac{4}{216} + \frac{15}{216} \cdot \frac{205}{216} + \frac{28}{216} + \frac{9}{216} \cdot \frac{212}{216} + \frac{3}{216} \cdot \frac{215}{216} + \frac{58}{216} + \frac{91}{216}$	99,13%
9	$\frac{1}{216} \cdot \frac{147}{216} + \frac{7}{216} \cdot \frac{174}{216} + \frac{18}{216} \cdot \frac{193}{216} + \frac{1}{216} + \frac{19}{216} + \frac{18}{216} \frac{205}{216} + \frac{52}{216} + \frac{9}{216} \frac{212}{216} + \frac{3}{216} \frac{215}{216} + \frac{88}{216}$	97,83%
10	$\frac{1}{216} \cdot \frac{113}{216} + \frac{7}{216} \cdot \frac{147}{216} + \frac{19}{216} \cdot \frac{174}{216} + \frac{10}{216} + \frac{27}{216} \cdot \frac{193}{216} + \frac{43}{216} + \frac{18}{216} \cdot \frac{205}{216} + \frac{9}{216} \cdot \frac{212}{216} + \frac{82}{216}$	95,20%
11	$\frac{1}{216} \cdot \frac{77}{216} + \frac{7}{216} \cdot \frac{113}{216} + \frac{19}{216} \cdot \frac{147}{216} + \frac{33}{216} \cdot \frac{174}{216} + \frac{4}{216} + \frac{31}{216} + \frac{30}{216} \cdot \frac{193}{216} + \frac{18}{216} \cdot \frac{205}{216} + \frac{73}{216}$	90,47%
12	$\frac{1}{216} \cdot \frac{43}{216} + \frac{7}{216} \cdot \frac{77}{216} + \frac{19}{216} \cdot \frac{113}{216} + \frac{36}{216} \cdot \frac{147}{216} + \frac{1}{216} + \frac{19}{216} + \frac{42}{216} \cdot \frac{174}{216} + \frac{61}{216} + \frac{30}{216} \cdot \frac{193}{216}$	82,77%
13	$\frac{1}{216} \cdot \frac{16}{216} + \frac{7}{216} \cdot \frac{43}{216} + \frac{19}{216} \cdot \frac{77}{216} + \frac{37}{216} \cdot \frac{113}{216} + \frac{10}{216} + \frac{54}{216} \cdot \frac{147}{216} + \frac{46}{216} + \frac{45}{216} \cdot \frac{174}{216}$	71,55%
14	$\frac{7}{216} \cdot \frac{16}{216} + \frac{19}{216} \cdot \frac{43}{216} + \frac{37}{216} \cdot \frac{77}{216} + \frac{4}{216} + \frac{57}{216} \cdot \frac{113}{216} + \frac{3}{216} \cdot \frac{5}{6} + \frac{31}{216} + \frac{57}{216} \cdot \frac{147}{216}$	57,22%
15	$\frac{19}{216} \cdot \frac{16}{216} + \frac{37}{216} \cdot \frac{43}{216} + \frac{60}{216} \cdot \frac{77}{216} + \frac{1}{216} + \frac{66}{216} \cdot \frac{113}{216} + \frac{19}{216} + \frac{6}{216} \cdot \frac{4}{6}$	41,06%
16	$\frac{37}{216} \cdot \frac{16}{216} + \frac{61}{216} \cdot \frac{43}{216} + \frac{10}{216} + \frac{9}{216} \cdot \frac{3}{6} + \frac{72}{216} \cdot \frac{77}{216}$	25,49%
17	$\frac{61}{216} \cdot \frac{16}{216} + \frac{4}{216} + \frac{12}{216} \cdot \frac{2}{6} + \frac{75}{216} \cdot \frac{43}{216}$	12,71%
18	$\frac{1}{216} + \frac{15}{216} \cdot \frac{1}{6} + \frac{75}{216} \cdot \frac{16}{216}$	4,19%

Z tabulky 2.17 je vidět, že pokud máme na třech kostkách součet menší než 15, pak se vyplatí házet znovu, pravděpodobnost zlepšení je větší než 50%. Pokud máme na třech kostkách součet 15 *(pouze hod (5,5,5), v ostatních případech hod musí obsahovat šestku a tu automaticky necháváme ležet a analyzujeme hod s dvěmi kostkami)*, tak už dále neházíme, neboť pravděpodobnost hodu součtu alespoň 15 je 41,06%. Pokud je součet větší než 15, pak nutně musí obsahovat alespoň jednu šestku a tudíž analyzujeme hod dvěmi kostkami *(šestku necháváme ležet).*

IV. n-4 kostek stojí a můžeme hodit čtyřmi kostkami atd.

Postupujeme podle obdobného schématu jako v předcházejících případech. Uvedeme pouze pravděpodobnost pro mezní hodnotu, kterou je součet 20 (při hodu se čtyřmi kostkami). S využitím systému *Wolfram Mathematica 6* [8] nám vyšla pravděpodobnost (hodu součtu 20 a více) 47,44%.

2.2.2 Porovnávání střední hodnoty

Dalším druhem hledání optimální strategie je porovnávání součtu našeho hodu se střední hodnotou počtu bodů, kterých bychom dosáhli, kdybychom házeli znovu. Opět platí, že necháváme stát všechny šestky, případně maximální dosaženou hodnotu a analyzujeme zbytek.

Vypočet střední hodnoty

1. **Střední hodnota pro hod jednou kostkou**

   Zřejmě je střední hodnota pro hod jednou kostkou rovna

   $$E_1 = 3{,}5.$$

   Jinými slovy pokud se rozhodujeme, zda-li hodit jednou kostkou, tak pokud máme čtyři a více, pak už dál neházíme a kostku necháváme ležet.

2. **Střední hodnota pro hod dvěma kostkami**

   Už víme, že pokud je v prvním hodu nejmenší dosažená hodnota alespoň 4, dál již neházíme. Jinak házíme dál ještě jednou. Pravděpodobnosti dosažených hodů můžeme spočítat z věty o úplné pravděpodobnosti.

Tabulka 2.18: Pravděpodobnosti hodu jednotlivých součtů.

k	Pravděpodobnost hodu součtu k	
2	$\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{6}$	$\frac{1}{216}$
3	$\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{36} \cdot \frac{1}{6}$	$\frac{4}{216}$
4	$\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{36} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{36} \cdot \frac{1}{6}$	$\frac{9}{216}$
5	$\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{36} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{36} \cdot \frac{1}{6} + \frac{6}{36} \cdot \frac{1}{6}$	$\frac{15}{216}$
6	$\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{36} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{36} \cdot \frac{1}{6} + \frac{6}{36} \cdot \frac{1}{6} + \frac{6}{36} \cdot \frac{1}{6}$	$\frac{21}{216}$
7	$\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{36} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{36} \cdot \frac{1}{6} + \frac{6}{36} \cdot \frac{1}{6} + \frac{6}{36} \cdot \frac{1}{6} + \frac{6}{36} \cdot \frac{1}{6}$	$\frac{27}{216}$
8	$\frac{3}{36} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{36} \cdot \frac{1}{6} + \frac{6}{36} \cdot \frac{1}{6} + \frac{6}{36} \cdot \frac{1}{6} + \frac{6}{36} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{36}$	$\frac{32}{216}$
9	$\frac{5}{36} \cdot \frac{1}{6} + \frac{6}{36} \cdot \frac{1}{6} + \frac{6}{36} \cdot \frac{1}{6} + \frac{6}{36} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{36}$	$\frac{35}{216}$
10	$\frac{6}{36} \cdot \frac{1}{6} + \frac{6}{36} \cdot \frac{1}{6} + \frac{6}{36} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36}$	$\frac{36}{216}$
11	$\frac{6}{36} \cdot \frac{1}{6} + \frac{6}{36} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{36}$	$\frac{24}{216}$
12	$\frac{6}{36} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{36}$	$\frac{12}{216}$

Nyní můžeme spočítat střední hodnotu pro hod dvěma kostkami:

$$E_2 = 8{,}236.$$

Tedy při rozhodování, zda-li házet dvěma kostkami, se podíváme, jaký je na nich aktuální součet, pokud je větší než 8, pak je tato kombinace vyhovující a dále už neházíme, v jiném případě házíme dál.

3. **Střední hodnota pro hod třemi kostkami**

Již víme, že při rozhodování o hodu jednou kostkou necháváme čtyřku, pro hod dvěmi kostkami necháváme stát, pokud je součet na kostkách větší než 8. Tato pravidla musíme brát v úvahu při výpočtu pro hod třemi kostkami.

S pomocí tabulky 2.19 můžeme spočítat střední hodnotu pro hod třemi kostkami.

$$E_3 = 13{,}39$$

Tedy při rozhodování, zda-li házet třemi kostkami se podíváme, jaký je na nich aktuální součet, pokud je větší než 13, pak je tato kombinace vyhovující, a dále už neházíme, v opačném případě házíme dál.

Tabulka 2.19: Pravděpodobnosti hodu jednotlivých součtů pro hod třemi kostkami.

k	Pravděpodobnost hodu součtu k	
3	$\frac{1}{216} \cdot \frac{1}{216}$	0,00%
4	$\frac{1}{216} \cdot \frac{4}{216} + \frac{7}{216} \cdot \frac{1}{216}$	0,02%
5	$\frac{1}{216} \cdot \frac{9}{216} + \frac{7}{216} \cdot \frac{4}{216} + \frac{19}{216} \cdot \frac{1}{216}$	0,12%
6	$\frac{1}{216} \cdot \frac{15}{216} + \frac{7}{216} \cdot \frac{9}{216} + \frac{19}{216} \cdot \frac{4}{216} + \frac{37}{216} \cdot \frac{1}{216}$	0,41%
7	$\frac{1}{216} \cdot \frac{21}{216} + \frac{7}{216} \cdot \frac{15}{216} + \frac{19}{216} \cdot \frac{9}{216} + \frac{37}{216} \cdot \frac{4}{216} + \frac{57}{216} \cdot \frac{1}{216}$	1,08%
8	$\frac{1}{216} \cdot \frac{27}{216} + \frac{7}{216} \cdot \frac{21}{216} + \frac{19}{216} \cdot \frac{15}{216} + \frac{37}{216} \cdot \frac{9}{216} + \frac{57}{216} \cdot \frac{4}{216} + \frac{66}{216} \cdot \frac{1}{216}$	2,33%
9	$\frac{1}{216} \cdot \frac{32}{216} + \frac{7}{216} \cdot \frac{27}{216} + \frac{19}{216} \cdot \frac{21}{216} + \frac{37}{216} \cdot \frac{15}{216} + \frac{57}{216} \cdot \frac{9}{216} + \frac{66}{216} \cdot \frac{4}{216}$	4,18%
10	$\frac{1}{216} \cdot \frac{35}{216} + \frac{7}{216} \cdot \frac{32}{216} + \frac{19}{216} \cdot \frac{27}{216} + \frac{37}{216} \cdot \frac{21}{216} + \frac{57}{216} \cdot \frac{15}{216} + \frac{66}{216} \cdot \frac{9}{216}$	6,43%
11	$\frac{1}{216} \cdot \frac{36}{216} + \frac{7}{216} \cdot \frac{35}{216} + \frac{19}{216} \cdot \frac{32}{216} + \frac{37}{216} \cdot \frac{27}{216} + \frac{57}{216} \cdot \frac{21}{216} + \frac{66}{216} \cdot \frac{15}{216}$	8,73%
12	$\frac{1}{216} \cdot \frac{24}{216} + \frac{7}{216} \cdot \frac{36}{216} + \frac{19}{216} \cdot \frac{35}{216} + \frac{37}{216} \cdot \frac{32}{216} + \frac{57}{216} \cdot \frac{27}{216} + \frac{66}{216} \cdot \frac{21}{216}$	10,82%
13	$\frac{1}{216} \cdot \frac{12}{216} + \frac{7}{216} \cdot \frac{24}{216} + \frac{19}{216} \cdot \frac{36}{216} + \frac{37}{216} \cdot \frac{35}{216} + \frac{57}{216} \cdot \frac{32}{216} + \frac{66}{216} \cdot \frac{27}{216} + \frac{9}{216} \cdot \frac{1}{6}$	13,05%
14	$\frac{7}{216} \cdot \frac{12}{216} + \frac{19}{216} \cdot \frac{24}{216} + \frac{37}{216} \cdot \frac{36}{216} + \frac{57}{216} \cdot \frac{35}{216} + \frac{66}{216} \cdot \frac{32}{216} + \frac{3}{216} + \frac{9}{216} \cdot \frac{1}{6}$	14,90%
15	$\frac{19}{216} \cdot \frac{12}{216} + \frac{37}{216} \cdot \frac{24}{216} + \frac{57}{216} \cdot \frac{36}{216} + \frac{66}{216} \cdot \frac{35}{216} + \frac{1}{216} + \frac{6}{216} + \frac{9}{216} \cdot \frac{1}{6}$	15,68%
16	$\frac{37}{216} \cdot \frac{12}{216} + \frac{57}{216} \cdot \frac{24}{216} + \frac{66}{216} \cdot \frac{36}{216} + \frac{3}{216} + \frac{9}{216} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{216}$	12,45%
17	$\frac{57}{216} \cdot \frac{12}{216} + \frac{66}{216} \cdot \frac{24}{216} + \frac{9}{216} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{216}$	6,94%
18	$\frac{66}{216} \cdot \frac{12}{216} + \frac{9}{216} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{216}$	2,85%

4. **Střední hodnota pro hod čtyřmi kostkami**

Pro hod se čtyřmi kostkami je poměrně obtížný a rozsáhlý, proto využijeme systém *Wolfram Mathematica 6* [8]. Zdrojový kód je na přiloženém CD.

Střední hodnota pro hod čtyřmi kostkami je

$$E_4 = 18{,}8.$$

Tedy při rozhodování, zda-li házet čtyřmi kostkami, se podíváme, jaký je na nich aktuální součet, pokud je větší než 18, pak je tato kombinace vyhovující a dále už neházíme, v opačném případě házíme dál.

5. **Střední hodnota pro hod pěti a více kostkami**

   Při výpočtu střední hodnoty pro hod pěti a více kostkami se postupuje podle obdobného schématu jako při hodech s méně kostkami.

2.2.3 Shrnutí

V této kapitole porovnáme oba přístupy, které se liší pouze mezním součtem. V tabulce 2.20 jsou uvedeny střední hodnoty dosažených bodů pro oba přístupy dle počtu kostek, se kterými házíme.

Tabulka 2.20: Shrnutí obou přístupů.

n	E_n dle 2.2.2	E_n dle 2.2.1	max	Poměr E_n/max	mezní součet podle 2.2.2	mezní součet podle 2.2.1
1	3,5	3,5	6	0,58	4	4
2	8,24	8,24	12	0,69	9	10
3	13,39	13,36	18	0,74	14	15
4	18,80	18,76	24	0,78	19	20

Z tabulky 2.20 plyne:

- Pokud se mezi kostkami objevuje trojka, pak házíme dál všemi kostkami
- Rostoucí poměr E_n/max ukazuje, že od určitého počtu kostek n, budeme pokračovat v házení pokud se mezi kostkami objeví čtyřka. Pro ještě větší n budeme pokračovat v házení všemi kostkami i když se mezi nimi objeví pětka.

Nyní zkusme uvažovat situaci, kdy máme dva hráče. Jeden hraje podle 2.2.2 a druhý hraje podle 2.2.1. Tabulka 2.21 uvádí pravděpodobnost výhry pro oba hráěe.

Tabulka 2.21: Porovnání obou přístupů.

n	Pravděpodobnost výhry se strategií 2.2.1	Pravděpodobnost výhry se strategií 2.2.2
3	0,441	0,449
4	0,444	0,454

Z tabulky 2.21. je vidět, že hráč, který se řídil dle 2.2.2 má vyšší pravděpodobnost výhry, a proto můžeme tento přístup považovat za lepší. To je již vidět z tabulky 2.20, kde přístup 2.2.2 má lepší střední hodnoty dosažených bodů.

Kapitola 3

Karetní hry

Uvažujme karetní hru s velice jednoduchými pravidly. Máme balíček karet s m černými kartami a n červenými kartami. Postupně odkrýváme karty a po čase (určí hráč) odkrývání zastavíme. Pokud další odkrytá karta bude červená, tak vyhráváme, a pokud bude černá, tak prohrajeme.

Hledáním optimální strategie v této hře rozumíme hledání optimálního času zastavení odkrývání.

Definujeme:

$$Z_i = \begin{cases} 1, & \text{pokud } i\text{-tá odkrytá je červená,} \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Tedy:

$$\sum_{i=1}^{m+n} Z_i = n.$$

Označme X_k pravděpodobnost výhry, když bylo zastaveno před odkrytím k-té karty, pak

$$X_k = \frac{1}{m+n-k+1}(n - \sum_{i=1}^{k-1} Z_i), \qquad k = 1, \cdots, m+n.$$

Zřejmě $EZ_i = \frac{n}{n+m}$, $i = 1, \ldots, m+n$ neboť $\mathrm{P}[Z_i=1] = \frac{n}{n+m}$ a $\mathrm{P}[Z_i=0] = \frac{m}{n+m}$, pak pro každé k platí:

$$EX_k = E\left(\frac{n - \sum_{i=1}^{k-1} Z_i}{m+n-k+1}\right) = \left(\frac{n - \sum_{i=1}^{k-1} EZ_i}{n+m-k+1}\right) = \left(\frac{n - \frac{(k-1)n}{m+n}}{m+n-k+1}\right) =$$
$$= \frac{n^2+mn-kn+n}{(n+m)(m+n-k+1)} = \frac{n(n+m-k+1)}{(n+m)(m+n-k+1)} = \frac{n}{n+m}.$$

Definice, viz [5]:
Martingal v diskrétním čase je stochastický proces v diskrétním čase (posloupnost náhodných veličin) $X_1, X_2, X_3, \dots$ *, takový, že pro všechny* n *platí*

$$E(|X_n|) < \infty,$$

$$E(X_{n+1}\,|X_1, ..., X_n) = X_n.$$

V našem případě: $E[Z_k|Z_1, ..., Z_{k-1}] = \sum_{i=1}^{2} x_i P[Z_k = x_i|Z_1, ..., Z_{k-1}] =$
$= P[Z_k = x_i|Z_1, ..., Z_{k-1}] == \frac{1}{2n-k+1}\left(n - \sum_{i=1}^{k-1} Z_i\right) = X_k \forall k;$
a odtud plyne, že X_k je martingal, tj. $E[X_k|X_1, ..., X_{k-1}] = X_{k-1} \forall k;$

Za určitých podmínek se střední hodnota martingalu v čase zastavení rovná střední hodnotě v počátečním stavu (a také ve všech deterministických časech).

Optional stopping theorem, viz [4]:
Nechť X_1, X_2, X_3, … *je martingal a* τ *je markovský čas vzhledem k* $X_1, X_2, X_3, \dots$, *tj. jev* $[\tau = n]$ *závisí pouze na* $X_1, \dots, X_n$. *Když*

$$E\tau < \infty$$

a existuje konstanta c *tak, že*

$$E(|X_{i+1} - X_i|) \le c \qquad \forall i,$$

pak

$$EX_\tau = EX_1.$$

Střední hodnota pravděpodobnosti výhry zastavení v čase je pořád stejná a rovna $EX_1 = \frac{n}{n+m}$. Z toho plyne, že nezáleží, v jakém okamžiku zastavíme odkrývání karet.

Ovšem nesmíme opomenout, že s rostoucím časem roste riziko (rozptyl pravděpodobnosti výhry):

Tabulka 3.1: Střední hodnota a rozptyl pro $m = n$

Střední hodnota	Rozptyl
$\mathrm{X}_1 = \frac{1}{2}$	var $\mathrm{X}_1 = 0$
$\mathrm{X}_2 = \frac{1}{2n-1}(n - Z_1)$	var $\mathrm{X}_2 = \frac{1}{(2n-1)^2}.varZ_1 = \frac{1}{4(2n-1)^2}$
$\mathrm{X}_3 = \frac{1}{2n-1}(n - Z_1 - Z_2)$	var $\mathrm{X}_3 = \frac{1}{(2n-2)^2}.var(Z_1 + Z_2) = \frac{1}{(2n-2)^2}\frac{n-1}{2n-1}$
$\vdots$	$\vdots$
$\mathrm{X}_k = \frac{1}{2n-k+1}(n - \sum_{i=1}^{k-1} Z_i)$	var $\mathrm{X}_k = \frac{1}{(2n-k+1)^2}\left(\frac{k(2-k)}{4} + \frac{k(k-1)}{2}\frac{(n-1)}{(2n-1)}\right)$

Literatura

[1] Bewersdorff J.: *Luck Logic and White Lies*, A K Peters, Ltd., Wellesley, 2005.

[2] www.hazardni-hry.eu/kostky/kostkovy-poker.html

[3] www.hazardni-hry.eu/ruleta/ruleta.html

[4] en.wikipedia.org/wiki/Optional_stopping_theorem

[5] en.wikipedia.org/wiki/Martingale_(probability_theory)

[6] www.roulettetactics.com/roulette/odds/

[7] Zvára K., Štěpán J.: *Pravděpodobnost a matematická statistika*, MATFYZpress, Praha, 2002.

[8] Wolfram Research, Inc.: Mathematica, Version 6.0, Champaign, 2007.