

Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Adam Kosík

### Vizualizace numerických řešení parciálních diferenciálních rovnic pomocí balíku PGPLOT

Katedra numerické matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Vít Dolejší, Ph.D.  
Studijní program: Matematika, obor obecná matematika

2008

Děkuji vedoucímu práce panu Doc. RNDr. Vítu Dolejšimu, Ph.D. a děkuji také svým rodičům.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 6. 8. 2008

Adam Kosík

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Teorie aproximace</b>	<b>9</b>
2.1	Základní pojmy . . . . .	9
2.2	Po částech konstantní aproximace . . . . .	16
2.3	Po částech lineární aproximace . . . . .	19
2.4	Odhady chyb . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Implementace</b>	<b>33</b>
3.1	Po částech konstantní aproximace . . . . .	33
3.2	Po částech lineární aproximace . . . . .	37
3.3	Program aproximace řešení . . . . .	40
3.4	Program vizualizace . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Numerické experimenty</b>	<b>45</b>
	<b>Literatura</b>	<b>65</b>

Název práce: Vizualizace numerických řešení parciálních diferenciálních rovnic pomocí balíku PGPLOT

Autor: Adam Kosík

Katedra: Katedra numerické matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Vít Dolejší, Ph.D.

e-mail vedoucího: Vit.Dolejsi@mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci se zabýváme způsobem vizualizace numerických řešení parciálních diferenciálních rovnic na omezené oblasti v  $\mathbb{R}^2$ . Numerická řešení získáme pomocí vhodných numerických metod ve tvaru nespojitých po částech polynomiálních funkcí. Používáme dva typy vizualizace jednak pomocí barevných diagramů a dále pomocí isokřivek. Tyto vizualizace umíme jednoduše aplikovat na po částech konstantní funkce resp. po částech lineární funkce. Pro numerická řešení ve tvaru polynomiálních funkcí vyššího stupně navrhneme vhodné algoritmy po částech konstantní resp. po částech lineární aproximace. Navržené algoritmy a oba způsoby vizualizace implementujeme. K implementaci použijeme balík grafických knihoven PGPLOT. Na několika obrázcích prezentujeme ukázky vizualizace.

Klíčová slova: vizualizace numerického řešení, numerické řešení parciálních diferenciálních rovnic, po částech polynomiální aproximace, PGPLOT

Title: Visualization of numerical results of partial differential equations with the aid of the package PGPLOT

Author: Adam Kosík

Department: Department of Numerical Mathematics

Supervisor: Doc. RNDr. Vít Dolejší Ph.D.

Supervisor's e-mail address: Vit.Dolejsi@mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we study visualization techniques of numerical results of partial differential equations on a bounded domain in  $\mathbb{R}^2$ . We obtain the numerical results with the aid of the efficient numerical methods as the discontinuous piecewise polynomial functions. We use two visualization techniques, the first with the aid of color maps and the second with the aid of the isolines. The visualizations we can simply apply on the piecewise constant functions or on the piecewise linear functions.

For the polynomial functions of the higher degree we propose efficient algorithms for the piecewise constant and the piecewise linear approximation. We implement the proposed algorithms and both visualization techniques. We use for the implementation the graphics subroutine library PGPLOT. Several visualization examples are presented.

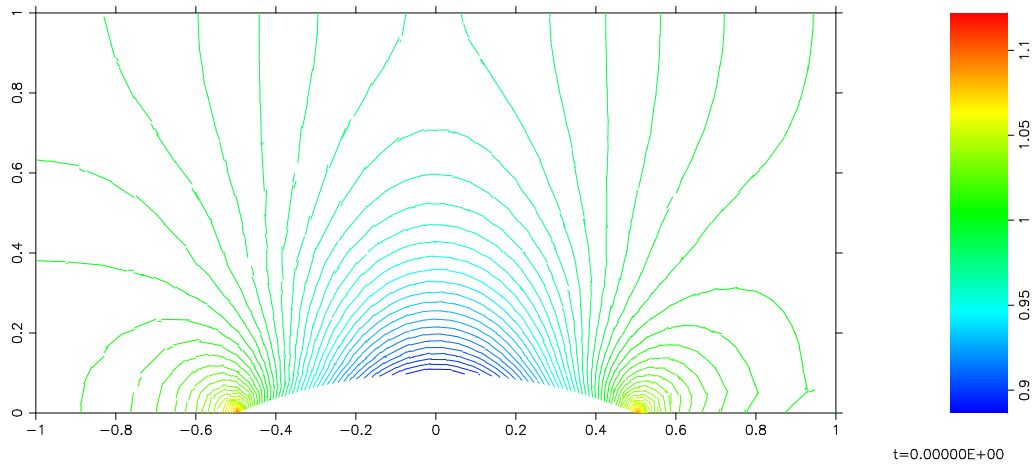
Keywords: visualization of the numerical results, numerical results of the partial differential equations, piecewise polynomial functions, PGPLOT

# Kapitola 1

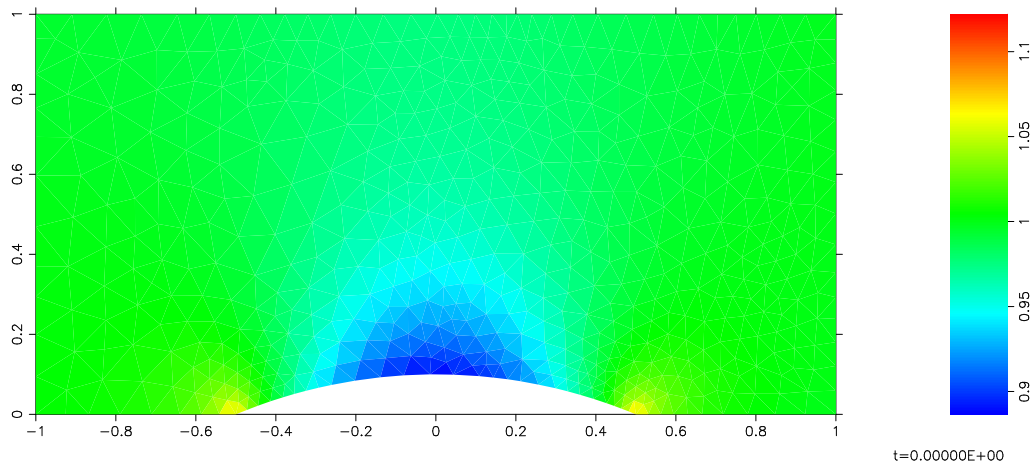
## Úvod

Řadu přírodních, technických či společenských jevů lze popsat pomocí soustavy parciálních diferenciálních rovnic. Uvedme příkladem proudění tekutin, akustiku, pružnost těles, elektromagnetické jevy nebo aplikace v ekonomii. Výpočtová matematika se zabývá numerickým řešením těchto soustav rovnic. Existuje několik různých metod zejména metoda konečných diferencí, metoda konečných prvků, metoda konečných objemů, spektrální metody a další. Většina těchto metod je založena na po částech polynomiální aproximaci. Tyto po částech polynomiální funkce jsou reprezentovány pomocí svých hodnot na jisté množině bodů. Výsledkem je tedy množství dat, která nedávají snadnou představu o získaném řešení, proto je potřeba získaná řešení vhodně vizualizovat např. pomocí isokřivek viz. obr.1.1 či barevných diagramů viz. obr.1.2.

Většina stávajícího softwaru např. TECPLOT [2] vizualizuje pouze po částech konstantní a spojitě po částech lineární aproximace. Pro po částech konstantní aproximace se používá vizualizace pomocí barevných diagramů. Barevný diagram získáme obarvením ploch, kde barvené spektrum odpovídá danému rozsahu hodnot. Pro po částech lineární aproximaci lze použít vizualizaci pomocí isokřivek. Na každém elementu spojíme dva body dané hodnoty isokřivky. Tyto dva způsoby vizualizace využívají vlastností grafického softwaru vyplnit polygon barvou a spojit dva body čarou. V poslední době se úspěšně rozvíjí také metody vyššího řádu, tj. metody vedoucí na po částech polynomiální řešení s polynomy stupně většího než 1, což vede k náročnosti na vizualizační software. V této práci se budeme zabývat vizualizací po částech polynomiálního řešení, které může být i s polynomy stupně vyššího než 1. Způsob vizualizace musí být dostatečně přesný a současně



Obrázek 1.1: Ukázka vizualizace numerického řešení pomocí isočar.



Obrázek 1.2: Ukázka vizualizace numerického řešení pomocí barevných diagramů.

dostatečně efektivní. Použijeme výše uvedené vizualizační techniky tak, aby zůstala přesnost a efektivita zachována.

Vizualizace je konečnou fází postupu řešení problému zadaného pomocí soustavy parciálních diferenciálních rovnic  $u \in V$ , kde  $V$  je prostor funkcí s normou  $\|\cdot\|_V$ . Předpokládáme, že pro zadaný problém existuje jednoznačné řešení. Numerické polynomiální řešení  $u_h \in V_h$  získané pomocí vhodných numerických metod aproximuje toto řešení.  $V_h$  je konečně dimensionální podprostor prostoru  $V$  po částech polynomiálních funkcí. Při této aproximaci se dopouštíme chyby  $\|u - u_h\|_V$ , kterou umíme v řadě případů odhadnout. Pro vizualizaci po částech polynomiálního řešení vyššího stupně musíme navrhnout další aproximaci numerického řešení, než přistoupíme k samotné vizualizaci. Získáme řešení  $u_{hc}$  z prostoru po částech konstantních funkcí a  $u_{hl}$  z prostoru po částech lineárních funkcí. Při těchto aproximacích se dopouštíme další chyby  $\|u_h - u_{hc}\|_V$  a  $\|u_h - u_{hl}\|_V$ , kterou se pokusíme odhadnout. Cílem této práce je tedy vizualizace po částech polynomiálních funkcí pomocí programu PGPLOT [1], které získáme numericky řešením soustav parciálních diferenciálních rovnic. Budeme se zabývat numerickým řešením v rovině na omezené oblasti, která je rozdělena pomocí trojúhelníků na konečný počet elementů. Na každém elementu je určen polynom daného stupně. Nepředpokládáme nutně, že je tato aproximace spojitá. Použijeme dva uvedené způsoby vizualizace pomocí barevných diagramů a pomocí isokřivek.

Vizualizaci pomocí barevných diagramů umíme snadno aplikovat na po částech konstantní řešení. Pomocí spektra barev obarvíme každý trojúhelník barvou příslušnou konstantní hodnotě na daném elementu. Pro obecné řešení pomocí polynomů vyššího stupně hledáme nejprve vhodnou po částech konstantní aproximaci. Vizualizaci pomocí isokřivek lze jednoduše aplikovat na po částech lineární řešení. Isokřivka spojuje body stejných hodnot. Snadno určíme na hranách elementu body určené hodnoty isokřivky a samotnou isokřivku získáme spojením těchto bodů. Pro obecně polynomiální řešení hledáme po částech lineární aproximaci.

V následující kapitole se věnujeme teorii aproximace. Podle získaných teoretických výsledků navrhujeme vhodné algoritmy pro přepočítání numerického řešení a algoritmy implementujeme. Takto získaná nová řešení nám dávají vstupní data pro samotnou vizualizaci, kterou budeme realizovat pomocí balíku grafických knihoven PGPLOT. Implementaci navržených metod aproximace po částech polynomiálních řešení a implementaci samotné vizualizace se věnujeme ve třetí kapitole. V závěru práce prezentujeme na několika obrázcích výsledky numerických experimentů.



# Kapitola 2

## Teorie aproximace

Jak jsme již uvedli v úvodu, v této kapitole navrhujeme metody aproximace numerických řešení ve tvaru po částech polynomiálních funkcí obecně vyššího stupně než vyžaduje způsob zvolené vizualizace. Oběma způsobům vizualizace se budeme věnovat zvláště v odstavcích této kapitoly. Začneme základními popisem problému. Připomeneme některé definice a některá tvrzení, jejichž pomocí hledáme optimální metody aproximace. Poslední odstavec této kapitoly věnujeme odhadům chyb.

### 2.1 Základní pojmy

Nejprve definujme několik základních pojmů, obecné zadání problému a příslušné prostory funkcí a jejich normy.

#### Lebesgueovy prostory

Nechť  $\Omega$  značí libovolnou Lebesgueovsky měřitelnou množinu v  $\mathbb{R}^n$ . Integrálem rozumíme Lebesgueův integrál. Řekneme, že dvě měřitelné funkce definované na  $\Omega$  jsou ekvivalentní, jestliže jsou různé nejvýše na množině míry nula. Pro  $p \in [1, \infty)$  značíme symbolem  $L^p(\Omega)$  lineární prostor všech (tříd ekvivalentních) funkcí měřitelných na  $\Omega$ , pro které platí

$$\int_{\Omega} |f|^p dx < \infty.$$

Prostor  $L^p(\Omega)$  je Banachův prostor s normou

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{1/p}.$$

## Definice problému a jeho řešení

Nechť  $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2$  je omezená oblast. Nechť  $u : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  představuje přesné řešení problému zadaného pomocí soustavy parciálních diferenciálních rovnic a příslušných okrajových podmínek:

Nechť  $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  a  $g : \partial\Omega \mapsto \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} Lu &= f, \quad \text{v } \Omega \\ Bu &= g, \quad \text{na } \partial\Omega, \end{aligned}$$

kde  $L$  a  $B$  jsou jisté diferenciální operátory reprezentující danou úlohu.

Dále předpokládáme, že  $u \in L^2(\Omega)$

Definovali jsme řešení  $u$  obecného problému zadaného pomocí soustavy diferenciálních rovnic. Najít analyticky řešení tohoto problému může být obecně velmi obtížné nebo i nemožné. Použitím vhodných numerických metod můžeme najít přibližné řešení  $u_h$ , na prostoru  $S_h$  po částech polynomiálních funkcí. Než přistoupíme k přesné definici prostoru  $S_h$  je třeba danou oblast rozdělit na menší podoblasti, v našem případě trojúhelníky.

V následujících dvou odstavcích zavedeme několik pojmů a uvedeme některá tvrzení z teorie konečných prvků viz. Ciarlet [3].

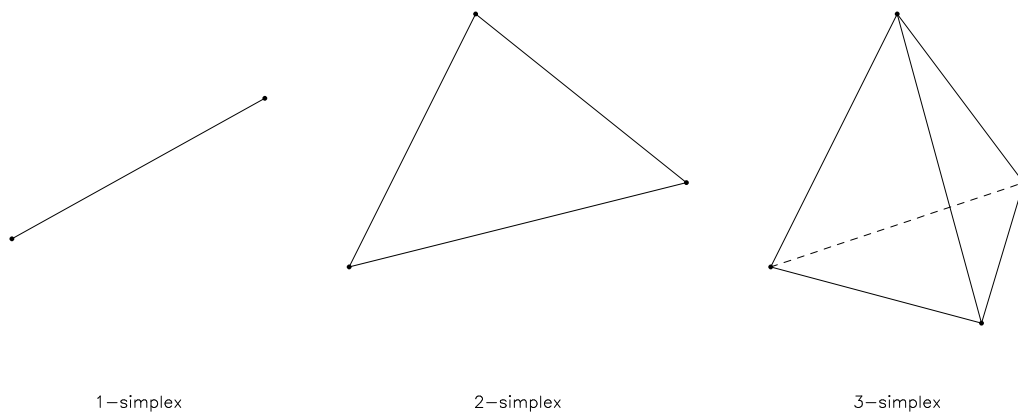
## Dělení oblasti a numerické řešení

Dělení uzavřené množiny  $\bar{\Omega}$  na konečný počet podmnožin  $K$ , které tvoří množinu  $T_h$  nazveme triangulací oblasti  $\Omega$ , jestliže splňuje vlastnosti:

- $\forall K \in T_h$  je uzavřená množina, vnitřek množiny  $K$  je neprázdný a souvislý.
- Hranice  $\partial K \forall K \in T_h$  je Lipschitzovsky spojitá.
- $\bar{\Omega} = \cup_{K \in T_h} K$
- Průnik vnitřků libovolných dvou množin z  $T_h$  je prázdný.

Nechť  $\xi_1, \dots, \xi_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\xi_j = (\xi_{ij})_{i=1}^n$ , jsou body v  $\mathbb{R}^n$  takové, že matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1n+1} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \dots & \xi_{2n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q\xi_{n1} & \xi_{n2} & \dots & \xi_{nn+1} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$



Obrázek 2.1: Příklady n-simplexů.

je regulární tj. body neleží v nadrovině. Řekneme, že konvexní obal  $K$  bodů  $(\xi_i)_{i=1}^{n+1}$  je n-simplex v  $\mathbb{R}^n$ . Body  $\xi_1, \dots, \xi_{n+1}$  nazveme jeho vrcholy.

Barycentrické souřadnice  $\lambda_j = \lambda_j(x)$ ,  $1 \leq j \leq n + 1$ , libovolného bodu  $x \in \mathbb{R}^n$ , definujeme jako jednoznačné řešení lineární soustavy

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n+1} \xi_{ij} \lambda_j = x_i, & 1 \leq i \leq n, \\ \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1. \end{cases}$$

Je-li  $n = 2$ , pak nechť  $\Omega_h$  značí polygonální aproximaci oblasti  $\Omega$ . Tzn. že hranice  $\partial\Omega_h$  oblasti  $\Omega_h$  se skládá z konečného počtu uzavřených po částech lineárních křivek. Pak můžeme definovat triangulaci  $T_h$  oblasti  $\Omega_h$  složenou z 2-simplexů takovou, že splňuje výše uvedené vlastnosti.

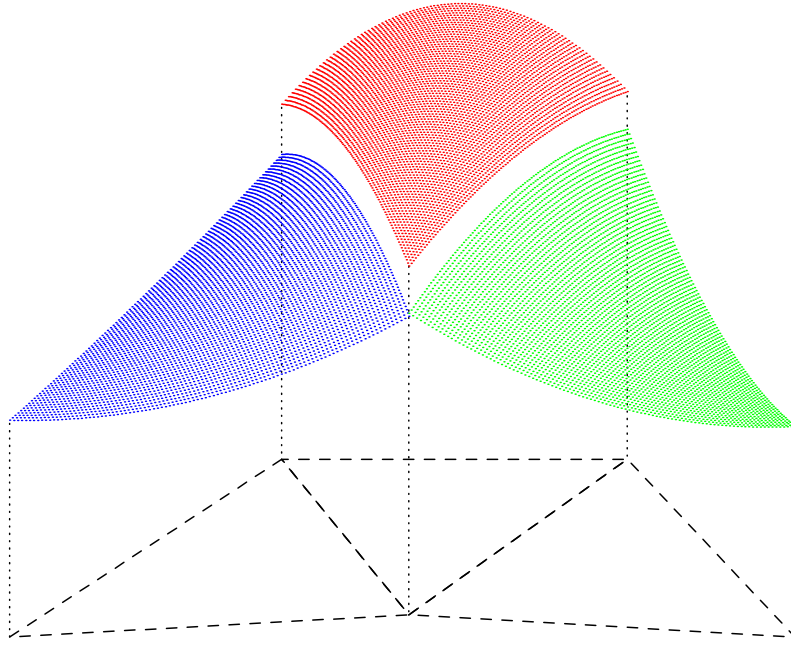
Nepředpokládáme další často používanou vlastnost triangulace, že průnik dvou různých trojúhelníků je buď hrana nebo vrchol nebo jsou disjunktní.

Buď dále  $h_K = \text{diam}(K)$  pro každý n-simplex  $K \in T_h$ ,  $h = \max_{K \in T_h} h_K$ .

Přibližné řešení  $u_h$  daného problému získané pomocí vhodných numerických metod hledáme v prostoru nespojitých po částech polynomiálních funkcí

$$S_h = \{v; v|_K \in P_k(K), \forall K \in T_h\},$$

kde  $P_k(K)$  značí prostor všech polynomů na  $K$  stupně  $\leq k$ .



Obrázek 2.2: Příklad nespojitého po částech polynomiálního řešení.

Každé takové po částech polynomiální řešení  $u_h$  bude na každém elementu  $K$  určeno svými hodnotami na množině  $L_k(K)$ , jak nám říká následující tvrzení.

Nechť  $K$  je  $n$ -simplex s vrcholy  $(\xi_i)_{i=1}^{n+1}$ . Pak pro dané  $k \in \mathbb{N}$  je každý polynom  $p \in P_k(K)$  jednoznačně určen svými hodnotami na množině

$$L_k(K) = \left\{ \begin{array}{l} x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \xi_i; \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i, \\ \lambda_i \in \left\{ 0, \frac{1}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1 \right\}, 1 \leq j \leq n+1 \end{array} \right\}.$$

Definujeme  $n$ -simplex stupně  $k$  jako trojici  $(K, P_K, \Sigma_K)$ :

$K$  je  $n$ -simplex s vrcholy  $\xi_1, \dots, \xi_{n+1}$

$P_K = P_k(K)$

$\Sigma_K = \{p(z); z \in L_k(K)\}$ , kterou budeme nazývat množinou stupňů volnosti.

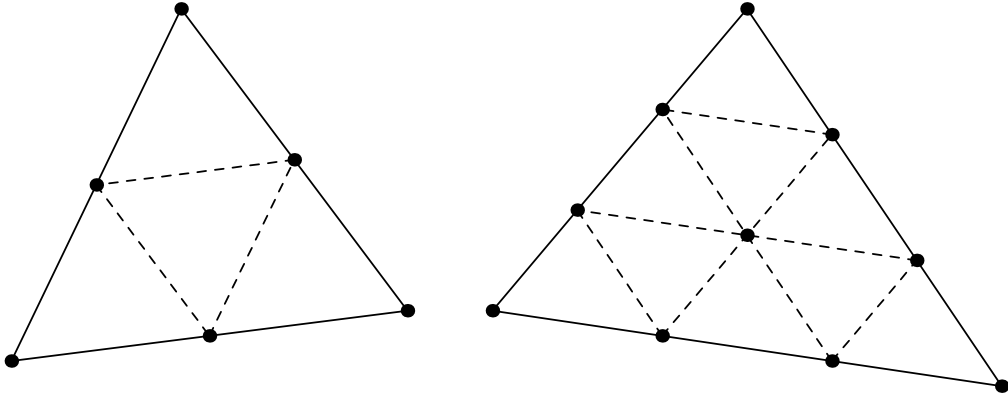
Definujeme báze funkce  $p_i \in P_K, i = 1, \dots, \dim(P_K)$  prostoru  $P_K$  tak, že

$$p_i(z_j) = \delta_{ij}, \quad j = 1, \dots, \dim(P_K).$$

Počet prvků množiny  $L_k(K)$  je roven dimenzi prostoru  $P_K$ . Platí tedy

$$p = \sum_{i=1}^{\dim(P_K)} p(z_i) p_i, \quad \forall p \in P_K.$$

Naším úkolem je vizualizace po částech polynomiálního řešení  $u_h$ . Předpo-



Obrázek 2.3: Množina  $L_2(K)$  a  $L_3(K)$ .

kládáme, že nám toto řešení bude dáno ve tvaru množiny dat tedy množiny hodnot polynomu a stupně polynomu na jednotlivých elementech dělení oblasti  $\Omega_h$ . Podobně nám bude dán soubor dat určující dělení oblasti  $\Omega_h$ . Abychom nemuseli pracovat s každým elementem zvlášť, hodí se nám následující tvrzení, která popisují možnost vycházet z jednoho tzv. referenčního elementu, v našem případě to bude obvykle jednotkový simplex, a pomocí afinních regulárních zobrazení konstruovat ostatní  $n$ -simplexy stupně  $k$  a popsat jejich vlastnosti.

### Jednotkový simplex

Předpokládejme, že máme danu množinu  $n$ -simplexů stupně  $k$ . Naším cílem je popsat ji co nejjednodušeji.

Zavedeme jednotkový  $n$ -simplex a pomocí jednotkového  $n$ -simplexu stupně  $k$  a afinních regulárních zobrazení můžeme definovat všechny ostatní  $n$ -simplexy stupně  $k$ .

Definujme jednotkový  $n$ -simplex  $\hat{K}$  určený vrcholy  $\hat{a}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $\hat{a}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $\hat{a}_n = (0, \dots, 0, 1)$ ,  $\hat{a}_{n+1} = (0, \dots, 0)$ .

Pro libovolný  $n$ -simplex stupně  $k$  ( $K, P_K, \Sigma_K$ ) existuje afinní zobrazení  $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ :

$$F(t) = Bt + b,$$

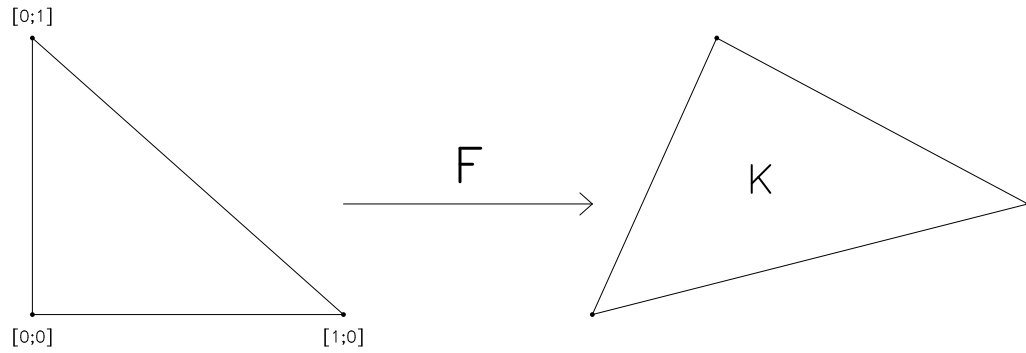
kde  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  je regulární matice,  $b \in \mathbb{R}^n$

takové, že

$$F(\hat{K}) = K,$$

$$P_K = \{p : K \mapsto \mathbb{R}; p = \hat{p} \cdot F^{-1}, \hat{p} \in P_{\hat{K}}\},$$

$$\Sigma_K = \{p(F(z)); z \in L_k(\hat{K})\}.$$



Obrázek 2.4: Afinní zobrazení  $F : \hat{K} \mapsto K$ .

Nechť  $K$  je libovolný  $n$ -simplex s vrcholy  $(\xi_i)_{i=1}^{n+1}$  a

$$\mathbf{B}_K = \begin{pmatrix} \xi_{11} - \xi_{1n+1} & \xi_{12} - \xi_{1n+1} & \dots & \xi_{1n} - \xi_{1n+1} \\ \xi_{21} - \xi_{2n+1} & \xi_{22} - \xi_{2n+1} & \dots & \xi_{2n} - \xi_{2n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{n1} - \xi_{nn+1} & \xi_{n2} - \xi_{nn+1} & \dots & \xi_{nn} - \xi_{nn+1} \end{pmatrix}.$$

$B_K$  je regulární a definujeme zobrazení  $F_K : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  vztahem  $F_K(t) = B_K t + b_K$ , kde  $b_K = (\xi_{1n+1}, \xi_{2n+1}, \dots, \xi_{nn+1})$ . Pak zobrazení  $F_K$  splňuje právě výše uvedené podmínky.

Uvedeme ještě větu o substituci a postup hledání minima funkce, tyto znalosti budeme dále nutně potřebovat.

## Věta o substituci

Při určování chyby se nám bude hodit následující tvrzení z teorie Lebesgueova integrálu.

Nechť  $G \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená množina a  $\phi : G \mapsto \mathbb{R}^m$  je zobrazení diferencovatelné v bodě  $x \in G$ . Matice lineárního zobrazení  $\phi'(t)$  se nazývá Jacobiho matice zobrazení  $\phi$  v bodě  $t$ .

Pro  $m = n$  je Jacobiho matice čtvercová a její determinant nazveme Jacobianem zobrazení  $\phi$  v bodě  $t$ . Značíme  $J_\phi(t)$ .

*Věta o substituci:* Nechť  $G \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená množina a  $\phi : G \mapsto \mathbb{R}^n$  je prosté regulární zobrazení. Nechť  $f$  je funkce na  $M \subset \phi(G)$ . Potom

$$\int_M f(x)dx = \int_{\phi^{-1}(M)} f(\phi(t))|J_\phi(t)|dt,$$

pokud alespoň jedna strana má smysl.

## Hledání minima funkce v $\mathbb{R}^n$

Při hledání minima funkce z  $\mathbb{R}^n$  do  $\mathbb{R}$  využijeme následujícího faktu.

Nechť  $G \in \mathbb{R}^d$  je otevřená konvexní množina a fce  $f : G \mapsto \mathbb{R}$  má v bodě  $a \in G$  nulové parciální derivace.

Je-li  $f$  ryze konvexní na  $G$ , pak v  $a$  má  $f$  ostré minimum na  $G$ .

Dále platí následující postačující podmínky pro vyšetření konvexity funkcí více proměnných:

Nechť  $f : G \mapsto \mathbb{R}$  má spojité druhé parciální derivace na konvexní otevřené množině  $G \in \mathbb{R}^d$  a Hessova matice je pozitivně definitní na  $G$ . Pak je  $f$  ryze konvexní na  $G$ .

Hessova matice je symetrická čtvercová matice druhých parciálních derivací. K vyšetření pozitivní definitnosti matice použijeme Silvestreho pravidlo:

Nechť  $Q = (a_{ij})_{i,j=1}^n$  je čtvercová matice typu  $n \times n$ . Uvažujme  $d_k$  determinanty čtvercových matic pro  $(a_{ij})_{i,j=1}^k$ , pro  $k = 1, \dots, n$ . Jsou-li všechny kladné, pak  $Q$  je pozitivně definitní.

## 2.2 Po částech konstantní aproximace

Máme dáno nějaké po částech polynomiální numerické řešení  $u_h$  na omezené oblasti  $\Omega_h$  a rádi bychom toto řešení vizualizovali pomocí barevných diagramů. Program PGPLOT, který použijeme k implementaci, umí vyplnit polygon barvou, kterou mu zadáme. Pokud máme dáno po částech konstantní řešení, přičemž oblast  $\Omega_h$  je rozdělena pomocí trojúhelníků, každé konstantní hodnotě přiřadíme určitou barvu spektra a každý trojúhelník vyplníme barvou příslušnou konstantní hodnotě na tomto trojúhelníku.

V případě, kdy dané numerické řešení sestává z polynomů vyššího stupně, potřebujeme navrhnout vhodnou metodu na převod nespojitého po částech polynomiálního řešení  $u_h$  na nespojité po částech konstantní řešení, které budeme značit  $u_{hc}$ . Jednoduchý způsob, jak převést polynom na konstantní funkci, je vzít aritmetický průměr hodnot ve vrcholech trojúhelníka. Pro případ lineární funkce se jedná o hodnotu v těžišti trojúhelníka.

Pokusíme se navrhnout podobně jednoduchou metodou aproximace, která bude srovnatelně efektivní v nárocích na dobu výpočtu a která se dá snadno implementovat. Další požadavkem bude dostatečná přesnost. Pokusíme se najít optimální aproximaci polynomiální funkce konstantní funkcí v  $L^2$ -normě.

Nechť je dána omezená oblast  $\Omega_h \subset \mathbb{R}^2$  a triangulace této oblasti, kterou značíme  $\mathcal{T}_h$  a nechť je dáno po částech polynomiální numerické řešení  $u_h$ . Nechť  $T$  je jeden z elementů triangulace  $\mathcal{T}_h$ ,  $u_h \in S_h$ , pak  $u_h|_T$  je polynom stupně  $k$  na  $K$ . Nechť  $u_{hc}$  je hledaná po částech konstantní funkce.  $u_{hc}|_T = c_T$ ,  $c_T \in \mathbb{R}$  je konstantní funkce na  $T$ . Hledáme takovou funkci  $u_{hc}$ , která aproximuje  $u_h$  na  $T$  s minimální chybou  $E_C$  v  $L_2$  normě. Definujeme chybu  $E_C(T)$ :

$$E_C(T) = \|u_h - u_{hc}\|_{L^2(T)}.$$

Hledáme tedy  $c_T \in \mathbb{R}$  tak, že:

$$c_T = \operatorname{argmin}_{\tilde{c} \in \mathbb{R}} \|u_h - \tilde{c}\|_{L^2(T)}$$

Nechť

$$e_T(\tilde{c}) = \|u_h - \tilde{c}\|_{L^2(T)}$$

značí funkci proměnné  $\tilde{c}$ .

$$\operatorname{argmin}_{\tilde{c} \in \mathbb{R}} e_T(\tilde{c}) = \operatorname{argmin}_{\tilde{c} \in \mathbb{R}} \|u_h - \tilde{c}\|_{L^2(T)} = \operatorname{argmin}_{\tilde{c} \in \mathbb{R}} \|u_h - \tilde{c}\|_{L^2(T)}^2$$



Ukažme, že funkce, ze které hledáme minimum, je kvadratická funkce, která má koeficient u kvadratického členu kladný. To znamená, že je funkce konvexní a tedy existuje právě jedno minimum na  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \|u_h - \tilde{c}\|_{L^2(T)}^2 &= \int_T |u_h - \tilde{c}|^2 dx = \int_T (\tilde{c}^2 - 2u_h(x)\tilde{c} + u_h^2(x))dx = \\ &= |T|\tilde{c}^2 + \alpha_1\tilde{c} + \alpha_2, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2 \\ \alpha_1 &= \int_T -2u_h(x)dx \\ \alpha_2 &= \int_T u_h^2(x)dx \end{aligned}$$

Integrujeme funkci podle prostorové proměnné  $x$ , proto jsme mohli vytknout  $\tilde{c}$  jakožto konstantu nezávislou na  $x$ . Naopak reálná čísla  $\alpha_i$  získaná integrací jsou konstantní vzhledem k funkci, ze které hledáme minimum, a neovlivní pro nás důležitou konvexitu kvadratické funkce.

Hledané  $c_T$ , pro které je funkce  $e_T(\tilde{c})$  minimální je řešením rovnice

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{c}} \|u_h - \tilde{c}\|_{L^2(T)}^2 &= 0 \\ &= \frac{\partial}{\partial \tilde{c}} (|T|\tilde{c}^2 + \alpha_1\tilde{c} + \alpha_2) \\ &= 2|T|\tilde{c} + \alpha_1 = 0, \end{aligned}$$

čímž dostáváme vyjádření  $c_T$ :

$$\begin{aligned} c_T &= -\frac{1}{2|T|}\alpha_1 \\ &= -\frac{1}{2|T|} \int_T -2u_h(x)dx \\ &= \frac{1}{|T|} \int_T u_h(x)dx. \end{aligned}$$

Získali jsme obecný vzorec, který platí nejen pro polynomiální funkce  $u_h$ , ale obecně pro funkce  $u_h \in L^2(\Omega_h)$ . Dále tento vztah upravíme pro polynomiální funkce, abychom získali jednoduchý obecný vzorec vyjádřený pomocí hodnot určující polynom na každém elementu.

Využijeme toho, že existuje afinní zobrazení  $F_T$ , pro každý  $n$ -simplex  $T$  a pomocí věty o substituci převedeme rovnici, která nám dává hledanou konstantu, na jednotkový  $n$ -simplex.

$$\begin{aligned} c_T &= \frac{1}{|T|} \int_T u_h(x) dx \\ &= \frac{|\det B_T|}{|T|} \int_{\hat{T}} u_h(F(t)) dt \end{aligned}$$

V našem případě  $n = 2$  a tedy  $\hat{T}$  je jednotkový trojúhelník. Navíc pro každý libovolný trojúhelník  $T$  platí následující vztah:

$$|\det B_T| = 2|T|.$$

Potom

$$c_T = 2 \int_{\hat{T}} u_h(F(t)) dt.$$

Polynom  $u_h|_T$  je určen jednoznačně stupni volnosti. Množina stupňů volnosti je při vhodném pořadí stejná pro  $u_h|_T$  a  $u_h|_{\hat{T}}$ . Pro každý stupeň polynomu  $k$ , tak dostaneme obecný vzorec pro určení konstanty  $c_T$ .

Příklad: Nechť  $k = 2$  a hodnoty  $u_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  určují polynom  $u_h|_T$  ve vrcholech libovolného trojúhelníku  $T$  a hodnoty  $u_i$ ,  $i = 4, 5, 6$  ve středech hran. Potom

$$\begin{aligned} c_T &= 2 \int_{\hat{T}} u_h(F(t)) dt \\ &= 2 \int_0^1 \int_0^{1-t_1} \sum_{i=1}^6 u_i \hat{p}_i dt_2 dt_1 \\ &= \frac{1}{3}(u_4 + u_5 + u_6). \end{aligned}$$

Podobně jednoduché vzorce získáme pro ostatní stupně polynomu. Tyto výsledky shrneme v další kapitole.

## 2.3 Po částech lineární aproximace

Barevné diagramy jsou poměrně efektní a názorný způsob vizualizace po částech polynomiálních numerických řešení. Druhý způsob pomocí isočar je přesnější a dává nám lepší informaci o získaném řešení. Vzhledem k tomu, že se zabýváme nespojitým řešením, můžou se nám pomocí isočar tyto nespojitosti lépe zobrazit. Naším úkolem je najít způsob, jak popsat tyto isokřivky. Samotné zobrazení obecné křivky se nejefektivněji provede pomocí po částech lineární křivky. Grafický software umí spojit dva body čarou. Pokud máme dáno po částech lineární řešení, můžeme určit isočary na každém elementu bez složitějších výpočtů. Najdeme nejprve body na hraně elementu, ve kterých je hodnota řešení rovna hodnotě isočary, a tyto body vhodně spojíme.

V případě, kdy dané numerické řešení sestává s polynomů stupně většího než 1, potřebujeme navrhnout vhodnou metodu na převod nespojitého po částech polynomiálního řešení  $u_h$  na nespojitě po částech lineární řešení, které budeme značit  $u_{hl}$ . Poměrně jednoduchý způsob na implementaci, který by zároveň zachoval spojitost isočar na elementech numerického řešení, je rozdělit každý element na několik menších trojúhelníků a ve vrcholech určit hodnotu řešení. Pomocí hodnot ve vrcholech je určena lineární funkce na každém takovém trojúhelníku. Získáme po částech lineární aproximaci numerického řešení.

Vzhledem k tomu, že numerické řešení je nespojitě nebudeme spojitost požadovat a navrhneme metodu podobnou, která využije optimální aproximace polynomiální funkce lineární funkcí v  $L^2$ -normě. Tím se zabýváme dále v tomto odstavci.

Nechť je dána omezená oblast  $\Omega_h \subset \mathbb{R}^2$  a triangulace této oblasti, kterou značíme  $\mathcal{T}_h$  a nechť je dáno po částech polynomiální numerické řešení  $u_h$ . Nechť  $T$  je jeden z elementů triangulace  $\mathcal{T}_h$ ,  $u_h \in S_h$ , pak  $u_h|_T$  je polynom stupně  $k$  na  $T$ . Nechť  $u_{hl}$  je hledaná po částech lineární funkce, pak  $u_{hl}|_T$  je lineární funkce na  $T$ . Hledáme takovou funkci  $u_{hl}$ , která aproximuje  $u_h$  na  $T$  s minimální chybou  $E_L$  v  $L_2$  normě. Definujeme chybu  $E_C(T)$ :

$$E_L(T) = \|u_h - u_{hl}\|_{L^2(T)}$$

Na rozdíl od konstantní aproximace převedeme problém hledání minima rovnou na jednotkový  $n$ -simplex. Nechť

$$e_T(l_T) = \|u_h - l_T\|_{L^2(T)}, \quad l_T \in M,$$

kde  $l_T$  značí zobrazení z  $M$  do  $\mathbb{R}$ , kde  $M$  je množina všech lineárních funkcí na  $T$ .

$$\operatorname{argmin}_{l_T \in M} \|u_h - l_T\|_{L^2(T)} = \operatorname{argmin}_{l_T \in M} \|u_h - l_T\|_{L^2(T)}^2$$

Využijeme věty o substituci a afinního zobrazení  $F$ .

$$\begin{aligned} \|u_h - l_T\|_{L^2(T)}^2 &= \int_T |u_h - l_T|^2 dx \\ &= |\det B| \int_{\hat{T}} |u_h \cdot F - l_T \cdot F|^2 dt \end{aligned}$$

Konstanta  $|\det B|$  nemá vliv na minimum a tedy

$$\operatorname{argmin}_{l_T \in M} \|u_h - l_T\|_{L^2(T)} = \operatorname{argmin}_{l_T \in M} \int_{\hat{T}} |u_h \cdot F - l_T \cdot F|^2 dt.$$

Označme  $l_{\hat{T}} = l_T \cdot F$  a polynom  $\hat{u}_h = u_h \cdot F$ . Hledáme takovou funkci  $m_{\hat{T}}$  lineární na  $\hat{T}$ , pro kterou bude hodnota posledního integrálu minimální. Původně hledanou lineární funkci  $u_h|_T$  získáme pomocí inverzního zobrazení k  $F$ :  $u_h|_T = m_{\hat{T}} \cdot F^{-1}$ .

Zároveň se nebudeme zabývat obecně všemi dimenzemi a tak nechť dále  $n = 2$ .

Lineární funkce zapíšeme pomocí jejich koeficientů

$$l_{\hat{T}} = d^T y, \quad d, y \in \mathbb{R}^3, \quad d = (d_0, d_1, d_2)^T, \quad y = (1, t_1, t_2)^T, \quad t \in \hat{T}$$

$$m_{\hat{K}} = m^T y, \quad m, y \in \mathbb{R}^3, \quad m = (m_0, m_1, m_2)^T, \quad y = (1, t_1, t_2)^T, \quad t \in \hat{K}.$$

Hledáme koeficienty  $m$ , které určí lineární funkci  $m_{\hat{T}}$

$$\begin{aligned} m &= \operatorname{argmin}_{d \in \mathbb{R}^3} \int_{\hat{T}} |\hat{u}_h - d^T y|^2 dt \\ &= \operatorname{argmin}_{d \in \mathbb{R}^3} \int_0^1 \int_0^{1-t_1} \left( \sum_{i,j=0}^2 d_i d_j y_i y_j - 2\hat{u}_h \sum_{i=0}^2 d_i y_i + \hat{u}_h^2 \right) dt_2 dt_1 \\ &= \operatorname{argmin}_{d \in \mathbb{R}^3} \int_0^1 \int_0^{1-t_1} \left( \sum_{i=1}^2 d_i^2 t_i^2 + 2d_1 d_2 t_1 t_2 + 2 \sum_{i=1}^2 d_0 d_i t_i + d_0^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2\hat{u}_h (d_0 + \sum_{i=1}^2 d_i t_i) + \hat{u}_h^2 \right) dt_2 dt_1 \\ &= \operatorname{argmin}_{d \in \mathbb{R}^3} \left( \sum_{i=1}^2 \left( \frac{1}{12} d_i^2 + \frac{1}{3} d_0 d_i \right) + \frac{1}{2} d_0^2 + \frac{1}{12} d_1 d_2 + \sum_{i=0}^2 (-\alpha_i d_i + \beta) \right), \end{aligned}$$

kde  $\alpha_i, i = 0, 1, 2$  a  $\beta$  jsou reálná čísla nezávislá na volbě koeficientů  $d_i$ :

$$\alpha_i = 2 \int_{\hat{T}} \hat{u}_h t_i \, dt, \quad i = 1, 2$$

$$\alpha_0 = 2 \int_{\hat{T}} \hat{u}_h \, dt$$

$$\beta = \int_{\hat{T}} \hat{u}_h^2 \, dt, \quad i = 1, 2$$

Ukažme, že funkce, ze které hledáme minimum, je ryze konvexní a tedy má minimum v bodě  $m$ , kde jsou všechny parciální derivace nulové. Označme tuto funkci  $M(d)$ :

$$M(d) = \sum_{i=1}^2 \left( \frac{1}{12} d_i^2 + \frac{1}{3} d_0 d_i \right) + \frac{1}{2} d_0^2 + \frac{1}{12} d_1 d_2 + \sum_{i=0}^2 (-\alpha_i d_i + \beta)$$

Hessova matice druhých parciálních derivací  $M$  vypadá následovně:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Pomocí Silvestrova pravidla ověříme, že tato matice je pozitivně definitní a tedy funkce  $M(d)$  je ryze konvexní. Hledané  $m$  dostaneme jakožto řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\frac{\partial}{\partial d} M(d) = 0, \quad i = 0, 1, 2$$

Tuto soustavu můžeme zapsat maticově:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} m = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$$

Matice je regulární. Dostaneme jednoznačné řešení  $m$  a tedy i lineární funkci  $m_{\hat{K}}$  na jednotkovém trojúhelníku:

$$\begin{aligned} m_0 &= 9\alpha_0 - 12\alpha_1 - 12\alpha_2 \\ m_1 &= -12\alpha_0 + 24\alpha_1 + 12\alpha_2 \\ m_2 &= -12\alpha_0 + 12\alpha_1 + 24\alpha_2 \end{aligned}$$

Pomocí stupňů volnosti polynomu můžeme pro polynomy stejného stupně určit obecné vzorce pro stupně volnosti aproximativní lineární funkce.

Příklad: Nechť  $k = 2$  a hodnoty  $u_i$ ,  $i = 0, 1, 2$  určují polynom  $u_h$  ve vrcholech  $a_i$  libovolného trojúhelníku  $K$  a hodnoty  $u_{01}, u_{02}, u_{12}$  ve středech hran. Potom

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \frac{1}{3}(u_{01} + u_{02} + u_{12}) \\ \alpha_1 &= \frac{1}{60}(-u_0 + 2u_1 - u_2 + 8u_{01} + 4u_{02} + 8u_{12}) \\ \alpha_2 &= \frac{1}{60}(-u_0 - u_1 + 2u_2 + 4u_{01} + 8u_{02} + 8u_{12})\end{aligned}$$

Stupně volnosti volnosti  $v_i$ ,  $i = 0, 1, 2$  ve vrcholech  $a_i$  trojúhelníku  $K$  určují aproximativní lineární funkci  $u_{hl}|_K$ .

$$\begin{aligned}v_0 &= \frac{1}{5}(2u_0 - u_1 - u_2 + 3u_{01} + 3u_{02} - u_{12}) \\ v_1 &= \frac{1}{5}(-u_0 + 2u_1 - u_2 + 3u_{01} - u_{02} + 3u_{12}) \\ v_2 &= \frac{1}{5}(-u_0 - u_1 + 2u_2 - u_{01} + 3u_{02} + 3u_{12})\end{aligned}$$

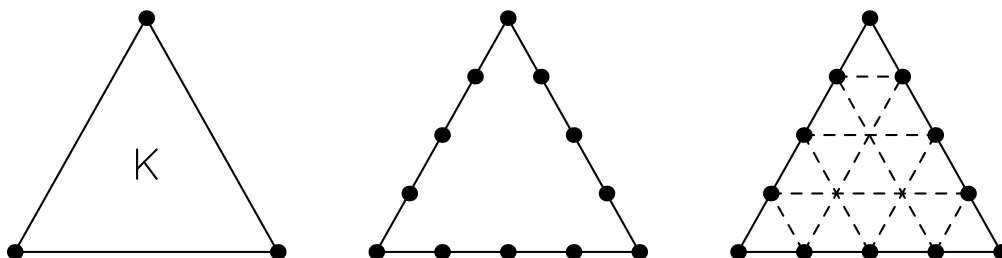
Pro každý stupeň polynomiálního řešení získáme podobně obecné vzorce. Opět některé další výsledky uvedeme v kapitole, která se věnuje implementaci.

## 2.4 Odhady chyb

V posledním odstavci této kapitoly se budeme věnovat odhadům chyb navržených metod vizualizace v  $L^2$  normě. Přesněji nás zajímá chyba mezi po částech lineární aproximací  $u_{hl}$  a po částech polynomiálním řešením  $u_h$ , které jsme získali pomocí numerických metod vhodně zvolených na zadaný problém, a analogicky budeme vyšetřovat také chybu mezi po částech konstantní aproximací  $u_{hc}$  a numerickým řešením  $u_h$ . Tuto chybu porovnáme právě s chybou, která vznikla při použití numerických metod.

Než přistoupíme k samotným výpočtům chyb, ukážeme ještě způsob, jak můžeme pomocí dalšího dělení elementů triangulace zpřesnit aproximaci numerického řešení. Tento postup jsme už výše naznačili. Volíme takové dělení, abychom opět získali triangulaci s vlastnostmi jako má původní. Jako velmi jednoduchý způsob se zdá být rozdělení každého trojúhelníku na několik menších trojúhelníků. Tento způsob popíšeme podrobněji.

Nechť je tedy dána triangulace  $T_h$  omezené oblasti  $\Omega_h \subset \mathbb{R}^2$  a nechť  $K \in T_h$  je jeden z trojúhelníků této triangulace. Trojúhelník rozdělíme na několik menších trojúhelníků tak, že zvolíme  $N_K \in \mathbb{N}$  a každou hranu trojúhelníka rozdělíme ekvidistantně  $N_K - 1$  body. Spojíme každé dva takové body dvou různých hran, pokud jejich spojnice je rovnoběžná s třetí stranou. Vznikne nám síť, která rozdělí trojúhelník na  $N_K^2$  menších trojúhelníků viz. obr.2.5. Volba  $N_K$  ovlivní výpočet chyb. Mohli bychom volit  $N_K$  různé pro každý



Obrázek 2.5: Ukázka rozdělení trojúhelníka  $K$  pro  $N_K = 4$ .

element, ovšem při aplikaci volíme  $N_K$  podle stupně polynomiálního řešení. Abychom obě triangulace odlišili označme vzniklou triangulaci  $\mathcal{T}_h$ .

Nyní přistoupíme k odhadům chyb. Nejprve připomeneme některá značení, která jsme už použili a zavedeme některá nová.

Definujeme chybu v prostoru  $L^2(\Omega_h)$  mezi po částech polynomiálním numerickým řešením  $u_h$  a aproximacemi  $u_{hl}$  a  $u_{hc}$ .

Pro po částech konstantní aproximaci

$$E_C(\Omega_h) = \|u_h - u_{hc}\|_{L^2(\Omega_h)}$$

a pro po částech lineární aproximaci

$$E_L(\Omega_h) = \|u_h - u_{hl}\|_{L^2(\Omega_h)}.$$

Předpokládejme, že jsme určili vhodné dělení původní triangulace  $T_h$  a získali triangulaci  $\mathcal{T}_h$ , jak je popsáno výše.

Nechť  $K \in T_h$  je libovolný trojúhelník z původní triangulace a necht'  $N_K \in \mathcal{N}$  určuje dělení trojúhelníku  $K$ . Necht' množina  $\mathcal{T}_h(K)$  značí dělení trojúhelníku  $K \in T_h$ :

$$\mathcal{T}_h(K) = \{T \in \mathcal{T}_h \mid T \subset K \in T_h\}$$

Dále označíme lokální chyby na každém trojúhelníku  $K \in T_h$  v normě  $L^2$  konstantní i lineární aproximace:

$$\begin{aligned} E_C(K) &= \|u_h - u_{hc}\|_{L^2(K)} \\ E_L(K) &= \|u_h - u_{hl}\|_{L^2(K)}. \end{aligned}$$

Analogicky značíme také chyby na trojúhelnících  $T \in \mathcal{T}_h$ . Zřejmě platí následující vztahy:

$$\begin{aligned} E_C^2(\Omega_h) &= \sum_{K \in T_h} E_C^2(K) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} E_C^2(T) \\ E_L^2(\Omega_h) &= \sum_{K \in T_h} E_L^2(K) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} E_L^2(T) \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} E_C^2(K) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h(K)} E_C^2(T) \\ E_L^2(K) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h(K)} E_L^2(T). \end{aligned}$$



Dále označíme  $u_K$  a  $u_T$  polynomiální funkce  $u_h|_K$  a  $u_h|_T$  vyjádřené pomocí afinního regulárního zobrazení  $F$  na jednotkovém simplexu. Tyto polynomy stupně  $k$  zapíšeme obecně pomocí reálných koeficientů  $a_{i_1 i_2}$ :

$$\begin{aligned} u_K &= u_h|_K \cdot F = \sum_{i_1+i_2 \leq k} a_{i_1 i_2} t_1^{i_1} t_2^{i_2}, \quad a_{i_1 i_2} \in \mathbb{R}, \quad i_1, i_2 \in \mathbb{N}_0, \\ &0 \leq t_1, 0 \leq t_2, t_1 + t_2 \leq 1. \\ u_T &= u_h|_T \cdot F = \sum_{i_1+i_2 \leq k} a_{i_1 i_2} \frac{(y_1 + j_1)^{i_1}}{N_K^{i_1}} \frac{(y_2 + j_2)^{i_2}}{N_K^{i_2}}, \\ &0 \leq y_1, 0 \leq y_2, y_1 + y_2 \leq 1. \end{aligned}$$

Přičemž druhá rovnice platí pro všechny trojúhelníky dělení  $\mathcal{T}_h(K)$  s následující poznámkou.

Pro  $0 \leq j_1, 0 \leq j_2, j_1 + j_2 \leq N_K - 1$  ji použijeme v tomto tvaru na trojúhelníky, které získáme posunutím a zmenšením trojúhelníku  $K$ . Ty ostatní jsou ještě středově souměrné podle pomyslného počátku pro  $0 < j_1, 0 < j_2, j_1 + j_2 \leq N_K - 1$ . Správně bychom tedy měli pro ně přidat do vzorce znamínka mínus, ale výpočty chyb to nijak neovlivní.

Dále se budeme postupně věnovat každé metodě zvlášť. Budeme postupovat tak, že nejprve odhadneme chyby na trojúhelnících triangulace  $\mathcal{T}_h$  a pomocí výše uvedených součtů pak přejdeme k odhadu chyby na celé oblasti  $E_C(\Omega_h)$  a  $E_L(\Omega_h)$ .

### Po částech konstantní aproximace

Odhadneme nejprve chybu naší aproximace na každém trojúhelníku  $T \in \mathcal{T}_h$ . Nechť  $K \in \mathcal{T}_h$  je libovolný trojúhelník původní triangulace  $T \in \mathcal{T}_h(K)$ . Použijeme větu o substituci a afinní regulární zobrazení.

$$\begin{aligned} E_C^2(T) &= \int_T (u_h - u_{hc})^2 dx \\ &= |\det B| \int_{\hat{T}} (u_T - u_{hc})^2 dy. \end{aligned}$$

V odstavci 2.2 jsme již uvedli, že pro  $n = 2$  je absolutní hodnota determinantu  $B$  dvojnásobek velikosti trojúhelníka.

Navíc platí vztah mezi velikostmi  $K$  a  $T$ :

$$|\det B| = 2|T|$$

$$|T| = \frac{|K|}{N_K^2}.$$

Dále připomeňme, že na každém  $T \in \mathcal{T}_h$  je  $u_{hc}$  nejlepší konstantí aproximací vzhledem k  $L_2$  normě.

$$E_C(T) = \|u_h - u_{hc}\|_{L^2(T)} \leq \|u_h - d\|_{L^2(T)} \quad \forall d \in \mathbb{R}.$$

Odečtením libovolné konstanty od funkce  $u_T$  můžeme chybu vhodně odhadnout.

Nejprve si rozepíšme funkci  $u_T$ . Polynom stupně  $k$  na jednotkovém trojúhelníku vyjádříme obecně pomocí reálných koeficientů:

$$\begin{aligned} u_T &= \sum_{i_1+i_2 \leq k} a_{i_1 i_2} \frac{(y_1 + j_1)^{i_1}}{N_K^{i_1}} \frac{(y_2 + j_2)^{i_2}}{N_K^{i_2}} \\ &= \sum_{i_1+i_2 \leq k} a_{i_1 i_2} \frac{1}{N_K^{i_1+i_2}} \sum_{s_1=0}^{i_1} \binom{i_1}{s_1} y_1^{s_1} j_1^{i_1-s_1} \sum_{s_2=0}^{i_2} \binom{i_2}{s_2} y_2^{s_2} j_2^{i_2-s_2} \\ &= a_{00} + \\ &\quad + a_{10} \frac{y_1 + j_1}{N_K} + a_{01} \frac{y_2 + j_2}{N_K} + \\ &\quad + a_{20} \left( \frac{y_1 + j_1}{N_K} \right)^2 + a_{11} \left( \frac{y_1 + j_1}{N_K} \right) \left( \frac{y_2 + j_2}{N_K} \right) + a_{02} \left( \frac{y_2 + j_2}{N_K} \right)^2 + \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \sum_{i_1+i_2=k} \frac{a_{i_1 i_2}}{N_K^k} \left( \sum_{s_1=0}^{i_1} \binom{i_1}{s_1} y_1^{s_1} j_1^{i_1-s_1} \sum_{s_2=0}^{i_2} \binom{i_2}{s_2} y_2^{s_2} j_2^{i_2-s_2} \right). \end{aligned}$$

Označme  $C_u \in \mathbb{R}$  konstantní část funkce  $u_T$ .

$$C_u = a_{00} + a_{10} \frac{j_1}{N_K} + a_{01} \frac{j_2}{N_K} + a_{20} \left( \frac{j_1}{N_K} \right)^2 + a_{11} \frac{j_1 j_2}{N_K^2} + a_{02} \left( \frac{j_2}{N_K} \right)^2 + \dots$$

Tuto konstantu odečteme a získaný výraz upravíme:

$$\begin{aligned} u_T - C_u &= a_{10} \frac{y_1}{N_K} + a_{01} \frac{y_2}{N_K} + \\ &\quad + a_{20} \frac{y_1^2 + 2y_1 j_1}{N_K^2} + a_{11} \frac{y_1 y_2 + y_1 j_2 + y_2 j_1}{N_K^2} + a_{02} \frac{y_2^2 + 2y_2 j_2}{N_K^2} + \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i_1+i_2=k} \frac{a_{i_1 i_2}}{N_K^k} \left( \sum_{s_1=1}^{i_1} \binom{i_1}{s_1} y_1^{s_1} j_1^{i_1-s_1} \sum_{s_2=1}^{i_2} \binom{i_2}{s_2} y_2^{s_2} j_2^{i_2-s_2} \right. \\
& \left. + j_1^{i_1} \sum_{s_3=1}^{i_2} \binom{i_2}{s_3} y_2^{s_3} j_2^{i_2-s_3} + j_2^{i_2} \sum_{s_4=1}^{i_1} \binom{i_1}{s_4} y_1^{s_4} j_1^{i_1-s_4} \right) \\
= & \sum_{1 \leq i_1+i_2 \leq k} \frac{a_{i_1 i_2}}{N_K^{i_1+i_2}} \left( y_1 y_2 i_1 i_2 \sum_{s_1=0}^{i_1-1} \frac{1}{s_1+1} \binom{i_1-1}{s_1} y_1^{s_1} j_1^{i_1-1-s_1} \right. \\
& \times \sum_{s_2=0}^{i_2-1} \frac{1}{s_2+1} \binom{i_2-1}{s_2} y_2^{s_2} j_2^{i_2-1-s_2} \\
& + j_1^{i_1} i_2 y_2 \sum_{s_3=0}^{i_2-1} \frac{1}{s_3+1} \binom{i_2-1}{s_3} y_2^{s_3} j_2^{i_2-1-s_3} \\
& \left. + j_2^{i_2} i_1 y_1 \sum_{s_4=0}^{i_1-1} \frac{1}{s_4+1} \binom{i_1-1}{s_4} y_1^{s_4} j_1^{i_1-1-s_4} \right).
\end{aligned}$$

Absolutní hodnotu tohoto rozdílu odhadneme:

$$\begin{aligned}
|u_T - C_u| & \leq \sum_{1 \leq i_1+i_2 \leq k} \frac{|a_{i_1 i_2}|}{N_K^{i_1+i_2}} \left( y_1 y_2 i_1 i_2 \sum_{s_1=0}^{i_1-1} \binom{i_1-1}{s_1} y_1^{s_1} j_1^{i_1-1-s_1} \right. \\
& \times \sum_{s_2=0}^{i_2-1} \binom{i_2-1}{s_2} y_2^{s_2} j_2^{i_2-1-s_2} + j_1^{i_1} i_2 y_2 \sum_{s_3=0}^{i_2-1} \binom{i_2-1}{s_3} y_2^{s_3} j_2^{i_2-1-s_3} \\
& \left. + j_2^{i_2} i_1 y_1 \sum_{s_4=0}^{i_1-1} \binom{i_1-1}{s_4} y_1^{s_4} j_1^{i_1-1-s_4} \right) = \\
& = \sum_{1 \leq i_1+i_2 \leq k} \frac{|a_{i_1 i_2}|}{N_K^{i_1+i_2}} \left( y_1 y_2 i_1 i_2 (y_1 + j_1)^{i_1-1} (y_2 + j_2)^{i_2-1} \right. \\
& \left. + j_1^{i_1} i_2 y_2 (y_2 + j_2)^{i_2-1} + j_2^{i_2} i_1 y_1 (y_1 + j_1)^{i_1-1} \right)
\end{aligned}$$

Tento odhad ještě vylepšíme, protože platí  $0 \leq y_i \leq 1$ ,  $i = 1, 2$  a také  $0 \leq y_i + j_i \leq N_K$ ,  $i = 1, 2$ . Dostaneme:

$$|u_T - C_u| \leq \sum_{1 \leq i_1+i_2 \leq k} \frac{|a_{i_1 i_2}|}{N_K} \left( \frac{i_1 i_2}{N_K} + i_2 + i_1 \right)$$

Získali jsme nerovnost, kterou využijeme spolu s faktem, že  $u_{hc}$  je nejlepší konstantní aproximace. Pomocí několika úprav máme hotový odhad chyby

konstantní aproximace na  $T \in \mathcal{T}_h(K)$ :

$$\begin{aligned}
E_C^2(T) &\leq \|u_h - C_u\|_{L^2(T)}^2 = \int_T (u_h - C_u)^2 dx = \\
&= 2 \frac{|K|}{N_K^2} \int_{\hat{T}} (u_T - C_u)^2 dy \\
&\leq 2 \frac{|K|}{N_K^2} \int_{\hat{T}} \left( \sum_{1 \leq i_1 + i_2 \leq k} \frac{|a_{i_1 i_2}|}{N_K} \left( \frac{i_1 i_2}{N_K} + i_2 + i_1 \right) \right)^2 dy = \\
&= \frac{|K|}{N_K^4} \left( \sum_{1 \leq i_1 + i_2 \leq k} |a_{i_1 i_2}| \left( \frac{i_1 i_2}{N_K} + i_2 + i_1 \right) \right)^2 \\
E_C^2(T) &\leq \frac{|K|}{N_K^4} \left( \sum_{1 \leq i_1 + i_2 \leq k} |a_{i_1 i_2}| \left( \frac{i_1 i_2}{N_K} + i_2 + i_1 \right) \right)^2
\end{aligned}$$

Získali jsme odhad  $E_C^2(T)$ . Tento odhad je dokonce stejný pro všechny  $T \in \mathcal{T}_h(K)$ , protože koeficienty polynomu jsou stejné. Odhadněme za jeho pomoci  $E_C(K)$ :

$$\begin{aligned}
E_C^2(K) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h(K)} E_C^2(T) \\
&\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h(K)} \frac{|K|}{N_K^4} \left( \sum_{1 \leq i_1 + i_2 \leq k} |a_{i_1 i_2}| \left( \frac{i_1 i_2}{N_K} + i_2 + i_1 \right) \right)^2 \\
&= \frac{|K|}{N_K^2} \left( \sum_{1 \leq i_1 + i_2 \leq k} |a_{i_1 i_2}| \left( \frac{i_1 i_2}{N_K} + i_2 + i_1 \right) \right)^2 \\
E_C^2(K) &\leq \frac{|K|}{N_K^2} C_K,
\end{aligned}$$

kde  $C_K \in \mathbb{R}$  je konstanta, kterou určíme podle polynomiální funkce  $u_h|_K$ . Bude záviset na stupni polynomu a maximu absolutní hodnoty koeficientů polynomu.

Konečně se dostáváme k odhadu chyby  $E_C(\Omega_h)$ . Označme  $N = \max_{K \in \mathcal{T}_h} N_K$  a  $C^2 = \dim \mathcal{T}_h \max_{K \in \mathcal{T}_h} C_K$ ,  $C > 0$ .

$$\begin{aligned}
E_C^2(\Omega_h) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} E_C^2(K) \\
&\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} C_K \frac{|K|}{N_K^2}
\end{aligned}$$

$$E_C(\Omega_h) \leq C \frac{|\Omega_h|}{N}.$$

Tento odhad chyby nám říká, že pokud nahradíme po částech polynomiální řešení  $u_h$  po částech konstantním řešením  $u_{hc}$  pomocí navržené metody, konverguje chyba k nule s rostoucím  $N$ . Odhad chyby je obvykle vyjádřený pomocí největšího průměru elementu  $h$ . Označme  $h_{new}$  největší průměr triangulace  $\mathcal{T}_h$ . Platí

$$\begin{aligned} h_{new} &= \frac{h}{N} \\ E_C(\Omega_h) &\leq Ch_{new}. \end{aligned}$$

Vhodnou volbou  $N$  se budeme zabývat v dalších kapitolách. Bude nás zajímat jaký má vliv na výslednou vizualizaci.

### Po částech lineární aproximace

Odhad chyby po částech lineární aproximace provedeme obdobně. Odhadneme nejprve chybu  $E_L(T)$ . Zvolme libovolné  $K \in \mathcal{T}_h$  a necht'  $T \in \mathcal{T}_h(K)$ .

$$\begin{aligned} E_L^2(T) &= \int_T (u_h - u_{hl})^2 dx \\ &= 2 \frac{|K|}{N_K^2} \int_{\hat{T}} (u_T - u_{hl} \cdot F)^2 dy. \end{aligned}$$

Víme, že na každém  $T \in \mathcal{T}_h$  je  $u_{hl}$  nejlepší lineární aproximací vzhledem k  $L_2$  normě a zároveň platí na jednotkovém simplexu:

$$\|u_T - u_{hl} \cdot F\|_{L^2(\hat{T})} \leq \|u_T - l_T\|_{L^2(\hat{T})},$$

kde  $l_T$  je libovolná lineární funkce na  $\hat{T}$ .

Polynom stupně  $k$  na jednotkovém trojúhelníku vyjádříme obecně pomocí reálných koeficientů jako u výše uvedené konstantní aproximace. Označme lineární část této polynomiální funkce  $L_u$  a nejprve vyjádříme rozdíl  $u_T$  a  $L_u$ .

$$\begin{aligned} u_T - L_u &= a_{20} \frac{y_1^2}{N_K^2} + a_{11} \frac{y_1 y_2}{N_K^2} + a_{02} \frac{y_2^2}{N_K^2} + \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i_1+i_2=k} \frac{a_{i_1 i_2}}{N_K^k} \left( \sum_{s_1=1}^{i_1} \binom{i_1}{s_1} y_1^{s_1} j_1^{i_1-s_1} \sum_{s_2=1}^{i_2} \binom{i_2}{s_2} y_2^{s_2} j_2^{i_2-s_2} \right. \\
& + j_1^{i_1} \sum_{s_3=2}^{i_2} \binom{i_2}{s_3} y_2^{s_3} j_2^{i_2-s_3} \\
& \left. + j_2^{i_2} \sum_{s_4=2}^{i_1} \binom{i_1}{s_4} y_1^{s_4} j_1^{i_1-s_4} \right) \\
= & \sum_{2 \leq i_1+i_2 \leq k} \frac{a_{i_1 i_2}}{N_K^{i_1+i_2}} \left( y_1 y_2 i_1 i_2 \sum_{s_1=0}^{i_1-1} \frac{1}{s_1+1} \binom{i_1-1}{s_1} y_1^{s_1} j_1^{i_1-1-s_1} \right. \\
& \cdot \sum_{s_2=0}^{i_2-1} \frac{1}{s_2+1} \binom{i_2-1}{s_2} y_2^{s_2} j_2^{i_2-1-s_2} \\
& + j_1^{i_1} (i_2^2 - i_2) y_2^2 \sum_{s_3=0}^{i_2-2} \frac{1}{(s_3+2)(s_3+1)} \binom{i_2-2}{s_3} y_2^{s_3} j_2^{i_2-2-s_3} \\
& \left. + j_2^{i_2} (i_1^2 - i_1) y_1^2 \sum_{s_4=0}^{i_1-2} \frac{1}{(s_4+2)(s_4+1)} \binom{i_1-2}{s_4} y_1^{s_4} j_1^{i_1-2-s_4} \right).
\end{aligned}$$

Odhadneme absolutní hodnotu tohoto rozdílu:

$$\begin{aligned}
|u_T - L_u| & \leq \sum_{2 \leq i_1+i_2 \leq k} \frac{|a_{i_1 i_2}|}{N_K^{i_1+i_2}} \left( y_1 y_2 i_1 i_2 \sum_{s_1=0}^{i_1-1} \binom{i_1-1}{s_1} y_1^{s_1} j_1^{i_1-1-s_1} \right. \\
& \cdot \sum_{s_2=0}^{i_2-1} \binom{i_2-1}{s_2} y_2^{s_2} j_2^{i_2-1-s_2} \\
& + j_1^{i_1} (i_2^2 - i_2) y_2^2 \sum_{s_3=0}^{i_2-2} \binom{i_2-2}{s_3} y_2^{s_3} j_2^{i_2-2-s_3} \\
& \left. + j_2^{i_2} (i_1^2 - i_1) y_1^2 \sum_{s_4=0}^{i_1-2} \binom{i_1-2}{s_4} y_1^{s_4} j_1^{i_1-2-s_4} \right) \\
= & \sum_{2 \leq i_1+i_2 \leq k} \frac{|a_{i_1 i_2}|}{N_K^{i_1+i_2}} \left( y_1 y_2 i_1 i_2 (y_1 + j_1)^{i_1-1} (y_2 + j_2)^{i_2-1} \right. \\
& \left. + (i_2^2 - i_2) j_1^{i_1} y_2 (y_2 + j_2)^{i_2-2} + (i_1^2 - i_1) j_2^{i_2} y_1 (y_1 + j_1)^{i_1-2} \right)
\end{aligned}$$

Tento odhad ještě jednou upravíme. Protože platí  $0 \leq y_i \leq 1$ ,  $i = 1, 2$  a také  $0 \leq y_i + j_i \leq N_K$ ,  $i = 1, 2$ , dostaneme:

$$|u_T - L_u| \leq \sum_{1 \leq i_1+i_2 \leq k} \frac{|a_{i_1 i_2}|}{N_K^2} (i_1 i_2 + i_2^2 - i_2 + i_1^2 - i_1)$$

Dostáváme podobný odhad jako u konstantní aproximace. Opět využijeme faktu, že máme nejlepší lineární aproximaci a pomocí poslední nerovnosti odhadneme chybu aproximace lineární funkcí na  $T \in \mathcal{T}_h(K)$ :

$$\begin{aligned} E_L^2(T) &\leq \|u_h - L_u \cdot F^{-1}\|_{L^2(T)} \\ &= 2 \frac{|K|}{N_K^2} \int_{\hat{T}} (u_T - L_u)^2 dy \\ &\leq \frac{|K|}{N_K^6} \left( \sum_{2 \leq i_1 + i_2 \leq k} |a_{i_1 i_2}| (i_1 i_2 + i_2^2 - i_2 + i_1^2 - i_1) \right)^2 \end{aligned}$$

Získali jsme odhad  $E_L^2(T)$ . Tento odhad je stejný pro všechny  $T \in \mathcal{T}_h(K)$ . Odhadněme za jeho pomoci  $E_L(K)$ :

$$\begin{aligned} E_L^2(K) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h(K)} E_L^2(T) \\ &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h(K)} \frac{|K|}{N_K^6} \left( \sum_{2 \leq i_1 + i_2 \leq k} |a_{i_1 i_2}| (i_1 i_2 + i_2^2 - i_2 + i_1^2 - i_1) \right)^2 \\ &= \frac{|K|}{N_K^4} \left( \sum_{2 \leq i_1 + i_2 \leq k} |a_{i_1 i_2}| (i_1 i_2 + i_2^2 - i_2 + i_1^2 - i_1) \right)^2 \\ E_L^2(K) &\leq \frac{|K|}{N_K^4} L_K, \end{aligned}$$

kde  $L_K \in \mathbb{R}$  je konstanta závislá pouze na polynomiální funkci  $u_h|_K$ . Označme  $N = \max_{K \in \mathcal{T}_h} N_K$  a  $L^2 = \dim \mathcal{T}_h \max_{K \in \mathcal{T}_h} L_K$ ,  $L > 0$ .

$$\begin{aligned} E_L^2(\Omega_h) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} E_L^2(K) \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} L_K \frac{|K|}{N_K^4} \\ E_L(\Omega_h) &\leq L \frac{|\Omega_h|}{N^2}, \end{aligned}$$

Podobně jako v konstantním případě nám tento odhad chyby říká, že pokud nahradíme po částech polynomiální řešení  $u_h$  po částech lineárním řešením  $u_{hl}$  pomocí navržené metody, konverguje chyba k nule s rostoucím  $N$ . Odhad chyby vyjádříme pomocí  $h_{new}$ .

$$E_L(\Omega_h) \leq C h_{new}^2.$$

Dokázali jsme odhadnout chybu vzniklou použitím obou metod. Dále jsme navrhli způsob, jak získat přesnější řešení. Poznatky této kapitoly se pokusíme vhodně využít k aplikaci na konkrétní numerická řešení. Získaná po částech konstantní a po částech lineární řešení vizualizujeme. Tuto vizualizaci stručně popíšeme. Implementaci metod na numerická řešení, popisu samotné vizualizace a programům, které podle toho vytvoříme, se budeme věnovat v další kapitole.



# Kapitola 3

## Implementace

V následující kapitole popíšeme, jakým způsobem navržené metody vhodně implementovat. V předchozí kapitole jsme k problému vizualizace po částech polynomiálního řešení  $u_h$  přistupovali obecně pro libovolný stupeň polynomu. V této kapitole budeme navržené metody aproximace aplikovat na řešení daného nejvyššího stupně a sice nejvýše stupně tři. Výsledky stručně vypíšeme. Dále navrhneme způsob jak zpracovat tyto výsledky pomocí počítače. Součástí této práce je dále program, který aproximuje po částech polynomiální řešení a využívá výsledků navržených metod, a dále vizualizační program. Stručnému popisu těchto programů se věnujeme v závěru této kapitoly.

### 3.1 Po částech konstantní aproximace

Věnujme se nejprve metodě po částech konstantní aproximace a výslednému řešení, které zobrazíme v podobě barevných diagramů. Zopakujme nejprve výsledky předešlé kapitoly.

Předpokládáme, že máme danou triangulaci  $\mathcal{T}_h$  a po částech polynomiální řešení  $u_h$ , přičemž je dán nejvyšší stupeň polynomu  $k$ . Po částech konstantní řešení  $u_{hc}$  získáme tak, že na každém elementu zvlášť určíme hodnotu konstantní funkce. Nechť  $T$  je tedy libovolný trojúhelník triangulace  $\mathcal{T}_h$ . Na něm je určena polynomiální funkce  $u_h|_T$  stupně nejvýše  $k$ . Předpokládáme, že tato funkce je určena jednoznačně pomocí funkčních hodnot, jak je obecně popsáno v předchozí kapitole. Tuto funkci aproximujeme konstantní funkcí  $u_{hc}$ , jejíž hodnotu  $c_T$  na elementu  $T$  určíme pomocí obecného vzorce, který

jsme získali v předchozí kapitole

$$c_T = 2 \int_{\hat{T}} u_h(F(t)) dt,$$

kde  $\hat{T}$  je jednotkový trojúhelník.

Vzhledem k tomu, že funkční hodnoty polynomiální funkce odpovídají příslušným hodnotám na jednotkovém trojúhelníku, můžeme obecně vyjádřit hodnotu  $c_T$  pomocí funkčních hodnot, které určují polynomiální funkci  $u_h|_T$ . Označme tyto hodnoty  $u_i, i = 1, 2, \dots$ . Dále budeme pokračovat pro příslušné stupně polynomu zvlášť.

Vyjádření polynomu  $u_h|_T$  na jednotkovém trojúhelníku budeme dále značit  $u_T$ . Polynom  $u_T$  můžeme vyjádřit jednak pomocí barycentrických souřadnic nebo pomocí souřadnic  $t_1, t_2$  odpovídajících souřadnicím jednotkového simplexu tak, jak jsme je použili při odhadech chyby. Platí mezi nimi vztah

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 1 - t_1 - t_2 \\ \lambda_2 &= t_1 \\ \lambda_3 &= t_2\end{aligned}$$

Vyjádření polynomu pomocí barycentrických souřadnic použijeme potom v našich programech.

**k = 1**

Nejprve nás bude zajímat po částech lineární řešení.

Nechť  $u_i, i = 1, 2, 3$  značí hodnoty polynomu  $u_T$  ve vrcholech elementu  $T \in \mathcal{T}_h$  resp. stejně tak na jednotkovém simplexu. Polynom  $u_T$  můžeme vyjádřit pomocí těchto hodnot.

$$\begin{aligned}u_T &= u_1\lambda_1 + u_2\lambda_2 + u_3\lambda_3 \\ &= u_1 + (u_2 - u_1)t_1 + (u_3 - u_1)t_2\end{aligned}$$

Dosazením do vzorce pro hledanou konstantní hodnotu vypočteme pomocí jednoduché integrace obecný vzorec pro  $c_T$ :

$$c_T = \frac{u_1 + u_2 + u_3}{3}, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h$$

Konstantní hodnota  $c_T$  tedy odpovídá hodnotě v těžišti.

**k = 2**

U po částech kvadratického polynomiálního řešení postupujeme analogicky. Nechť  $u_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  značí hodnoty polynomu  $u_T$  ve vrcholech elementu  $T \in \mathcal{T}_h$  a  $u_i$ ,  $i = 4, 5, 6$  ve středech hran.

Uvedeme vzorce pro  $u_T$

$$\begin{aligned} u_T &= u_1\lambda_1(2\lambda_1 - 1) + u_2\lambda_2(2\lambda_2 - 1) + u_3\lambda_3(2\lambda_3 - 1) + \\ &\quad + 4u_4\lambda_1\lambda_2 + 4u_5\lambda_2\lambda_3 + 4u_6\lambda_3\lambda_1 \\ &= u_1 + (-3u_1 - u_2 + 4u_4)t_1 + (-3u_1 - u_3 + 4u_6)t_2 \\ &\quad + (2u_1 + 2u_2 - 4u_4)t_1^2 + (2u_1 + 2u_3 - 4u_6)t_2^2 \\ &\quad + (4u_1 - 4u_4 + 4u_5 - 4u_6)t_1t_2 \end{aligned}$$

a vypočteme vzorec pro  $c_T$

$$c_T = \frac{u_4 + u_5 + u_6}{3}, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h$$

**k = 3**

Následuje po částech kubické polynomiální řešení.

Nechť  $u_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  značí hodnoty polynomu  $u_T$  ve vrcholech elementu  $T \in \mathcal{T}_h$ ,  $u_i$ ,  $i = 4, 5, 6, 7, 8, 9$  ve třetinách každé hrany a  $u_{10}$  v těžišti trojúhelníka.

Vzorce pro  $u_T$

$$\begin{aligned} u_T &= \frac{1}{2} \left( u_1\lambda_1(3\lambda_1 - 1)(3\lambda_1 - 2) + u_2\lambda_2(3\lambda_2 - 1)(3\lambda_2 - 2) + \right. \\ &\quad + u_3\lambda_3(3\lambda_3 - 1)(3\lambda_3 - 2) + 9u_4\lambda_1\lambda_2(3\lambda_1 - 1) + \\ &\quad + 9u_5\lambda_1\lambda_2(3\lambda_2 - 1) + 9u_6\lambda_2\lambda_3(3\lambda_2 - 1) + 9u_7\lambda_2\lambda_3(3\lambda_3 - 1) \\ &\quad \left. + 9u_8\lambda_3\lambda_1(3\lambda_3 - 1) + 9u_9\lambda_3\lambda_1(3\lambda_1 - 1) + 54u_{10}\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \right) \\ &= u_1 + \frac{1}{2} \left( (-11u_1 + 2u_2 + 18u_4 - 9u_5)t_1 \right. \\ &\quad + (-11u_1 + 2u_3 - 9u_8 + 18u_9)t_2 \\ &\quad + 9(2u_1 + u_2 - 5u_4 + 4u_5)t_1^2 + 9(2u_1 - u_3 + 4u_8 - 5u_9)t_2^2 \\ &\quad + 9(4u_1 - 5u_4 + u_5 - u_6 - u_7 + u_8 - 5u_9 + 6u_{10})t_1t_2 \\ &\quad + 9(-u_1 + u_2 + 3u_4 - 3u_5)t_1^3 \\ &\quad + 27(-u_1 + 2u_4 - u_5 + u_6 + u_9 - 2u_{10})t_1^2t_2 \\ &\quad + 27(-u_1 + u_4 + u_7 - u_8 + 2u_9 - 2u_{10})t_1t_2^2 \\ &\quad \left. + 9(-u_1 + u_3 - 3u_8 + 3u_9)t_2^3 \right) \end{aligned}$$

a vypočteme vzorec pro  $c_T$

$$c_T = \frac{4(u_1 + u_2 + u_3) + 9(u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9) + 54u_{10}}{120}, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h$$

Tyto vzorce použijeme v programu, který uplatňuje tuto metodu aproximace po částech polynomiálních řešení.

Pro každý stupeň polynomu lze určit pomocí teorie předchozí kapitoly odhad chyby aproximační metody. Předpokládejme, že nás zajímá chyba na každém elementu původní triangulace. Připomeňme odhad chyby  $E_C^2(K)$ , kde  $K \in T_h$ :

$$E_C^2(K) \leq \frac{|K|}{N_K^2} \left( \sum_{1 \leq i_1 + i_2 \leq k} |a_{i_1 i_2}| \left( \frac{i_1 i_2}{N_K} + i_2 + i_1 \right) \right)^2$$

Přirozené číslo  $N_K$  určuje dělení každého elementu. Hodnoty  $a_{i_1 i_2}$  jsou koeficienty polynomu  $u_K$ , které umíme určit pro konkrétní stupeň polynomu z výše uvedených vzorců. Umíme také vypočítat velikost trojúhelníka  $K$ . To znamená, že umíme určit odhad chyby. Mohli bychom postupovat i obráceně. Na základě určitého požadavku na chybu bychom mohli zvolit číslo  $N_K$ .

## 3.2 Po částech lineární aproximace

Následuje metoda po částech lineární aproximace. Opět zopakujme nejprve výsledky předešlé kapitoly.

Předpokládáme, že máme danou triangulaci  $\mathcal{T}_h$  a po částech polynomiální řešení  $u_h$ , přičemž je dán nejvyšší stupeň polynomu  $k$ . Po částech lineární řešení  $u_{hl}$  získáme tak, že na každém elementu zvlášť určíme lineární funkci. Nechť  $T$  je tedy libovolný trojúhelník triangulace  $\mathcal{T}_h$ . Na něm je určena polynomiální funkce  $u_h|_T$  stupně nejvýše  $k$ . Tuto funkci aproximujeme lineární funkcí  $u_{hl}|_T$ . Tuto funkci získáme tak, že nejprve spočítáme koeficienty  $\alpha_i, i = 0, 1, 2$ . Pro tyto koeficienty platí tyto vzorce:

$$\alpha_0 = 2 \int_{\hat{T}} \hat{u}_h \, dt$$

$$\alpha_i = 2 \int_{\hat{T}} \hat{u}_h t_i \, dt, \quad i = 1, 2.$$

Stupně volnosti určující lineární funkci, pak vypočítáme z těchto vztahů:

$$\begin{aligned} v_1 &= 9\alpha_0 - 12\alpha_1 - 12\alpha_2 \\ v_2 &= -12\alpha_0 + 24\alpha_1 + 12\alpha_2 \\ v_3 &= -12\alpha_0 + 12\alpha_1 + 24\alpha_2. \end{aligned}$$

Nyní provedeme konkrétní výpočty pro určité stupně po částech polynomiálního řešení.

### **k = 2**

Hodnoty  $u_i, i = 1, 2, 3$  určují polynom  $u_T$  ve vrcholech elementu  $T \in \mathcal{T}_h$  a hodnoty  $u_i, i = 4, 5, 6$  ve středech hran. Vzorec pro  $u_T$  je uveden výše u po částech konstantní aproximace. Vypočteme koeficienty  $\alpha_i, i = 1, 2, 3$ .

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{3}(u_4 + u_5 + u_6) \\ \alpha_1 &= \frac{1}{60}(-u_1 + 2u_2 - u_3 + 8u_4 + 4u_5 + 8u_6) \\ \alpha_2 &= \frac{1}{60}(-u_1 - u_2 + 2u_3 + 4u_4 + 8u_5 + 8u_6) \end{aligned}$$

Pomocí těchto koeficientů určíme stupně volnosti  $v_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  ve vrcholech trojúhelníku  $T$ , které určují jednoznačně aproximativní lineární funkci  $u_{hl}|_T$ .

$$\begin{aligned}v_1 &= \frac{1}{5}(2u_1 - u_2 - u_3 + 3u_4 + 3u_5 - u_6) \\v_2 &= \frac{1}{5}(-u_1 + 2u_2 - u_3 + 3u_4 - u_5 + 3u_6) \\v_3 &= \frac{1}{5}(-u_1 - u_2 + 2u_3 - u_4 + 3u_5 + 3u_6)\end{aligned}$$

**k = 3**

Nechť  $u_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  značí hodnoty polynomu  $u_T$  ve vrcholech elementu  $T \in \mathcal{T}_h$ ,  $u_i$ ,  $i = 4, 5, 6, 7, 8, 9$  ve třetinách každé hrany a  $u_{10}$  v těžišti trojúhelníka.

Vzorce pro  $u_T$  je opět uveden výše. Vypočteme koeficienty  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \frac{1}{120}(12u_1 + 4u_2 + 4u_3 + 63u_4 \\&\quad - 9u_5 - 9u_6 - 9u_7 - 9u_8 + 63u_9 + 90u_{10}) \\ \alpha_1 &= \frac{1}{480}(16u_1 + 8u_2 + 4u_3 + 81u_4 \\&\quad + 9u_5 + 9u_6 - 27u_7 - 27u_8 + 81u_9 + 126u_{10}) \\ \alpha_2 &= \frac{1}{480}(16u_1 + 4u_2 + 8u_3 + 81u_4 \\&\quad - 27u_5 - 27u_6 + 9u_7 + 9u_8 + 81u_9 + 126u_{10})\end{aligned}$$

Dále určíme stupně volnosti  $v_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  ve vrcholech trojúhelníku  $T$  aproximativní lineární funkce  $u_{hl}|_T$ .

$$\begin{aligned}v_1 &= \frac{1}{40}(4u_1 + 27u_4 - 9u_5 - 9u_6 - 9u_7 - 9u_8 + 27u_9 + 18u_{10}) \\v_2 &= \frac{1}{40}(4u_2 - 9u_4 + 27u_5 + 27u_6 - 9u_7 - 9u_8 - 9u_9 + 18u_{10}) \\v_3 &= \frac{1}{40}(4u_3 - 9u_4 - 9u_5 - 9u_6 + 27u_7 + 27u_8 - 9u_9 + 18u_{10})\end{aligned}$$

Získané vzorce použijeme v programu, který používá navrženou metodu aproximace po částech polynomiálních řešení na po částech lineární řešení.

Pro každý stupeň polynomu lze podobně, jako jsme popsali výše u po částech konstantní aproximace, určit pomocí teorie předchozí kapitoly odhad chyby aproximační metody. Předpokládejme, že nás zajímá chyba na každém elementu původní triangulace a znovu připomeňme odhad chyby  $E_L^2(K)$ , kde  $K \in T_h$ :

$$E_L^2(K) \leq \frac{|K|}{N_K^4} \left( \sum_{2 \leq i_1 + i_2 \leq k} |a_{i_1 i_2}| (i_1 i_2 + i_2^2 - i_2 + i_1^2 - i_1) \right)^2$$

Podobně jako u po částech konstantní aproximace i zde umíme určit odhad chyby pomocí koeficientů  $a_{i_1 i_2}$ , velikosti elementu  $K$  a zvoleného  $N_K$ . Stejně tak můžeme opět volit číslo  $N_K$  podle určitého požadavku na chybu.

### 3.3 Program aproximace řešení

Popišme základní princip programu, který aproximuje po částech polynomiální řešení  $u_h$  na po částech konstantní řešení  $u_{hc}$  a po částech lineární řešení  $u_{hl}$ . Zdrojový kód v jazyce FORTRAN je přiložen na datovém disku spolu s programem.

Jak již bylo popsáno v předešlé kapitole přibližné řešení daného problému hledáme v prostoru nespojitých po částech polynomiálních funkcí  $S_h$  na množině  $\Omega_h$ , která značí polygonální aproximaci oblasti  $\Omega \in \mathbb{R}^2$ . Triangulace  $T_h$  oblasti  $\Omega_h$  vyhovuje výše uvedené definici. Popis triangulace a po částech polynomiálního řešení budeme požadovat jako základní vstupní data pro naši vizualizaci. V naší práci obsahují informace o nich soubory `tri` a `sol`.

Soubor `tri` popisuje triangulaci  $T_h$ . Každý trojúhelník je popsán jeho vrcholy. Množina všech vrcholů je množina bodů určených souřadnicemi v prostoru  $\mathbb{R}^2$ . Soubor `tri` obsahuje nejprve počet všech různých bodů a počet všech různých trojúhelníků triangulace  $T_h$  tedy  $\dim(T_h)$ . Následuje výčet souřadnic těchto bodů tak, že každý řádek zároveň určuje pořadové číslo každého bodu. Pomocí těchto pořadových čísel jsou pak na každém dalším řádku určeny tři vrcholy každého trojúhelníka. Názorně si ukažme na příkladu část takového souboru.

```
559 1012
-1.0000000000000000 0.0000000000000000
-0.5000000000000000 0.0000000000000000
-0.0148834037000000 0.0999147892000000
...
```

```
72 17 151
177 17 72
457 72 151
...
```

Soubor `sol` popisuje přibližné řešení z prostoru  $S_h$  získané pomocí numerických metod. Na každém trojúhelníku je určený polynom stupně menšího než  $k$  pomocí hodnot na množině  $L_k(K)$ , jak je uvedeno výše. Obvykle jsou všechny polynomy stejného stupně, ale není to podmínkou. Podobně jako soubor `tri` obsahuje i `sol` nejprve informaci o počtu elementů. V následujícím příkladu jsou pro každý element navíc určeny funkce pro více veličin konkrétně 4, jak je uvedeno v prvním řádku. Při následujících experimentech



budeme generovat videosekvenci. Vzhledem k tomu nechybí ani informace o čase. Další řádky už určují polynomiální funkce daných veličin pro jednotlivé elementy v pořadí, v jakém byly seřazeny v souboru `tri`. Nejprve je uvedeno přirozené číslo, které označuje stupeň polynomu  $k_i$  a následují v určeném pořadí hodnoty funkce, kterých je  $\frac{k_i^2+3k_i+2}{2}$  pro polynomiální funkci na simplexu v  $\mathbb{R}^2$ . Uvedeme jeden příklad s lineárními funkcemi

```

1012 4      t=1.00010E+01
1 1.05258920973825 1.04392210111572 1.05621520456566
1 0.920385616143932 0.938025114430982 0.904660555826380
1 0.24833219396098 -0.008709553154286 0.0236918493115046
1 8.07688997807322 8.00678103720602 8.09862030197849
1 1.03747333200055 1.04399902189509 1.05266382468395
1 0.949845041113520 0.937225319921227 0.918733998556953
1 0.14465914365113 -0.0071239843395437 0.239542363673691
1 7.95494042368650 8.00721283418649 8.07612765505174
...

```

a jeden s kvadratickými polynomy:

```

200 4
2 0.999999997311051 0.999999989117993 1.00000004251094
  1.00000001124263 0.999999989875264 0.999999998107361
2 0.999390820855801 0.999390815747190 0.999390872303647
  0.999390838672256 0.999390816029685 0.999390825511338
2 3.489949839322064 3.489951775517315 3.489941664119109
  3.489947462452559 3.489951496337089 3.489950015982616
2 7.64285711091284 7.64285702874370 7.64285758878157
  7.64285726014142 7.64285703602191 7.64285712314788
...

```

Máme všechna potřebná vstupní data. Při jejich načítání zjistíme minimální a maximální souřadnice, abychom měli představu o oblasti, kterou chceme zobrazit. Stejně tak nás zajímá minimální a maximální hodnota určující funkci přibližného řešení.

Můžeme tedy přistoupit k implementaci navržených metod aproximace.

Postupovat budeme opačně než, jak jsme přistupovali k teorii. Nejprve zvolíme číslo  $N$ , které určuje další dělení elementů. Toto číslo určíme stejné

pro všechny elementy. Ovšem tato volba může být i různá pro každý element. Na základě odhadů chyb bychom mohli dokonce vyhovět podmínce na určitou lokální chybu. V poslední kapitole si ukážeme na příkladech, jak tato volba ovlivní výslednou vizualizaci.

Jelikož chceme získat také vizualizaci pomocí isočar musíme ještě určit jejich hodnoty. V našem případě jsme volíme konstantní číslo např. 50 a hodnoty isokřivek jsou rovnoměrně rozložené od minimální po maximální hodnotu. Opět bychom tyto hodnoty mohli volit i libovolně jinak.

Dále bereme postupně každý element, resp. rovnou pracujeme s elementy triangulace, kterou získáme dělením elementu původní triangulace. Nejprve vypočítáme množinu stupňů volnosti tohoto elementu ze stupňů volnosti původní triangulace. Ty nám sice určují stejný polynom, ale můžeme dosadit do vzorců, které jsme uvedli výše v této kapitole. Tyto vzorce volíme podle stupně polynomu. Získáme konstantní hodnotu pro po částech konstantní aproximaci a stupně volnosti určující lineární funkci pro po částech lineární aproximaci. Tím jsme skončili s po částech konstantní aproximací a u po částech lineární nám zbývá určit isokřivky. Pro každou hodnotu isokřivky zjistíme, jestli najdeme bod, na každé hraně trojúhelníka, ve které je hodnota lineární funkce shodná s hodnotou isokřivky. Pokud najdeme takové body dva, pak na úsečce, která spojuje tyto body je hodnota lineární funkce rovná hodnotě isokřivky. Pomocí těchto dvou bodů, také tuto isokřivku zapíšeme do výstupního souboru.

Výstupní soubory budou tři. První obsahuje novou triangulaci. Na začátku tohoto souboru jsou čísla určující počet elementů nové triangulace. Souřadnice bodů určujících zobrazovanou oblast, minimální a maximální hodnotu a případně údaj o čase. Na každém dalším řádku jsou pro každý trojúhelník souřadnice jeho vrcholů. Následuje příklad takového souboru.

```
3200 -50. 51. -50. 50. 0.01821422 0.75238685 t=9.01652E-01
17.72866 -2.3586077725 17.72866 -14.269076 28.8191 -14.2689158
28.819105 -14.26891 28.8191 -26.179384 39.90955 -26.17922
39.90955 -26.17922 39.909552 -38.08969 51. -38.08953178
51. -50. 51. -38.08953178 39.909552 -38.0896919975
...
```

Další výstupní soubor obsahuje hodnoty po částech konstantní funkce. Pořadí odpovídá pořadí trojúhelníku v předchozím souboru.

```
0.572138766074269
0.5800849814689785
```

```
0.5834340094416555
0.5791756093340019
0.5714665637762766
...
```

Konečně poslední výstupní soubor obsahuje data potřebná pro vizualizaci pomocí isočar. Na prvním řádku je celkový počet úseček, které je třeba nakreslit. Každý další řádek obsahuje nejprve hodnotu, kterou určuje isokřivka, a dále souřadnice bodů určující každou úsečku.

```
3856
0.4901960784 3.107725286 -0.37523470836 3.08026022 -0.39625166
0.4901960784 2.297277813 -0.145241405 2.01836638 -0.133712305
0.4901960784 1.5217365727 -0.145980933 1.44074504 -0.155558948
...
```

Tím máme všechna potřebná data pro samotnou vizualizaci.

## 3.4 Program vizualizace

Vizualizační program využívá grafickou knihovnu PGPLOT [1]. Nejprve načteme konfigurační soubor. Tento konfigurační soubor obsahuje informace o vstupních datech, určuje parametry vizualizace a typ výstupu. Dále načteme soubory s řešením, které se chystáme vizualizovat. Pokaždé načteme soubor s triangulací a potom podle daného typu vizualizace soubory s řešením, které určuje konstantní řešení na každém elementu nebo množinu isokřivek. Jako poslední načteme soubor, který určuje paletu barev.

V konfiguračním souboru je možné nastavit výřez a také nejnížší a nejvyšší hodnotu, které určují barevnou škálu. Dále je možné nastavit datový typ výstupu. V našem případě je to buď bitmapový nebo postskriptový obrázek. Máme čtyři možnosti vizualizace, přičemž jedna je kombinací dvou jiných. Zaprvé je to prostá triangulace. Jelikož známe souřadnice vrcholů každého trojúhelníku, zadáme příkaz spojit tyto body čarou tak, aby vznikl polygon v našem případě trojúhelník.

Zadruhé můžeme nakreslit vizualizaci pomocí isočar. Ve vstupním souboru máme uloženu množinu úseček pomocí souřadnic jejich dvou krajních bodů. Dále známe hodnotu, kterou isočára představuje. V našem případě tyto hodnoty rozlišujeme barevně, i když bychom mohli také nakreslit pouze černobílou vizualizaci pomocí isočar. Každá hodnota se tedy přenásobí a zaokrouhlí na celé číslo, které je přiřazené určité barvě. Potom už jednoduše spojíme dva body barevnou čarou. Tím nám vznikne výsledná vizualizace.

Třetí typ vizualizace je pomocí barevných map. Budeme potřebovat jednak datový soubor s triangulací a dále datový soubor konstantních hodnot, které jsou přiřazeny každému elementu. Každý trojúhelník je opět určen pomocí souřadnic jeho vrcholů. Barvu určíme podobně jako u isočar a vykreslíme barevně každý trojúhelník. Opakováním pro všechny elementy vznikne výsledná vizualizace pomocí barevných map.

Poslední vizualizace je kombinací triangulace a vizualizace pomocí isočar. Vytvoříme ji tak, že nejprve necháme vykreslit isočáry a poté triangulaci podle uvedených postupů.

Ke každému obrázku doplníme orámování zobrazované plochy a očíslování os. Dále pokud se jedná o barevnou vizualizaci nakreslíme barevnou paletu, kterou popíšeme příslušnými hodnotami. Pokud se jedná o snímek určený pro videosekvenci můžeme připsat časový údaj.

Výstupem je bitmapový nebo postskriptový obrázek.

# Kapitola 4

## Numerické experimenty

Prezentujeme vizualizaci výsledků získaných pomocí programu ADGEM, který je vyvíjen na katedře numerické matematiky a slouží k simulaci nestacionárního proudění vazkých stlačitelných tekutin pomocí tzv. nespojitě Galerkinovy metody viz.[4]. Nespojitá Galerkinova metoda je založená na po částech polynomiální ale nespojitě aproximaci.

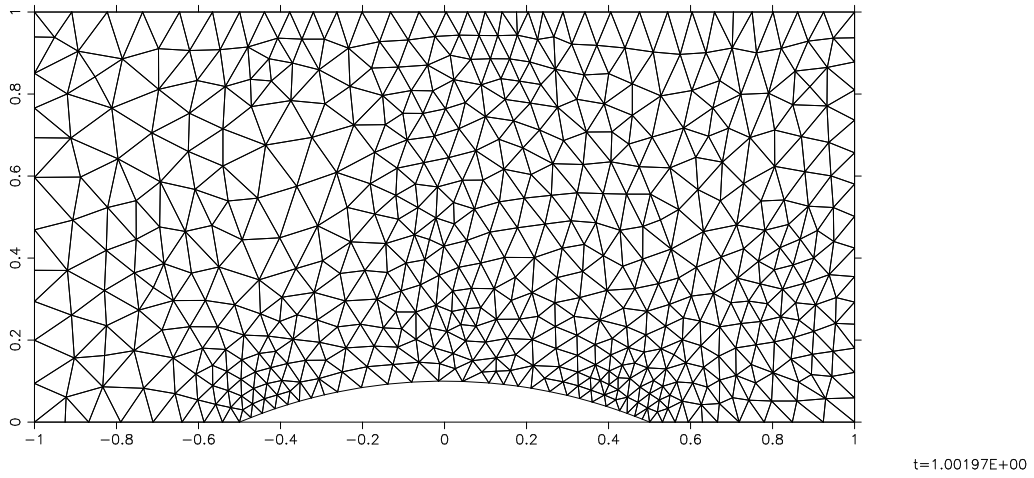
Pro ukázkou vizualizace použijeme po částech lineární řešení získané numerickým výpočtem proudění v GAMM kanálu. Jedná se o model dvourozměrného nevazkého stlačitelného transsonického proudění ideálního plynu.

A dále použijeme po částech kvadratické a po částech kubické numerické řešení popisující obtékání leteckého profilu NACA 0012.

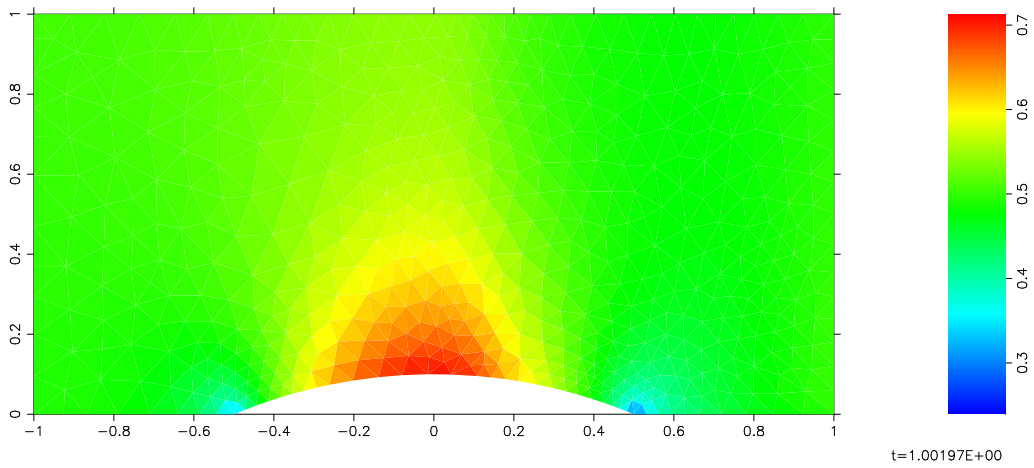
Nejprve si ukážeme vizualizaci po částech lineárního řešení. Na obrázku 4.1 je původní triangulace numerického řešení a na obrázku 4.2 vizualizace po částech konstantní aproximace tohoto numerického řešení.

Pro další vizualizace zvolíme  $N = 2$  resp.  $N = 3$ . Jak bylo popsáno výše, toto číslo určuje další dělení elementů. Získáme tak pro  $N = 2$  triangulaci na obrázku 4.3 a příslušnou vizualizaci pomocí barevných map na obrázku 4.4 a pro  $N = 3$  triangulaci na obrázku 4.5 a příslušnou vizualizaci pomocí barevných map na obrázku 4.6.

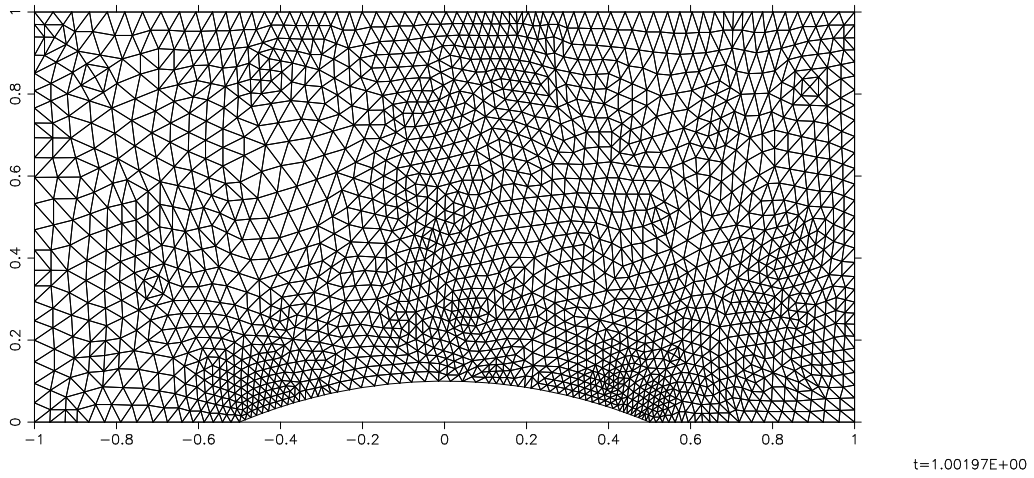
Vizualizace pomocí isočar na obrázku 4.7 je samozřejmě pro libovolné  $N$  stejná, jelikož se jedná o po částech lineární řešení. To, že je toto numerické řešení dokonce nespojitě, vidíme v detailu na obrázku 4.8.



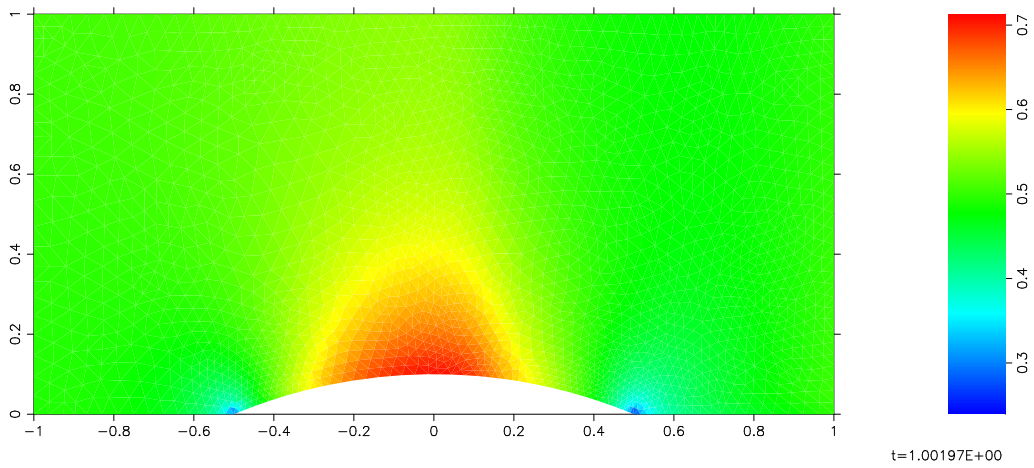
Obrázek 4.1: GAMM kanál, P1, původní triangulace.



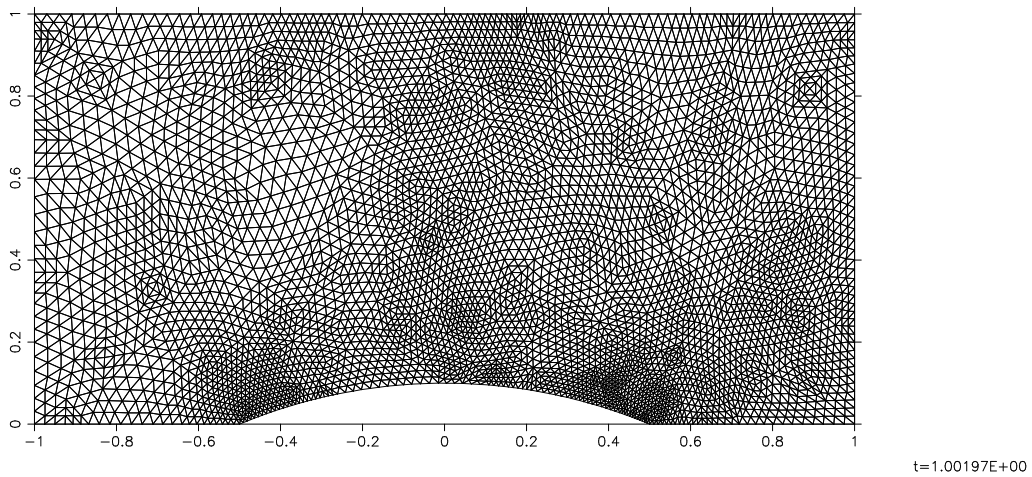
Obrázek 4.2: GAMM kanál, P1, Machovo číslo, vizualizace pomocí barevných map.



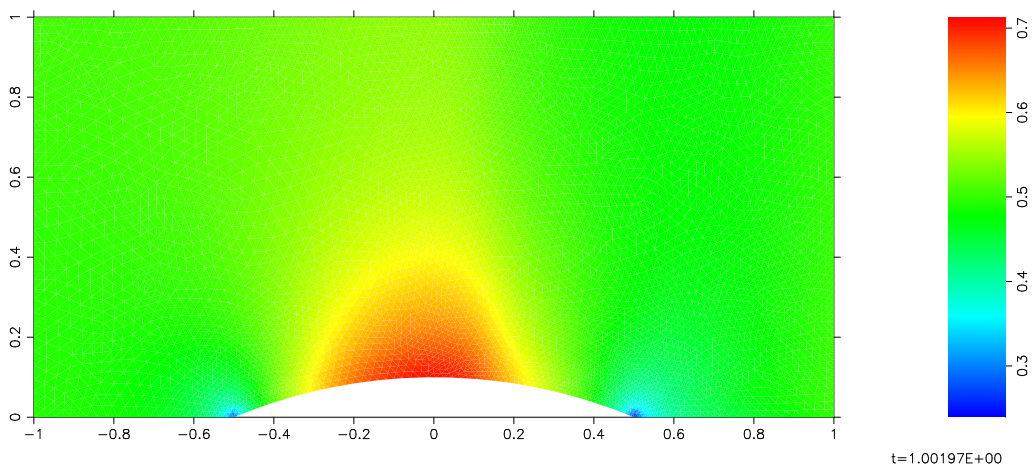
Obrázek 4.3: GAMM kanál, P1, triangulace pro  $N = 2$ .



Obrázek 4.4: GAMM kanál, P1,  $N = 2$ , Machovo číslo, vizualizace pomocí barevných map.

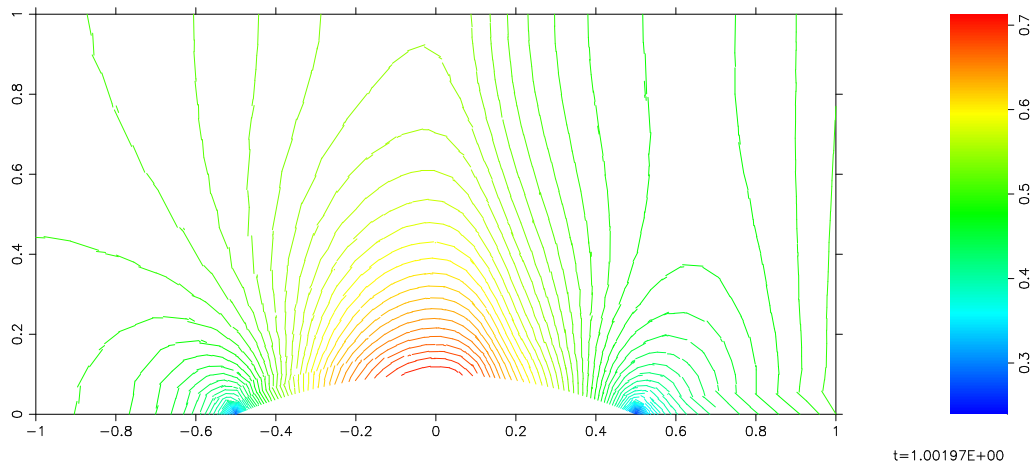


Obrázek 4.5: GAMM kanál, P1, triangulace pro  $N = 3$ .

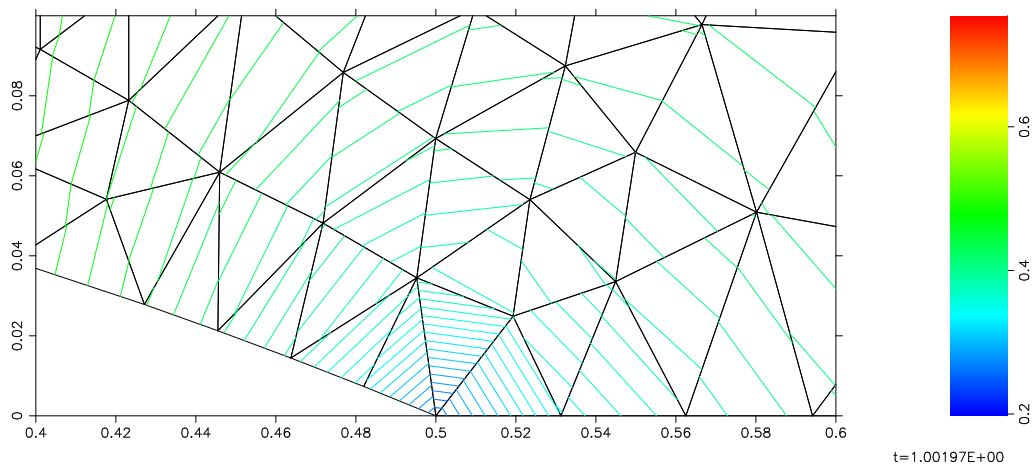


Obrázek 4.6: GAMM kanál, P1,  $N = 3$ , Machovo číslo, vizualizace pomocí barevných map.





Obrázek 4.7: GAMM kanál, P1, Machovo číslo, vizualizace pomocí isočar.

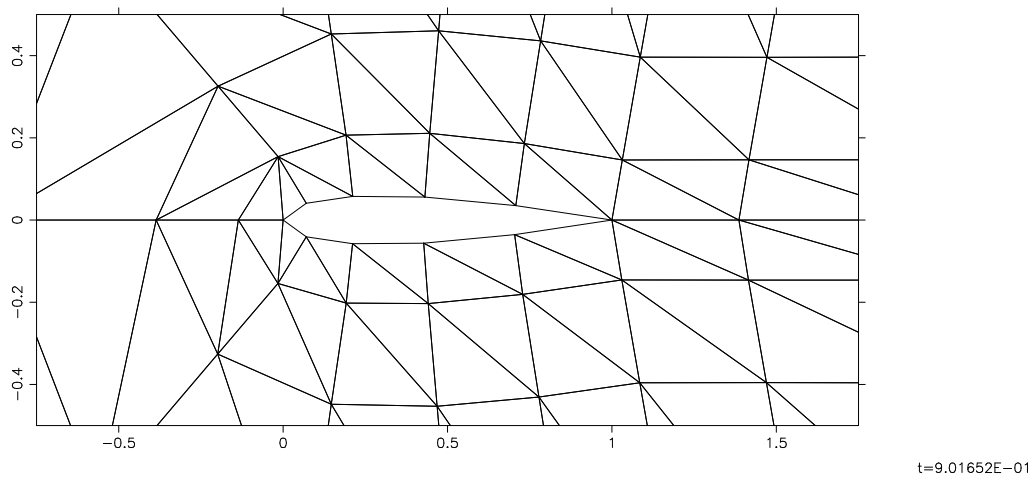


Obrázek 4.8: GAMM kanál, P1, Machovo číslo, vizualizace pomocí isočar na trojúhelníkové síti - detail.

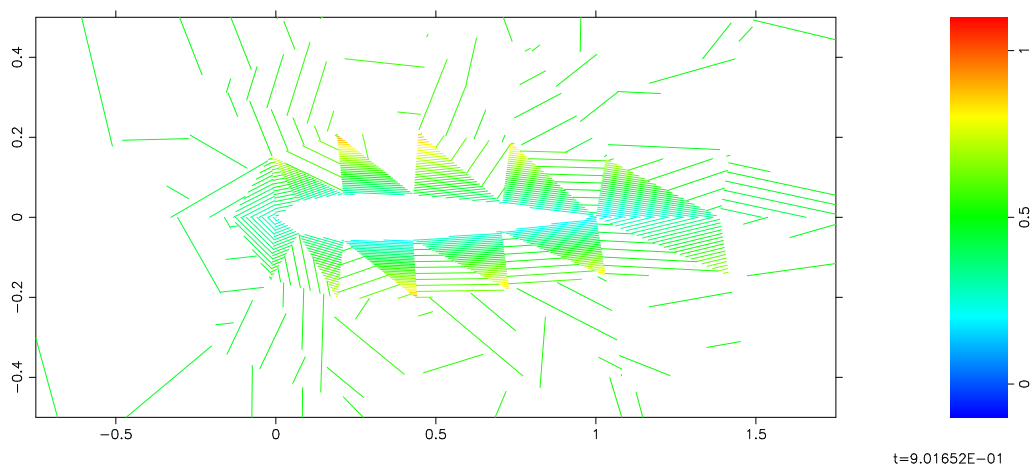
Příklady vizualizací po částech polynomiálních řešení stupně vyššího než jedna si ukážeme na modelu obtékání leteckého profilu. První příklad je numerické řešení, které je po částech kvadratické. Na obrázku 4.9 vidíme původní triangulaci. Jedná se ovšem pouze o detailní výřez okolí profilu. Jak je patrné na vizualizaci pomocí isočar na obrázku 4.10, bude potřeba aplikovat metody aproximace na jemnější síti. Zvolíme tedy postupně  $N = 2, 3$  a  $4$ . Výsledné vizualizace a triangulace jsou na obrázcích 4.11 až 4.20.

Konečně následuje po částech kubické řešení. Tentokrát uvedeme pouze triangulace a vizualizace pro  $N = 3, 4$  a  $5$ . Pro nižší  $N$  by byla získaná vizualizace značně nepřesná. Triangulace a vizualizace pro po částech kubické řešení jsou na obrázcích 4.21 až 4.30.

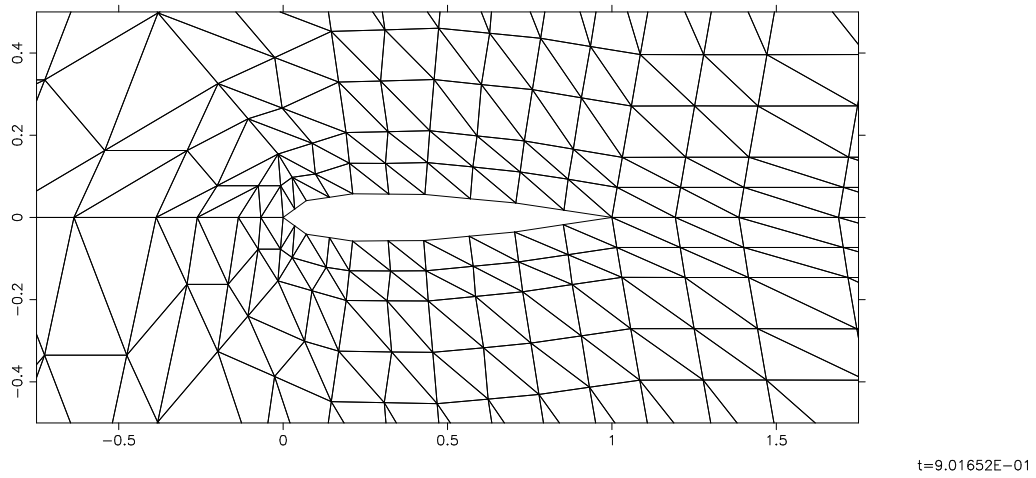
Na závěr se vrátíme k vizualizaci proudění GAMM kanálem. Ze získaných obrázků umíme vytvořit krátkou videosekvenci, pokud jsou seřazeny ve správném časovém sledu. Ukázkou videosekvence najdeme na přiloženém disku. Zde na obrázcích 4.31 až 4.34 ukážeme pouze čtyři snímky, na kterých jsou zobrazeny různé fáze z této videosekvence.



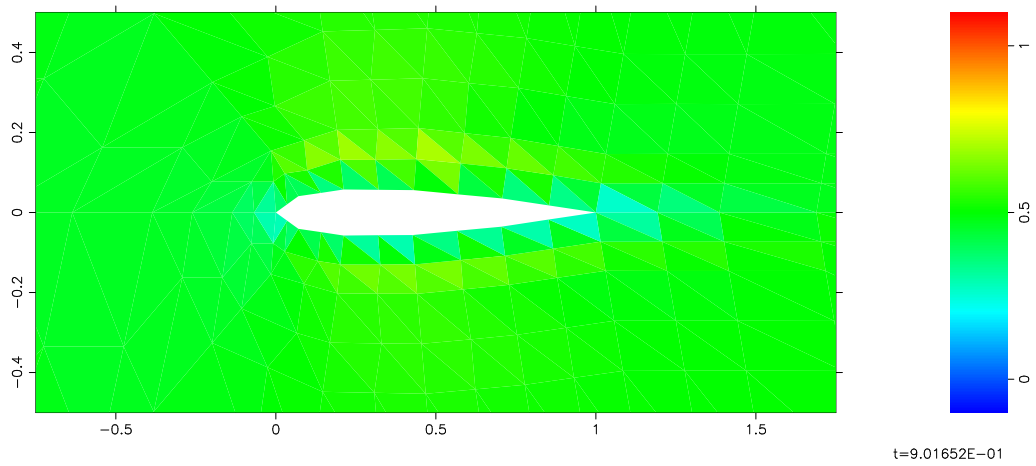
Obrázek 4.9: NACA 0012, P2, Machovo číslo, původní triangulace.



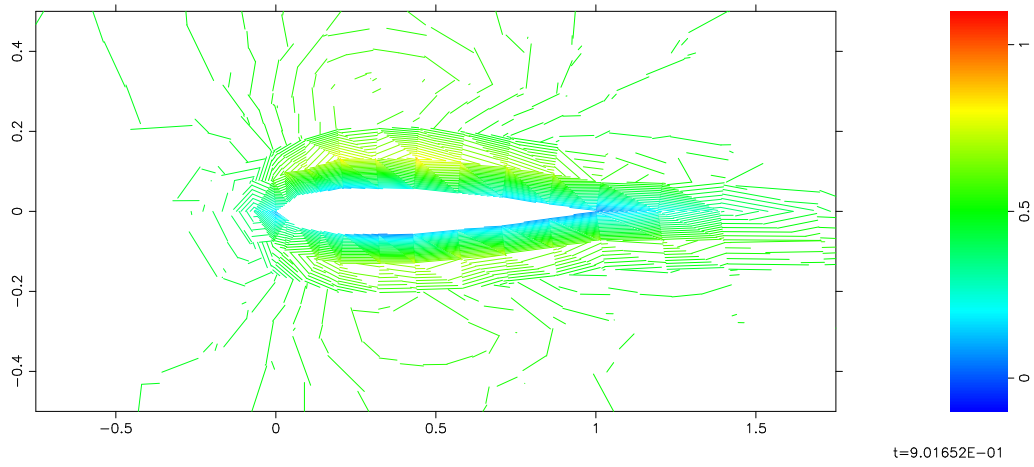
Obrázek 4.10: NACA 0012, P2, Machovo číslo, vizualizace pomocí isočar.



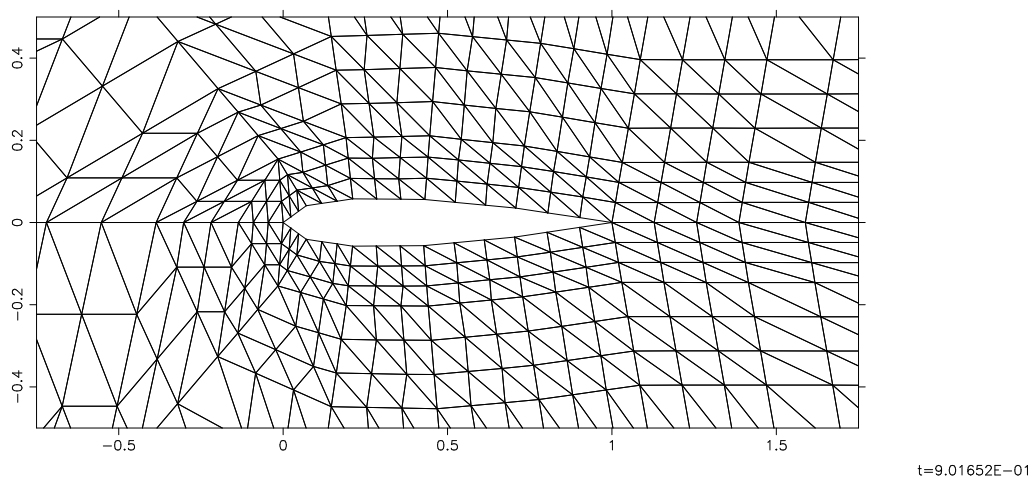
Obrázek 4.11: NACA 0012, P2,  $N = 2$ , Machovo číslo, triangulace.



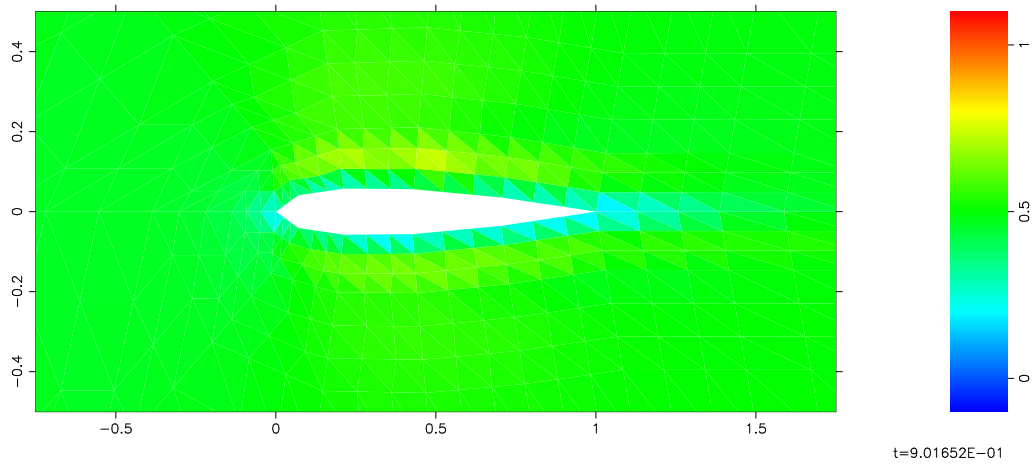
Obrázek 4.12: NACA 0012, P2,  $N = 2$ , Machovo číslo, vizualizace pomocí barevných map.



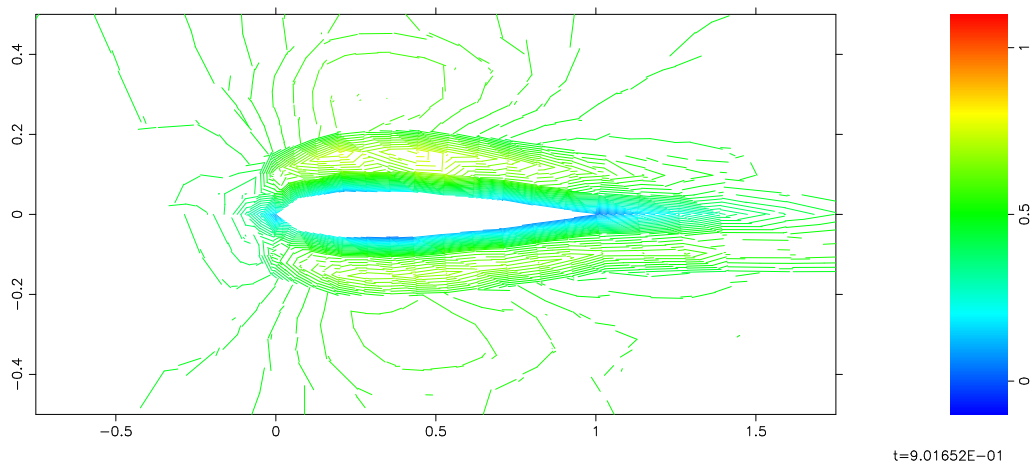
Obrázek 4.13: NACA 0012, P2,  $N = 2$ , Machovo číslo, vizualizace pomocí isočar.



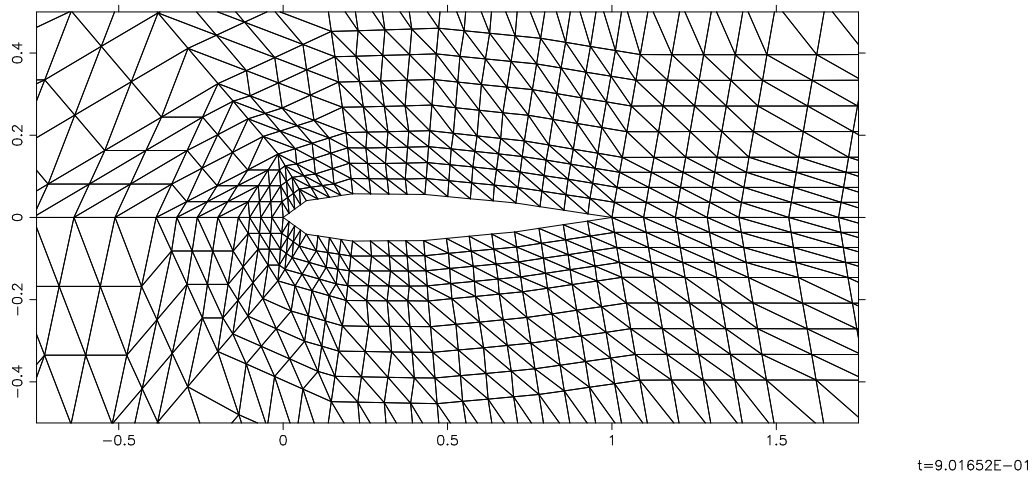
Obrázek 4.14: NACA 0012, P2,  $N = 3$ , Machovo číslo, triangulace.



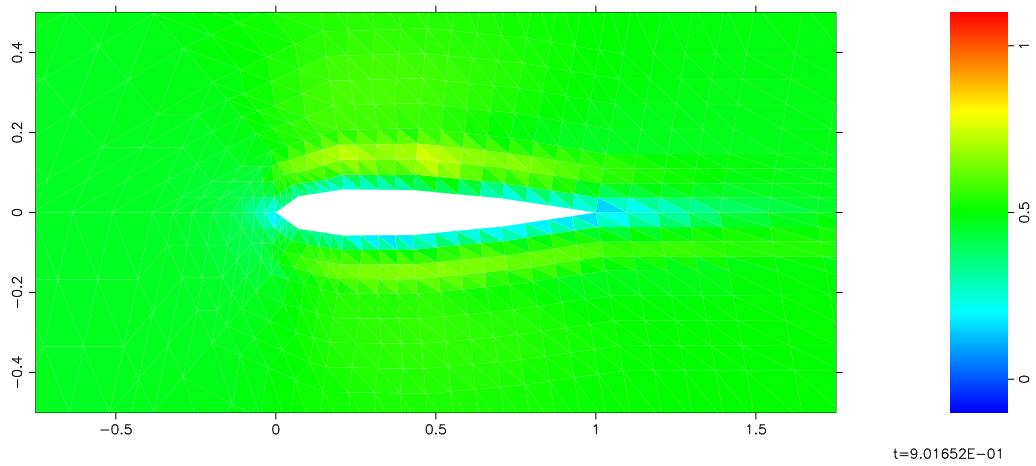
Obrázek 4.15: NACA 0012, P2,  $N = 3$ , Machovo číslo, vizualizace pomocí barevných map.



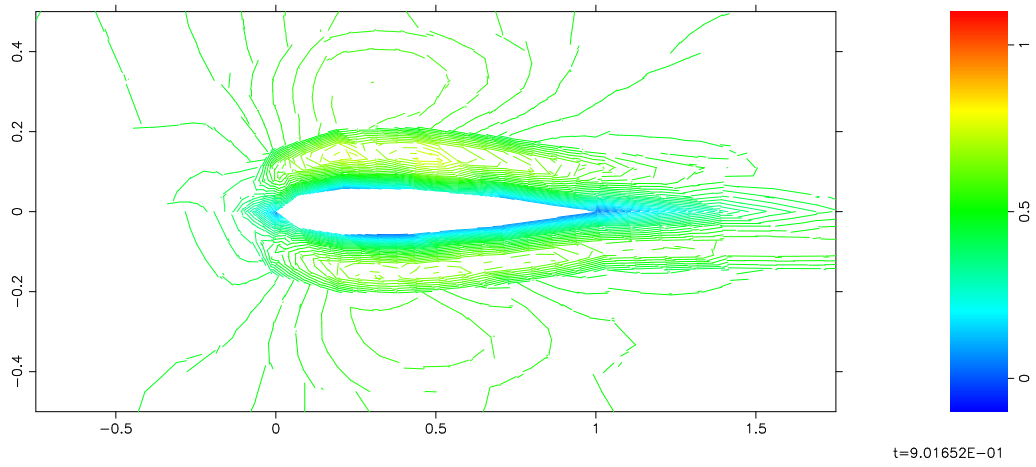
Obrázek 4.16: NACA 0012, P2,  $N = 3$ , Machovo číslo, vizualizace pomocí isočar.



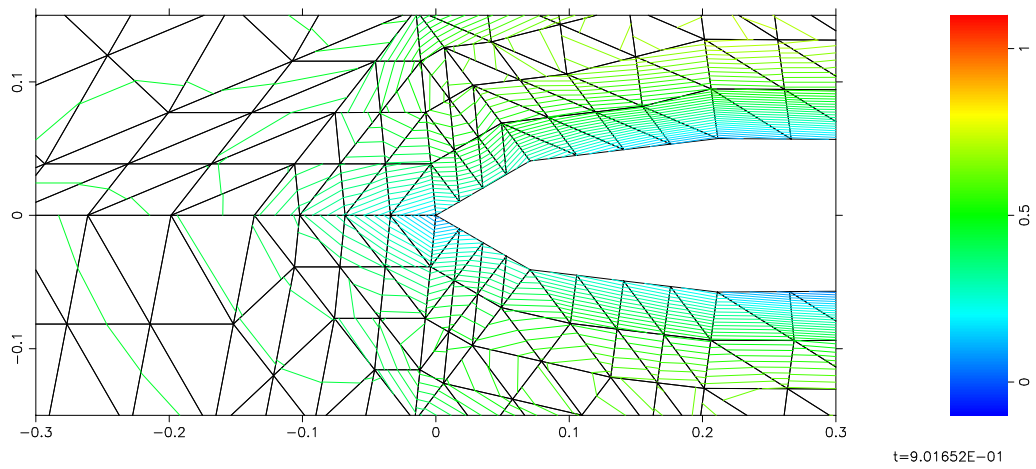
Obrázek 4.17: NACA 0012, P2,  $N = 4$ , Machovo číslo, triangulace.



Obrázek 4.18: NACA 0012, P2,  $N = 4$ , Machovo číslo, vizualizace pomocí barevných map.

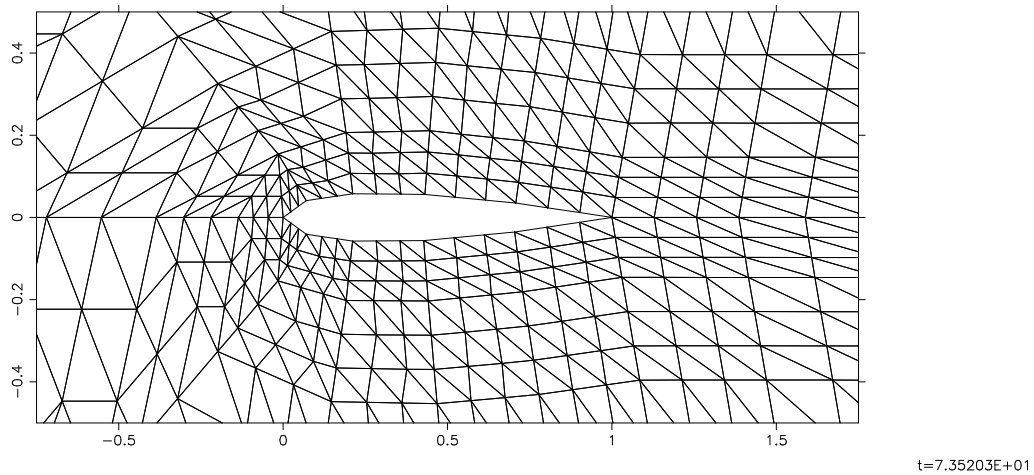


Obrázek 4.19: NACA 0012, P2,  $N = 4$ , Machovo číslo, vizualizace pomocí isočar.

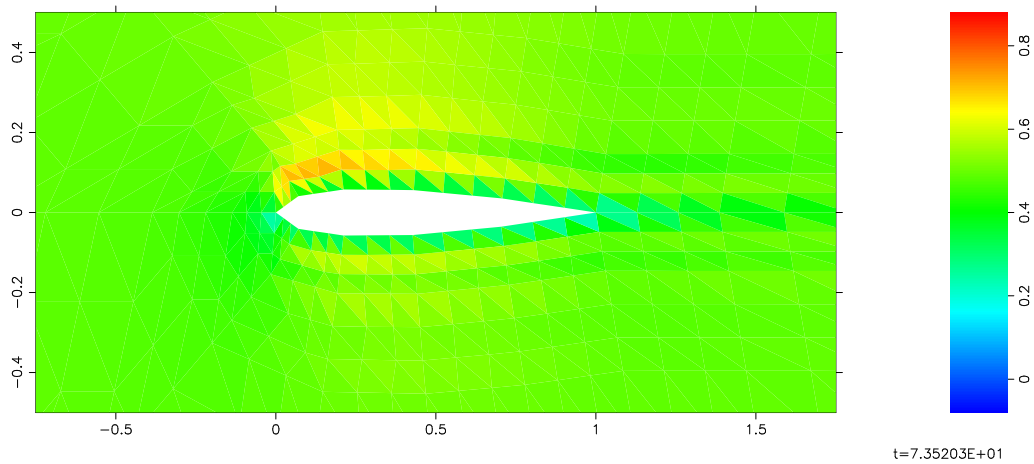


Obrázek 4.20: NACA 0012, P2,  $N = 4$ , Machovo číslo, vizualizace pomocí isočar na trojúhelníkové síti.

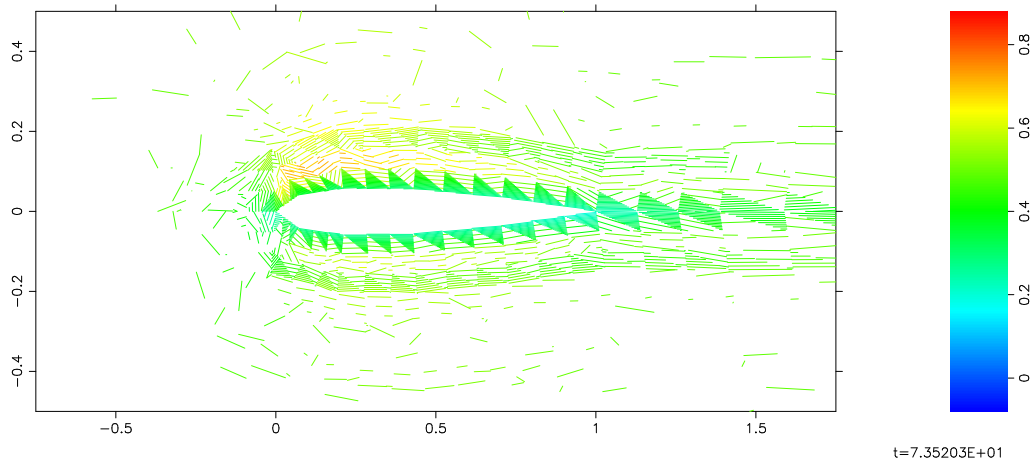




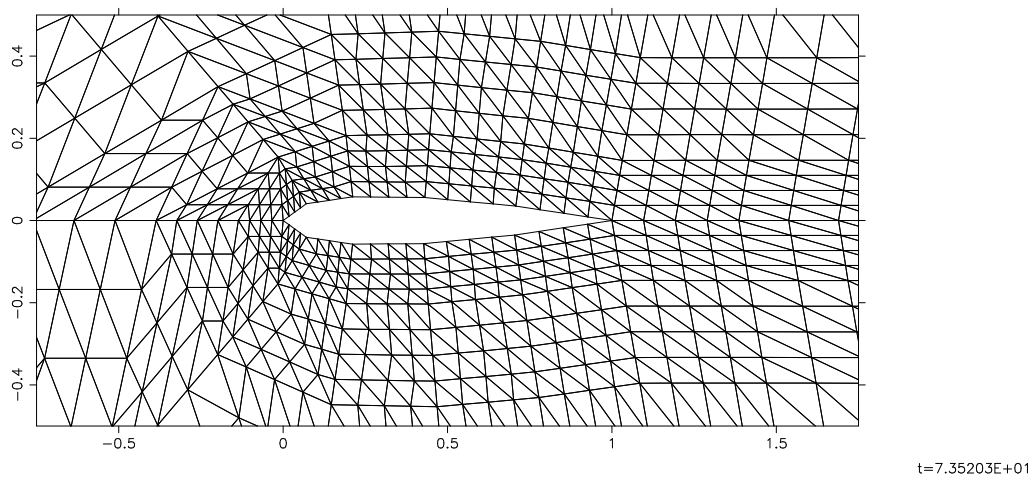
Obrázek 4.21: NACA 0012, P3,  $N = 3$ , Machovo číslo, triangulace.



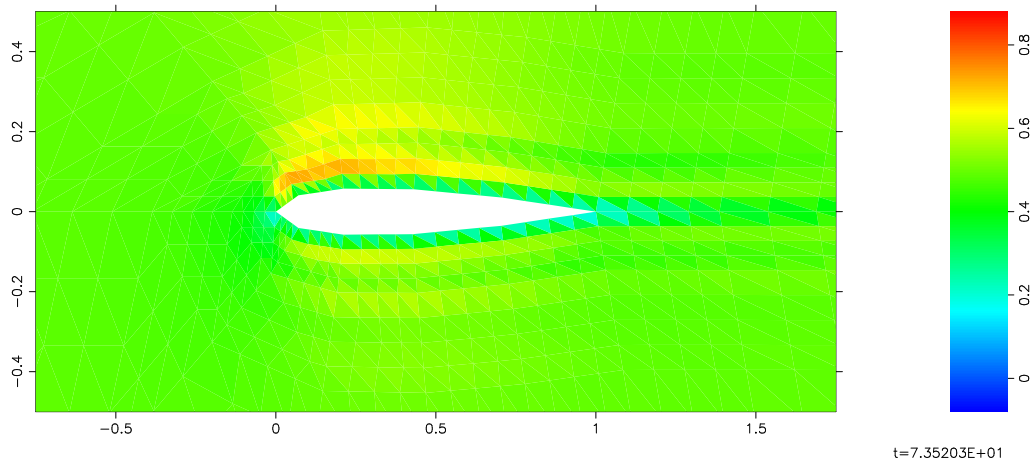
Obrázek 4.22: NACA 0012, P3,  $N = 3$ , Machovo číslo, vizualizace pomocí barevných map.



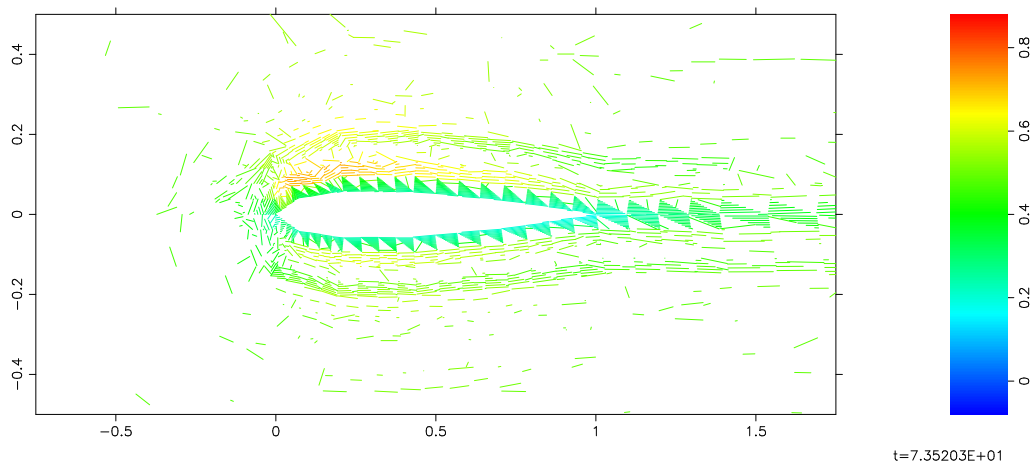
Obrázek 4.23: NACA 0012, P3,  $N = 3$ , Machovo číslo, vizualizace pomocí isočar.



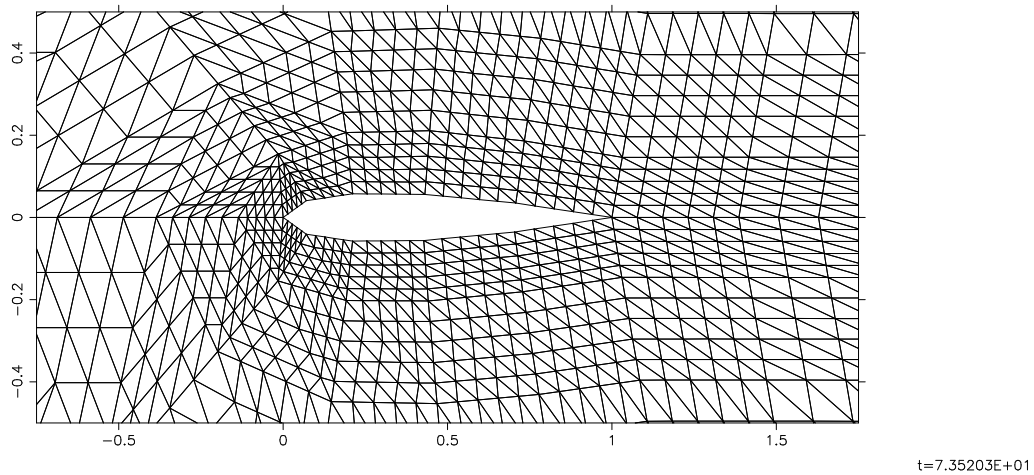
Obrázek 4.24: NACA 0012, P3,  $N = 4$ , Machovo číslo, triangulace.



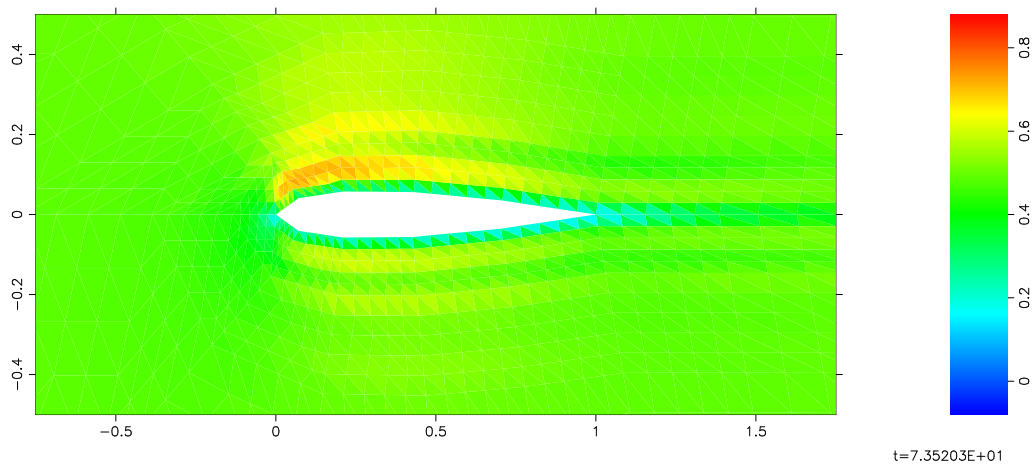
Obrázek 4.25: NACA 0012, P3,  $N = 4$ , Machovo číslo, vizualizace pomocí barevných map.



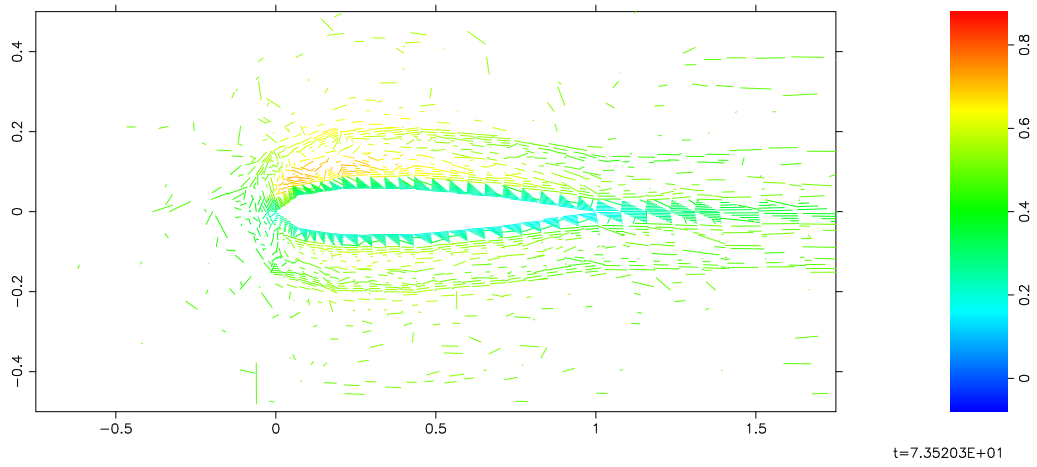
Obrázek 4.26: NACA 0012, P3,  $N = 4$ , Machovo číslo, vizualizace pomocí isočar.



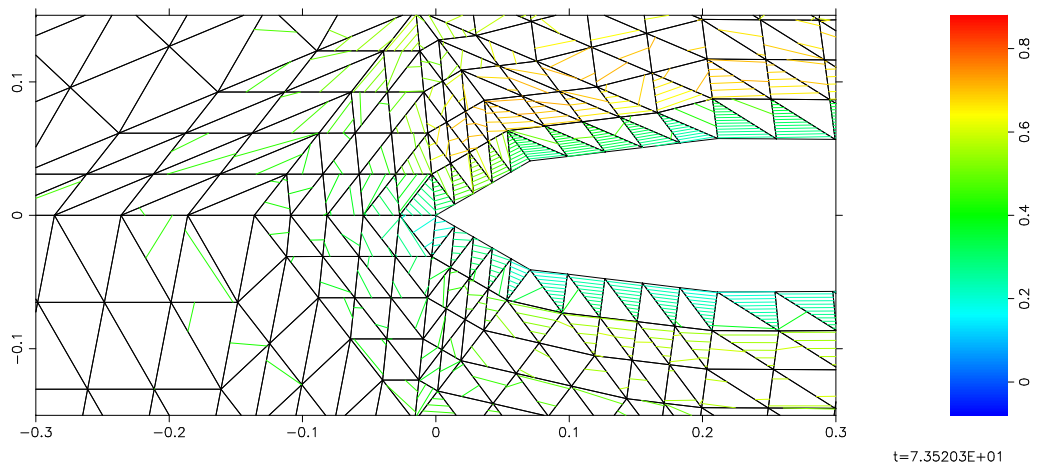
Obrázek 4.27: NACA 0012, P3,  $N = 5$ , Machovo číslo, triangulace.



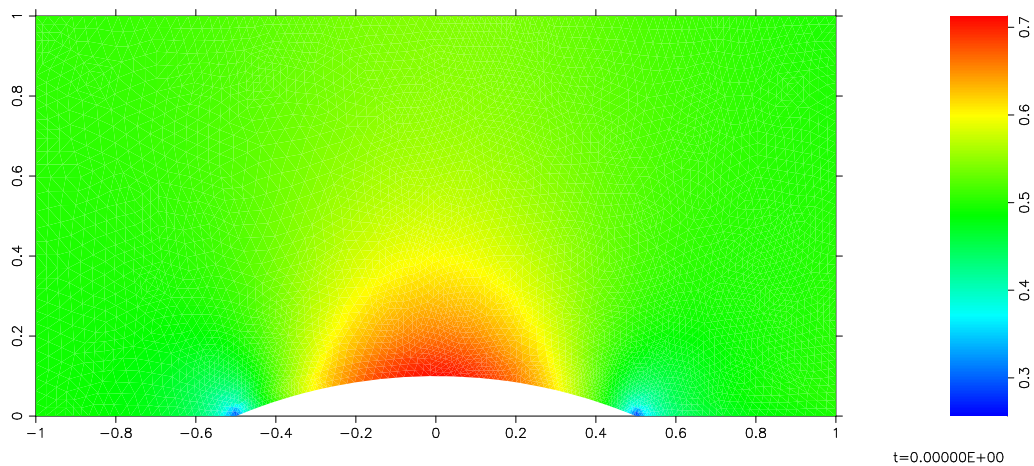
Obrázek 4.28: NACA 0012, P3,  $N = 5$ , Machovo číslo, vizualizace pomocí barevných map.



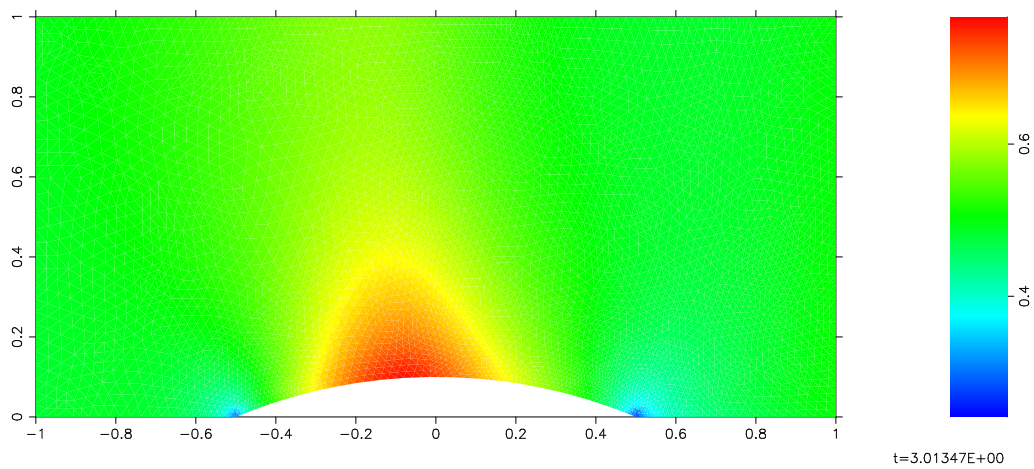
Obrázek 4.29: NACA 0012, P3,  $N = 5$ , Machovo číslo, vizualizace pomocí isočar.



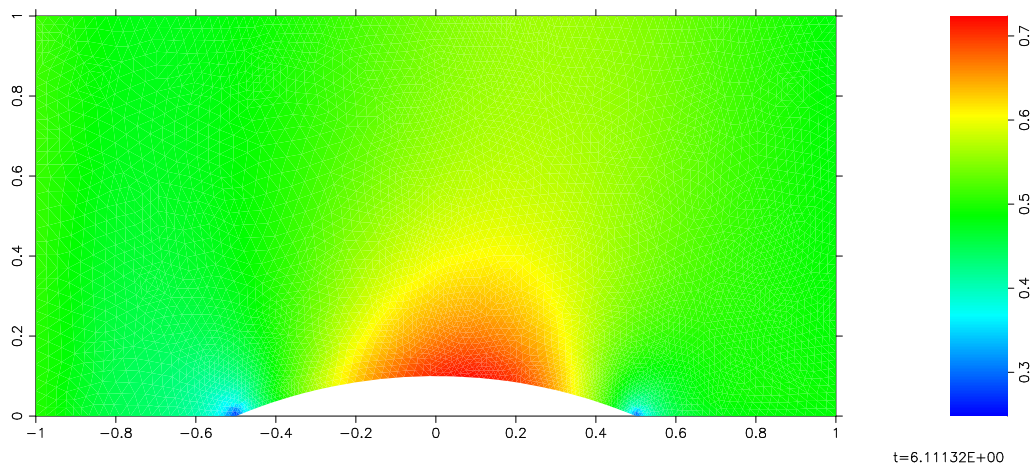
Obrázek 4.30: NACA 0012, P3,  $N = 5$ , Machovo číslo, vizualizace pomocí isočar na trojúhelníkové síti.



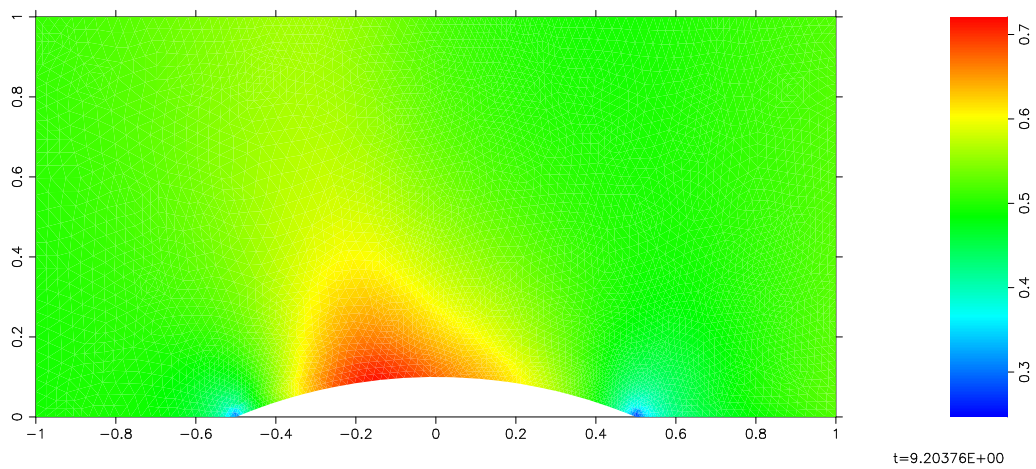
Obrázek 4.31: GAMM, P1,  $N = 3$ , Machovo číslo, vizualizace pomocí barevných map.



Obrázek 4.32: GAMM, P1,  $N = 3$ , Machovo číslo, vizualizace pomocí barevných map.



Obrázek 4.33: GAMM, P1,  $N = 3$ , Machovo číslo, vizualizace pomocí barevných map.



Obrázek 4.34: GAMM, P1,  $N = 3$ , Machovo číslo, vizualizace pomocí barevných map.

V této kapitole jsme prezentovali vizualizace po částech lineárních, kvadratických a kubických řešení. Tyto vizualizace jsme získali pomocí programu, který nejprve pomocí navržených metod aproximoval daná řešení na po částech konstantní a lineární řešení. Volili jsme různá  $N$ , která určují dělení původní triangulace. Z výsledků je vidět, že rozdíl mezi vizualizací pro  $N$  o jedna a o dva větší, než je stupeň polynomiálního řešení, není už nijak výrazný. Dá se předpokládat, že tato volba  $N$  je pro tyto příklady dostatečně přesná. Samotné výpočty na počítači proběhly velmi rychle. Tato metoda se zdá být pro takovéto úlohy také dostatečně efektivní.

Jak již bylo několikrát zmíněno, k této práci je přiložen datový disk. Najdeme na něm programy a jejich zdrojové kódy. Po správné kompilaci by měly být tyto programy spustitelné na libovolné linuxové distribuci. Vizualizační program vyžaduje grafickou knihovnu PGPLOT viz.[1]. Dále na tomto disku jsou ukázky vizualizací a datové soubory, které určují triangulace a po částech polynomiální řešení. Můžeme si prohlédnout nejenom obrázky, ale i krátké videosekvence.



# Literatura

- [1] PGPLOT Graphics Subroutine Library,  
<http://www.astro.caltech.edu/~tjp/pgplot/>
- [2] Visualization Software TECPLOT, <http://www.tecplot.com>
- [3] Ciarlet P. G.: *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, Siam, Philadelphia, 2002.
- [4] Vít Dolejší: Semi-implicit Interior Penalty Discontinuous Galerkin Methods for Viscous Compressible Flows, *Communications in Computational Physics* 4(2):231-274, 2008.
- [5] Jarník V.: *Integrální počet II.*, Academia Praha, 1976.