Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Pavel Paták

Definovatelnost v matematických strukturách

Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: Prof. RNDr. Jan Krajíček, DrSc.
Studijní program: Matematika, obecná matematika

2008

Děkuji velice vedoucímu této práce, prof. Janu Krajíčkovi za trpělivost a cenné připomínky. Děkuji i svým rodičům za celoživotní podporu. Mé díky patří i mému bývalému učiteli StD. Hansi Wernerovi Jandovi za to, že mě přivedl k matematice. Nemalý dík si zaslouží Zuzana Safernová a Miroslav Brabec za důslednou kontrolu pravopisu, slohu i celkového vzhledu práce.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 31. 7. 2008 Pavel Paták

Obsah

Název práce: Definovatelnost v matematických strukturách
Autor: Pavel Paták
Katedra: Katedra algebry
Vedoucí bakalářské práce: Prof. RNDr. Jan Krajíček, DrSc.
e-mail vedoucího: krajicek@math.cas.cz

Abstrakt: V předložené práci se zabýváme popisem definovatelných množin v různých matematických strukturách. Ukazujeme, že definovatelné množiny v přirozených, celých a racionálních číslech mohou být velice komplikované, naproti tomu definovatelné množiny ve strukturách s eliminací kvantifikátorů (reálná, komplexní čísla,. . .) jsou jednoduché. Věnujeme se i pojmu modelové úplnosti. S pomocí získaných poznatků a věty o úplnosti pak snadno dokážeme některé obtížné věty jiných disciplín - algebraickou Nullstellensatz a Artinovu charakterizaci pozitivně definitních racionálních funkcí, geometrickou Tarski-Seidenbergovu větu a mnohé další.

Klíčová slova: matematické struktury, definovatelnost, eliminace kvantifikátorů

Title: Definability in mathematical structures
Author: Pavel Paták
Department: Department of Algebra
Supervisor: Prof. RNDr. Jan Krajíček, DrSc.
Supervisor's e-mail address: krajicek@math.cas.cz

Abstract: In the present work we study the description of definable sets in various mathematical structures. We show that the definable sets in natural, integer and rational numbers can be quite complicated, but they are very simple in structures with quantifier elimination. We also study the notion of model completness. We will use this theory to demonstrate that many difficult theorems from other mathematical branches can be easily proven using some basic facts from logic and model theory. The proves of the algebraic Nullstellensatz and Artin's characterization of positive-definite rational functions, geometric Tarski-Seidenberg theorem and many other theorems are given.

Keywords: mathematical structures, definability, quantifier elimination

Kapitola 1

Matematické struktury

Matematická struktura je pojem, který slouží k popisu funkcí a relací. Typickými příklady matematických struktur jsou komplexní čísla se sčítáním a násobením či množina s částečným uspořádáním. Matematická logika dokáže odhalit mnohé vlastnosti matematických struktur, aniž by musela znát jejich přesnou podobu. Získané výsledky jsou překvapující.

1.1 Jazyk

Matematické struktury popisujeme pomocí (formálního) jazyka. Jedná se o soubor symbolů a pravidel, jak s těmito symboly zacházet. Nejde tedy o češtinu ani žádný jiný přirozený jazyk. V následujícím odstavci podáme definici jazyka prvního řádu s rovností a uvedeme pár běžně používaných konvencí.

Jazyk

- **Proměnnými** jazyka $\mathcal{L}$ rozumíme nějakou nekonečnou spočetnou množinu symbolů, často se užívá $\{v_1, v_2, v_3, \ldots\}$ či $\{x, y, z, \ldots\}$.
- **Logické symboly** jazyka $\mathcal{L}$ jsou $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\neg$, $\forall$, $\exists$ a $=$.
- **Pomocné symboly** jazyka $\mathcal{L}$ jsou čárka , a závorky $), ($.
- **Signatura** je množina L všech funkčních, relačních a konstantních symbolů daného jazyka spolu s funkcí σ, která každému symbolu z L přiřadí jeho typ (funkční, relační, nebo konstantní) a četnost. Četnost

funkčních a relačních symbolů je přirozené číslo různé od nuly. (Udává, kolik argumentů daná funkce či relace má.) Požadujeme, aby četnost konstantních symbolů byla 0.

- **Mohutnost** jazyka $\mathcal{L}$ značíme $||\mathcal{L}||$. Jedná se o mohutnost množiny všech výrazů, které lze v daném jazyce napsat. Každá proměnná je výrazem, i pro prázdný jazyk (tj. s $L = \emptyset$) tudíž platí $||\mathcal{L}|| = \omega$. Obecně tedy $||\mathcal{L}|| = \max(|L|, \omega)$.

- **Izomorfismus**
Jazyky $\mathcal{L}_1$ a $\mathcal{L}_2$ jsou izomorfní, pokud existuje bijekce $f : L_1 \to L_2$, která zachovává typy a četnost symbolů (tj. $\sigma_{\mathcal{L}_1} = \sigma_{\mathcal{L}_2} \circ f$).

- **Poznámka**
Signatura jednoznačně popisuje daný jazyk, často se tedy pojem jazyka a signatury ztotožňuje.

Term

Term je nejmenší smysluplný výraz daného jazyka. Odpovídá složené funkci. Množina $\mathbf{Term}_{\mathcal{L}}$ všech termů daného jazyka je nejmenší množina splňující:

- Každá proměnná je term.
- Každý konstantní symbol je term.
- Je-li n přirozené číslo, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ termy a F_i n-ární funkční symbol, je i výraz $F_i(t_1, \ldots, t_n)$ termem.

Atomické formule

Atomická formule je nejmenší výrok, který lze v daném jazyce napsat. Množina $\mathbf{AFm}_{\mathcal{L}}$ všech atomických formulí jazyka $\mathcal{L}$ je nejmenší množina splňující:

- Jsou-li t, s termy, je výraz $t = s$ atomická formule.
- Je-li n přirozené číslo, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ termy a R_j n-ární relační symbol, je $R_j(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ atomická formule.

Je-li S funkční či relační symbol četnosti 2, píšeme kvůli přehlednosti pouze xSy místo $S(x, y)$ (tedy např. $x + y$ je zkratka za $+(x, y)$).

Formule

Formule jazyka $\mathcal{L}$ je výraz, který popisuje vlastnosti prvků. Formální definice využívá indukci. Množina $\mathbf{Fm}_\mathcal{L}$ všech formulí jazyka $\mathcal{L}$ je nejmenší množina, pro kterou platí:

- Každá atomická formule je formule ($\mathbf{AFm}_\mathcal{L} \subseteq \mathbf{Fm}_\mathcal{L}$).
- Je-li φ formule, je i výraz $\neg\varphi$ formule.
- Jsou-li φ, ψ formule, jsou formulemi i výrazy $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$.
- Je-li symbol t nějaká z proměnných a φ je formule, jsou formulemi i výrazy $(\forall t)\varphi$ a $(\exists t)\varphi$.

Při zápisu můžeme kvůli přehlednosti vynechat nadbytečné závorky či přidat závorky okolo atomických formulí.
Jsou-li t, s termy, rozumíme výrazem $t \neq s$ zkratku za formuli $\neg t = s$.
Dále se dohodneme, že násobení má přednost před sčítáním, tedy $(x + y \cdot z)$ odpovídá $x + (y \cdot z)$.

Příklady

V následujícím textu budeme využívat následující jazyky:

- $\mathcal{L}_\emptyset$ Prázdný jazyk
  Neobsahuje žádné funkční, relační ani konstantní symboly.
- $\mathcal{L}_\mathbf{O}$ Jazyk (ostrého) uspořádání
  Obsahuje jediný binární relační symbol $<$.
- $\mathcal{L}_\mathbf{R}$ Jazyk okruhů
  Obsahuje binární funkční symboly $+, \cdot$ a konstanty $0, 1$.
- $\mathcal{L}_\mathbf{OR}$ Jazyk uspořádaných okruhů
  Obsahuje všechny symboly z $\mathcal{L}_\mathbf{R}$ a navíc binární relační symbol $<$.
- $\mathcal{L}_\epsilon$ ϵ-jazyk (základní jazyk teorie množin)
  Obsahuje jediný binární relační symbol $\in$.

Zřejmě jsou jazyky $\mathcal{L}_{\mathbf{O}}$ a $\mathcal{L}_{\epsilon}$ izomorfní.
Výraz $1 + x \cdot (1 + 1)$ je term jazyka $\mathcal{L}_{\mathbf{OR}}$.
V jazyce $\mathcal{L}_{\emptyset}$ jsou jediné možné termy výrazy tvaru t, kde t je nějaká proměnná.
Atomické formule $\mathcal{L}_{\emptyset}$ jsou tvaru $u = v$, kde u, v jsou proměnné.
Příklady formulí jazyka $\mathcal{L}_{\mathbf{O}}$ jsou $(\forall x)x < x$,
či složitější $(\forall x)(\forall y)(x < y \rightarrow (\exists z)(x < z \wedge z < y))$.

Výskyt proměnných

Proměnné mohou mít ve formulích různý význam (za některé můžeme dosazovat prvky struktury, za jiné ne):

Volné a vázané výskyty proměnných Tyto pojmy jsou definovány rekurzivně:

- Výskyt proměnné v atomické formuli je volný.
- Je-li výskyt t volný ve formuli φ, je odpovídající výskyt t volný i ve formuli $\neg\varphi$.
- Je-li výskyt t volný alespoň v jedné z formulí φ či ψ, je odpovídající výskyt t volný v $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$.
- Je-li výskyt t volný ve formuli φ, pak odpovídající výskyt t je vázaný ve formulích $(\exists t)\varphi$ i $(\forall t)\varphi$.
- Jsou-li t a u dvě navzájem různé proměnné a výskyt t je volný ve formuli φ, je odpovídající výskyt t volný i ve formulích $(\forall u)\varphi$ a $(\exists u)\varphi$
- Je-li výskyt t vázaný v φ, je odpovídající výskyt t vázaný i v $\neg\varphi$.
- Je-li výskyt t vázaný alespoň v jedné z formulí φ nebo ψ, je odpovídající výskyt t vázaný v $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$.

Proměnná se nazývá volná, má-li ve formuli volný výskyt.

Proměnná může mít ve formuli volný i vázaný výskyt současně
$(x > 0 \wedge (\forall x)x \neq 0)$. Takovým formulím se budeme vyhýbat.
(Uvedenou formuli raději přepíšeme na $(x > 0 \wedge (\forall y)y \neq 0)$.)

Zápis $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vyjadřuje, že volné proměnné formule φ tvoří podmnožinu z $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$. (Což chápeme tak, že všechny volné proměnné formule φ jsou uvedeny v seznamu $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$.)
Abychom si ušetřili psaní, zkracujeme $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ na $\varphi(\bar{x})$.

Jak si později ukážeme v Tarského definici splňování, formule s n volnými proměnnými popisuje nějakou vlastnost n-tic. Např. v reálných číslech popisuje formule $\varphi(x, y) = ((\exists z)x = y + z \cdot z)$ vlastnost dvojice (x, y): x je menší nebo rovno y.

Otevřené formule

Otevřená formule je formule bez kvantifikátorů.

Sentence

Sentence (uzavřená formule) je taková formule, v níž jsou všechny výskyty proměnných vázané.
Příklady sentencí v jazyce $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}$ jsou $(1 + 1) = 0$, či $(\exists x)x + 1 = 0$.

1.2 Struktura

Matematická struktura je objekt, ve kterém jsou realizovány funkce, relace a konstanty daného jazyka. Formální definice zní:

Matematická struktura

Nechť $\mathcal{L}$ je jazyk. Označme $R_{\mathcal{L}}, F_{\mathcal{L}}, C_{\mathcal{L}}$ po řadě množiny jeho relačních, funkčních a konstantních symbolů. Matematickou strukturou jazyka $\mathcal{L}$ (stručněji $\mathcal{L}$-strukturou) rozumíme uspořádanou čtveřici $\mathcal{A} = (A, \{r^A | r \in R_{\mathcal{L}}\}, \{f^A | f \in F_{\mathcal{L}}\}, \{c^A | c \in C_{\mathcal{L}}\})$, pro kterou platí:

- A je neprázdná množina (A se nazývá nosič dané struktury).
- Je-li r n-ární relační symbol, je r^A podmnožina A^n.
- Je-li f n-ární funkční symbol, je f^A funkce $A^n \to A$.
- Je-li c konstantní symbol, je c^A prvek A.

Říkáme, že relace r^A je realizace symbolu r ve struktuře $\mathcal{A}$, f^A je realizace f a c^A je realizace c. Nepožadujeme, aby se od sebe realizace jednotlivých funkčních, relačních a konstantních symbolů lišily. Pro libovolný jazyk $\mathcal{L}$ existuje nekonečně mnoho $\mathcal{L}$-struktur. (Za A můžeme vzít libovolnou neprázdnou množinu a relace, funkce a konstanty zrealizovat libovolně.)

Ohodnocení proměnných

Ohodnocením proměnných pro formuli (resp. term) $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (resp. $t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$) ve struktuře $\mathcal{A}$ rozumíme libovolné zobrazení a z množiny proměnných do A, které je definováno alespoň na $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ (tj. jde o zobrazení, které každému ze symbolů $x_1, \ldots, x_n$ a případně i dalším proměnným přiřadí prvek z A).
Místo $a(x_n)$ píšeme a_n, dále $\bar{a}$ značí $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$.

Realizace termů ve struktuře

Je-li a ohodnocení proměnných termu t, definujme $t^A[a]$ (ohodnocení termu t ve struktuře $\mathcal{A}$ při ohodnocení a) jako:

- Je-li term t proměnná v, definujeme $t^A[a] = a(v)$
- Je-li t konstantní symbol c_k, definujeme $t^A[a] = c_k^A$.
- Je-li t tvaru $f_j(t_1(\bar{x}), t_2(\bar{x}), \ldots, t_m(\bar{x}))$, kde $t_1, \ldots, t_n$ jsou termy, definujeme $t^A[a] = f_j^A(t_1^A(\bar{x})[a], t_2^A(\bar{x})[a], \ldots, t_m^A(\bar{x})[a])$.

Tarského definice splňování ve strukturách (Tarského definice pravdy)

Pokud formule $\varphi(\bar{x})$ platí v $\mathcal{A}$ pro ohodnocení a, píšeme $\mathcal{A} \models \varphi(\bar{x})[a]$ (nebude-li hrozit nedorozumění, můžeme uvedený zápis zkrátit na $\mathcal{A} \models \varphi(\bar{a})$, popř. oba způsoby zápisu kombinovat). Pojem splňování (platnosti) je opět definován indukcí a vyjadřuje to, co očekáváme.

- Řekneme, že atomická formule tvaru $t(\bar{x}) = s(\bar{y})$ platí v $\mathcal{A}$ pro ohodnocení proměnných a právě tehdy, když $t^A(\bar{x})[a] = s^A(\bar{y})[a]$.
- Atomická formule tvaru $r_i(t_1(\bar{x}_1), \ldots t_n(\bar{x}_n))$ platí v $\mathcal{A}$ pro ohodnocení proměnných a právě tehdy, když $(t_1^A(\bar{x}_1)[a], \ldots, t_n^A(\bar{x}_n)[a]) \in r_i^A$.

- $\mathcal{A} \models (\varphi \wedge \psi)[a]$ platí právě tehdy, když platí $\mathcal{A} \models \varphi[a]$ i $\mathcal{A} \models \psi[a]$.
- $\mathcal{A} \models (\varphi \vee \psi)[a]$ platí právě tehdy, když platí $\mathcal{A} \models \varphi[a]$ nebo $\mathcal{A} \models \psi[a]$.
- Pro spojky $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ je definice obdobná.
- $\mathcal{A} \models (\exists y)\varphi(y, \bar{x})[a]$ platí právě tehdy, když existuje prvkek $v \in A$, že platí $\mathcal{A} \models \varphi(v, \bar{x})[a]$.
- $\mathcal{A} \models (\forall y)\varphi(y, \bar{x})[a]$ platí právě tehdy, když pro libovolný prvek $v \in A$ platí $\mathcal{A} \models \varphi(v, \bar{x})[a]$.

Zápis $\mathcal{A} \models \varphi$ znamená, že φ platí v $\mathcal{A}$ pro každé ohodnocení proměnných formule φ.

Podstruktura

Jsou-li $\mathcal{A} = (A, r^A, f^A, c^A)$ a $\mathcal{B} = (B, r^B, f^B, c^B)$ dvě matematické struktury, řekneme, že $\mathcal{A}$ je **podstrukturou** $\mathcal{B}$, platí-li
$A \subseteq B$ a $r^A = r^B \restriction_A$, $f^A = f^B \restriction_A$, $c^A = c^B$ (relace, funkce a konstanty struktury $\mathcal{A}$ jsou parcializací příslušných relací, funkcí a konstant struktury $\mathcal{B}$). Struktura $\mathcal{B}$ je pak **rozšíření** struktury $\mathcal{A}$.
Pokud navíc pro libovolnou formuli $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ a libovolné $\bar{a} \in A^n$ platí

$$\mathcal{A} \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi(\bar{a}),$$

říkáme, že $\mathcal{A}$ je **elementární podstruktura** $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ je **elementárním rozšířením** $\mathcal{A}$.

Příklady - $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$

Nyní si uvedeme několik příkladů matematických struktur.

$\mathbb{Q}$ $(Q, <)$ (racionální čísla s uspořádáním) jsou příkladem $\mathcal{L}_{\mathbf{O}}$-struktury.

$\mathbb{N}$ $\mathbb{N} = (N, +, \cdot, 0, 1)$ (přirozená čísla s obvyklými operacemi) jsou příkladem $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}$ struktury.

$\mathbb{N}'$ $\mathbb{N}' = (N, +, \cdot, 0, 1, <)$ (přirozená čísla s obvyklými operacemi a uspořádáním) jsou příkladem $\mathcal{L}_{\mathbf{OR}}$-struktury.

$\mathbb{Z}$ $\mathbb{Z} = (Z, +, \cdot, 0, 1)$ (celá čísla s obvyklými operacemi a uspořádáním) jsou jiným příkladem $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}$-struktury.

$\mathbb{Q}$ $\mathbb{Q} = (Q, +, \cdot, 0, 1)$ (racionální čísla s obvyklými operacemi a uspořádáním) jsou dalším příkladem $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}$-struktury.

$\mathbb{R}$ Podobně reálná čísla $\mathbb{R}$ s obvyklými operacemi tvoří $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}$-strukturu.

$\mathbb{C}$ Komplexní čísla také $\mathbb{C}$ tvoří $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}$-strukturu.

$\mathcal{A}$ Definujme: $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, <)$, kde $\mathbb{N}$ je množina přirozených čísel, $+^{\mathbb{N}}$ přiřadí každé dvojici (x, y) trojku, $\cdot^{\mathbb{N}}$ přiřadí dvojici (x, y) její (obvyklý) součet, $0^{\mathbb{N}}$ je interpretována jako 5 a $1^{\mathbb{N}}$ jako 0 a $<^{\mathbb{N}} = A^2$, tzn. $x < y$ platí pro každé dva prvky x, y. Pak $\mathcal{A}$ je také příkladem $\mathcal{L}_{\mathbf{OR}}$-struktury.

Zřejmě je $\mathbb{N}$ podstrukturou $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ podstrukturou $\mathbb{Q}$ atd. Jak si později ukážeme, tyto podstruktury nejsou elementární (existují sentence, které platí jen v jedné z uvažovaných struktur).

Izomorfismus

Dvě $\mathcal{L}$-struktury $\mathcal{A} = (A, \{r^A | r \in R_{\mathcal{L}}\}, \{f^A | f \in F_{\mathcal{L}}\}, \{c^A | c \in C_{\mathcal{L}}\})$ a $\mathcal{B} = (B, \{r^B | r \in R_{\mathcal{L}}\}, \{f^B | f \in F_{\mathcal{L}}\}, \{c^B | c \in C_{\mathcal{L}}\})$ jsou izomorfní právě tehdy, když existuje bijekce $h : A \to B$, která zachovává interpretace jednotlivých symbolů, tj. pro kterou platí:

- $r^A(\bar{a})$ platí právě tehdy, když platí $r^B(h(\bar{a}))$.
- $h(f^A(\bar{a})) = f^B(h(\bar{a}))$ platí pro všechna $\bar{a}$.
- $h(c^A) = c^B$.

Indukcí dle složitosti termu se dokáže i platnost $h(t^A(\bar{a})) = t^B(h(\bar{a}))$.

Tvrzení 1 (O izomorfismu)**.** *Nechť $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ jsou dvě izomorfní struktury a $h : A \to B$ izomorfismus mezi nimi. Pak pro každé $\bar{a} \in A$ platí*

$$\mathcal{A} \models \varphi(\bar{x})[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi(\bar{x})[h(\bar{a})].$$

Důsledek: Izomorfní struktury se neliší platností sentencí.

Důkaz. Toto tvrzení dokážeme indukcí podle složitosti formule.
Nechť $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ jsou dvě izomorfní struktury.
Z předchozí poznámky je jasné, že $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ se nemohou lišit v platnosti atomických formulí.
Indukční krok pro logické spojky je zřejmý.
Pro kvantifikátory vypadá postup následovně:
Pokud v $\mathcal{A}$ platí $(\exists x)\varphi$, existuje $a \in A$ takové, že platí $\varphi(a)$, to ale znamená, že v $\mathcal{B}$ platí $\varphi(h(a))$, neboli $(\exists x)\varphi$ (neboť prvek $h(a)$ splňuje φ).
V případě obecného kvantifikátoru postupujme takto:
Platí-li $\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi$ musí i $\mathcal{B} \models (\forall x)\varphi$, jinak totiž existuje prvek $b \in \mathcal{B}$, pro který platí $\neg\varphi(b)$. Pak ale $\mathcal{A} \models \neg\varphi(h^{-1}(b))$, což je spor s $\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi$. □

Tvrzení 2 (O neizomorfních strukturách)**.** *Struktury* $\mathbb{N}$*,* $\mathbb{R}$*,* $\mathbb{Q}$*,* $\mathbb{Z}$*,* $\mathbb{C}$ *nejsou navzájem izomorfní.*

Důkaz. Jelikož jsme pojem izomorfismu nedefinovali pro struktury různých jazyků, nebudeme se zabývat vztahem těchto struktur ke struktuře $(Q, <)$. Ostatní struktury považujeme za $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}$-struktury. Abychom ukázali, že struktury nejsou izomorfní, stačí dle předchozího tvrzení pro každou z nich najít $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}$ sentenci, která neplatí v žádné jiné.

E1 $(\exists x)(x \cdot x + 1 = 0)$ je příkladem formule, která platí pouze v $\mathbb{C}$.

E2 $(\exists x)(x \cdot x = 1 + 1)$ platí pouze v $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$.

E3 $(\exists x)(x + x + x = 1 + 1)$ platí jen v $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$.

E4 $(\exists x)(x + 1 = 0)$ platí jen v $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$.

Vhodnou kombinací konjunkcí a negací lze z těchto formulí vyrobit formuli, která platí právě v jedné z uvedených struktur. (Např. E3$\wedge$($\neg$E2) je formule, která platí jen v $\mathbb{Q}$.) Uvedené struktury tedy nejsou izomorfní. □

Kapitola 2

Teorie

2.1 Teorie

Teorie

Teorie T je libovolná množina $\mathcal{L}$-formulí v jazyce $\mathcal{L}$. Těmto formulím říkáme (mimologické) axiomy teorie T. Jazyk teorie T značíme $\mathcal{L}_T$.
Teorie T platí v $\mathcal{L}$-struktuře $\mathcal{A}$ právě tehdy, když pro každou sentenci φ z T platí $\mathcal{A} \models \varphi$. Píšeme $\mathcal{A} \models T$ a čteme $\mathcal{A}$ je modelem teorie T.

Ke každé teorii přidáváme ještě tzv. logické axiomy, jejichž konkrétní volba závisí na volbě logického kalkulu (viz [5, kap. 3.2]). V logice s rovností požadujeme, aby mezi těmito logickými axiomy byly tzv. **axiomy rovnosti**:

E1 $x = x$

E2 $x = y \rightarrow y = x$

E3 $(x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z$

E4 $(\forall \bar{x})(\forall \bar{y})(x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \rightarrow f(x_1, \ldots x_n) = f(y_1, \ldots, y_n))$, kde n je libovolné přirozené číslo a f n-ární funkční symbol daného jazyka.

E5 $(\forall \bar{x})(\forall \bar{y})(x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \rightarrow (r(x_1, \ldots x_n) \leftrightarrow r(y_1, \ldots, y_n)))$, kde n je libovolné přirozené číslo a r n-ární relační symbol daného jazyka.

Teorie T je bezesporná, pokud v ní nejde formálně dokázat spor (definici formálního důkazu lze nalézt např. v [5, kap. 3.2]). Později si ukážeme, že to je právě tehdy, když má model.

Úplnost

Bezesporná teorie je úplná, pokud pro každou $\mathcal{L}_T$-sentenci φ platí, že v T je dokazatelná φ či $\neg\varphi$.

κ-kategoričnost

Bezesporná teorie je κ-kategorická, pokud každé její dva modely mohutnosti κ jsou navzájem izomorfní.

Platnost formulí v teorii

Říkáme, že formule φ platí v teorii T (a píšeme $T \models \varphi$) právě tehdy, když pro každý model $\mathcal{A}$ teorie T platí $\mathcal{A} \models \varphi$.

Příklady teorií

Podívejme se nyní na příklady teorií a jejich axiomů.

PE Teorie čisté rovnosti
(Nemá žádné mimologické axiomy, obsahuje pouze logické axiomy a axiomy rovnosti)

DLO Husté lineární uspořádání bez největšího a nejmenšího prvku
(Teorie v jazyce $\mathcal{L}_{\mathbf{O}}$)

- AO1 $(x < y \wedge y < z) \to (x < z)$
- AO2 $(x < y) \to (\neg x < y)$
- ALO $(x < y) \vee (y < x) \vee (x = y)$
- ADO $(\forall x)(\forall y)((x < y) \to (\exists z)((x < z) \wedge (z < y)))$
- ADO1 $(\forall x)(\exists z)(z < x)$
- ADO2 $(\forall x)(\exists z)(x < z)$

ACF Algebraicky uzavřená tělesa (V jazyce $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}$)

- AF Axiomy komutativních těles

AF1 $x + (y + z) = (x + y) + z$

AF2 $x + 0 = x$

AF3 $\forall x \exists y(x + y = 0)$

AF4 $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

AF5 $x \cdot y = y \cdot x$

AF6 $x \cdot 1 = x$

AF7 $\forall x(x \neq 0 \to \exists y(x \cdot y = 1))$

AF8 $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

AF9 $0 \neq 1$

AF10 $x + y = y + x$ (Tento axiom jde dokázat z předchozích.)

ACF Axiomy uzařenosti, tj. pro každé $n \geq 1$ axiom

$$\forall x_0 \forall x_1 \dots \forall x_{n-1} \exists y(y^n + x_{n-1}y^{n-1} + \cdots x_1 y + x_0 = 0).$$

ACF$_p$ Algebraicky uzavřené těleso charakteristiky p (Jazyk $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}$)

ACF Axiomy algebraicky uzavřených těles

Ap Axiom $(\forall x)(\underbrace{x + x + \cdots x}_{p\text{-krát}} = 0)$, přičemž p je prvočíslo

ACF$_0$ Algebraicky uzavřené těleso charakteristiky 0

ACF Axiomy algebraicky uzavřených těles

A$_0$ Všechny axiomy tvaru $\neg$Ap, kde p je libovolné přirozené číslo a Ap jsou stejné jako výše.

RCF Reálně uzavřená tělesa (V jazyce $\mathcal{L}_{\mathbf{OR}}$)

AOF Axiomy uspořádaných těles

AF Axiomy komutativních těles

AOF1 $(x < y \wedge y < z) \to x < z$

AOF2 $(x < y) \to \neg(x < y)$

AOF3 $(x < y) \vee (y < x) \vee (x = y)$

AOF4 $y < z \to (y + x < z + x)$

AOF5 $(y < z \wedge 0 < x) \to y \cdot x < z \cdot y$

AO Axiom $(\forall x)(x > 0 \to (\exists y)(y^2 = x))$

ARn Axiom $\forall x_0 \forall x_1 \dots \forall x_{n-1} \exists y (y^n + x_{n-1} y^{n-1} + \cdots x_1 y + x_0 = 0)$, pro každé liché n.

Teorie PE má konečné modely s různými počty prvků, není tedy úplná (neboť pro konečné modely existuje formule, která popisuje, kolik prvků mají). Teorie ACF má modely různých charakteristik, rovněž tedy není úplná. O ostatních teoriích dokážeme, že úplné jsou.

2.2 Vlastnosti teorií

Věta 1 (O úplnosti)**.** *Pro libovolnou teorii T a libovolnou formuli φ v jazyce $\mathcal{L}$ platí:*

1. *$T \models \varphi$ tehdy a jenom tehdy, pokud existuje formální důkaz φ z axiomů teorie T.*
2. *T má model tehdy a jen tehdy, když T je bezesporná.*

Důkaz této věty je technicky náročnější, lze nalézt například v [5, kap. 3.2].

Důkaz je konečná posloupnost formulí, využívá tedy jen konečně mnoho axiomů teorie. To nám dává tento důsledek:

Věta 2 (O kompaktnosti)**.** *Jestliže každá konečná podmnožina T je splnitelná, pak T je splnitelná.*

Předchozí věty ukazují, proč je úplnost tak důležitý pojem.
Předpokládejme, že dovedeme algoritmicky rozhodnout, zda dané tvrzení je nebo není axiomem teorie T (což ne vždy dovedeme). Je-li teorie T úplná, můžeme zjistit, zda v T platí φ, tak, že budeme systematicky procházet všechny možné posloupnosti formulí a ověřovat, zda daná posloupnost je důkazem φ, nebo $\neg\varphi$ z axiomů T. Dříve či později narazíme na důkaz jedné či druhé formule. Úplnost tedy dává silné výsledky pro rozhodnutelnost.

Podívejme se nyní, jak zjistit, zda je daná teorie úplná. Nejprve si ale uvedeme jedno technické lemma.

Věta 3 (Löwenheim-Skolemova)**.** *Nechť $\mathcal{L}$-teorie T má nekonečný model. Pak pro každé $\kappa \geq ||\mathcal{L}||$ existuje model T mohutnosti κ.*

Důkaz lze nalézt v [5, kap. 3.4].

Tvrzení 3 (Vaughtův test)**.** *Jestliže všechny modely bezesporné teorie T jsou nekonečné a T je κ-kategorická pro nějaký nekonečný kardinál $\kappa \geq ||\mathcal{L}_T||$, pak T je úplná.*

Důkaz. Předpokládejme, že ne. Pak existuje φ takové, že $T \cup \{\varphi\}$ i $T \cup \{\neg\varphi\}$ jsou splnitelné. Dle věty 3 existují modely $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ mohutnosti κ, pro které platí: $\mathcal{M} \models \varphi$ a $\mathcal{N} \models \neg\varphi$. Ale to je spor, neboť modely $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ jsou izomorfní. A dle tvrzení 1 se nemohou lišit v platnosti žádné formule, tedy ani v platnosti φ. □

Tvrzení 4. *Teorie DLO je úplná.*

Důkaz. Zřejmě je každý model teorie DLO nekonečný, navíc každé dva spočetné modely teorie DLO jsou izomorfní (což se dá snadno dokázat cik-cak indukcí), DLO je tedy ω-kategorická.
Úplnost vyplývá z Vaughtova testu. □

Kapitola 3

Definovatelnost

3.1 Definovatelnost

Pokusme se nahlédnout, jaké množiny prvků dokážeme pomocí formulí popsat a jak složitý takový popis je.

Definovatelnost

Říkáme, že množina $X \subseteq M^n$ je definovatelná v $\mathcal{L}$-struktuře $\mathcal{M}$, jestliže existuje formule $\varphi(x_1, \dots x_{n+m})$ a prvky $b_1, b_2, \dots b_m \in M$ tak, že

$$X = \{(a_1, \dots a_n) : \mathcal{M} \models \varphi(a_1, \dots a_n, b_1, \dots b_m)\}$$

Pokud lze volit $b_1, \dots b_m \in A$, přičemž $A \subseteq M$, říkáme, že X je A-definovatelná. Pro $m = 0$ říkáme, že X je $\emptyset$-definovatelná (např. $\{x : x > \sqrt{2}\}$ je v $\mathbb{R}$ $\emptyset$-definovatelná (formulí $x \cdot x > 1 + 1 \wedge x > 0$)).

Z uvedené definice snadno plyne následující tvrzení:

Lemma 1 (Popis definovatelných množin)**.** *Předpokládejme, že pro každé $n \geq 1$ je D_n systém podmnožin M^n takový, že $\mathcal{D} = \{D_n | n \geq 1\}$ je nejmenší systém splňující:*

1. *$M^n \in D_n$*

2. *pro každou n-ární funkci f z $\mathcal{M}$ je graf funkce f v D_{n+1}*

3. *pro každou n-ární relaci R z $\mathcal{M}$ platí $R \in D_n$*

4. *pro každé* $i, j \leq n$, $\{(x_1, \ldots, x_n) \in M^n : x_i = x_j\} \in D_n$

5. *každé* D_n *je uzavřeno na doplněk, konečná sjednocení a průniky*

6. *je-li* $X \in D_m$ *a* $\pi : M^n \to M^m$ *je projekce* $(x_1, \ldots x_n) \mapsto (x_{i_1}, \ldots x_{i_m})$, *pak* $\pi^{-1}(X) \in D_n$

7. *je-li* $X \in D_n$ *a* $\pi : M^n \to M^m$ *je projekce* $(x_1, \ldots x_n) \mapsto (x_{i_1}, \ldots x_{i_m})$, *pak* $\pi(X) \in D_m$

8. *je-li* $X \in D_{n+m}$ *a* $b \in M^m$, *pak* $\{a \in M^n : (a, b) \in X\} \in D_n$

Pak množina $X \subseteq M^n$ *je definovatelná tehdy a jen tehdy, když* $X \in D_n$.

K vyjádření toho, jak složité množiny dovedeme popsat, jsou velice užitečné i následující pojmy:

Silná minimalita, o-minimalita

Teorie T je **silně minimální**, jestliže pro každý každý její model M a každou definovatelnou množinu X v M platí, že X či její doplněk je konečný.

Je-li T teorie v jazyce $\mathcal{L}_{\mathbf{OR}}$ obsahující DLO, říkáme, že T je **o-minimální**, jestliže pro každý model M teorie T je každá definovatelná množina konečným sjednocením bodů a intervalů (pojem o-minimální pochází z anglického slova order-minimal, které vyjadřuje, že definovatelné množiny jdou definovat již na základě pouhého uspořádání).

O platnosti sentence v dané teorii nejsnáze rozhodneme, pokud tato sentence neobsahuje žádné kvantifikátory. Rovněž množiny definované otevřenými formulemi mají velice jednoduchý tvar. Podívejme se nyní, kdy a za jakou cenu lze formuli převést na ekvivalentní bezkvantifikátorovou formuli.

3.2 Eliminace kvantifikátorů

Eliminace kvantifikátorů

Říkáme, že teorie T v jazyce L má eliminaci kvantifikátorů, pokud pro každou formuli $\varphi(\bar{x})$ jazyka $\mathcal{L}$ existuje otevřená formule $\psi(\bar{x})$ taková, že platí $T \models \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$. (Každá formule má ekvivalentní bezkvantifikátorovou verzi.)

Lemma 2. *Nechť pro každou otevřenou formuli (tj. formuli bez kvantifikátorů) $\varphi(x, \bar{y})$ existuje otevřená ψ taková, že v T platí $T \models \forall \bar{y}(\exists x \varphi(x, y) \leftrightarrow \psi(\bar{y}))$.*
Potom je každá formule θ ekvivalentní nějaké otevřené formuli.

Důkaz. Postupujeme indukcí dle složitosti θ.
Tvrzení platí, pokud je θ otevřená.
Nechť pro $i = 0, 1$ platí $T \models \forall \bar{y}(\varphi_i(\bar{y}) \leftrightarrow \psi_i(\bar{y}))$, kde ψ_i je otevřená.
Pokud $\theta(\bar{y}) = \neg\varphi_0(\bar{y})$, potom $T \models \forall(\varphi(\bar{y}) \leftrightarrow \neg\psi_0(\bar{y}))$.
Pokud $\theta(\bar{y}) = \varphi_0(\bar{y}) \wedge \varphi_1(\bar{y})$, potom $T \models \forall y(\varphi(\bar{y}) \leftrightarrow (\psi_0(\bar{y}) \wedge \psi_1(\bar{y})))$.
Pro ostatní logické spojky postupujeme analogicky.

Pro existenční kvantifikátor vypadá indukční krok takto:
Předpokládejme, že $T \models \forall \bar{y}(\varphi(\bar{y}, x) \leftrightarrow \psi_0(\bar{y}, x))$, kde ψ_0 je otevřená.
Pro $\theta(\bar{y}) = \exists x \varphi(\bar{y}, x)$ platí $T \models \forall \bar{y}(\theta(\bar{y}) \leftrightarrow \exists x(\psi_0(\bar{y}, x)))$. Dle předpokladu existuje otevřená formule $\psi(\bar{y})$, pro kterou $T \models \forall \bar{y}(\exists x \psi_0(\bar{y}, x) \leftrightarrow \psi(\bar{y}))$. Tedy $T \models \forall \bar{y}(\theta(\bar{y}) \leftrightarrow \psi(\bar{y}))$.
Při indukčním kroku pro obecný kvantifikátor s výhodou využijeme toho, že $(\forall x)\varphi(x)$ je ekvivalentní s $\neg(\exists x)\neg\varphi(x)$, a předchozí část důkazu.

$\square$

Nyní si ukážeme jeden z důvodů, proč je eliminace kvantifikátorů důležitá.

Lemma 3. *Buď $\mathcal{L}$ jazyk s alespoň jedním konstantním symbolem a T libovolná teorie v $\mathcal{L}$. Dále buď $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ formule jazyka $\mathcal{L}$ s volnými proměnnými $v_1, \ldots v_n$ (připouštíme i možnost $n = 0$).*
Poté jsou následující podmínky ekvivalentní:

1. *Existuje otevřená formule $\psi(v_1, \ldots, v_n)$ taková, že*
$$T \models \forall \bar{y}(\varphi(\bar{y}) \leftrightarrow \psi(\bar{y}))$$

2. *Jsou-li $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{H}$ modely teorie T, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{M}$ a $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{N}$, poté $\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a})$ tehdy a jen tehdy, pokud $\mathcal{N} \models \varphi(\bar{a})$ pro všechna $\bar{a} \in \mathcal{H}$. (Daná teorie je uzavřená na podmodely i nadmodely.)*

Důkaz lze nalézt v [3].

Příklady

Uveďme si několik ukázek formulí a jejich otevřených ekvivalentů:

- V RCF je formule $(\exists x)(x^2 = y + 1)$ ekvivalentní otevřené formuli $(y + 1 > 0 \vee y + 1 = 0)$.
- V ACF je formule $(\exists x)(x^2 = y + 1)$ ekvivalentní otevřené formuli $(y = y)$.

Uvedené ekvivalence lze snadno dokázat z axiomů příslušných teorií. Jak si později ukážeme, obě teorie připouští eliminaci kvantifikátorů, není tedy překvapující, že se pro formuli $(\exists x)(x^2 = y+1)$ podařilo nalézt její otevřené verze. Z uvedeného příkladu je zřejmé, že daná otevřená verze formule φ se může pro různé teorie lišit.

Skolemizace

Buď $T_0 = T$ teorie jazyka $\mathcal{L}$. Označme $\mathcal{L}_1$ jazyk, který vznikne z L přidáním nových funkčních symbolů f_φ pro každou otevřenou formuli $\varphi(x, \bar{y})$ jazyka $\mathcal{L}$. a T_1 teorii, která vznikne z T_0 přidáním axiomů $(\exists x)\varphi(x, \bar{y}) \leftrightarrow \varphi(f_\varphi(\bar{y}), \bar{y})$. Lze ukázat, že T_1 je konzervativním rozšířením teorie T_0, tj. v obou jsou dokazatelné stejné formule z $\mathcal{L}$. Dále postupujme indukcí: $\mathcal{L}_{i+1}$ vznikne z $\mathcal{L}_i$ přidáním funkčních symbolů $f_{\varphi(x,y)}$ za každou formuli $(\exists x)\varphi(x, y)$ z $\mathcal{L}_i \setminus \mathcal{L}_{i-1}$ a T_{i+1} vznikne přidáním příslušných (skolemovských) axiomů $(\exists x)\varphi(x, \bar{y}) \leftrightarrow \varphi(f_\varphi(\bar{y}), \bar{y})$. Označme $\mathcal{L}' = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{L}_i$ a $T' = \bigcup_{i=0}^{\infty} T_i$.
Dá se ukázat, že T' je teorie v jazyce $\mathcal{L}'$, která konzervativně rozšiřuje T (tj. v obou jsou dokazatelné tytéž $\mathcal{L}$-sentence), a $||\mathcal{L}|| = ||\mathcal{L}'||$ (přidali jsme nejvýše $||\mathcal{L}|| \cdot \omega$ symbolů). V T' je každá formule ekvivalentní nějaké bezkvantifikátorové formuli.

Ukázali jsme, že každá teorie má konzervativní rozšíření, které má eliminaci kvantifikátorů. Interpretace rozšířeného jazyka je ale velice složitá, a tak nám neumožňuje snadné rozhodování o platnosti sentencí.
(Existence konzervativního rozšíření s eliminací kvantifikátorů lze dokázat i jednodušeji - rozšíříme jazyk $\mathcal{L}$ o n-ární relační symboly R_φ pro každou formuli φ s n volnými proměnnými a přidáme axiomy $\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow R_\varphi(\bar{x})$. Každá formule je pak ekvivaletní nějaké atomické formuli. Jelikož ale neznáme

konkrétní realizace jednotlivých relací, ani v tomto případě nejsme schopni jednoduše rozhodovat o platnosti sentencí.)

Modelová úplnost

Ukázali jsme, že pojem eliminace kvantifikátorů velice záleží na volbě jazyka. Modelová úplnost je oproti tomu pojmem více sémantickým.

Defininice 1. *Říkáme, že teorie T je* ***modelově úplná*** *právě tehdy, když pro každé její dva modely $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ takové, že $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$, platí, že $\mathcal{M}$ je elementární podstrukturou $\mathcal{N}$.*

Tvrzení 5. *Připouští-li T eliminaci kvantifikátorů, pak T je modelově úplná.*

Důkaz. Nechť $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ a $\bar{a} \in M^n$. Buď $\varphi(\bar{x})$ libovolná formule. Jelikož T připouští eliminaci kvantifikátorů, existuje otevřená formule ψ taková, že $T \models \varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x})$. Protože ψ je otevřená, $\mathcal{M} \models \psi(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \psi(\bar{a})$, tedy i $\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(\bar{a})$. □

Podívejme se nyní na to, jak to vypadá s eliminací kvantifikátorů v jednotlivých teoriích:

3.3 Eliminace kvantifikátorů v $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$

Označme $\overline{m} = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{\text{m-krát}}$.

Eliminace kvantifikátorů v $\mathbb{N}$

Věta 4. *Je-li T libovolná teorie v jazyce $\mathcal{L}_{\mathbf{OR}}$ splňující $\mathbb{N} \models T$, pak T nepřipouští eliminaci kvantifikátorů.*

Důkaz. Předpokládejme, že nějaká teorie T přirozených čísel v jazyce $\mathcal{L}_{\mathbf{OR}}$ umožňuje eliminaci kvantifikátorů. Všechny formule s jednou volnou proměnnou x jsou pak v této teorii ekvivalentní booleovské kombinaci formulí $t(x) = s(x)$ a $t(x) < s(x)$, kde t a s jsou nějaké termy (polynomy).
Výraz $t(x) \neq s(x)$ je ekvivalentní s $t(x) > s(x) \vee s(x) > t(x)$.
Výraz $\neg(t(x) < s(x))$ je ekvivalentní s $s(x) < t(x) \vee t(x) = s(x)$.

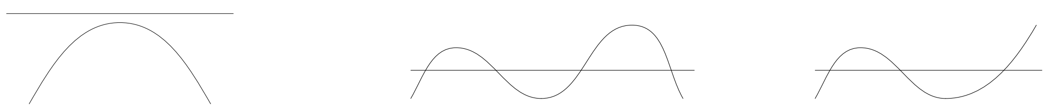
Uvažovanou formuli tedy můžeme zapsat bez negace.

Podívejme se nyní na vztah $s(x) < t(x)$ (jež je v celých číslech ekvivalentní vztahu $0 < t(x) - s(x)0$).
Z obecné podoby grafů polynomů $t(x) - s(x)$ snadno nahlédneme, že mohou nastat pouze tyto možnosti:

1. Uvedený vztah není splněn vůbec (viz obr.3.1). Pak je ekvivalentní $x \neq x$.

2. Uvedený vztah splňuje pouze konečně mnoho přirozených čísel (viz obr. 3.1). Pak je ekvivalentní $x = \overline{m}_1 \vee x = \overline{m}_2 \vee \ldots \vee x = \overline{m}_n$.

3. Uvedený vztah splňuje jistá konečná množina přirozených čísel menších nebo rovných nějakému přirozenému číslu $\overline{m}$ a všechna čísla větší než $\overline{m}$ (viz obr.3.1). Pak je ekvivalentní $x > \overline{m} \vee x = \overline{m}_1 \vee \ldots \vee x = \overline{m}_n$.



1: Vztah není splněn | 2: Konečně mnoho řešení | 3: Nekonečně mnoho řešení

Obrázek 3.1: Graf $t(x) - s(x)$ a řešení nerovnosti $t(x) - s(x) > 0$

V případě formule $s(x) = t(x)$ (jež je ekvivalentní s $t(x) - s(x) = 0$) víme, že v každém netriviálním případě má nejvýše konečně mnoho řešení. Libovolná formule s jednou volnou proměnnou x je tedy v T ekvivalentní nějaké pozitivní booleovské kombinaci formulí tvaru $x = \overline{k}$ a $x > \overline{l}$, kde k a l jsou přirozená čísla (pozitivní booleovská kombinace je booleovská kombinace bez negací).

Formule $\varphi(x) = (\exists y)x = y + y$ (x je sudé) však takovéto kombinaci ekvivalentní není, což je spor. Žádná $\mathcal{L}_{\mathbf{OR}}$ teorie, jejímž modelem je $\mathbb{N}$, tedy nepřipouští eliminaci kvantifikátorů. $\square$

V $\mathbb{N}$ lze dokonce formulí $(x \neq 1) \wedge (\forall k)(\forall l)(x = k \cdot l \rightarrow (k = x \vee k = 1))$ definovat prvočísla.

Struktura definovatelných množin v $\mathbb{N}$ je ve skutečnosti velice komplikovaná.

Eliminace kvantifikátorů v $\mathbb{Z}$

Věta 5. *Je-li T libovolná teorie v jazyce $\mathcal{L}_{\mathbf{OR}}$ splňující $\mathbb{Z} \models T$, pak T nepřipouští eliminaci kvantifikátorů.*

Důkaz. Uvažme formuli $(\exists y)x = y + y$ (x je sudé). Stejný argument jako v případě $\mathbb{N}$ pak ukazuje, že žádná $\mathcal{L}_{\mathbf{OR}}$-teorie, jejímž modelem je $\mathbb{Z}$, nepřipouští eliminaci kvantifikátorů. □

I v $\mathbb{Z}$ lze definovat prvočísla: Označme $\psi(x)$ formuli $x > 0$ (x je přirozené číslo). Příkladem formule, která platí pouze pro prvočísla, pak je: $\varphi(x) =$

$$\psi(x) \wedge (x \neq 1) \wedge (\forall k)(\forall l)((\psi(k) \wedge \psi(l)) \rightarrow (x = k \cdot l \rightarrow (k = x \vee k = 1))).$$

Struktura definovatelných množin v $\mathbb{Z}$ je tedy alespoň tak komplikovaná jako struktura definovatelných množin v $\mathbb{N}$.

Eliminace kvantifikátorů v $\mathbb{Q}$

Věta 6. *Nechť T je libovolná teorie v jazyce $\mathcal{L}_{\mathbf{OR}}$ či $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}$ splňující $\mathbb{Q} \models T$, pak T nepřipouští eliminaci kvantifikátorů.*

Důkaz. Podobně jako v případě $\mathbb{N}$ ukážeme, že pokud nějaká $\mathcal{L}_{\mathbf{OR}}$-teorie, jejímž modelem je $\mathbb{Q}$, připouští eliminaci kvantifikátorů, pak jsou všechny definovatelné podmnožiny $\mathbb{Q}$ (konečné) booleovské kombinace množin tvaru $\{q\}, (-\infty, r), (q, r)$ a (q, ∞), pro nějaká reálná čísla q, r. (Jediný rozdíl oproti úvaze v $\mathbb{N}$ je, že množina $\{x; 0 < s(x) - t(x)\}$ (tj. množina definovaná formulí $t(x) < s(x)$) je nějaké konečné (eventuálně i prázdné) sjednocení množin tvaru (q, r), $(-\infty, r)$ a (q, ∞), kde q, r jsou nějaká reálná čísla.)
Julie Robinson dokázala, že v $\mathbb{Q}$ jsou definovatelná celá čísla (viz [4]), která však takovouto kombinací nejsou. Žádná $\mathcal{L}_{\mathbf{OR}}$-teorie, jejímž modelem je $\mathbb{Q}$, tedy nepřipouští eliminaci kvantifikátorů. □

I v $\mathbb{Q}$ lze definovat prvočísla: Označme $\chi(x)$ formuli, která v $\mathbb{Q}$ definuje celá čísla, formule $\psi(x) = \chi(x) \wedge (x > 0)$ pak definuje přirozená čísla.

Formule $\varphi(x) =$

$$\psi(x) \wedge (x \neq 1) \wedge (\forall k)(\forall l)((\psi(k) \wedge \psi(l)) \rightarrow (x = k \cdot l \rightarrow (k = x \vee k = 1)))$$

pak platí právě tehdy, když x je prvočíslo.

Struktura definovatelných množin v $\mathbb{Q}$ je velice složitá.

Kapitola 4

Algebraicky uzavřená tělesa

Ve světle výsledků předchozí kapitoly je překvapující, že teorie ACF a RCF eliminaci kvantifikátorů umožňují. Podívejme se nyní na to, jak to v jednotlivých teoriích vypadá.
Následující kapitoly využívají některých základních algebraických poznatků a definic, pokud je čtenář nezná, doporučuji, ať se s nimi seznámí např. v Langově algebře[1].
Větší část důkazů je převzata a upravena z Markerova článku[2].

4.1 Vlastnosti teorie ACF

Lemma 4. *Každý model teorie ACF je nekonečný.*

Důkaz. Je-li nějaký model F teorie ACF konečný, označme $a_1, \dots a_n$ jeho prvky.
Pak ale nekonstantní polynom $(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) + 1$ nemá v F kořen, což je spor s algebraickou uzavřeností tělesa F. $\square$

Věta 7. *Teorie ACF připouští eliminaci kvantifikátorů.*

Důkaz. Nechť F je těleso a K a L jsou jeho algebraicky uzavřená nadtělesa. Je-li $\varphi(y, \bar{x})$ otevřená formule, $b \in K$, $\bar{a} \in F$ a platí $K \models \varphi(b, \bar{a})$, chceme ukázat, že platí $L \models (\exists y)\varphi(y, \bar{a})$. Existují polynomy $f_{i,j}$, $g_{i,j} \in F[X]$ takové, že $\varphi(y, \bar{a})$ je ekvivalentní s $\bigvee_{i=1}^{l} \left(\bigwedge_{j=1}^{m} f_{i,j}(y) = 0 \wedge \bigwedge_{j=1}^{n} g_{i,j}(y) \neq 0 \right)$. Tedy pro nějaké i musí platit $K \models \bigwedge_{j=1}^{m} f_{i,j}(y) = 0 \wedge \bigwedge_{j=1}^{n} g_{i,j}(y) \neq 0$. Nechť A je algebraický uzávěr F. Na A se můžeme dívat jako na podtěleso K i L. Jestliže libovolný z polynomů $f_{i,j}$ pro $j = 1, \dots m$ není identicky nulový, pak

$b \in A \subseteq L$, neboť A je algebraický uzávěr F. Jinak, jelikož $\bigwedge_{j=1}^{n} g_{i,j}(b) \neq 0$, má $g_{i,j}(X) = 0$ pouze konečně mnoho řešení. Nechť C je množina všech c_s takových, že pro nějaké $j = 1, \ldots m$ platí $g_{i,j}(c_s) = 0$. Pak pro libovolný prvek $d \in L \setminus C$ platí $L \models \varphi(d, \bar{a})$. (Takový prvek d existuje, protože každé algebraicky uzavřené těleso je nekonečné (viz lemma 4) a množina C je konečná.) □

Věta 8. *Nechť p je libovolné prvočíslo či nula, poté je teorie ACF_p úplná.*

Důkaz. Nechť p je libovolné prvočíslo či nula. Víme již, že všechny modely ACF_p jsou nekonečné.

Algebraicky uzavřená tělesa jsou až na izomorfismus jednoznačně určena svou charakteristikou a stupněm transcendence, tedy ACF_p je κ-kategorická pro každé $\kappa \geq \aleph_1$.

Dle Vaughtova testu je tedy ACF_p úplná. □

Věta 9. *Nechť φ je formule jazyka $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}$, poté jsou následující podmínky ekvivalentní:*

1. *$ACF_0 \models \varphi$,*
2. *$\mathbb{C} \models \varphi$,*
3. *Formule φ platí v každém algebraicky uzavřeném tělese charakteristiky 0.*
4. *Formule φ platí v nějakém algebraicky uzavřeném tělese charakteristiky 0.*
5. *Existuje nekonečně mnoho prvočísel takových, že φ platí v nějakém algebraicky uzavřeném tělese charakteristiky p.*
6. *Existuje přirozené číslo m takové, že φ platí v každém algebraicky uzavřeném tělese charakteristiky větší než m.*

Důkaz. Ekvivalence prvních čtyř bodů plyne z toho, že teorie ACF_0 je úplná.
1⇒6: Předpokládejme, že platí $\mathrm{ACF}_0 \models \varphi$. Tedy dle věty o úplnosti existuje důkaz φ z axiomů teorie ACF_0. Důkaz je konečná posloupnost formulí, využívá tedy jen konečně mnoho axiomů teorie ACF_0, speciálně využívá pouze konečně mnoho axiomů $\neg\mathrm{A}p$. Nechť m je největší prvočíslo takové, že axiom $\neg\mathrm{A}m$ se objevuje v důkazu φ. Pak pro každé $p > m$ platí $\mathrm{ACF}_p \models \varphi$.
6⇒5: Toto tvrzení je zřejmé, neboť prvočísel je nekonečně mnoho.

5⇒2: Předpokládejme, že $\mathrm{ACF}_0 \not\models \varphi$. Z úplnosti ACF_0 plyne, že $\mathrm{ACF}_0 \models \neg\varphi$. Podobně jako v případě (1⇒6) ukážeme, že existuje číslo m takové, že $\mathrm{ACF}_p \models \neg\varphi$ pro všechna prvočísla $p > m$, takže 5 neplatí. $\square$

Věta 10. *Nechť F je prosté polynomiální zobrazení $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Pak F je na.*

Důkaz. Označme $\overline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ Nechť $(F_1(\overline{X}), F_2(\overline{X}), \ldots F_n(\overline{X}))$ je protipříklad. Označme $d = \max\{\deg F_i | i = 1, \ldots, n\}$. Existuje $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}$-sentence $\Phi_{n,d}$ taková, že pro každé těleso T platí $T \models \Phi_{n,d}$ právě tehdy, když každé prosté polynomiální zobrazení z K^n do K^n, která má v každé složce polynom nejvýše d-tého stupně, je surjektivní. (Polynomy stupně nejvýše d s koeficienty v $\mathbb{C}$ totiž umíme v jazyce $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}$ popsat. Např. přes všechny polynomy stupně nejvýše 2 můžeme kvantifikovat pomocí $(\forall a)(\forall b)(\forall c)ax^2 + bx + c$.)

Je-li L konečné těleso, pak zjevně platí $L \models \Phi_{n,d}$. Tedy $\Phi_{n,d}$ platí v libovolné rostoucí posloupnosti konečných těles. Z toho plyne, že $\Phi_{n,d}$ platí pro algebraický uzávěr libovolného konečného tělesa. Tedy $\mathbb{C} \models \Phi_{n,d}$, což je spor. $\square$

4.2 Popis definovatelných množin

Věta 11. *Nechť F je algebraicky uzavřené těleso.*

1. *Je-li $F \subseteq A$ definovatelná množina, pak buď X, nebo $F \setminus X$ je konečná množina (teorie ACF je silně minimální).*

2. *Nechť $f : F \to F$ je definovatelná funkce. Má-li F charakteristiku 0, existuje racionální funkce g taková, že $f(x) = g(x)$ s výjimkou nejvýše konečně mnoha bodů. Má-li F charakteristiku p, existuje racionální funkce g a $n \geq 0$ taková, že $f(x) = g(x)^{1/p^n}$ s výjimkou nejvýše konečně mnoha bodů.*

Důkaz. 1:ACF připouští eliminaci kvantifikátorů, tedy X je booleovskou kombinací množin tvaru $\{x : f(x) = 0\}$, kde f je nějaký polynom. Polynomy mají pouze konečný počet kořenů, tedy množiny $\{x : f(x) = 0\}$ jsou konečné.
2: Předpokládejme, že F má charakteristiku 0 (případ $p > 0$ se vyřeší obdobně). Nechť L je libovolné elementární rozšíření F a $a \in L \setminus K$. Je-li σ libovolný automorfismus L zachovávající $F(a)$ pak také $\sigma(f(a)) = f(a)$, tedy $f(a) \in F(a)$, tedy existuje racionální funkce $g \in F(X)$ taková, že platí

$f(a) = g(a)$. Množina $M = \{x \in F : f(x) = g(x)\}$ je dle 1 buď konečná, nebo její doplněk je konečný. Má-li velikost N, existuje sentence vyjadřující, že M má právě N prvků. Tato sentence platí v L, a tudíž i v F (neboť L elementárně rozšiřuje F). To ale znamená, že L neobsahuje žádné nové prvky této množiny, což je spor. Tedy $f(x) = g(x)$ s výjimkou nejvýše konečně mnoha bodů. □

Věta 12. *Nechť p je libovolné prvočíslo, či nula, poté je teorie ACF_p úplná, rozhodnutelná, silně minimální, modelově úplná a připouští eliminaci kvantifikátorů.*

Důkaz. Jelikož množiny axiomů daných teorií jsou algoritmicky popsatelné (rekurzivně rozhodnutelné), plyne rozhodnutelnost teorií z úplnosti. Zbylá tvrzení plynou z dřívějších vět. □

4.3 Aplikace v algebře

Věta 13 (Nullstellensatz)**.** *Je-li F algebraicky uzavřené těleso a $P \subsetneq F[X_1, \ldots, X_n]$ prvoideál, pak $V_F(P) \neq \emptyset$.*

Důkaz. Poznamenávám, že V_F značí vrchol daného prvoideálu, tj. množinu všech x z F takových, že pro libovolný polynom f z P platí $f(x) = 0$.
Nechť A je algebraický uzávěr $F[X_1, \ldots, X_n]/P$. Z modelové úplnosti plyne, že A je elementárním rozšířením F. Dle Hilbertovy věty o bázi je P konečně generovaný. Můžeme tedy předpokládát, že $P = \langle f_1, \ldots f_m \rangle$.
Sentence

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{i=0}^{m} f_i(x_1, \ldots x_n) = 0$$

platí v A, neboť n-tice $(X_1/P, \ldots X_n/P)$ ji dosvědčuje. Z modelové úplnosti pak plyne, že tato sentence platí i v F.

□

Využijeme-li faktu, že $\sqrt{I}$ je konečným průnikem prvoideálů, můžeme předchozí důkaz modifikovat a dokázat následující tvrzení:

Věta 14. *Je-li F algebraicky uzavřené těleso, I ideál v $F[\bar{X}]$ a $1 \notin \sqrt{I}$, pak platí $V_F(I) \neq 0$.*

Kapitola 5

Reálně uzavřená tělesa

5.1 Vlastnosti teorie RCF

Věta 15. *Teorie RCF připouští eliminaci kvantifikátorů.*

Důkaz. Budeme postupovat podobně jako v předchozím případě a využijeme toho, že podílové těleso uspořádaného oboru integrity má jednoznačně určený reálný uzávěr. Nechť F_0 a F_1 jsou modely RCF a buď $(R, <)$ jejich společná podstruktura. $(R, <)$ je uspořádaný obor integrity, jeho podílové těleso má tedy jednoznačně určený reálný uzávěr $\mathcal{A}$. Můžeme předpokládat, že $(A, <)$ je podstrukturou F_0 i F_1. Nechť $\varphi(y, \bar{x})$ je libovolná otevřená formule, $\bar{a} \in R$, $b \in F_0$. Platí-li $F_0 \models \varphi(b, \bar{a})$, ukážeme, že platí $F_1 \models (\exists y)\varphi(y, \bar{a})$. K tomu stačí ukázat $\mathcal{A} \models (\exists y)\varphi(y, \bar{a})$.

Využijeme-li vlastností uspořádání, můžeme podobně jako v důkazu eliminace kvantifikátorů pro ACF předpokládat, že $\varphi(y, \bar{a})$ je tvaru

$$\bigvee_{i=1}^{l} \left(\bigwedge_{j=1}^{m} f_{i,j}(y) = 0 \wedge \bigwedge_{j=1}^{n} g_{i,j}(y) > 0 \right),$$

(atomickou formuli tvaru $t \neq 0$ lze nahradit pomocí $t^2 > 0$, atomická formule tvaru $t < 0$ je ekvivalentní $-t > 0$).
Pro nějaké i tedy platí $\bigwedge_{j=1}^{m} f_{i,j}(b) = 0 \wedge \bigwedge_{j=1}^{n} g_{i,j}(b) > 0$. Je-li pro toto i nějaké z $f_{i,j}$ nenulové, je b algebraické nad R a tudíž $b \in L$. Jsou-li naopak pro tato i všechna $f_{i,j}$ nulová, platí $F_0 \models \bigwedge_{i=1}^{m} g_i(b) > 0$. Protože $\mathcal{A}$ je reálně uzavřené těleso, každé $g_{i,j}$ pro $j = 1, \dots m$ je součinem členů tvaru $X - c$ a $X^2 + pX + q$, kde $p^2 - 4q < 0$. Lineární členy mění znaménko v c, naproti tomu kvadratické členy znaménko nemění. Existují tedy $\alpha_1, \dots, \alpha_l \in L \cup \{-\infty\}$

a $\beta_1, \dots, \beta_l \in A \cup \{+\infty\}$ takové, že pro $c \in F_0$ platí $F_0 \models \bigwedge_{i=1}^m g_i(c) > 0$ právě tehdy, když $\bigvee_{k=1}^l \alpha_k < c < \beta_k$.

Jelikož $F_0 \models \varphi(b, \bar{a})$, platí pro nějaké k vztah $\alpha_k < b < \beta_k$, pak ovšem $\mathcal{A} \models \varphi\left(\frac{\alpha_k+\beta_k}{2}, \bar{a}\right)$ (případy, kdy je příslušné α či β rovno nekonečnu, ošetříme zřejmým způsobem). □

5.2 Popis definovatelných množin

Věta 16. *Nechť F je libovolný model RCF a X je v něm definovatelná množina. Poté X je konečným sjednocením intervalů a jednotlivých bodů.*

Důkaz. Je-li F libovolné těleso a $f \in F[X]$, pak $\{x : f(x) > 0\}$ je sjednocením intervalů. Díky eliminaci kvantifikátorů jsou definovatelné množiny (konečné) booleovské kombinace takovýchto množin a jednotlivých bodů. □

Věta 17. *Teorie RCF je úplná, modelově úplná, rozhodnutelná, o-minimální a připouští eliminaci kvantifikátorů.*

Důkaz. Modelová úplnost plyne z eliminace kvantifikátorů. Dále každé reálně uzavřené těleso obsahuje $(\mathbb{Q}, <)$. Reálný uzávěr $\mathbb{Q}$ je tedy podstrukturou každého reálně uzavřeného tělesa. Z modelové úplnosti plyne, že tato podstruktura je elementární, tedy RCF je úplná. Jelikož RCF je rekurzivně axiomatizovatelná a úplná, je rozhodnutelná, o-minimalita plyne z předchozí věty. □

5.3 Aplikace v algebře

Věta 18 (Artin-Schreier)**.** *Nechť $(F, <)$ je uspořádané těleso. Poté jsou následující podmínky ekvivalentní:*

1. *F je reálně uzavřené*
2. *$F(i)$ je algebraicky uzavřené (klademe-li $i = \sqrt{-1}$)*
3. *Je-li $p(X) \in F(X)$, $a, b \in F$ a platí-li $a < b$ a $p(a) < 0 < p(b)$, pak existuje $c \in F$, že platí $a < c < b$ a $f(c) = 0$.*
4. *Pro každé $a \in F$ je buď a či $-a$ čtverec a každý polynom lichého stupně má kořen.*

Důkaz. Tvrzení je zřejmé z úplnosti RCF a ACF_0 a toho, že platí pro $\mathbb{R}$ (v případě bodu 2 platí pro dvojici $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$). $\square$

Defininice 2. *Říkáme, že množina $X \subset F^n$ je* ***semialgebraická****, jestliže je konečnou booleovskou kombinací množin tvaru*
$\{\bar{x} : f(\bar{x}) > 0\}$ a $\{\bar{x} : f(\bar{x}) = 0\}$, kde $f \in F[\bar{X}]$.

Poznámka: Zřejmě jsou semialgebraické množiny přesně ty, které jdou definovat formulemi bez kvantifikátorů.

Věta 19 (Tarski-Seidenberg)**.** *Nechť F je reálně uzavřené těleso, pak projekce semialgebraické množiny je semialgebraická množina.*

Důkaz. Jelikož RCF připouští eliminaci kvantifikátorů, je tvrzení zřejmé z definice semialgebraických množin a charakterizace definovatelných množin. $\square$

Věta 20. *Je-li F reálně uzavřené těleso, je uzávěr semialgebraické množiny semialgebraický.*

Důkaz. Označme $\varrho(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2}$.
Uzávěr množiny A je tedy množina $\{\bar{x} : \forall \epsilon > 0 (\exists \bar{y})(\bar{y} \in A \wedge \varrho(\bar{x}, \bar{y}) < \epsilon)\}$, která je semialgebraická díky tomu, že RCF má eliminaci kvantifikátorů. $\square$

Věta 21. *Nechť F je reálně uzavřené těleso. Jestliže $X \subset F^n$ je uzavřená omezená semialgebraická množina, a $f : X \to F^n$ je spojitá semialgebraická funkce, pak i $f(X)$ je uzavřená a omezená.*

Důkaz. Jestliže $F = \mathbb{R}$ tvrzení platí, neboť X je kompaktní a spojitý obraz kompaktní množiny je opět kompaktní. Nechť tedy $\varphi(\bar{z}, \bar{a})$ definuje množinu X a $\psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{b})$ definuje funkci f. Existuje $\mathcal{L}_{\mathbf{OR}}$ sentence Ψ tvrdící, že pro každé $\bar{\alpha}$ a $\bar{\beta}$ platí: Je-li $Y = \varphi(\bar{z}, \bar{\alpha})$ uzavřená omezená množina a $\psi(\bar{x}, \bar{y}, \beta)$ definuje spojitou funkci s definičním oborem Y, poté je obraz Y při této funkci uzavřený a omezený. Jelikož tato sentence platí v $\mathbb{R}$, plyne z úplnosti RCF, že platí v každém reálně uzavřeném tělese. $\square$

Defininice 3. *Nechť $f(X_1, \dots X_n)$ je funkce na reálně uzavřeném tělese F. Říkáme, že f je* ***pozitivně semidefinitní****, jestliže pro každé $\bar{a} \in F^n$ platí $f(\bar{a}) \geq 0$.*

Věta 22 (Artin). *Nechť f je pozitivně semidefinitní racionální funkce na reálně uzavřeném tělese F, poté lze f zapsat jako sumu čtverců racionálních funkcí na F.*

Důkaz. Využijeme následující algebraické lemma:

Je-li H uspořádané těleso, ve kterém -1 a a nejsou součtem čtverců, pak existuje uspořádání H, při kterém je a záporné (viz [1]).

Předpokládejme, že $f(X_1, \dots X_n)$ je pozitivně semidefinitní racionální funkce, která není součtem čtverců. Dle lemmatu existuje uspořádání $<$ tělesa $F(\bar{X})$, ve kterém je $f < 0$.
Označme K reálný uzávěr uspořádaného tělesa $(F(\bar{X}), <)$. Zjevně platí $K \models \exists \bar{y} f(\bar{y}) < 0$. Díky modelové úplnosti tato sentence platí i v F, což je ve sporu s předpokladem, že f je pozitivně semidefinitní. $\square$

Stejně se dokáže reálná verze Nulstellensatz:

Věta 23 (Dubois-Reisler). *Nechť F je reálně uzavřené těleso a I je ideál v $F[\bar{X}]$. Poté $I = I(V(I))$ právě tehdy, když pro každé n platí*

$$a_1, \dots a_n \in I \leftrightarrow \sum a_i^2 \in I.$$

Kapitola 6

Závěr

Ukázali jsme, že eliminace kvantifikátorů je velice silný pojem, ne všechny teorie ji však mají. Otázkou zůstává, kdy lze rozšířit danou teorii a její jazyk tak, aby vzniklá teorie měla eliminaci kvantifikátorů a přitom jsme dovedli říct něco smysluplného o definovatelných množinách. Rovněž nás zajímá, jak takové rozšíření vypadá.
V případě $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ je složitá struktura definovatelných množin způsobena tím, že v daných strukturách jdou definovat přirozená čísla. Otázkou zůstává, jestli je tato podmínka i nutná (tj. pokud má $\mathcal{L}_{\mathbf{OR}}$-struktura v nějakém smyslu složitou strukturu definovatelných množin, jestli v ní už nutně musí jít definovat přirozená čísla).

Literatura

[1] Lang S.: *Algebra*, Addison-Wesley, 1971

[2] Marker D., Haskell D., Pillay A., Steinhorn C.: *Model Theory of Fields: Introduction to Model Theory*, preprint Cambridge University Press

[3] Marker D., Messmer M., Pillay A.: *Introduction to Model Theory: Introduction to Model Theory of Fields*, Springer Lecture Notes in Logic 5, Springer Verlag, 1996

[4] Robinson J.: Definability and Decision Problems in Arithmetic,*The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 14, No. 2., (Jun., 1949), pp. 98-114

[5] Švejdar, V.: *Logika - neúplnost, složitost a nutnost*, Academia, Praha, 2002, str. 156-169, 210