Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Miroslav Němec

Pravidelný pětiúhelník

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Martina Bečvářová, Ph.D.

Studijní program: Matematika zaměřená na vzdělávání,
matematika v kombinaci s informatikou

2007

Srdečně děkuji vedoucí práce RNDr. Martině Bečvářové, Ph.D., za mimořádnou trpělivost a obětavost při opravách práce a za zapůjčení literatury. Děkuji svému spolubydlícímu Bc. Ondrovi Davidovi za pomoc s překladem abstraktu práce.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů a vědomostí získaných předchozím studiem. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 8. 8. 2008 Miroslav Němec

Obsah

Název práce: Pravidelný pětiúhelník
Autor: Miroslav Němec
Katedra (ústav): Katedra didaktiky matematiky
Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Martina Bečvářová, Ph.D.
e-mail vedoucího: nemcova@fd.cvut.cz

Abstrakt: Předložená práce podrobně studuje vlastnosti pravidelného pětiúhelníku. Je sepsána jako rozšiřující text středoškolského učiva rovinné geometrie. První část práce umožní středoškolskému studentu hlouběji se seznámit se strukturou geometrie a s významem matematické logiky a důkazů při její výstavbě. Následně je budován „základ“ rovinné geometrie. Hlavní náplní práce je postupné rozšiřování tohoto základu v souladu se strukturou rovinné geometrie a dokazování vlastností pravidelného pětiúhelníku. Důkazy jsou podrobně rozepisovány a doplněny množstvím poznámek. Pro větší názornost je text doplněn množstvím obrázků. Středoškolský student je tak odlehčenou formou seznamován s vysokoškolským přístupem k učivu matematiky metodou „definice, věta, důkaz“.

Klíčová slova: pravidelný pětiúhelník, rovinná geometrie, důkazy

Title: Regular pentagon
Author: Miroslav Němec
Department: Department of Mathematics Education
Supervisor: RNDr. Martina Bečvářová, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: nemcova@fd.cvut.cz

Abstract: This work fully deals with properties of a regular pentagon. The whole work is constituted as an extension of grammar school curriculum of planar geometry. The first part acquaintes a grammar school student with the structure of geometry and the point of mathematical logic and the constitution of proofes. Consecutively the basics of planar geometry is built. The main content of this work is a gradual expansion of this basics in correspondence with the structure of planar geometry and proving of the properties of a regular pentagon. The proofs of the properties are detailed and amended by plethora of comments. The text is filled with pictures for the sake of lucidity. A grammar school student is acquainted in a lite way with a university attitude to curriculum of mathematics following the pattern "definition, statement, proof".

Keywords: regular pentagon, planar geometry, proofs

1 Úvod

Gymnaziální výuka matematiky v České republice je dnes (2007) zaměřena poměrně prakticky. Studentům je předkládáno velké množství poznatků a způsobů pro jejich využití. Tato práce neskýtá další dávku poznání, ale snaží se o jistý odstup od zmíněné praktické matematiky.

Zvídavý středoškolský student (takovým je tato práce určena) je zde odlehčenou formou zasvěcován do jiného pohledu na matematiku, takového, jaký znají studenti a absolventi vysokoškolského vzdělávání.

Nicméně, tato práce by se dala pojmout i prakticky jakožto cvičebnice důkazových metod.

Případný čtenář by měl mít napaměti, že text práce je poměrně hutný. Nestačí tedy pouze věnovat čas čtení, ale je zapotřebí vynaložit i nějaké úsilí na trávení toho přečteného.

2 Geometrie

2.1 Souhrn

Následující odstavečky se pokusí zevrubně nastínit, jak to s geometrií vypadá zevnitř. Jde pouze o trochu teorie, kterou si v další kapitole vyzkoušíme aplikovat.

2.2 Teorie

Geometrie je cosi, čemu se v matematickém světě říká teorie. Teorie se „skládají“ z pojmů (např. „přímka“, „kolmé přímky“, „rovnoběžné přímky“) a výroků nad těmito pojmy (např. „dvě přímky, kolmé na stejnou přímku, jsou rovnoběžné“). Je celkem zřejmé, že prvně musí být zavedeny alespoň nějaké pojmy, a teprve potom lze o nich něco prohlašovat.

2.3 Pojmy

Pojmy se dělí do dvou skupin, a to na pojmy „prázdné“ a pojmy „odvozené“.

Prázdné jsou pojmy, které nemají definici. Prostě si řekneme, že jsou a dále s nimi pracujeme bez nutnosti jejich bližšího zkoumání. Například geometrie užívá prázdných pojmů „bod“, „přímka“ a „rovina“ (a samozřejmě další jiné, které se ale liší podle způsobu zavedení geometrie).

Pojmy odvozené se potom odkazují na jiné, již existující pojmy, a to jak prázdné, tak odvozené (např. pojem „úsečka“ by se odkázal na pojmy „přímka“ a „bod“).

2.4 Výroky

Výroky se rovněž dělí do dvou skupin, a to na „axiomy“ a „věty“.

Axiom je výrok, který prohlásíme za pravdivý. Kdybychom chtěli jeho pravdivost zkoumat, zjistili bychom, že může i nemusí být pravdivý. Za axiomy si tedy zvolíme takové výroky, které chceme aby v námi zavedené teorii platily (např. „dva různé body jednoznačně určují úsečku“). Samozřejmě, množina axiomů musí být bezesporná (když z axiomů odvodíme výrok A, nelze z nich vyvodit výrok $\neg A$) a měla by být co nejmenší (nemá smysl prohlašovat za axiomy výroky, které lze z již existujících axiomů odvodit).

Axiomy dost často svazují právě prázdné pojmy. Když např. o bodu nejde říct, co to je, řekneme, jaký to má vztah k něčemu jinému.

Věty narozdíl od axiomů jsou již nějakým logickým důsledkem, který z množiny axiomů vyplývá. Postup, kterým ukazujeme, jak věta z množiny axiomů logicky vyplývá, se nazývá „důkaz“.

3 Shodnost

3.1 Souhrn

V této kapitole se pokusíme vybudovat „základ“ rovinné geometrie po vzoru teoretického nástinu předchozí kapitoly. Nejprve zavedeme pojmy, následně axiomy a uvedeme bez důkazů (důkazy např. v [3]) několik obecně platných vět, které využijeme při dalším dokazování.

3.2 Známé pojmy

Za prázdné pojmy budeme stejně jako při středoškolské výuce považovat *bod*, *přímku* a *rovinu*. (Jak již bylo řečeno, tyto pojmy samy o sobě nic neznamenají, jediné co má nějaký význam je vztah těchto pojmů.)

Za pojmy známé (bez nutnosti uvedení definice) přijmeme: *polorovinu*, *křivku*, *úsečku*, *kružnici*, *polopřímku*, *úhel*, *průsečík křivek*, *sjednocení*, *průnik*, *otočení*, *posunutí*, *překlopení*, *totožnost*, *hranici rovinného útvaru*, *ohraničení části roviny křivkou* a *dělení útvaru křivkami*.

3.3 Definice

3.3.1 Shodnost

Definice
Útvary nazveme **shodné** právě tehdy, když je lze ztotožnit posunutím, otočením, překlopením nebo kombinací těchto zobrazení.

Poznámka.
Stojí za povšimnutí, že definice se vždy odkazuje na jiné pojmy vazbou „nazýváme“, čímž vlastně vyjadřuje, že jde pouze o pojmenování nějaké skutečnosti a ne o snahu prohlásit tuto skutečnost za pravdu.

3.3.2 Úhly

Definice
Bod ležící na přímce dělí tuto přímku na dvě polopřímky. Říkáme, že tyto polopřímky jsou vzájemně **opačné**.
Úhel, jehož ramena jsou dvě vzájemně opačné polopřímky, nazýváme **přímý**. Velikost přímého úhlu budeme označovat π. Přímku dělící úhel při daném vrcholu na dva shodné úhly nazveme **osa úhlu**. Úhel vzniklý dělením přímého úhlu na dva shodné úhly nazýváme **pravý**.
Dvě totožné polopřímky dělí rovinu na dva úhly. Úhel totožný s rovinou nazýváme **plný**, úhel totožný s hraniční polopřímkou nazýváme **nulový**.

3.3.3 Kolmost a rovnoběžnost

Definice
Dvě přímky, které nemají žádný společný bod, nazýváme **rovnoběžné různé**.
Dvě přímky, které mají právě jeden společný bod, nazýváme **různoběžné**.
Dvě přímky, které mají všechny body společné, nazýváme **rovnoběžné totožné**.
Dvě přímky, které rozdělují rovinu na čtyři shodné úhly nazýváme **kolmé**.

Poznámka.
Rovnoběžnost přímek a a b označíme $a \parallel b$.
Různoběžnost přímek a a b označíme $a \nparallel b$.
Kolmost přímek a a b označíme $a \perp b$.

3.3.4 Konvexnost

Definice
Mějme útvar u.
Útvar u nazýváme **konvexní**, pokud každá úsečka, jejíž krajní body leží v útvaru u, leží celá v útvaru u.
Útvar, který není konvexní, nazýváme **nekonvexní**.

3.4 Axiomy

K preciznímu zavedení rovinné geometrie by muselo být vynaloženo poměrně značné úsilí. Velice přehledný a precizně strukturovaný systém axiomů sestavil David Hilbert (na přelomu 19. a 20. stol).

Protože se ale přímo na axiomy odkazovat nebude, necháme na zvídavém čtenáři aby si precizní axiomatizaci dohledal.

Pro představu použijeme méně formální sadu axiomů podle Eukleida (již z 3. století před Kristem) uvedené v [3]. Nutno poznamenat, že Eukleidés používal jiné definice, než jsme si uvedli zde a než se běžně používají při gymnaziální výuce.

Navíc axiomy měl rozdělené do dvou skupin. První, nazvané postuláty, sloužily k jednoznačnému vymezení geometrie.

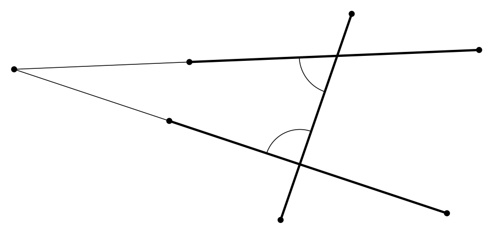
Postulát 1
Dva různé body jednoznačně určují úsečku mezi těmito body.

Postulát 2
Každou úsečku lze jednoznačně v obou směrech prodloužit o libovolnou délku opět na úsečku.

Postulát 3
Kružnice je jednoznačně určena svým středem a poloměrem.

Postulát 4
Všechny pravé úhly jsou shodné.

Postulát 5
Pokud úsečka protíná dvě jiné úsečky tak, že na jedné její straně je součet velikostí vzniklých vnitřních úhlů menší než velikost dvou úhlů pravých, lze ty dvě úsečky na tuto stranu prodloužit tak, aby se protly (obr. 1).



Obrázek 1.

Další, už jen axiomy, mají odrážet to, co je všeobecně platné, tedy to, co se týkalo veličin.

Axiom 1
Dvě veličiny, které jsou rovny veličině třetí, jsou si rovny.

Axiom 2
Když se dvě rovné veličiny zvětší o díly, které jsou si rovny, jsou si i celky rovny.

Axiom 3
Když se dvě rovné veličiny zmenší o díly, které jsou si rovny, jsou si i rozdíly rovny.

Axiom 4
Když se dvě nerovné veličiny zvětší o díly, které jsou si rovny, celky si nejsou rovny.

Axiom 5
Dvojnásobky veličin, které jsou si rovny, si jsou rovny.

Axiom 6
Poloviny veličin, které jsou si rovny, si jsou rovny.

Axiom 7
Objekty, které se vzájemně překrývají, jsou si rovny.

Axiom 8
Celek je větší než část toho celku.

Axiom 9
Dvě přímky nevymezují uzavřenou plochu.

3.5 Veličiny

Pojem veličina si nebudeme definovat ani nějak hlouběji vymezovat. Pro naše účely se spokojíme s představou veličiny nastíněnou při středoškolské výuce. Veličiny, kterých se dotkneme, budou délka strany, velikost úhlu a poměr délek.

3.6 Elementární vlastnosti

3.6.1 Vlastnosti rovnoběžnosti

Věta 1
Mějme tři přímky a, b, c. Pokud je přímka a rovnoběžná s přímkou b a zároveň přímka b je rovnoběžbá s přímkou c, potom přímka a je rovnoběžná s přímkou c.

Poznámka.
$\forall a, b, c : (a \parallel b \wedge b \parallel c) \rightarrow (a \parallel c)$

Poznámka.
Obměna této implikace zní:
Mějme tři přímky a, b, c. Pokud přímky a a c jsou různoběžné, pak přímka b je různoběžná alespoň s jednou z nich.
$\forall a, b, c : (a \nparallel c) \rightarrow (a \nparallel b \vee b \nparallel c)$

Věta 2
Mějme přímky a a b. Přímky a a b jsou rovnoběžné právě tehdy, když existuje přímka c, která je kolmá na a i na b.

Poznámka.
$\forall a, b : (a \parallel b) \leftrightarrow (\exists c : a \perp c \wedge b \perp c)$

Poznámka.
Negujeme-li obě strany ekvivalence, dostaneme opět pravdivý výrok:
Mějme dvě přímky a a b. Přímky jsou různoběžné právě tehdy, když každá přímka c je kolmá nejvýše na jednu z těchto přímek.
$\forall a, b : (a \nparallel b) \leftrightarrow (\forall c : \neg(a \perp c) \vee \neg(b \perp c))$

3.6.2 Vlastnosti konvexnosti

Věta 3
Mějme konvexní útvar u a jeho hranici h. Pro každou dvojici různých bodů A a B z hranice h platí, že úsečka AB dělí útvar u na dvojici útvarů, které jsou opět konvexní.

4 Mnohoúhelníky

4.1 Souhrn

V předchozí kapitole jsme nastínili „základ“ rovinné geometrie. V této kapitole uvedeme zajímavé věty a vlastnosti, které se týkají mnohoúhelníků.

Začneme nahlédnutím do středoškolské literatury a podle jejího vzoru nadefinujeme pravidelný mnohoúhelník. Pak se budeme věnovat vlastnostem trojúhelníků (uvedeme je bez důkazů) a dokážeme několik velmi zajímavých a užitečných vlastností konvexních a pravidelných mnohoúhelníků.

4.2 Definice

4.2.1 Myšlenka definice

Samotná myšlenka definice pravidelného pětiúhelníku je jednoduchá. Víme, co je to úsečka. Definujeme pojem lomená čára a za mnohoúhelník prohlásíme uzavřenou lomenou čáru i s vnitřkem. Za n-úhelník prohlásíme mnohoúhelník s n vrcholy a za pravidelný n-úhelník jeden jeho speciální případ. Pro $n = 5$ získáme pravidelný pětiúhelník.

4.2.2 Středoškolská definice

Nejprve ocitujeme středoškolskou definici mnohoúhelníku uvedenou v [1]. Ponecháme z ní pouze torzo, které se bezprostředně váže na výše zmíněnou myšlenku.

Nechť je v rovině dáno n různých bodů $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$), z nichž žádné tři neleží v téže přímce; pak množinu úseček $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ nazýváme lomenou čarou $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$.

Uzavřená lomená čára $A_1A_2 \dots A_nA_1$, jež leží v rovině a sama sebe neprotíná, ohraničuje část roviny, která se nazývá mnohoúhelník, či určitěji n-úhelník…

Je-li n-úhelník $A_1A_2 \dots A_n$ průnikem polorovin $A_1A_2A_3, A_2A_3A_4, \dots, A_{n-1}A_nA_1, A_nA_1A_2$, nazýváme ho konvexním mnohoúhelníkem…

Pravidelný n-úhelník je každý konvexní n-úhelník, jehož všechny strany a všechny vnitřní (a tedy i vnější) úhly jsou shodné.

([1], str. 402–403)

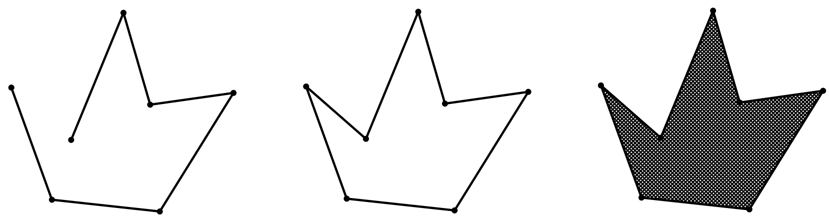
4.2.3 Problémy s definicí

Ukážeme několik důvodů, proč budeme pravidelný mnohoúhelník definovat jiným způsobem.

- Ze znění definice lomené čáry snadno usoudíme, že tento pojem byl definován velice uměle a s jediným záměrem, totiž definovat pomocí něj mnohoúhelník. Skutečná lomená čára by si tolik omezení nežádala (podle této definice není písmeno W lomená čára, protože jeho první, třetí a pátý bod leží na jedné přímce). Omezení, která vyžaduje definice mnohoúhelníku, je vhodné vyjádřit až v jeho definici.
- Pojem mnohoúhelník je zde poněkud zjednodušen. Uvažují se pouze mnohoúhelníky, jejichž hranice sama sebe neprotíná.
- Zda-li je či není útvar konvexní se definuje obecně pro libovolný rovinný útvar. To, že mnohoúhelník vzniklý průnikem polorovin je konvexní, už potom není definice, ale vlastnost. A tak do definice mícháme vlastnosti, které už jsou důsledkem definice. (Vlastnost. Konvexní mnohoúhelník lze získat jako průnik polorovin.)

4.3 Definice podruhé

4.3.1 Lomená čára



Obrázek 2.

Definice
Mějme n bodů A_1, $A_2, \ldots, A_n$ ($n \geq 3$) splňující následující vlastnosti:

(i) $A_1 \neq A_2$, $A_2 \neq A_3, \ldots, A_{n-1} \neq A_n$ (sousedící body jsou různé),

(ii) $A_3 \notin \leftrightarrow A_1A_2$, $A_4 \notin \leftrightarrow A_2A_3, \ldots, A_n \notin \leftrightarrow A_{n-2}A_{n-1}$ (tři po sobě jdoucí body neleží na jedné přímce).

Lomenou čarou $\mathbf{A_1A_2\ldots A_n}$ potom nazýváme sjednocení úseček A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, $A_{n-1}A_n$ (obr. 2 vlevo).

Poznámka.
Vlastnosti (i) a (ii) je možné vyjádřit v jedné větě: Neexistuje přímka, na níž by ležely tři po sobě jdoucí body. Samotnou vlastnost (ii) však použít nelze, protože, aby mělo smysl hovořit o přímkách, musíme zaručit, že budou existovat, tedy že po sobě jdoucí body budou různé, což vyjadřuje vlastnost (i).

Definice
Mějme n bodů A_1, $A_2, \ldots, A_n$.
Existuje-li lomená čára $A_1A_2\ldots A_nA_1A_2$, pak lomenou čáru $A_1A_2\ldots A_nA_1$ nazýváme **uzavřenou** (obr. 2 uprostřed).

Poznámka.
Nutnost existence lomené čáry $A_1A_2\ldots A_nA_1A_2$ nám zaručuje, že body A_n, A_1 a A_2 neleží na stejné přímce.

4.3.2 Mnohoúhelník

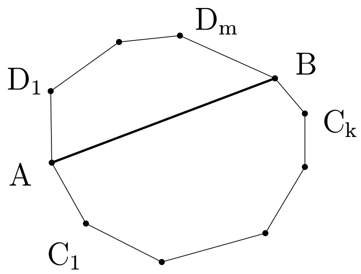
Definice
Mějme n různých bodů $A_1, A_2, \ldots, A_n$ a mějme uzavřenou lomenou čáru $A_1A_2 \ldots A_nA_1$, kterou označíme k.
Útvar ohraničený lomenou čarou k nazýváme **mnohoúhelník** nebo určitěji **n-úhelník** (obr. 2 vpravo).
Body $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nazýváme **vrcholy n-úhelníku**.
Úsečky tvořící lomenou čáru k nazýváme **stranami n-úhelníku**.
Dva vrcholy A_i a A_j nazýváme **sousední**, je-li A_iA_j stranou mnohoúhelníku.
Spojnici dvou nesousedních vrcholů nazýváme **úhlopříčkou**.
Vnitřním bodem nazýváme bod ležící v mnohoúhelníku a zároveň neležící na jeho hranici.

4.3.3 Vnitřní úhly

Ve středoškolské literatuře jsou vnitřní úhly při vrcholech n-úhelníku definovány pouze pro konvexní n-úhelníky. Tento způsob definice je pro naše potřeby postačující.

Definice
Mějme konvexní n-úhelník.
Označme A libovolný jeho vrchol, B a C sousední vrcholy vrcholu A. Úhel ohraničený polopřímkami $\mapsto AB$ a $\mapsto AC$ a určený libovolným vnitřním bodem n-úhelníku, nazýváme **vnitřním úhlem** n-úhelníku při vrcholu A.

4.3.4 Úhlopříčka



Obrázek 3.

Definice
Mějme konvexní n-úhelník ($n \geq 4$) a jeho úhlopříčku AB (obr. 3). Vrcholy A a B rozdělí hranici n-úhelníku na dvě lomené čáry, jejichž zbylé vrcholy pojmenujeme postupně od sousedů vrcholu A $C_1, \ldots, C_k$ pro první část a $D_1, \ldots, D_m$ pro část druhou ($k + m = n - 2$).
Úhlopříčku AB nazýváme **úhlopříčkou přes vrcholy $\mathbf{C_1, \ldots, C_k}$** resp. **úhlopříčkou přes vrcholy $\mathbf{D_1, \ldots, D_m}$**. Zkráceně úhlopříčku AB nazýváme **úhlopříčkou přes k vrcholů** resp. **úhlopříčkou přes m vrcholů**. Body $C_1, \ldots, C_k$ resp. $D_1, \ldots, D_m$ pak nazýváme body, které úhlopříčka **přechází**.

4.3.5 Pravidelný mnohoúhelník

Definice
Rovnostranným n-úhelníkem nazýváme n-úhelník, jehož všechny strany mají stejnou délku.
Rovnoúhlým n-úhelníkem nazýváme n-úhelník, jehož všechny vnitřní úhly mají stejnou velikost.
Pravidelným n-úhelníkem nazýváme n-úhelník, který je konvexní, rovnostranný a rovnoúhlý.

Poznámka.
Vzhledem k tomu, že o vnitřních úhlech má smysl mluvit pouze u konvexních n-úhelníků, je předpoklad konvexnosti uvedený v definici pravidelného mnohoúhelníku nadbytečný. Nicméně, pokud bychom vnitřní úhly definovali i pro jiné než konvexní mnohoúhelníky, byl by nezbytný, a proto je zde uveden.

4.4 Trojúhelníky

Ještě než se pustíme do zkoumání vlastností n-úhelníků, připomeneme si některé zajímavé, a pro nás užitečné, vlastnosti trojúhelníků.

4.4.1 Definice

Definice
Trojúhelník, jehož dvě strany mají stejnou délku, nazýváme **rovnoramenný**. Dvě strany stejné délky nazýváme **ramena** a třetí stranu **základna**.

Poznámka.
Rovnostranný trojúhelník je také rovnoramenný.

4.4.2 Základní vlastnosti trojúhelníků

Věta 4
Každý trojúhelník je konvexní útvar.

Věta 5
Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je přímý úhel.

Věta 6
V trojúhelníku leží proti stejně velkým vnitřím úhlům strany stejné délky a proti většímu vnitřnímu úhlu leží delší strana.

Poznámka.
Několik užitečných důsledků:
Trojúhelník je rovnostranný právě tehdy, když je rovnoúhlý.
Trojúhelník je rovnoramenný právě tehdy, když má dva shodné vnitřní úhly.

4.4.3 Věty o shodnosti trojúhelníků

Věta 7
Dva trojúhelníky jsou shodné právě tehdy, když se shodují délky všech tří odpovídajících si stran.

Věta 8
Dva trojúhelníky jsou shodné právě tehdy, když se shodují v délkách dvou odpovídajích si stran a ve velikosti úhlu jimi sevřeného.

4.5 Konvexní mnohoúhelníky

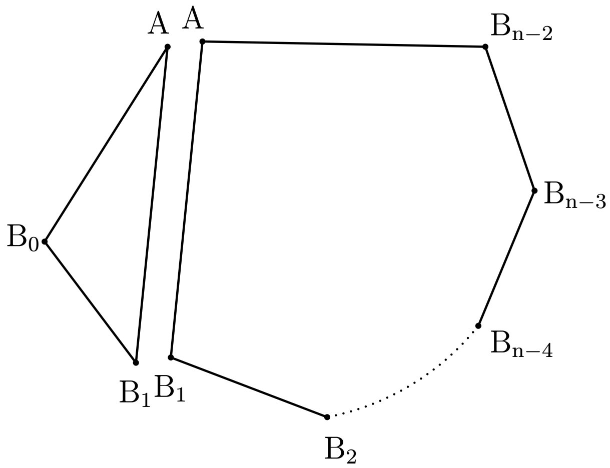
4.5.1 Elementární vlastnosti

Věta 9
V konvexním n-úhelníku žádné tři vrcholy neleží na jedné přímce.

4.6 Velikost vnitřních úhlů

Vlastnost 1
Součet velikostí vnitřních úhlů konvexního n-úhelníku je $(n-2)\cdot\pi$.

Důkaz
Mějme konvexní n-úhelník $AB_0B_1\dots B_{n-2}$. Je-li $n=3$, pak podle věty 5 je součet jeho vnitřních úhlů π, což odpovídá našemu vztahu.



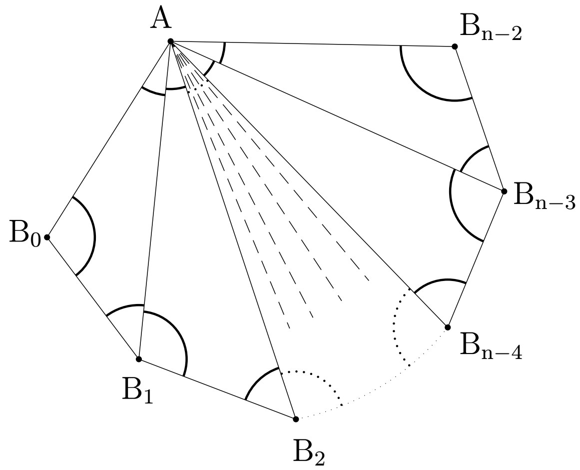
Obrázek 4.

Pokud je $n>3$, pak n-úhelník nejprve rozdělíme (obr. 4). Úhlopříčka AB_1 dělí n-úhelník na dva konvexní útvary (podle věty 3). Vrcholy A, B_0 a B_1 jsou tři po sobě jdoucí body lomené čáry a podle její definice tedy neleží na jedné přímce. Útvar ohraničený lomenou čarou AB_0B_1 a úsečkou AB_1 je tedy trojúhelník $\triangle AB_0B_1$.

Útvar ohraničený lomenou čarou $B_1B_2\dots B_{n-2}A$ a úsečkou AB_1 je konvexní mnohoúhelník s $n-1$ vrcholy, tedy $n-1$-úhelník. To proto, že splňuje podmínky definice mnohoúhelníku, jimiž je zaprvé různost vrcholů (vrcholy A, $B_0,\dots,B_{n-2}$ jsou různé, jelikož jsou to vrcholy n-úhelníku $AB_0B_1\dots B_{n-2}$) a zadruhé žádné tři po sobě jdoucí vrcholy neleží na téže přímce (podle věty 9 neleží dokonce žádné tři vrcholy původního n-úhelníku na jedné přímce). Konvexní je proto, že podle věty 3 rozdělila úsečka AB_1 původní n-úhelník na konvexní útvary.

Oddělením trojúhelníku pomocí úhlopříčky konvexního mnohoúhelníku tedy dostaneme opět konvexní mnohoúhelník, který má ovšem o jeden vrchol méně než ten původní. Mnohoúhelník postupně rozdělíme všemi úhlopříčkami vycházejícími z vrcholu A, tedy dále AB_2, $AB_3,\dots$, AB_{n-3}. Tím rozdělíme n-úhelník na $n-2$ trojúhelníků (obr. 5).

Každý vzniklý trojúhelník má jednu část úhlu při vrcholu A. Trojúhelníky $\triangle AB_0B_1$ a $\triangle B_{n-3}B_{n-2}A$ mají zachován úhel při vrcholu B_0 a B_{n-2}. Ostatní úhly



Obrázek 5.

n-úhelníku jsou rozdělené na dvě části do dvou různých trojúhelníků. Všechny části vnitřních úhlů n-úhelníku jsou tedy rozděleny mezi vnitřní úhly trojúhelníků. Součet vnitřních úhlů trojúhelníků je tedy roven součtu vnitřních úhlů n-úhelníku.

Součet velikostí vnitřních úhlů jednoho trojúhelníku je podle věty 5 roven π. Trojúhelníků je $n-2$, tedy součet velikostí jejich vnitřních úhlů je $(n-2)\cdot\pi$.

⊠

Vlastnost 2
Velikost vnitřního úhlu při vrcholu pravidelného n-úhelníku je $\frac{n-2}{n}\cdot\pi$.

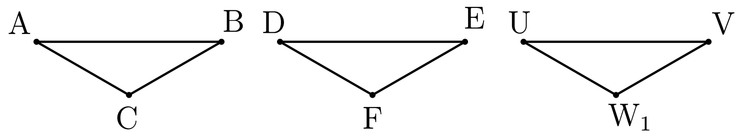
Důkaz
Mějme pravidelný n-úhelník. Pravidelný n-úhelník je konvexní n-úhelník (z definice pravidelného n-úhelníku) a tedy součet velikostí všech jeho vnitřních úhlů je $(n-2)\cdot\pi$ (vlastnost 1).

Pravidelný n-úhelník je také rovnoúhly (z definice pravidelného n-úhelníku), tedy všechny vnitřní úhly mají stejnou velikost. Velikost jednoho vnitřního úhlu získáme rozdělením součtu $(n-2)\cdot\pi$ na n stejných dílů, což je $\frac{n-2}{n}\cdot\pi$. ⊠

4.7 Úhlopříčky

Vlastnost 3
V pravidelném n-úhelníku mají všechny úhlopříčky přes k vrcholů stejnou délku. Označíme-li libovolnou z nich UV a vrcholy, které přechází, $W_1, \ldots, W_k$, pak úhlopříčka UV svírá se stranou UW_1 úhel o velikosti $\frac{k}{n} \cdot \pi$.

Důkaz
Mějme pravidelný n-úhelník. Bude-li to trojúhelník, nebude mít žádnou úhlopříčku a pro naše tvrzení nebude mít příliš uplatnění. Úhlopříčka musí přecházet nejméně jeden vrchol (aby vůbec byla úhlopříčkou) a nejvýše může přejít $n-3$ vrcholů (aby zbyl jeden na druhé straně úhlopříčky). V úvahu tedy přicházejí n-úhelníky s $n \geq 4$ a uvažujeme $k \in \{1, \ldots, n-3\}$.



Obrázek 6.

$k = 1$. Důkaz první části tvrzení.

Mějme dvě úhlopříčky AB a DE přecházející jediný další vrchol (AB přechází vrchol C a DE přechází vrchol F, viz obr. 6 vlevo a uprostřed). Body A, B a C tvoří trojúhelník $\triangle ABC$, protože podle definice lomené čáry neleží na jedné přímce. Analogicky i body D, E a F tvoří trojúhelník $\triangle DEF$. Úsečky AC, BC, DF a EF jsou stranami pravidelného n-úhelníku a podle jeho definice mají všechny stejnou délku. Úhly sevřené těmito stranami $\sphericalangle ACB$ a $\sphericalangle DFE$ jsou vnitřními úhly pravidelného n-úhelníku, mají tedy podle definice pravidelného n-úhelníku stejné velikosti. Trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle DEF$ jsou potom shodné podle věty 8. A jelikož jsme úhlopříčky AB a DE volili libovolně, mají v pravidelném n-úhelníku všechny úhlopříčky přecházející jeden vrchol stejnou délku.

$k = 1$. Důkaz druhé části tvrzení.

Mějme libovolnou úhlopříčku UV přecházející jediný vrchol W_1 (obr. 6 vpravo). Body U, W_1 a V podle definice lomené čáry neleží na jedné přímce (neboť U, W_1 a V jsou tři po sobě jdoucí vrcholy) a určují trojúhelník $\triangle UW_1V$. Úhel při vrcholu W_1 je vnitřní úhel pravidelného n-úhelníku a podle vlastnosti 2 má tedy velikost $\frac{3}{5}\pi$.

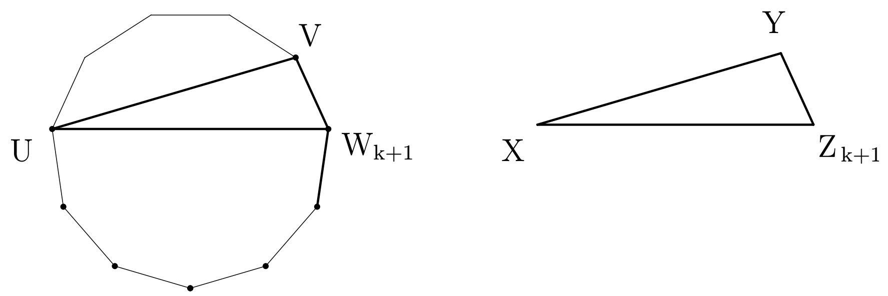
UW_1 a W_1V jsou stranami pravidelného n-úhelníku. Mají tedy stejné délky a úhly proti těmto stranám mají stejné velikosti. Podle věty 5 můžeme snadno dopočítat, že na dva shodné úhly trojúhelníku zbývá $\frac{2}{5}\pi$ a tedy velikost každého jednoho úhlu je $\frac{1}{5}\pi$. Velikost úhlu W_1UV je tedy $\frac{1}{5}\pi$, což odpovídá vztahu $\frac{k}{n} \cdot \pi$

pro $k = 1$. A jelikož jsme úhlopříčku UV volili libovolně, platí tvrzení pro všechny úhlopříčky přecházející jeden vrchol.

$k \to k + 1$.

Předpokládejme, že tvrzení které dokazujeme, již platí pro k přecházených ($k \geq 1$ abychom mohli mluvit o úhlopříčce přes k vrcholů) a má smysl zkoumat, platí-li pro $k + 1$ (v n-úhelníku existují úhlopříčky přes $k + 1$ vrcholů, tedy $k + 1 \leq n - 3 \to k \leq n - 4$).

Označme libovolnou úhlopříčku přes $k + 1$ vrcholů UV. Ta rozdělí n-úhelník na dvě části, z nichž nás během důkazu bude zajímat pouze ta, kde je (kromě vrcholů U a V) oněch $k+1$ vrcholů přecházených (pokud by obě části měli počet přecházených vrcholů stejný, zvolíme si libovolnou z nich). Tyto vrcholy postupně od souseda vrcholu U označíme $W_1, W_2, \ldots, W_{k+1}$.



Obrázek 7.

$k \to k + 1$. *Důkaz první části tvrzení.*

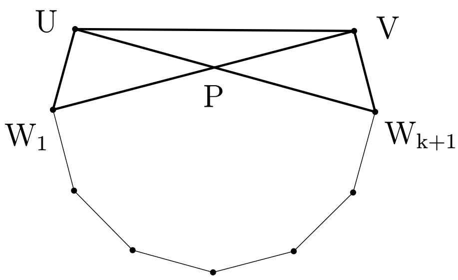
Vrcholy $U, W_1, \ldots, W_{k+1}, V$ jsou tedy různé po sobě jdoucí vrcholy pravidelného n-úhelníku. Mezi vrcholy U a V leží nejméně dva vrcholy ($k + 1 \geq 2$), takže vrchol W_{k+1} nemůže sousedět s vrcholem U. Úsečka UW_{k+1} je tedy úhlopříčka přes k vrcholů (obr. 7 vlevo).

Úhlopříčka UW_{k+1} dělí úhel $\sphericalangle W_kW_{k+1}V$ na úhly $\sphericalangle W_kW_{k+1}U$ a $\sphericalangle UW_{k+1}V$. Velikosti úhlu $\sphericalangle W_kW_{k+1}V$ je $\frac{(n-2)}{n}\pi$, protože jde o vnitřní úhel při vrcholu pravidelného n-úhelníku (vlastnost 2). Velikost úhlu $\sphericalangle W_kW_{k+1}U$ je $\frac{k}{n}\pi$, neboť podle předpokladu právě dokazovaného tvrzení úhlopříčka $W_{k+1}U$ přechází vrcholy W_k, $\ldots$, W_1, kterých je celkem k. Velikost úhlu $\sphericalangle UW_{k+1}V$ snadno dopočítáme jako rozdíl velikostí zmíněných úhlů a dostaneme $\frac{n-k-2}{n}\pi$.

Vrcholy U, W_{k+1} a V jsou vzájemně různé body neležící na téže přímce (věta 9). Určují tedy trojúhelník $\triangle UW_{k+1}V$.

Označme XY libovolnou jinou úhlopříčku přes $k + 1$ vrcholů a označme tyto přecházené vrcholy postupně od souseda vrcholu X $Z_1, \ldots, Z_{k+1}$ (obr. 7 vpravo). Všechny vlastnosti platné pro lomenou čáru $UW_1 \ldots W_{k+1}V$ platí analogicky i pro lomenou čáru $XW_1 \ldots Z_{k+1}Y$, protože úhlopříčku UV, u níž jsme vlastnosti zkoumali, jsme volili libovolně. Vrcholy X, Z_{k+1} a Y tedy tvoří trojúhelník $\triangle XZ_{k+1}Y$ a úhel $\sphericalangle XZ_{k+1}Y$ má velikost $\frac{n-k-2}{n}\pi$.

Strany $W_{k+1}V$ a $Z_{k+1}Y$ mají stejnou délku, jelikož jsou to strany téhož pravidelného n-úhelníku (viz. definice pravidelného n-úhelníku). Úhlopříčky $W_{k+1}V$ a $Z_{k+1}Y$ mají stejnou délku, neboť jsou to úhlopříčky přes k vrcholů a pro ně podle předpokladu platí dokazované tvrzení. Úhly $\sphericalangle UW_{k+1}V$ a $\sphericalangle XZ_{k+1}Y$ mají stejnou velikost a podle věty 8 jsou trojúhelníky $\triangle UW_{k+1}V$ a $\triangle XZ_{k+1}Y$ shodné, z čehož plyne i shodnost velikostí úhlopříček UV a XY. A jelikož jsme je obě volili libovolně, mají všechny úhlopříčky přes $k+1$ vrcholů stejnou délku.



Obrázek 8.

$k \to k+1$. *Důkaz druhé části tvrzení.*

Odvozené vlastnosti, které platily pro lomenou čáru $UW_1 \ldots W_{k+1}V$ platí analogicky i pro tutéž lomenou čáru v opačném pořadí, tedy pro $VW_{k+1} \ldots W_1VU$. Platí tedy, že vrcholy V, W_1 a U určují trojúhelník a trojúhelníky $\triangle UW_{k+1}V$ a $\triangle VW_1VU$ jsou shodné (obr. 8).

Úhlopříčka UW_{k+1} dělí n-úhelník na dvě části. V jedné jsou vrcholy $W_1, \ldots,$ W_k, ve druhé potom vrchol V. Jelikož pravidelný n-úhelník je konvexní útvar, ležela úhlopříčka W_1V celá uvnitř tohoto útvaru. Protože došlo k oddělení vrcholů W_1 a V muselo dojít k rozdělení úhlopříčky W_1V. Úhlopříčka UW_{k+1} tedy protíná úhlopříčku W_1V.

Úhlopříčka UW_{k+1} neprotíná úhlopříčku W_1V v žádném krajním bodu úhlopříčky W_1V. Kdyby totiž protínala, musely by body U, W_{k+1} a jeden z bodů W_1 a V ležet v jedné přímce, což by byl spor s větou 9. Analogicky platí situace pro úhlopříčku W_1V ve vztahu k úhlopříčce UW_{k+1}. Úhlopříčky W_1V a UW_{k+1} se tedy neprotínají v žádném krajním bodu a jejich průsečík tedy musí být vnitřním bodem obou úhlopříček. Označíme ho P.

Bod P leží na přímce $\leftrightarrow UW_{k+1}$. Přímka $\leftrightarrow UW_{k+1}$ má s přímkou $\leftrightarrow UV$ jediný společný bod, vrchol U. Kdyby totiž existoval další společný bod přímek $\leftrightarrow UW_{k+1}$ a $\leftrightarrow UV$, byly by tyto přímky totožné a body U, V a W_{k+1} by ležely na jedné přímce, což je ve sporu s větou 9. Body U, V a P tedy neleží na jedné přímce a určují trojúhelník $\triangle UPV$.

Bod P nemůže ležet na přímce $\leftrightarrow UW_1$, protože jinak by přímka $\leftrightarrow UP$ a s ní totožná přímka $\leftrightarrow UW_{k+1}$ splynuly a body U, W_1 a W_{k+1} ležely na jedné přímce, což by byl spor s větou 9. Analogicky bod P neleží ani na přímce $\leftrightarrow VW_{k+1}$. Body U, W_1 a P potom určují trojúhelník $\triangle UW_1P$ a body V, W_{k+1} a P určují trojúhelník $\triangle VW_{k+1}P$.

Jelikož jsou trojúhelníky $\triangle UW_{k+1}V$ a $\triangle VW_1VU$ shodné, jsou shodné i úhly $\sphericalangle PUV$ a $\sphericalangle PVU$. Trojúhelník $\triangle UPV$ je potom podle věty 6 rovnoramenný se základnou UV.

Úhly v trojúhelníku $\triangle UW_1P$ mají velikost $|\sphericalangle W_1UP| = \frac{k}{n}\pi$ a $|\sphericalangle UW_1P| = \frac{n-k-2}{n}\pi$. Podle věty 5 dopočítáme velikost třetího úhlu $|\sphericalangle UPW_1| = \pi - \left(\frac{k}{n}\pi + \frac{n-k-2}{n}\pi\right) = \frac{2}{n}\pi$.

Přímý úhel $\sphericalangle W_1PV$ totožný s polorovinou $\mapsto W_1VU$ je rozdělen polopřímkou $\mapsto PU$ na úhly $\sphericalangle W_1PU$ a $\sphericalangle UPV$. Jelikož má úhel $\sphericalangle W_1PU$ velikost $\frac{2}{n}\pi$, zbývá do přímého úhlu $|\sphericalangle UPV| = \pi - \frac{2}{n}\pi = \frac{n-2}{n}\pi$.

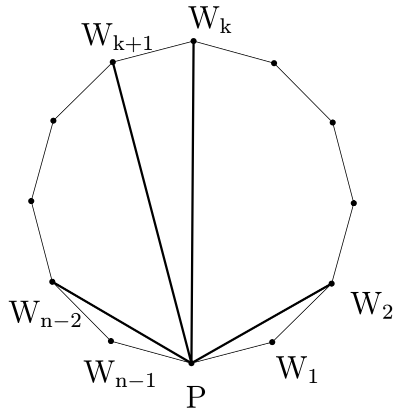
V rovnoramenném trojúhelníku UVP na dva shodné úhly $\sphericalangle PUV$ a $\sphericalangle PVU$ zbývá $\pi - \frac{n-2}{n}\pi = \frac{2}{n}\pi$. Velikosti úhlů tedy jsou $|\sphericalangle VUP| = |\sphericalangle UVP| = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n}\pi = \frac{1}{n}\pi$.

Polopřímka $\mapsto UP$ dělí úhel $\sphericalangle W_1UV$ na úhel $\sphericalangle W_1UP$ o velikosti $\frac{k}{n}\pi$ a úhel $\sphericalangle PUV$ o velikosti $\frac{1}{n}\pi$. Velikost úhlu $\sphericalangle W_1UV$ potom získáme jako součet velikostí jeho částí, tedy $|\sphericalangle W_1UV| = \frac{k}{n}\pi + \frac{1}{n}\pi = \frac{k+1}{n}\pi$, což odpovídá dokazovanému tvrzení pro $k+1$ přecházených vrcholů. A jelikož jsme úhlopříčku UV volili libovolně, platí tvrzení pro všechny uhlopříčky pravidelného n-úhelníku přecházející $k+1$ vrcholů.

Máme-li tvrzení dokázané pro $k = 1$ a máme-li dokázáno, že z tvrzení platné pro k odvodíme platnost tvrzení pro $k+1$, dokázali jsme tvrzení pro všechna po sobě jdoucí k, pro které má tvrzení smysl. $\boxtimes$

4.8 Dělení úhlu při vrcholu

Vlastnost 4
Úhlopříčky vycházející z daného vrcholu pravidelného n-úhelníku dělí úhel při tomto vrcholu na úhly stejné velikosti $\frac{1}{n}\pi$.



Obrázek 9.

Důkaz
Mějme pravidelný n-úhelník. Zvolíme libovolně jeden jeho vrchol a označíme ho P. Zbylé vrcholy označíme postupně od souseda vrcholy P jako $W_1, \ldots, W_{n-1}$ (obr. 9).

Úhlopříčky $PW_1, \ldots, PW_{n-1}$ dělí úhel při vrcholu P $\sphericalangle W_1PW_{n-1}$ na úhly $\sphericalangle W_1PW_2, \ldots, \sphericalangle W_{n-2}PW_{n-1}$.

Úhly $\sphericalangle W_1PW_2$ a $\sphericalangle W_{n-2}PW_{n-1}$ jsou úhly, jejichž jedno rameno určuje strana n-úhelníku a druhé rameno určuje úhlopříčka. Tato úhlopříčka je úhlopříčkou přecházející jediný vrchol (úhlopříčka PW_2 přechází vrchol W_1 a úhlopříčka PW_{n-2} přechází vrchol W_{n-1}). Úhly $\sphericalangle W_1PW_2$ a $\sphericalangle W_{n-2}PW_{n-1}$ mají potom podle vlastnosti 3 velikost $\frac{1}{n}\pi$.

Zbylé části úhlu při vrcholu P, tedy úhly W_kPW_{k+1} pro $k \in \{2, \ldots, n-2\}$ jsou úhly, jejichž ramena určují dvě úhlopříčky. Úhlopříčka PW_k přechází vrcholy $W_1, \ldots, W_{k-1}$, tedy $k-1$ vrcholů. Analogicky úhlopříčka PW_{k+1} přechází k vrcholů, mezi nimi i vrchol W_k.

Úhlopříčka PW_k dělí úhel $\sphericalangle W_1PW_{k+1}$ na dvě části, na úhel $\sphericalangle W_1PW_k$ a úhel $\sphericalangle W_kPW_{k+1}$. Podle vlastnosti 3 je velikost úhlu $\sphericalangle W_1PW_k$ rovna $\frac{k}{n}\pi$ a velikost úhlu $\sphericalangle W_1PW_{k+1}$ je analogicky rovna $\frac{k+1}{n}\pi$. Velikost úhlu $\sphericalangle W_kPW_{k+1}$ snadno dopočítáme jako rozdíl velikostí zmíněných úhlů, tedy $|\sphericalangle W_kPW_{k+1}| = = \frac{k+1}{n}\pi - \frac{k}{n}\pi = \frac{1}{n}\pi$.

Všechny části úhlu při libovolně zvoleném vrcholu P tedy mají velikost $\frac{1}{n}\pi$.
⊠

5 Pravidelný pětiúhelník

5.1 Souhrn

V minulé kapitole jsme definovali pravidelný n-úhelník a ukázali jsme několik zajímavých vlastností konvexních a pravidelných n-úhelníků. Nyní budeme definici a vlastnosti aplikovat na pravidelný pětiúhelník.

Definice
Pravidelným pětiúhelníkem nazýváme pětiúhelník, který je konvexní, rovnostranný a rovnoúhlý.

Vlastnost 1
Součet velikostí vnitřních úhlů pravidelného pětiúhelníku je 3π.

Vlastnost 2
Velikost vnitřního úhlu při vrcholu pravidelného pětiúhelníku je $\frac{3}{5}\pi$.

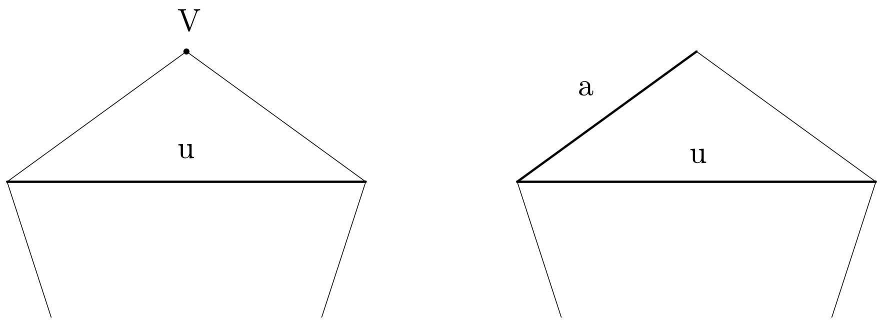
Vlastnost 4
Úhlopříčky vycházející z daného vrcholu pravidelného pětiúhelníku dělí úhel při tomto vrcholu na úhly stejné velikosti $\frac{1}{5}\pi$.

V této kapitole se budeme zabývat pouze vlastnostmi pravidelného pětiúhelníku. Pro jednodušší popis zkoumaných objektů zavedeme nové pojmy, které nejsou žádným standardem a poslouží výhradně našim potřebám.

Dokazované vlastnosti se nejprve budou vztahovat ke stranám a úhlopříčkám pravidelného pětiúhelníku, později k průsečíkům a částem úhlopříček.

5.2 Definice

5.2.1 Přilehlé útvary



Obrázek 10.

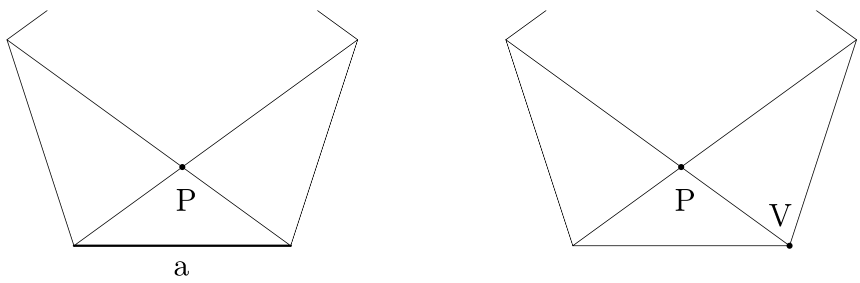
Definice
Mějme pravidelný pětiúhelník.
Úhlopříčkou z vrcholu V nazýváme úhlopříčku, jejíž jeden krajní bod je právě vrchol V. Úhlopříčku a vrchol V nazýváme **vzájemně přilehlými**, pokud úhlopříčka spojuje sousední vrcholy vrcholu V (obr. 10 vlevo). Úhlopříčku a stranu nazýváme **vzájemně přilehlými**, pokud je úhlopříčka přilehlá k jednomu z krajních bodů této strany (obr. 10 vpravo).

5.2.2 Protilehlé útvary

Obrázek 11.

Definice
Mějme pravidelný pětiúhelník.
Nemají-li strana a úhlopříčka společný žádný vrchol, říkáme, že jsou **vzájemně protilehlé** (obr. 11 vpravo). Stranu a vrchol V nazýváme **vzájemně protilehlými**, pokud V nesousedí s žádným krajním bodem této strany (obr. 11 vlevo).

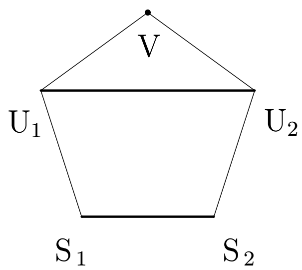
5.2.3 Průsečíky úhlopříček



Obrázek 12.

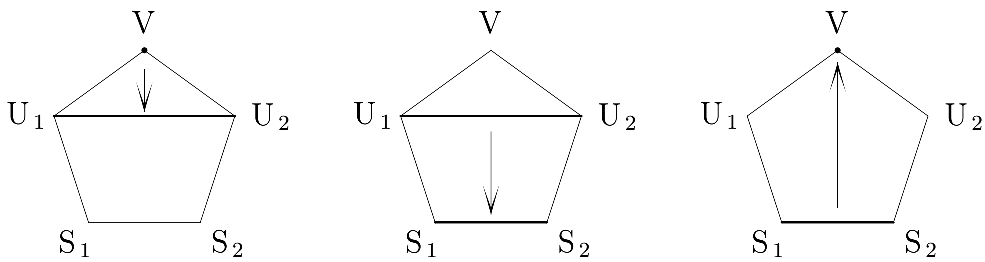
Definice
Mějme pravidelný pětiúhelník.
Průsečíkem úhlopříček při straně budeme rozumět průsečík úhlopříček přilehlých k této straně (obr. 12 vlevo). Průsečík úhlopříčky při vrcholu V s úhlopříčkou z vrcholu V nazýváme **průsečík úhlopříček při vrcholu V** (obr. 12 vpravo).

5.3 Strany a úhlopříčky



Obrázek 13.

Vlastnost 5
V pravidelném pětiúhelníku je trojice vrchol, úhlopříčka a strana, kde vrchol je při úhlopříčce, úhlopříčka proti straně a vrchol proti straně, jednoznačně určena jedním členem této trojice. Vrchol, vrcholy určující úhlopříčku a vrcholy určující stranu jsou vzájemně různé.



Obrázek 14.

Myšlenka důkazu
Potřebujeme dokázat celkem šest vlastností: jednoznačně zadaný/á úhlopříčka/vrchol/strana určí jednoznačně úhlopříčku/vrchol/stranu, kde vrchol je při úhlopříčce, úhlopříčka proti straně a vrchol proti straně. Ve skutečnosti nám stačí dokázat pouze tři vlastnosti, a to ty, ze kterých lze složením zbylé tři odvodit.

Dokážeme, že daný vrchol určí jedinou úhlopříčku, daná úhlopříčka určí jedinou stranu a daná strana určí jediný vrchol. Složením dvojic těchto vlastností získáme zbylé tři vlastnosti.

Důkaz

- Obrázek 14 vlevo. Mějme pravidelný pětiúhelník. Zvolme pevně jeden jeho vrchol a označme ho V. Tento vrchol má právě dva sousedy a jejich spojnice je tedy jediná úhlopříčka při vrcholu V.

- Obrázek 14 uprostřed. Mějme pravidelný pětiúhelník. Zvolme pevně úhlopříčku a označme její krajní body U_1 a U_2. Každý z vrcholů U_1 a U_2 má dva různé sousedy. Protože pětiúhelník má pouze pět vrcholů, musí mít vrcholy U_1 a U_2 alespoň jednoho společného souseda. Na druhou stranu, nemohou mít společné oba sousedy, protože potom by vrcholy U_1, U_2 a jejich sousedé tvořily čtyřúhelník a pátý vrchol by neměl žádného souseda.

  Máme tedy jediného společného souseda vrcholů U_1 a U_2 a označíme ho V. Zbylé dva sousedy vrcholů U_1 a U_2 označíme S_1 a S_2. S_1 a S_2 jsou sousední vrcholy, protože vrcholy U_1, U_2 a V už dva sousedy mají a jediný způsob, jak vrcholy S_1 a S_2 mohou získat druhého souseda, je, že budou sousedit spolu. Jelikož vrcholy S_1 a S_2 spolu sousedí, je S_1S_2 strana pětiúhelníku.

  Protože vrcholy U_1, U_2, S_1 a S_2 jsou vzájemně různé vrcholy, je podle definice úhlopříčka U_1U_2 protilehlá straně S_1S_2. A protože vrchol V byl určen jednoznačně pro danou úhlopříčku U_1U_2, jsou vrcholy S_1 a S_2 určeny až na pořadí jednoznačně a tedy strana S_1S_2 je určena úhlopříčkou U_1U_2 jednoznačně.

- Obrázek 14 vpravo. Mějme pravidelný pětiúhelník. Zvolme pevně jednu jeho stranu a označme její krajní body S_1 a S_2. Vrcholy S_1 a S_2 spolu sousedí, označme U_1 a U_2 jejich zbylé sousedy. Podle definice vrcholu protilehlého straně není žádný z vrcholů S_1, S_2, U_1 a U_2 vrchol protilehlý straně S_1S_2.

  Vrcholy U_1 a U_2 mají společného souseda, kdyby totiž neměly, muselo by v pětiúhelníku existovat šest různých vrcholů. Jejich společného souseda označíme V. Víme, že V sousedí pouze s vrcholy U_1 a U_2 a nesousedí tedy s S_1 ani S_2. Podle definice vrcholu protilehlého straně je potom bod V jediný vrchol protilehlý straně S_1S_2. ⊠

Vlastnost 6
V pravidelném pětiúhelníku je pět úhlopříček.

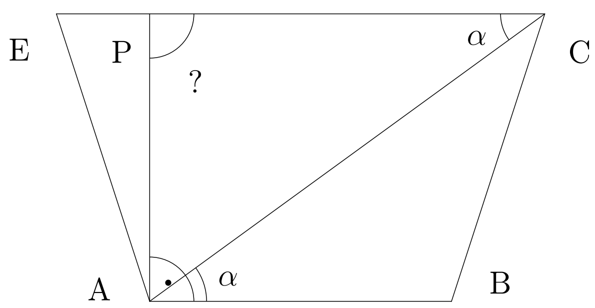
Důkaz
Vzhledem k tomu, že každá úhlopříčka jednoznačně určuje vrchol, který je k ní přilehlý, a naopak každý vrchol je přilehlý nějaké úhlopříčce, je úhlopříček stejně jako vrcholů, tedy pět. ⊠

Poznámka.
Pro n-úhelníky existuje obecné tvrzení o počtu úhlopříček:
n-úhelník má právě $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$ úhlopříček.

Vlastnost 7
Všechny úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku mají stejnou délku.

Důkaz
V pravidelném pětiúhelníku každá úhlopříčka přechází na jedné straně jeden a na druhé straně dva vrcholy. Podle vlastnosti 3 jsou tedu všechny tyto úhlopříčky stejně dlouhé. ⊠

Vlastnost 8
Úhlopříčka pravidelného pětiúhelníku je rovnoběžná s protilehlou stranou.

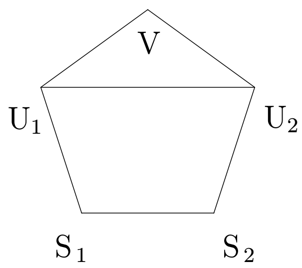


Obrázek 15.

Myšlenka důkazu
Dokážeme, že přímka kolmá ke straně pravidelného pětiúhelníku je kolmá i k její protilehlé úhlopříčce.

Důkaz
Mějme pravidelný pětiúhelník $ABCDE$, strana AB je protilehlá úhlopříčce CE. Kolmice ke straně AB procházející bodem A protne úhlopříčku CE v bodě P (obr. 15). Úhlopříčka AC potom dělí pravý úhel PAB na dvě části. Úhly $\sphericalangle BAC$ a $\sphericalangle ACP$ jsou úhly vzniklé dělením vrcholových úhlů úhlopříčkami, tedy podle vlastnosti 4 mají stejnou velikost. Součtem úhlů $\sphericalangle PAC$ a $\sphericalangle BAC$ je úhel pravý, tedy součtem úhlů $\sphericalangle PAC$ a $\sphericalangle ACP$ je úhel pravý. Protože součtem úhlů v trojúhelníku je úhel přímý, je úhel $\sphericalangle APC$ pravý. A proto přímka kolmá na stranu pětiúhelníku je kolmá i na uhlopříčku, která je k ní protilehlá. Strana a protilehlá úhlopříčka jsou tedy rovnoběžné (věta 2). ⊠

Vlastnost 9
Strany pravidelného pětiúhelníku jsou navzájem různoběžné.



Obrázek 16.

Důkaz

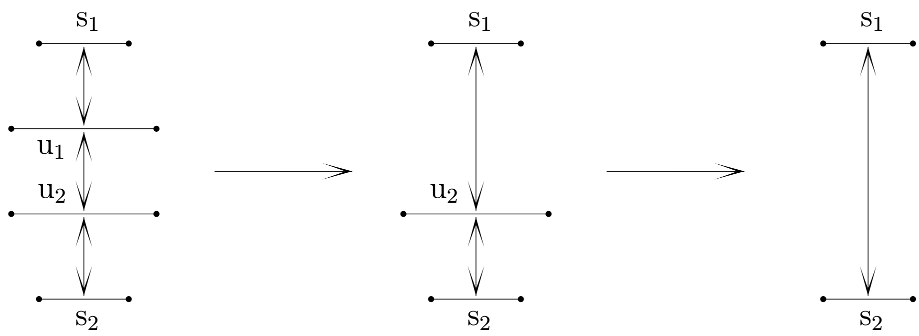
Mějme pravidelný pětiúhelník. Označme libovolnou jeho stranu S_1S_2. Úhlopříčku protilehlou této straně označíme U_1U_2 a vrchol protilehlý straně S_1S_2 označíme V (obr. 16).

Strany U_1S_1 a U_2S_2 jsou se stranou S_1S_2 sousední, tedy různoběžné (z definice lomené čáry).

Vrcholy U_1, V a U_2 jsou tři po sobě jdoucí vrcholy pravidelného pětiúhelníku, neleží tedy na jedné přímce a určují trojúhelník $\triangle U_1U_2V$. Protože v trojúhelníku $\triangle U_1U_2V$ je strana U_1U_2 se stranami U_1V a U_2V sousední, je s nimi různoběžná. V pravidelném pětiúhelníku $U_1S_1S_2U_2V$ je strana S_1S_2 protilehlá úhlopříčce U_1U_2, je s ní tedy podle věty 2 rovnoběžná. A protože (podle poznámky u věty 1) nemohou být dvě různoběžky rovnoběžné s třetí přímkou, nemůže S_1S_2 být rovnoběžná zároveň s U_1U_2 i U_1V. Stejným způsobem lze dokázat různoběžnost stran S_1S_2 a U_2V. S_1S_2 tedy není rovnoběžná ani s U_1V ani s U_2V.

Strana S_1S_2 je tedy různoběžná s ostatními stranami pětiúhelníku. A proto, že jsme ji volili libovolně, jsou různoběžné všechny dvojice různých stran pravidelného pětiúhelníku. $\boxtimes$

Vlastnost 10
Úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku jsou navzájem různoběžné.

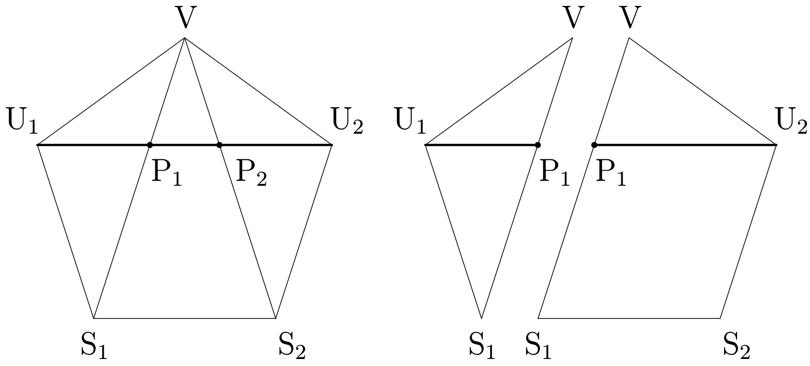


Obrázek 17.

Důkaz

Vlastnost dokážeme sporem. Nechť existuje dvojice úhlopříček, které jsou rovnoběžné a různé. Označme je u_1 a u_2. K u_1 existuje protilehlá strana s_1, která je s ní rovnoběžná (vlastnost 8), stejně tak k u_2 existuje protilehlá strana s_2 různá od s_1 (obr. 17 vlevo). Z tranzitivity rovnoběžnosti (popsané větou 1) plyne, že pokud $s_1 \parallel u_1$ a $u_1 \parallel u_2$, pak $s_1 \parallel u_2$ (obr. 17 uprostřed). A když tutéž vlastnost použijeme ještě jednou, složením rovnoběžnosti $s_1 \parallel u_2$ a $u_2 \parallel s_2$ dostaneme $s_1 \parallel s_2$ (obr. 17 vpravo). Strany s_1 a s_2 jsou strany pravidelného pětiúhelníku, tedy buď jsou různoběžné nebo rovnoběžné totožné. Odtud vyplývá spor s předpokladem existence rovnoběžnosti dvou různých úhlopříček. Různé úhlopříčky jsou tedy vždy různoběžné. ⊠

5.4 Průsečíky úhlopříček



Obrázek 18.

Vlastnost 11
Z pevně zvoleného vrcholu V pravidelného pětiúhelníku vycházejí dvě různé úhlopříčky u_1 a u_2. Tyto úhlopříčky protínají úhlopříčku při vrcholu V ve dvou různých vnitřních průsečících. Žádné jiné úhlopříčky nemají s úhlopříčkou při vrcholu V společný vnitřní bod.

Důkaz
Mějme pravidelný pětiúhelník, zvolme vrchol V a zbylé vrcholy U_1, U_2, S_1, S_2 označme tak, aby S_1S_2 byla strana proti vrcholu V, U_1U_2 byla úhloříčka při vrcholu V a aby vrchol U_1 sousedil s vrcholem S_1 (obr. 18 vlevo).

Úhlopříčka VS_1 podle věty 3 dělí pětiúhelník na dva konvexní útvary, prvním je trojúhelník $\triangle S_1VU_1$ a druhým je čtyřúhelník $S_1S_2U_2V$.

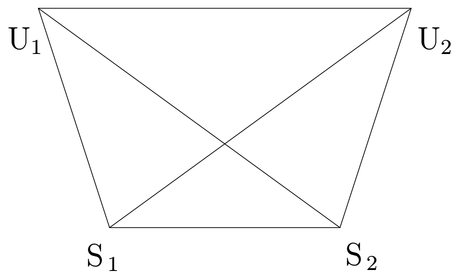
Protože pravidelný pětiúhelník je konvexní, musela v něm úsečka U_1U_2 ležet celá. Po rozdělení pětiúhelníku úsečkou VS_1 leží jeden krajní bod úsečky U_1U_2 v jedné části a druhý v druhé (obr. 18 vpravo). Z toho plyne, že úsečka VS_1 rozdělila úsečku U_1U_2, tedy že existuje průsečík úseček U_1U_2 a VS_1. Označíme jej P_1.

Analogicky najdeme průsečík úseček U_1U_2 a VS_2, který označíme P_2.

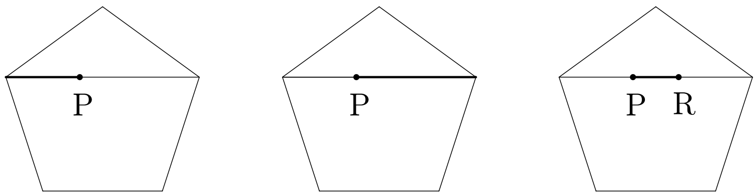
Úhlopříčky VS_1 a VS_2 jsou podle vlastnosti 10 různoběžné a jejich jediný společný průsečík V neleží na U_1U_2. Kdyby tedy P_1 a P_2 byly totožné, byl by to druhý společný průsečík různoběžek, a to je spor s definicí různoběžek.

Úhlopříčka U_1S_2 má s úhlopříčkou U_1U_2 společný krajní bod U_1 (obr. 19). Protože jsou úhlopříčky různoběžné podle vlastnosti 10, je to také jejich jediný společný bod. Neexistuje tedy jejich vnitřní průsečík.

Analogicky potom pro úhlopříčku U_2S_1. ⊠



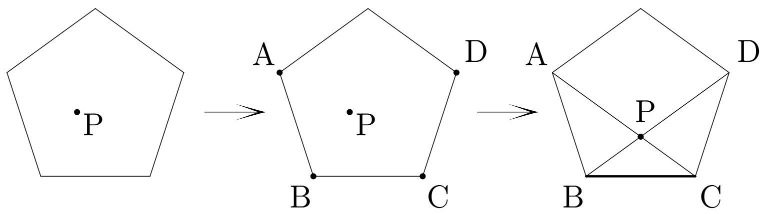
Obrázek 19.



Obrázek 20.

Definice
Mějme úhlopříčku u pravidelného pětiúhelníku a její vnitřní průsečíky P a R se zbylými úhlopříčkami.
Bod P rozdělí úhlopříčku u na dvě části. Část úhlopříčky u obsahující jeden krajní bod strany přiléhající k průsečíku P nazýváme **část úhlopříčky přilehlá k bodu** P (obr. 20 vlevo). Druhou část úhlopříčky nazýváme **část úhlopříčky odlehlá od bodu** P (obr. 20 uprostřed). Část úhlopříčky mezi průsečíky P a R nazýváme **část úhlopříčky mezi průsečíky** (obr. 20 vpravo).

Vlastnost 12
V pravidelném pětiúhelníku je každý vnitřní průsečík úhlopříček přilehlý k jedné straně a každá strana má právě jeden průsečík úhlopříček při této straně.



Obrázek 21.

Myšlenka důkazu
První část tvrzení dokážeme tak, že k danému průsečíku úhlopříček najdeme úhlopříčky, na nichž leží, a následně stranu, ke které úhlopříčky přiléhají (obr. 21). Druhá část tvrzení je triviální.

Důkaz
Mějme pravidelný pětiúhelník. Zvolme libovolně vnitřní průsečík úhlopříček a označme ho P.

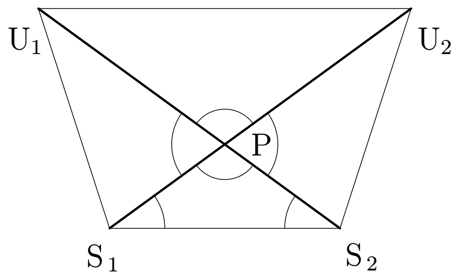
Aby mohl být průsečík úhlopříček vnitřní, musí být úhlopříčky určeny celkem čtyřmi různými vrcholy pravidelného pětiúhelníku. Kdyby byly vrcholy pouze tři, měly by dvě úhlopříčky jeden společný krajní bod, který by byl jejich jediným průsečíkem, ale nebyl by vnitřním bodem.

Označme tedy vrcholy pravidelného pětiúhelníku, které určují protínající se úhlopříčky, pořadě písmeny A, B, C a D.

Úhlopříčka z vrcholu A nesmí vést do vrcholu B, protože vrchol B je sousední s vrcholem A, a nesmí vést do vrcholu D, protože by na druhou úhlopříčku zbyla dvojice sousedních vrcholů B a C. Z vrcholu A tedy vede úhlopříčka do vrcholu C a druhá úhlopříčka je mezi zbylými dvěma vrcholy B a D. Úhlopříčka AC je při vrcholu B, úhlopříčka BD je při vrcholu C. Úhlopříčky tedy přiléhají ke straně BC, a tedy průsečík P je při straně BC. Protože k jiným vrcholům úhlopříčky nepřiléhají, nemůže být P při jiné straně.

Tím jsme dokázali, že průsečík úhlopříček v pravidelné pětiúhelníku jednoznačně určí stranu, ke které přiléhá. Že platí i opačná implikace je zřejmé ihned z definice průsečíku úhlopříček při straně. $\boxtimes$

Vlastnost 13
V pravidelném pětiúhelníku při průsečíku dvou úhlopříček má úhel sevřený přilehlými částmi úhlopříček a úhel sevřený odlehlými částmi úhlopříček velikost $\frac{3}{5}\pi$. Úhel sevřený přilehlou a odlehlou částí dvou různých úhlopříček má velikost $\frac{2}{5}\pi$.



Obrázek 22.

Důkaz

Mějme pravidelný pětiúhelník, zvolme libovolný vnitřní průsečík úhlopříček P a označme vrcholy S_1, S_2, U_1 a U_2 tak, aby S_1S_2 byla strana při průsečíku P, U_1U_2 úhlopříčka proti straně S_1S_2 a aby vrchol S_1 sousedil s vrcholem U_1 (obr. 22).

Bod P neleží na přímce $\leftrightarrow S_1S_2$, protože je to vnitřní bod pravidelného pětiúhelníku a tedy neleží na hraniční úsečce S_1S_2 ani vně pětiúhelníku na přímce $\leftrightarrow S_1S_2$. Body S_1, S_2 a P tedy tvoří trojúhelník.

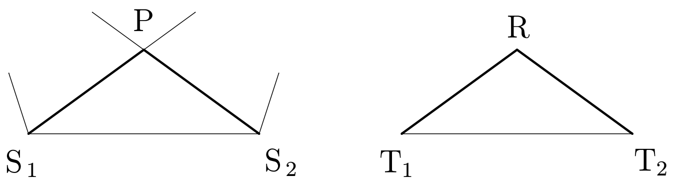
Velikosti úhlů $\sphericalangle S_2S_1P$ a $\sphericalangle S_1S_2P$ jsou podle vlastnosti 4 stejné a jejich velikost je rovna $\frac{1}{5}\pi$. Podle věty 5 je potom velikost zbylého úhlu $\sphericalangle S_1PS_2$ rovna $\frac{3}{5}\pi$.

Přímý úhel $\sphericalangle S_1PU_2$ (totožný s polorovinou $\mapsto S_1U_2S_2$) je polopřímkou $\mapsto PS_2$ rozdělen na úhly $\sphericalangle S_1PS_2$ a $\sphericalangle S_2PU_2$. Snadno dopočítáme velikost úhlu $\sphericalangle S_2PU_2$ a dostaneme $\frac{2}{5}\pi$.

Analogicky dopočítáme velikost úhlů $\sphericalangle U_2PU_1$ a $\sphericalangle U_1PS_1$ a dostaneme pořadě na $\frac{3}{5}\pi$ a $\frac{2}{5}\pi$.

Úhly $\sphericalangle U_1PU_2$ a $\sphericalangle S_1PS_2$ jsou úhly sevřené dvěma odlehlými a dvěma přilehlými částmi úhlopříček při průsečíku P a mají velikost $\frac{3}{5}\pi$, úhly $\sphericalangle S_1PU_1$ a $\sphericalangle S_2PU_2$ jsou úhly sevřené vždy jednou částí úhlopříčky přilehlou a jednou částí odlehlou od průsečíku P a mají velikost $\frac{2}{5}\pi$. Protože jsme vrchol P volili libovolně, platí toto tvrzení pro úhly při každém průsečíku úhlopříček. ⊠

Vlastnost 14
V pravidelném pětiúhelníku mají všechny přilehlé části úhlopříček stejnou délku, všechny odlehlé části úhlopříček mají stejnou délku a všechny části úhlopříček mezi průsečíky mají stejnou délku.



Obrázek 23.

Důkaz

- Mějme pravidelný pětiúhelník, zvolme libovolný vnitřní průsečík úhlopříček P a označme vrcholy S_1 a S_2 tak, aby S_1S_2 byla strana při průsečíku P (obr. 23 vlevo).

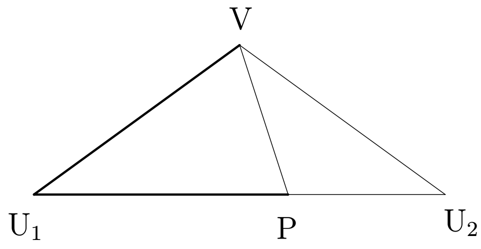
  Trojúhelník $\triangle S_1S_2P$ je rovnoramenný se základnou S_1S_2, protože podle vlastnosti 4 mají úhly při vrcholech S_1 a S_2 stejnou velikost. Z věty 6 tedy plyne rovnost délek ramen, tedy i rovnost délek přilehlých částí úhlopříček při vrcholu P.

  Zvolme si další libovolný vnitřní průsečík úhlopříček R a označme vrcholy T_1 a T_2 tak, aby T_1T_2 byla strana při průsečíku R (obr. 23 vpravo). Protože velikosti úhlů při základnách a délky základen trojúhelníků $\triangle S_1S_2P$ a $\triangle T_1T_2R$ jsou shodné, budou i zbylé strany shodné (věta 7). A jelikož jsme první i druhý vrchol volili libovolně, mají všechny přilehlé části úhlopříček stejnou délku.

- Délku odlehlé části úhlopříčky můžeme vypočítat jako rozdíl délky úhlopříčky a délky přilehlé části úhlopříčky. Protože podle vlastnosti 7 mají všechny úhlopříčky stejnou délku a protože jsme dokázali, že i přilehlé části úhlopříček mají stejnou délku, bude mít i jejich rozdíl vždy stejnou délku.

- Délku části úhlopříčky mezi průsečíky vypočítáme jako délku odlehlé části úhlopříčky zmenšenou o délku přilehlé části úhlopříčky. Jelikož odlehlé i přilehlé části úhlopříček mají stejnou délku, bude mít i rozdíl jejich délek vždy stejnou velikost. ⊠

Vlastnost 15
V pravidelném pětiúhelníku je délka části úhlopříčky odlehlé od průsečíku rovna délce strany.



Obrázek 24.

Důkaz

Mějme pravidelný pětiúhelník. Označme libovolný vrchol V, úhlopříčku při tomto vrcholu U_1U_2 a průsečík úhlopříček při straně VU_2 označme P (obr. 24).

Podle vlastnosti 4 má úhel $\sphericalangle VU_1P$ velikost $\frac{1}{5}\pi$. Podle vlastnosti 13 má úhel $\sphericalangle U_1PV$ velikost $\frac{2}{5}\pi$, na úhel $\sphericalangle U_1VP$ tedy zbývá $\frac{2}{5}\pi$ (věta 5). Trojúhelník $\triangle PVU_1$ je tedy rovnoramenný se základnou VP a rameny U_1P a U_1V. Jedním ramenem tohoto trojúhelníku je strana pravidelného pětiúhelníku, druhým ramenem je potom odlehlá část úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku. Protože všechny strany pravidelného pětiúhelníku mají stejnou délku a podle vlastnosti 14 mají všechny odlehlé části úhlopříček stejnou délku, má odlehlá část úhlopříčky stejnou délku jako strana pravidelného pětiúhelníku. $\boxtimes$

Definice
Trojúhelník nazýváme **velký**, pokud jeho vnitřní úhly mají velikost $\frac{2}{5}\pi$, $\frac{1}{5}\pi$ a $\frac{2}{5}\pi$.
Trojúhelník nazýváme **malý**, pokud jeho vnitřní úhly mají velikost $\frac{1}{5}\pi$, $\frac{3}{5}\pi$ a $\frac{1}{5}\pi$.

Poznámka.
Pojmy velký a malý trojúhelník jsou zavedeny pouze pro potřeby této práce a nejsou používány v žádné literatuře.

Vlastnost 16
Mějme pravidelný pětiúhelník a všechny jeho úhlopříčky. Každý trojúhelník, jehož hranice je utvořena ze stran tohoto pravidelného pětiúhelníku, jeho úhlopříček a jejich částí, je malý nebo velký trojúhelník.

Důkaz
Z vlastnosti 4 plyne, že úhel při vrcholu pravidelného pětiúhelníku může být $\frac{1}{5}\pi$, $\frac{2}{5}\pi$ nebo $\frac{3}{5}\pi$. Z vlastnosti 13 plyne, že úhel při vnitřním průsečíku úhlopříček může být buď $\frac{2}{5}\pi$ nebo $\frac{3}{5}\pi$.

Pokud v pravidelném pětiúhelníku hledáme trojúhelník utvořený ze stran, úhlopříček a částí úhlopříček, budou vrcholy těchto trojúhelníků buď vrcholy pravidelného pětiúhelníku, nebo vnitřní průsečíky úhlopříček. Jiné společné body dvojic, tvořených stranami a úhlopříčkami, nenajdeme. Vnitřní úhly trojúhelníků tedy budou mít velikosti $\frac{1}{5}\pi$, $\frac{2}{5}\pi$ nebo $\frac{3}{5}\pi$.

Předpokládejme, že žádný z vnitřních úhlů není $\frac{1}{5}\pi$. Potom bychom ale za nejmenší součet vnitřních úhlů dostali $\frac{2}{5}\pi \cdot 3 = \frac{6}{5}\pi$, což je ale spor s větou 5.

Jeden z vnitřních úhlů takového trojúhelníku tedy bude $\frac{1}{5}\pi$. Na součet zbylých dvou zbývá $\frac{4}{5}\pi$, což lze rozdělit právě dvěma způsoby, $\frac{1}{5}\pi$ a $\frac{3}{5}\pi$ nebo $\frac{2}{5}\pi$ a $\frac{2}{5}\pi$, což přesně odpovídá definici velkého a malého trojúhelníku. ⊠

6 Podobnost

6.1 Souhrn

Abychom mohli studovat vlastnosti pravidelného pětiúhelníku související s poměry délek, zavedeme pojem podobnosti a bez důkazů uvedeme několik vět souvisejících s podobností.

6.2 Definice

Ačkoliv lze podobnost aplikovat na libovolné útvary, pro naše potřeby vystačíme (podobně jako při středoškolské výuce) s podobností trojúhelníků.

Definice
Trojúhelník $\triangle ABC$ nazýváme **podobný** trojúhelníku $\triangle EFG$, pokud platí, že poměry délek odpovídajících si stran jsou stejné, tj.

$$\frac{|AB|}{|EF|} = \frac{|BC|}{|FG|} = \frac{|AC|}{|EG|}.$$

Poznámka.
Symbolicky zapisujeme $\triangle ABC \sim \triangle EFG$.

Poznámka.
Vztah podobnosti lze definovat obecně (nejen pro trojúhelníky) na základě podobných zobrazení, která ovšem přesahují rámec práce.

6.3 Věty o podobnosti trojúhelníků

Věta 10
Trojúhelník $\triangle ABC$ je podobný trojúhelníku $\triangle EFG$ právě tehdy, když všechny vnitřní úhly trojúhelníku $\triangle ABC$ mají stejné velikosti jako vnitřní úhly trojúhelníku $\triangle EFG$.

Poznámka.
Díky větě 5 postačí shodnost velikostí dvou vnitřních úhlů, neboť ze shodnosti velikostí dvou vnitřních úhlů vyplývá shodnost velikostí zbylých.

Věta 11
Trojúhelník $\triangle ABC$ je podobný trojúhelníku $\triangle EFG$ právě tehdy, když jsou poměry mezi stranami v trojúhelníku $\triangle ABC$ stejné jako poměry mezi stranami v trojúhelníku $\triangle EFG$.

Poznámka.
$\triangle ABC \sim \triangle EFG \leftrightarrow \left(\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|EF|}{|EG|} \wedge \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|EF|}{|FG|} \wedge \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|EG|}{|FG|}\right)$

7 Zlatý řez

7.1 Definice

Definice
Mějme veličinu a a její část x. Pokud platí, že poměr veličin a a x je stejný jako poměr veličin x a $a - x$, pak řekneme, že a a x jsou v **poměru zlatého řezu**.

Poznámka.
Poměr zlatého řezu značíme φ. Symbolicky zapíšeme definici

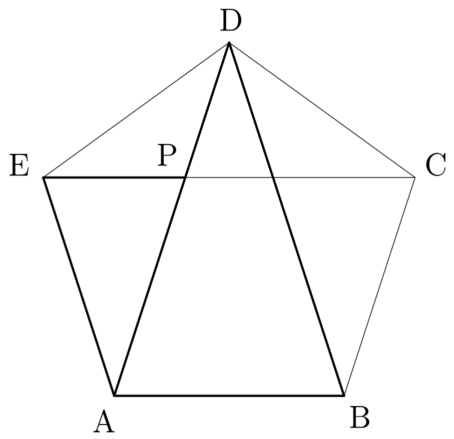
$$\forall a \, \forall x < a : \left(\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x} \right) \to \left(\frac{a}{x} = \varphi \right).$$

Poznámka.
Bez důkazu si pouze pro představu uvedeme rozměr zlatého řezu. Geometrický důkaz využívá porovnávání ploch rovinných obrazců, což přesahuje rámec práce, a algebraický důkaz do konceptu této práce nezapadá.

$$\varphi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \doteq 1{,}618$$

7.2 Zlatý řez v pravidelném pětiúhelníku

Vlastnost 17
V pravidelném pětiúhelníku průsečík dvou úhlopříček dělí úhlopříčku v poměru zlatého řezu.



Obrázek 25.

Důkaz
Mějme libovolný průsečík P úhlopříček pravidelného pětiúhelníku, a označme vrcholy pravidelného pětiúhelníku pořadě A, B, C, D a E tak, aby ED byla strana při průsečíku P (obr. 25).

Trojúhelníky $\triangle ABD$ a $\triangle PEA$ jsou podobné, jelikož jsou oba rovnoramenné a při vrcholu proti základně svírají jejich strany stejné úhly. Poměry stran, které si v obou trojúhelnících odpovídají, budou tedy stejné, neboli $|AD| : |AP| = |AB| : |EP|$. Víme, že délka úsečky AP je rovna délce strany pětiúhelníku. Úsečky EP a DP mají stejnou délku, jelikož jsou to části úhlopříček přilehlé k průsečíku P. Z výše vyjádřeného poměru tedy postupně dostaneme

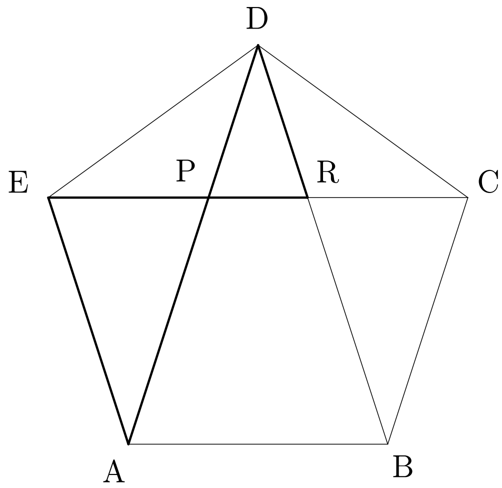
$$\frac{|AD|}{|AP|} = \frac{|AB|}{|EP|} \Rightarrow \frac{|AD|}{|AP|} = \frac{|AP|}{|EP|} \Rightarrow \frac{|AD|}{|AP|} = \frac{|AP|}{|DP|},$$

což přesně odpovídá definici zlatého řezu, a jelikož je průsečík P libovolně zvolený, každý průsečík dělí úhlopříčku v poměru zlatého řezu. ⊠

Vlastnost 18
Strana a úhlopříčka pravidelného pětiúhelníku jsou v poměru zlatého řezu.

Důkaz
Plyne okamžitě z vlastností 17 a 15. ⊠

Vlastnost 19
V pravidelném pětiúhelníku jsou délky části úhlopříčky přiléhající k průsečíku úhlopříček a části úhlopříčky mezi průsečíky v poměru zlatého řezu.



Obrázek 26.

Důkaz

Mějme pravidelný pětiúhelník $ABCDE$. Označme P průsečík úhlopříček při straně ED a R průsečík úhlopříček při straně CD (obr. 26).

Trojúhelníky $\triangle PEA$ a $\triangle PRD$ jsou podobné, protože jsou oba rovnoramenné a jejich úhly proti základnám jsou stejně veliké. Poměry odpovídajících si stran jsou tedy stejné, neboli $|AP| : |DP| = |EP| : |PR|$. Délky stran AP a DP jsou navíc podle vlastnosti 17 v poměru zlatého řezu, z čehož plyne, že i délky stran EP a PR jsou v témže poměru.

Jelikož všechny části úhlopříček mezi průsečíky mají stejnou velikost a všechny části úhlopříček přiléhajících k průsečíku mají stejnou velikost, platí tato vlastnost pro dělení libovolné úhlopříčky. ⊠

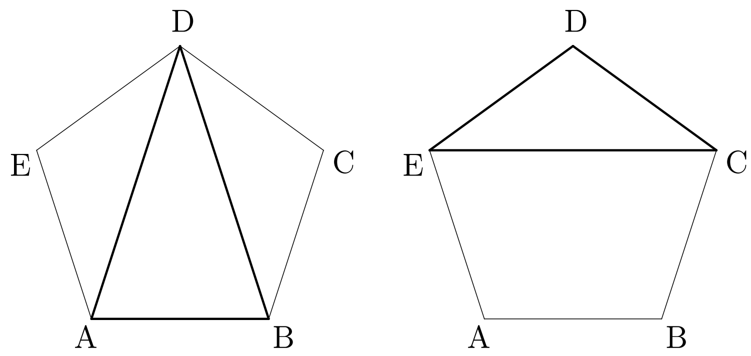
7.3 Zlaté trojúhelníky

Definice
Rovnoramenný trojúhelník nazýváme **zlatý**, když poměr délek ramene a základny nebo základny a ramene je zlatý řez. V prvním případě mluvíme o **hlavním zlatém trojúhelníku**, v druhém potom o **vedlejším zlatém trojúhelníku**.

Poznámka.
V literatuře se pojmy hlavní a vedlejší zlatý trojúhelník nepoužívají. Bývá používán pouze pojem zlatý trojúhelník a to většinou v souvislosti s „naším“ hlavním zlatým trojúhelníkem.

Poznámka.
Za zamyšlení stojí i fakt, proč definice zlatého trojúhelníku neuváží trojúhelníky, kde je zlatého řezu „trochu více“, např. $\triangle ABC$, jehož poměry stran jsou $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|AC|} = \varphi$.

Vlastnost 20
Trojúhelník je zlatý právě tehdy, když je malý nebo velký.



Obrázek 27.

Důkaz

Mějme pravidelný pětiúhelník $ABCDE$ (obr. 27).

Trojúhelník $\triangle ABD$ je velký, neboť v pravidelném pětiúhelníku lze ze stran a úhlopříček sestavit pouze malý nebo velký trojúhelník (vlastnost 16) a úhly při základně AB mají velikost $\frac{2}{5}\pi$. Trojúhelník $\triangle ABD$ je také hlavní zlatý trojúhelník, jelikož je rovnoramenný a poměr délky jeho ramene a základny je poměr délky úhlopříčky a strany pravidelného pětiúhelníku, které jsou podle vlastnosti 18 v poměru zlatého řezu.

Mějme libovolný velký trojúhelník $\triangle KLM$. Podle věty 10 je podobný s trojúhelníkem $\triangle ABD$, neboť mají stejné vnitřní úhly. Protože je ale trojúhelník $\triangle KLM$ podobný s hlavním zlatým trojúhelníkem $\triangle ABD$, je i trojúhelník $\triangle KLM$ hlavní zlatý, neboť podle věty 11 se shodují poměry mezi stranami v obou trojúhelnících.

Analogicky lze dokázat, že libovolný hlavní zlatý trojúhelník je velký. A analogicky potom lze dokázat druhou část tvrzení dávající do ekvivalence malý a vedlejší zlatý trojúhelník. $\boxtimes$

Literatura

[1] Polák J.: *Přehled středoškolské matematiky*, Prometheus, Praha, 1991.

[2] Fabián J.: *Pětiúhelník*, Lupus, Trutnov, 2005.

[3] Servít F. (překl.): *Eukleidovy Základy*, Prometheus, Praha, 1907.