Univerzita Karlova v Prahe
Matematicko – fyzikálna fakulta

Bakalárska práca

Martin Kožár

Zmluvné obmedzenie poistného krytia

Katedra pravdepodobnosti a matematickej štatistiky

Vedúci bakalárskej práce: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D

Študijný program: Finančná matematika

2008

Na tomto mieste by som sa chcel poďakovať doktorke Lucii Mazurovej za pomoc a cenné rady pri písaní tejto bakalárskej práce.

Prehlasujem, že som svoju bakalársku prácu napísal samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov. Súhlasím s jej zapožičiavaním a jej zverejňovaním.

V Prahe dňa: 15. mája 2008 Martin Kožár

Obsah

Názov práce: Zmluvné obmedzenie poistného krytia
Autor: Martin Kožár
Katedra: Katedra pravdepodobnosti a matematickej štatistiky
Vedouci bakalárskej práce: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D
e-mail vedúceho: Mazurova@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt:
Práca je zameraná na skúmanie vplyvu zavedenia obmedzeného krytia v poisťovníctve na niektoré vybrané charakteristiky (napr.: stredný počet škôd, stredná hodnota očakávaných škôd, čisté poistné). Pri modelovaní veľkosti nami skúmaných veličín využijeme rôzne druhy obmedzeného krytia.

Text je rozdelený do troch kapitol. V prvej kapitole ukážeme na vybraných charakteristikách vplyv jednotlivých druhov obmedzených krytí. V druhej časti zohľadníme aj pôsobenie inflácie na dané druhy krytia. Tretia kapitola slúži na ilustrovanie konkrétnych hodnôt pri známom rozdelení.

V celej práci sa pri výpočtoch budeme zameriavať len na tú časť škody, ktorá pripadne k úhrade poisťovateľovi. Časť, ktorú musí poistený kryť sám nebudeme skúmať.

Kľúčové slová: Obmedzenie poistného krytia, spoluúčasť, limit

Title: Coverage limitations in Insurance
Author: Martin Kožár
Department: Department of probability and mathematical statistics
Supervisor: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D
Supervisor's e-mail address: Mazurova@karlin.mff.cuni.cz

Abstract:
The aim of this paper is to explore what influence has the introduction of limited coverage in the system of insurance on some selected characteristics (for example medium number of damage, medium value of expected damages, net insurance). In the modelling of the size of studied quantities chosen by us we will use different types of limited coverage.

The text is divided into three chapters. In the first one we will demonstrate the influence of particular type of limited coverage on the chosen characteristics. In the second part we will take into account the impact of inflation on that coverage. The third chapter serves as an illustration of concrete values when the distribution is known.

In the whole paper we will focus just on that part of damage, which will be totally paid by insurer. The part, which the insured has to cover up alone won't be taken into account.

Keywords: Coverage limitations, deductibles, limits

Úvod

V tejto práci sa budeme zaoberať vplyvom zavedenia obmedzeného krytia v poisťovníctve na niektoré vybrané charakteristiky (napr.: stredný počet škôd, stredná hodnota očakávaných škôd, čisté poistné). Pri modelovaní veľkosti nami skúmaných veličín využijeme rôzne druhy obmedzeného krytia (odčítaná franšíza, integrálna franšíza, limity).

Obsah práce je rozdelený do troch kapitol. V prvej kapitole si ukážeme na vybraných charakteristikách vplyv jednotlivých druhov obmedzených krytí. V druhej časti zohľadníme aj vplyv inflácie na dané druhy krytia. V závere práce budeme ilustrovať konkrétne hodnoty pri známom rozdelení.

V celej práci sa budeme pri výpočtoch zameriavať len na tú časť škody, ktorá pripadne k úhrade poisťovateľovi. Časť, ktorú musí poistený kryť sám nebudeme skúmať. Tomu bude zodpovedať aj zavedenie hustôt a distribučných funkcií pre skúmané náhodné veličiny.

Pre naše potreby si zadefinujme náhodné veličiny použité v práci, ktoré sú potrebné na odvodenie hľadaných vzťahov:

N - náhodná veličina určujúca počet škôd za určité časové obdobie (rok)

M - náhodná veličina určujúca počet škôd po zavedení obmedzeného poistného krytia za určité časové obdobie (rok)

S - náhodná veličina so zloženým rozdelením, ktorá určuje úhrn škôd za časové obdobie

T - náhodná veličina, ktorá určuje úhrn škôd za časové obdobie po zavedení obmedzeného poistného krytia

X - náhodná veličina so spojitým rozdelením predstavujúca veľkosť škôd

W - náhodná veličina, ktorá predstavuje veľkosť škôd hradenú poisťovateľom

Kapitola 1

Prehľad základných typov obmedzeného krytia

1.1 Franšíza odčítaná (spoluúčasť)

Pri tomto druhu krytia poisťovateľ nevypláca žiadnu náhradu škody až do výšky franšízy. Pri jej prekročení sa náhrada znižuje práve o veľkosť franšízy.

Definujme W ako náhodnú veličinu so spojitým rozdelením, pre ktorú platí:

$W = X - d$	za podmienky, že	$X > d$, kde
		X je veľkosť škody
		d je franšíza
W nedefinované		$X < d$

Definujme $F_W(x)$ ako distribučnú funkciu náhodnej veličiny W a $f_W(x)$ ako jej hustotu, potom:

$$F_W(x) = 0, \qquad x \leq 0$$

$$= \frac{F_X(x+d) - F_X(d)}{1 - F_X(d)}, \qquad x > 0$$

a

$$f_W(x) = 0, \qquad x \leq 0$$

$$= \frac{f_X(x+d)}{1 - F_X(d)}, \qquad x > 0.$$

V nasledujúcej časti odvodíme očakávanú strednú hodnotu škôd hradenú poisťovateľom $E[W]$, predtým zavedieme označenie.

$$E[X;d] = E\,min(X, d) = \int_0^d x f_X(x)dx + d[1 - F_X(d)]$$

$E[X;d]$ predstavuje strednú hodnotu spoluúčasti poisteného.

$$E[W] = \int_0^\infty x f_W(x) dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{x f_X(x+d)}{1-F_X(d)} dx$$

$$= \int_d^\infty \frac{(y-d) f_X(y) dy}{1-F_X(d)}$$

$$= \frac{\int_0^\infty y f_X(y) dy - \int_0^d y f_X(y) dy - d[1-F_X(d)]}{1-F_X(d)}$$

$$= \frac{E[X]-E[X;d]}{1-F_X(d)} \tag{1.1}$$

Franšíza má vplyv aj na počet udalostí, pri ktorých poisťovateľ musí nahrádzať škody. V našom prípade sme si ten počet udalostí označili ako *N*.

Označme stredný počet škôd pred zavedením odčítanej franšízy ako *E[N]*, po jej zavedení bude stredný počet škôd *E[M]* nasledovný:

$$E[M] = E[N]P(X > d) = E[N](1 - F_X(d)) \tag{1.2}$$

Nové čisté poistné získame vynásobením (1.1) a (1.2):

$$E[T] = E[M]E[W]$$

$$= \frac{E[N](1-F_X(d))(E[X]-E[X;d])}{1-F_X(d)}$$

$$= E[N](E[X]-E[X;d]) \tag{1.3}$$

Pokiaľ vyjadríme nové čisté poistné ako percento z pôvodného čistého poistného dostaneme tvar:

$$\frac{E[N](E[X]-E[X;d])}{E[N]E[X]} = \frac{E[X]-E[X;d]}{E[X]}$$

1.2 Klesajúca franšíza

Pri takomto druhu obmedzeného poistného krytia poisťovateľ nenahrádza škodu do výšky franšízy (d). Po jej prekročení je poistenému nahradená škoda znížená o percentuálnu časť franšízy. Od veľkosti škody (d°) je poistenému nahradená celá škoda.

Pre nami definovanú náhodnú veličinu W platí:

$$W = \frac{d^{\circ}(X-d)}{d^{\circ}-d}, \qquad d < X \le d^{\circ}$$
$$= X, \qquad X > d^{\circ}$$
$$W \text{ nedefinované} \qquad \text{inak}$$

Odvodenie distribučnej funkcie $F_W(x)$ náhodnej veličiny W je zložitejšie ako v predchádzajúcom prípade, preto uvedieme jej podrobnejšie odvodenie:

$$F_W(x) = P\Big(\frac{d^{\circ}(X-d)}{d^{\circ}-d} \le x \;\Big|\; X > d,\ d < X \le d^{\circ}\Big)\mathrm{P}(d < X \le d^{\circ} \;|\; X > d)$$
$$+\, P(X \le x \;|\; X > d, X > d^{\circ})\mathrm{P}(X > d^{\circ} \;|\; X > d)$$

Po úpravách dostaneme tvar distribučnej funkcie:

$$F_W(x) = 0, \qquad x \le 0$$
$$= \frac{F_X\left(\frac{x(d^{\circ}-d)}{d^{\circ}} + d\right) - F_X(d)}{1-F_X(d)}, \qquad 0 < x \le d^{\circ}$$
$$= \frac{F_X(x) - F_X(d)}{1-F_X(d)}, \qquad x \ge d^{\circ}$$

Pre hustotu $f_w(x)$ platí:

$$f_w(x) = 0, \qquad x \le 0$$
$$= \frac{f_X\left(\frac{x(d^{\circ}-d)}{d^{\circ}} + d\right)\frac{d^{\circ}-d}{d^{\circ}}}{1-F_X(d)}, \qquad 0 < x \le d^{\circ}$$

$$= \frac{f_X(x)}{1-F_X(d)}, \qquad x \geq d^\circ$$

Pre očakávanú strednú hodnotu škôd platenú poisťovateľom platí vzťah:

$$E[W] = \int_0^\infty x f_W(x)dx$$

$$= \int_0^{d^\circ} \frac{x f_X\left(\frac{x(d^\circ - d)}{d^\circ} + d\right)\frac{d^\circ - d}{d^\circ}}{1-F_X(d)} dx + \int_{d^\circ}^\infty \frac{x f_X(x)dx}{1-F_X(d)}$$

$$= \frac{\int_d^{d^\circ} \frac{d^\circ(y-d)}{d^\circ - d} f_X(y)dy}{1-F_X(d)} + \frac{\int_{d^\circ}^\infty x f_X(x)dx}{1-F_X(d)}$$

$$= \frac{\frac{d^\circ}{d^\circ - d}\left(\int_d^{d^\circ} y f_X(y)dy - d\int_d^{d^\circ} f_X(y)dy\right)}{1-F_X(d)} + \frac{\int_{d^\circ}^\infty x f_X(x)dx}{1-F_X(d)}$$

$$= \frac{\frac{d^\circ}{d^\circ - d}\left(\int_0^{d^\circ} y f_X(y)dy - \int_0^{d} y f_X(y)dy - d(F_X(d^\circ) - F_X(d))\right)}{1-F_X(d)}$$

$$+ \frac{E[X] - \int_0^{d^\circ} x f_X(x)dx}{1-F_X(d)}$$

$$= \frac{\frac{d^\circ}{d^\circ - d}\left(E[X;d^\circ] - d^\circ(1-F_X(d^\circ)) - E[X;d] + d(1-F_X(d)) - d(F_X(d^\circ) - F_X(d))\right)}{1-F_X(d)}$$

$$+ \frac{E[X] - E[X;d^\circ] + d^\circ(1-F_X(d^\circ))}{1-F_X(d)}$$

$$= \frac{\frac{d^\circ}{d^\circ - d}(E[X;d^\circ] - E[X;d])}{1-F_X(d)}$$

$$+ \frac{\frac{d^\circ}{d^\circ - d}\left(-d^\circ + d^\circ F_X(d^\circ) + d - dF_X(d) - dF_X(d^\circ) + dF_X(d)\right)}{1-F_X(d)}$$

$$+\ \frac{E[X]-E[X;d^\circ]+d^\circ-d^\circ F_X(d^\circ))}{1-F_X(d)}$$

$$=\ \frac{\frac{d^\circ}{d^\circ-d}(E[X;d^\circ]-E[X;d])}{1-F_X(d)}$$

$$+\ \frac{-d^\circ+d^\circ F_X(d^\circ)+E[X]-E[X;d^\circ]+d^\circ-d^\circ F_X(d^\circ))}{1-F_X(d)}$$

$$=\ \frac{\frac{d^\circ}{d^\circ-d}(E[X;d^\circ]-E[X;d])+E[X]-E[X;d^\circ]}{1-F_X(d)} \tag{1.4}$$

Táto franšíza má vplyv aj na nami definovaný stredný počet škôd, pri ktorých poisťovateľ nahrádza škodu. Ak pôvodný stredný počet škôd mal hodnotu *E[N]*, tak po zavedení franšízy bude mať hodnotu *E[M]*:

$$E[M] = E[N]\ (1 - F_X(d)) \tag{1.5}$$

Na určenie nového čistého poistného *E[T]* je potrebné vynásobiť (1.4) s (1.5):

$$E[T] = E[W]\ E[M]$$

$$=\ \frac{\frac{d^\circ}{d^\circ-d}(E[X;d^\circ]-E[X;d])+E[X]-E[X;d^\circ]}{1-F_X(d)}\ \ E[N](1-F_X(d))$$

$$=\ E[N]\left(\frac{d^\circ}{d^\circ-d}(E[X;d^\circ]-E[X;d])+E[X]-E[X;d^\circ]\right) \tag{1.6}$$

1.3 Integrálna franšíza

Pri tomto druhu poistného krytia poisťovateľ nevypláca žiadnu náhradu škody až do výšky integrálnej franšízy (podobne ako v minulých prípadoch), rozdiel nastáva, keď škoda prekročí túto franšízu. Vtedy poisťovateľ kryje celú škodu.

Rovnako ako pri spoluúčasti si definujme náhodnú veličinu W, ktorá ma spojité rozdelenie.

$W = X$	za podmienky, že	$X > d$, kde
		X je veľkosť škody
		d je franšíza
W nedefinované		$X < d$

Definujme $F_W(x)$ ako distribučnú funkciu náhodnej veličiny W a $f_W(x)$ potom bude jej hustota:

$$F_W(x) = 0, \qquad x \leq d$$

$$= \frac{F_X(x) - F_X(d)}{1 - F_X(d)}, \qquad x > d$$

$$f_W(x) = 0, \qquad x \leq d$$

$$= \frac{f_X(x)}{1 - F_X(d)}, \qquad x > d$$

V ďalšej časti odvodíme očakávanú strednú hodnotu škôd hradenú poisťovateľom $E[W]$, pri ktorej využijeme predtým definovaný vzťah pre $E[X;d]$.

$$E[W] = \int_d^\infty x f_W(x) dx$$

$$= \int_d^\infty \frac{x f_X(x) dx}{1 - F_X(d)}$$

$$= \frac{E[X] - \int_0^d x f_X(x)dx}{1 - F_X(d)}$$

$$= \frac{E[X] - E[X;d] + d(1 - F_X(d))}{1 - F_X(d)}$$

$$= d + \frac{E[X] - E[X;d]}{1 - F_X(d)} \qquad (1.7)$$

Integrálna franšíza ma vplyv aj na nami definovaný stredný počet škôd (pred zavedením integrálnej franšízy). Jej vplyv je rovnaký ako v prípade spoluúčasti.

Nový stredný počet škôd po zavedení integrálnej franšízy bude definovaný vzťahom:

$$E[M] = E[N](1 - F_X(d)) \qquad (1.8)$$

Nové čisté poistné získame vynásobením stredného počtu škôd *E[M]* a strednej hodnoty škôd hradenej poisťovateľom *E[W]*:

$$\begin{aligned} E[T] &= E[M]E[W] \\ &= E[N](1 - F_X(d))\left(d + \frac{E[X] - E[X;d]}{1 - F_X(d)}\right) \\ &= E[N]d(1 - F_X(d)) + E[N](E[X] - E[X;d]) \qquad (1.9) \end{aligned}$$

Rozdiel v čistom poistnom medzi integrálnou franšízou a franšízou odčítanou je v sčítanci $E[N]d(1 - F_X(d))$, ktorý predstavuje extra náklad spôsobený rozdielnym druhom krytia.

Sčítanec $E[N]d(1 - F_X(d))$ získame vynásobením nového stredného počtu škôd $E[N](1 - F_X(d))$ s veľkosťou integrálnej franšízy *d*.

1.4 Limity

Pri tomto druhu poistného krytia je v poistnej zmluve uvedená maximálna čiastka (horná medz plnenia), ktorú je možno poistenému vyplatiť v prípade akejkoľvek veľkej škody.
Označme si tento limit písmenom *u*.

W bude znovu predstavovať náhodnú veličinu už viackrát definovanú.

$$W = X, \qquad X \le u$$
$$W = u, \qquad X > u, \text{ kde}$$

X je veľkosť škody
u je limit

Vzťah pre výpočet strednej hodnoty škôd hradených poisťovateľom v prípade tohto krytia je pomerne jednoduchý:

$$E[W] = \int_0^u x f_X(x)dx + u[1 - F_X(u)] = E[X;u] \tag{1.10}$$

Nami definovaný stredný počet škôd sa po zavedení limitu nezmení, na rozdiel od predchádzajúcich druhov krytia.

$$E[M] = E[N] \tag{1.11}$$

Nové čisté poistné získame vynásobením E[M] s E[W]. Konkrétny tvar čistého poistného je:

$$E[T] = E[M]\ E[W] = E[N]\ E[X;u] \tag{1.12}$$

1.5 Kombinácia limitu a spoluúčasti

Niekedy sa v poisťovníctve využíva aj kombinácia rôznych druhov obmedzeného poistného krytia. My si uvedieme kombináciu spoluúčasti a poistného limitu.

W bude predstavovať rovnakú náhodnú veličinu ako vo všetkých predchádzajúcich príkladoch:

$W = X - d$ $\quad$ $u \geq X > d$, kde

u je limit

d je spoluúčasť

$= u - d$ $\quad$ $X > u$

W nedefinované $\quad$ inak

Nech $F_W(x)$ predstavuje distribučnú funkciu náhodnej veličiny W a $f_W(x)$ jej hustotu, potom:

$$F_W(x) = \frac{F_X(x+d) - F_X(d)}{1 - F_X(d)}, \qquad x < u - d$$

$$= 1, \qquad x \geq u - d$$

$$f_W(x) = \frac{f_X(x+d)}{1 - F_X(d)}, \qquad x < u - d$$

$$= 0, \qquad x \geq u - d$$

Odvodenie očakávanej strednej hodnoty škody hradenej poisťovateľom:

$$E[W] = \int_0^{u-d} \frac{(x) f_X(x+d)}{1 - F_X(d)} dx + \frac{(u-d)(1 - F_X(u))}{1 - F_X(d)}$$

$$= \int_d^{u} \frac{(x-d) f_X(x)}{1 - F_X(d)} dx + \frac{(u-d)(1 - F_X(u))}{1 - F_X(d)}$$

$$= \frac{\int_0^u x f_X(x)dx - \int_0^d x f_X(x)dx - d(F_X(u) - F_X(d)) + (u-d)(1-F_X(u))}{1-F_X(d)}$$

$$= \frac{\int_0^u x f_X(x)dx + u(1-F_X(u)) - \int_0^d x f_X(x)dx - d(1-F_X(d))}{1-F_X(d)}$$

$$= \frac{E[X;u] - E[X;d]}{1-F_X(d)} \qquad (1.13)$$

Nový stredný počet škôd *E[M]* po zavedení tejto kombinácie obmedzeného krytia bude ako v prípade spoluúčasti:

$$E[M] = E[N]\,(1 - F_X(d)) \qquad (1.14)$$

Na odvodenie vzťahu pre nové čisté poistné je potrebné vynásobiť vzťahy (1.13) a (1.14):

$$E[T] = E[M]E[W] = E[N](E[X;u] - E[X;d]) \qquad (1.15)$$

Kapitola 2

Vplyv inflácie na jednotlivé druhy obmedzeného poistného krytia

2.1 Vplyv inflácie pri využití spoluúčasti

Bez zahrntuia inflácie bola veľkosť škody určená náhodnou veličinou X a veľkosť náhrady škody poisťovateľom bola určená náhodnou veličinou W. Po zahrnutí inflácie vo výške r dôjde k zmene týchto veličín.

$Z = (1 + r)X$ je veľkosť škody po zahrnutí inflácie

$V = Z - d$,	za podmienky, že	$Z > d$, kde d je spoluúčasť
V nedefinované		inak

Vypočítame strednú hodnotu škôd hradenú poisťovateľom $E[V]$:

$$E[V] = \int_0^\infty z f_V(z)dz$$

$$= \int_d^\infty \frac{(z-d) f_Z(z)dz}{1 - F_Z(d)}$$

$$= \int_d^\infty \frac{(z-d) f_X\left[z/(1+r)\right]dz}{(1+r)[1 - F_Z(d)]}$$

$$= \int_{d/(1+r)}^\infty \frac{[(1+r)x - d] f_X(x)dx}{1 - F_Z(d)}$$

$$= \frac{(1+r)\left(\left(E[x] - \int_0^{d/(1+r)} x f_X(x)dx\right) - \frac{d}{1+r}\left[1 - F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)\right]\right)}{1 - F_Z(d)}$$

$$= \frac{(1+r)\left(E[X]-E\left[X;\frac{d}{1+r}\right]\right)}{1-F_Z(d)}$$

$$= \frac{(1+r)\left(E[X]-E\left[X;\frac{d}{1+r}\right]\right)}{1-F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)} \tag{2.1}$$

Stredný počet škôd pri použití odčítanej franšízy sme už odvodili predtým, jeho veľkosť je $E[N](1 - F_X(d))$, pri použití označenia z tejto časti vyjadríme:

$$E[M] = E[N]\,(1 - F_Z(d)) = E[N]\left(1-F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)\right) \tag{2.2}$$

Nové čisté poistné získame vynásobením $E[M]$ a $E[V]$:

$$E[T] = \frac{E[N]\left(1-F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)\right)(1+r)\left(E[X]-E\left[X;\frac{d}{1+r}\right]\right)}{1-F_Z(d)}$$

$$= E[N](1+r)\left(E[X]-E\left[X;\frac{d}{1+r}\right]\right) \tag{2.3}$$

Poznámka:

Ak sa X zmení na $Z = (1 + r)X$ a odčítaná franšíza sa zdvihne z d na $(1 + r)d$, potom čisté poistné dostávame v tvare:

$$E[N](1 + r)(E[X] - E[X;d])$$

Udržanie franšízy na hodnote d musí byť doprevádzané zdvihnutím čistého poistného o faktor väčší ako inflácia (pákový efekt). Čisté poistné na poistkách s konštantnou spoluúčasťou sa dvíha rýchlejšie ako inflácia.

2.2 Vplyv inflácie pri využití klesajúcej franšízy

Pre náhodnú veličinu V, ktorá určuje strednú hodnotu škody hradenú poisťovateľom platí vzťah:

$$V = \frac{d^\circ (Z - d)}{d^\circ - d}, \qquad d < Z \le d^\circ$$

$$= Z, \qquad Z > d^\circ$$

V nedefinované, inak,

kde náhodná veličina Z určuje výšku škody po zohľadnení inflácie, ak pôvodná výška škody bola X:

$$Z = (1 + r)X$$

Distribučnú funkciu náhodnej veličiny V označíme $F_V(z)$.

$$F_V(z) = 0, \qquad z \le 0$$

$$= \frac{F_Z\left(\frac{z(d^\circ - d)}{d^\circ} + d\right) - F_Z(d)}{1 - F_Z(d)}, \qquad 0 < z \le d^\circ$$

$$= \frac{F_Z(z) - F_Z(d)}{1 - F_Z(d)}, \qquad z \ge d^\circ$$

Pre hustotu $f_V(z)$ náhodnej veličiny V platí vzťah:

$$f_V(z) = 0, \qquad z \le 0$$

$$= \frac{f_Z\left(\frac{z(d^\circ - d)}{d^\circ} + d\right)\frac{d^\circ - d}{d^\circ}}{1 - F_Z(d)}, \qquad 0 < z \le d^\circ$$

$$= \frac{f_Z(z)}{1 - F_Z(d)}, \qquad z \ge d^\circ$$

Pre určenie veľkosti nového čistého poistného potrebujeme poznať nový stredný počet škôd $E[M]$ a strednú hodnotu náhodnej veličiny V.

Stredná hodnota náhodnej veličiny V je daná vzťahom:

$$E[V] = \int_0^{\infty} z f_V(z)\,dz$$

$$= \int_0^{d^\circ} \frac{z f_Z\left(\frac{z(d^\circ - d)}{d^\circ} + d\right)\frac{d^\circ - d}{d^\circ}}{1 - F_Z(d)}\,dz + \int_{d^\circ}^{\infty} \frac{z f_Z(z)}{1 - F_Z(d)}\,dz$$

$$= \int_d^{d^\circ} \frac{\frac{d^\circ (y-d)}{d^\circ - d} f_Z(y)}{1 - F_Z(d)}\,dy + \int_{d^\circ}^{\infty} \frac{z f_Z(z)}{1 - F_Z(d)}\,dz$$

$$= \frac{\frac{d^\circ}{d^\circ - d}\int_d^{d^\circ} \frac{y-d}{(1+r)} f_X\left(\frac{y}{1+r}\right)dy}{1 - F_Z(d)} + \frac{\int_{d^\circ}^{\infty} \frac{z}{1+r} f_X\left(\frac{z}{1+r}\right)dz}{1 - F_Z(d)}$$

$$= \frac{\frac{d^\circ}{d^\circ - d}\int_{d/(1+r)}^{d^\circ/(1+r)} ((1+r)x - d) f_X(x)dx + \int_{d^\circ/(1+r)}^{\infty} (1+r) x f_X(x)dx}{1 - F_Z(d)}$$

$$= \frac{\frac{d^\circ(1+r)}{d^\circ - d}\left(\int_{d/(1+r)}^{d^\circ/(1+r)} x f_X(x)dx - \frac{d}{1+r}\int_{d/(1+r)}^{d^\circ/(1+r)} f_X(x)dx\right)}{1 - F_Z(d)} + \frac{(1+r)\int_{d^\circ/(1+r)}^{\infty} x f_X(x)dx}{1 - F_Z(d)}$$

$$= \frac{\frac{d^\circ(1+r)}{d^\circ - d}\left(\int_0^{d^\circ/(1+r)} x f_X(x)dx - \int_0^{d/(1+r)} x f_X(x)dx - \frac{d}{1+r}\left(F_X\left(\frac{d^\circ}{1+r}\right) - F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)\right)\right)}{1 - F_Z(d)}$$

$$+ \frac{(1+r)\left(E[X] - \int_0^{d^\circ/(1+r)} x f_X(x)dx\right)}{1 - F_Z(d)}$$

$$= \frac{\frac{d^\circ(1+r)}{d^\circ - d}\left(E\left[X;\frac{d^\circ}{1+r}\right] - E\left[X;\frac{d}{1+r}\right]\right)}{1-F_Z(d)}$$

$$+ \frac{\frac{d^\circ(1+r)}{d^\circ - d}\left(-\frac{d^\circ}{1+r}\left(1-F_X\left(\frac{d^\circ}{1+r}\right)\right)+\frac{d}{1+r}\left(1-F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)\right)-\frac{d}{1+r}\left(F_X\left(\frac{d^\circ}{1+r}\right)-F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)\right)\right)}{1-F_Z(d)}$$

$$+ \frac{(1+r)\left(E[X]-E\left[X;\frac{d^\circ}{1+r}\right]+\frac{d^\circ}{1+r}(1-F_X\left(\frac{d^\circ}{1+r}\right)\right)}{1-F_Z(d)}$$

$$= \frac{\frac{d^\circ(1+r)}{d^\circ - d}\left(E\left[X;\frac{d^\circ}{1+r}\right] - E\left[X;\frac{d}{1+r}\right]\right)}{1-F_Z(d)} + \frac{(1+r)\left(E[X]-E\left[X;\frac{d^\circ}{1+r}\right]\right)}{1-F_Z(d)}$$

$$+ \frac{\frac{d^\circ(1+r)}{d^\circ - d}\left(\frac{-d^\circ+d}{1+r}+\frac{d^\circ-d}{1+r}F_X\left(\frac{d^\circ}{1+r}\right)\right)}{1-F_Z(d)} + \frac{d^\circ\left(1-F_X\left(\frac{d^\circ}{1+r}\right)\right)}{1-F_Z(d)}$$

$$= \frac{\frac{d^\circ(1+r)}{d^\circ - d}\left(E\left[X;\frac{d^\circ}{1+r}\right] - E\left[X;\frac{d}{1+r}\right]\right)}{1-F_Z(d)} + \frac{(1+r)\left(E[X]-E\left[X;\frac{d^\circ}{1+r}\right]\right)}{1-F_Z(d)}$$

$$= \frac{\frac{d^\circ(1+r)}{d^\circ - d}\left(E\left[X;\frac{d^\circ}{1+r}\right] - E\left[X;\frac{d}{1+r}\right]\right)+(1+r)\left(E[X]-E\left[X;\frac{d^\circ}{1+r}\right]\right)}{1-F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)} \qquad (2.4)$$

Na určenie nového stredného počtu škôd použijeme vzťah, ktorý sme už odvodili pri využití tohto typu franšízy. Zohľadníme označenie z tejto kapitoly.

$$E[M] = E[N](1 - F_Z(d)) = E[N]\left(1-F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)\right) \qquad (2.5)$$

Nové čisté poistné získame vynásobením stredného počtu škôd *E[M]* so strednou výškou škody *E[V]*

2.3 Vplyv inflácie pri využití integrálnej franšízy

Náhodná veličina Z určuje výšku škody po zohľadnení inflácie r. Náhodná veličina V určuje výšku škody, ktorá je hradená poisťovateľom.

$$Z = (1 + r)X$$

$V = Z$, za podmienky, že $Z > d$, kde d je integrálna franšíza

V nedefinované inak

Vypočítame strednú výšku škody hradenú poisťovateľom:

$$E[V] = \int_0^\infty z f_V(z)dz$$

$$= \int_d^\infty \frac{z f_Z(z)dz}{1 - F_Z(d)}$$

$$= \int_d^\infty \frac{z f_X\left[z/(1+r)\right]dz}{(1+r)[1 - F_Z(d)]}$$

$$= \int_{d/(1+r)}^\infty \frac{(1+r)x f_X(x)dx}{1 - F_Z(d)}$$

$$= \frac{(1+r)\left(E[X] - \int_0^{d/(1+r)} x f_X(x)dx\right)}{1 - F_Z(d)}$$

$$= \frac{(1+r)\left(E[X] - E\left[X;\frac{d}{1+r}\right] + \frac{d}{1+r}\left(1 - F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)\right)\right)}{1 - F_Z(d)}$$

$$= \frac{d}{1+r} + \frac{(1+r)\left(E[X] - E\left[X;\frac{d}{1+r}\right]\right)}{1 - F_Z(d)}$$

$$= \frac{d}{1+r} + \frac{(1+r)\left(E[X]-E\left[X;\frac{d}{1+r}\right]\right)}{1-F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)} \tag{2.6}$$

Stredný počet škôd pri použití integrálnej franšízy je $E[N](1 - F_Z(d))$, je rovnaký ako pri franšíze odčítanej. Pri použití označenia z tejto časti dostaneme:

$$E[M] = E[N]\,(1 - F_Z(d)) = E[N]\left(1-F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)\right) \tag{2.7}$$

Nové čisté poistné získame vynásobením (2.6) a (2.7):

$$E[T] = E[N]\left(1-F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)\right)\frac{d}{1+r} + E[N](1+r)\left(E[X]-E\left[X;\frac{d}{1+r}\right]\right) \tag{2.8}$$

2.4 Vplyv inflácie pri využití limitu

Bez zahrnutia inflácie bola veľkosť škody určená náhodnou veličinou X a veľkosť náhrady škody poisťovateľom bola určená náhodnou veličinou W**.**

Náhodná veličina V určuje veľkosť škody hradenej poisťovateľom po zahrnutí vplyvu inflácie vo výške r.

$$Z = (1 + r)X$$

$V = Z,$ $\quad Z \leq u$, kde

u je limit

$V = u,$ $\quad Z > u$

Stredná hodnota škôd hradená poisťovateľom bude:

$$E[V] = \int_0^u z f_Z(z)dz + u[1 - F_Z(u)]$$

$$= \int_0^u z \frac{f_X[z/(1+r)]dz}{1+r} + u\left[1 - F_X\left(\frac{u}{1+r}\right)\right]$$

$$= (1 + \mathrm{r}) \int_0^{u/(1+r)} x f_X(x)dx + u\left[1 - F_X\left(\frac{u}{1+r}\right)\right]$$

$$= (1 + \mathrm{r})\left(\int_0^{u/(1+r)} x f_X(x)dx + \frac{u}{1+r}\left[1 - F_X\left(\frac{u}{1+r}\right)\right]\right)$$

$$= (1 + \mathrm{r})\mathrm{E}\left[X; \frac{u}{1+r}\right] \tag{2.9}$$

Stredný počet škôd $E[M]$ sa vplyvom inflácie nezmení:

$$E[M] = E[N] \tag{2.10}$$

Nové čisté poistné bude mať hodnotu:

$$E[T] = E[N](1 + r)\,E\left[X;\frac{u}{1+r}\right] \tag{2.11}$$

Poznámka:

Predpokladajme, že inflácia bola r a limit bol zdvihnutý na $u^{\circ} = u(1 + r)$. Nová stredná hodnota škôd hradená poisťovateľom potom bude (v 2.11 nahradíme u° za u):

$$E[Z;u^{\circ}] = (1 + r)E\left[X;\frac{u^{\circ}}{1+r}\right]$$

$$= (1 + r)\,E[X;u]$$

Nové čisté poistné sa rovná pôvodnému čistému poistnému zdvihnutému o infláciu.

Kapitola 3

Výpočet konkrétnych hodnôt

3.1 Výpočet hodnôt pri využití exponenciálneho rozdelenia

V tejto podkapitole sa zameriame na modelovanie hodnôt pri využití mixu exponenciálneho rozdelenia s hustotou $f_X(x)$:

$$f_X(x) = \frac{1}{2}\left(2e^{-2x} + e^{-x}\right), \qquad x > 0 \qquad (3.1)$$

$$= 0, \qquad \text{inak}$$

Budeme sledovať výšku plnenia pre poisťovateľa po zavedení obmedzeného poistného krytia *E[W]* a podiel nového čistého poistného k pôvodnému *E[T]/E[S]*. Pri výpočtoch budeme potrebovať *E[X;d]*, ktoré spočítame pre konkrétnu hustotu (3.1).

$$E[X;d] = \int_0^d x\left(e^{-2x} + \frac{e^{-x}}{2}\right)dx + d\left(\int_d^\infty \frac{1}{2}\left(2e^{-2x} + e^{-x}\right)dx\right)$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{e^{-2d}}{4} - \frac{e^{-d}}{2} \qquad (3.2)$$

Sledované veličiny vyjadríme pre všetky druhy krytia zavedené v kapitolách 1 a 2. Pre lepšiu predstavu uvedieme hodnoty veličín v numerickom vyjadrení, nie v ich presnom tvare.

Obmedzené krytia z kapitoly 1

a) Franšíza odčítaná:

franšíza - *d*	***E[W]***	***E[T]/E[S]***
$\frac{1}{4}$	0.781088	0.721377
$\frac{1}{2}$	0.81123	0.52698
1	0.865529	0.290365

Tabuľka 1.

b) Franšíza klesajúca:

franšíza - *d*	**franšíza - d^o**	***E[W]***	***E[T]/E[S]***
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	4.57602	0.832583
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	3.89017	0.707796
1	$\frac{3}{2}$	2.97011	0.540396

Tabuľka 2.

c) Franšíza integrálna:

franšíza - *d*	***E[W]***	***E[T]/E[S]***
$\frac{1}{4}$	1.03109	0.952266
$\frac{1}{2}$	1.31123	0.851784
1	1.86553	0.625841

Tabuľka 3.

d) Limit:

limit - *u*	***E[W]***	***E[T]/E[S]***
10	0.749977	0.99997
2	0.677753	0.903671
1	0.532226	0.709635

Tabuľka 4.

e) Kombinácia limitu a spoluúčasti:

franšíza - *d*	**limit - *u***	***E[W]***	***E[T]/E[S]***
$\frac{1}{4}$	10	0.781055	0.721347
$\frac{1}{2}$	10	0.811183	0.52695
1	10	0.865439	0.290334

Tabuľka 5.

Obmedzené krytia z kapitoly 2

a) Odčítaná franšíza:

franšíza - *d*	**inflácia - *r* (%)**	***E[V]***	***E[T]/E[S]***
$\frac{1}{4}$	3	0.803597	0.749982
$\frac{1}{2}$	3	0.833801	0.552632
1	3	0.888526	0.309329
$\frac{1}{2}$	5	0.848845	0.569839
$\frac{1}{2}$	7	0.863887	0.587126
$\frac{1}{2}$	10	0.886446	0.6132

Tabuľka 6.

b) Klesajúca franšíza:

d	***d*°**	**r**	***E[V]***	***E[T]/E[S]***
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	3	0.926019	0.864236
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	3	1.11588	0.739592
1	$\frac{3}{2}$	3	1.6389	0.57056
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	5	1.13335	0.76083
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	7	1.15076	0.782097
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	10	1.17679	0.814043

Tabuľka 7.

c) Integrálna franšíza:

franšíza - *d*	**inflácia – *r* (%)**	***E[V]***	***E[T]/E[S]***
$\frac{1}{4}$	3	1.04632	0.976506
$\frac{1}{2}$	3	1.31924	0.874373
1	3	1.8594	0.647325
$\frac{1}{2}$	5	1.32504	0.889511
$\frac{1}{2}$	7	1.33118	0.904712
$\frac{1}{2}$	10	1.34099	0.927632

Tabuľka 8.

d) Limit:

limit - *u*	**inflácia – *r* (%)**	***E[V]***	***E[T]/E[S]***
10	3	0.772469	1.02996
2	3	0.693323	0.92443
1	3	0.540504	0.720671
1	5	0.545869	0.727825
1	7	0.551115	0.734821
1	10	0.558772	0.74503

Tabuľka 9.

3.2 Výpočet hodnôt pri využití Paretovho rozdelenia

Uvažujeme Paretove rozdelenie s hustotou $f_X(x)$:

$$f_X(x) = \frac{a\lambda^a}{x^{a+1}}, \qquad x > \lambda \tag{3.3}$$
$$= 0, \qquad \text{inak}$$

Budeme pracovať s Paretovým rozdelením s parametrami: $a = 3/2$

$\lambda = 2500$

Rovnako ako pri modelovaní s využitím exponenciálneho rozdelenia aj teraz sa zameriame na výpočet *E[W]* a podiel *E[T]/E[S]*. Uvedieme si hodnotu *E[X;d]* s nami definovanými parametrami, ktorá je vo výpočtoch využívaná.

$$E[X;d] = \int_{2500}^{d} x\left(\frac{3}{2}\frac{2500^{3/2}}{x^{5/2}}\right)dx + \int_{d}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\frac{2500^{3/2}}{x^{5/2}}\right)dx, \qquad d > 2500$$

$$= 7500 - \frac{375000}{d^{1/2}} + \frac{125000}{d^{1/2}} \tag{3.4}$$

Výpočty aplikujeme na všetky druhy krytia uvedené v kapitolách 1 a 2.

Obmedzené krytia z kapitoly 1

a) Franšíza odčítaná:

franšíza - *d*	***E[W]***	***E[T]/E[S]***
50 000	100 000	0.149071
30 000	60 000	0.19245
20 000	40 000	0.235702

Tabuľka 10.

b) Franšíza klesajúca:

franšíza - *d*	**franšíza - *d*º**	***E[W]***	***E[T]/E[S*]**
50 000	1 000 000	129 289	0.192733
30 000	1 000 000	71 630	0.229753
20 000	1 000 000	45 527.9	0.268276

Tabuľka 11.

c) Franšíza integrálna:

franšíza - *d*	***E[W]***	***E[T]/E[S*]**
50 000	150 000	0.223607
30 000	90 000	0.288675
20 000	60 000	0.353553

Tabuľka 12.

d) Limit:

limit - *u*	***E[W]***	***E[T]/E[S*]**
1 000 000	7 250	0.966667
2 000 000	7 323.22	0.97643
5 000 000	7 388.2	0.985093

Tabuľka 13.

e) Kombinácia limitu a spoluúčasti:

franšíza - *d*	**limit - *u***	***E[W]***	***E[T]/E[S]***
50 000	1 000 000	77 639.3	0.115738
30 000	1 000 000	49 607.7	0.159117
20 000	1 000 000	34 343.1	0.202369

Tabuľka 14.

Obmedzené krytia z kapitoly 2

a) Odčítaná franšíza:

franšíza - *d*	**inflácia - *r* (%)**	***E[V]***	***E[T]/E[S]***
50 000	3	100 000	0.155829
30 000	3	60 000	0.201175
20 000	3	40 000	0.246388
30 000	5	60 000	0.207063
30 000	7	60 000	0.213007
30 000	10	60 000	0.222028

Tabuľka 15.

b) Klesajúca franšíza:

d	***d***^{o}	**r**	***E[V]***	***E[T]/E[S*]**
50 000	1 000 000	3	104 086	0.162197
30 000	1 000 000	3	61534.3	0.206319
20 000	1 000 000	3	40 700.9	0.250705
30 000	1 000 000	5	61 534.3	0.212358
30 000	1 000 000	7	61 534.3	0.218454
30 000	1 000 000	10	61 534.3	0.227705

Tabuľka 16.

c) Integrálna franšíza:

limit - *u*	**inflácia – *r* (%)**	***E[V]***	***E[T]/E[S*]**
50 000	3	148 544	0.231475
30 000	3	89 126.2	0.298833
20 000	3	59 417.5	0.365994
30 000	5	88 571.4	0.305664
30 000	7	88 037.4	0.312543
30 000	10	87 272.7	0.322949

Tabuľka 17.

d) Limit:

limit - *u*	**inflácia – *r* (%)**	***E[V]***	***E[T]/E[S]***
1 000 000	3	7 463.67	0.995155
2 000 000	3	7 540.21	1.00536
5 000 000	3	7 608.13	1.01442
1 000 000	5	7 606.02	1.01414
1 000 000	7	7 748.3	1.03311
1 000 000	10	7 961.58	1.06154

Tabuľka 18.

Literatúra

[1] Hogg, R.V., Klugman, S.A.: Loss Distributions, John Wiley & Sons, New York, 1984

[2] Mandl, P., Mazurová, L.: Matematické Základy Neživotného Poistenia, Matfyzpress, Praha, 1999