

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Daněk Kamil

Dynamika systémů s proměnnou hmotností

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Podolský Jiří, Csc., Dsc.

Studijní program: obecná fyzika

2008

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 27.5. 2008

Kamil Daněk

Obsah

1	Úvod	5
2	Příklady systémů s proměnnou hmotností	7
2.1	Buquoyovy úlohy	7
2.2	Dopravní pásy	13
2.3	Kapka, pluh, raketa	20
3	Zákon zachování energie pro systémy s proměnnou hmotností	27
3.1	Práce vnějších sil a funkcionál energie	27
3.2	Energetická bilance pro konkrétní případy systémů s proměnnou hmotností	32
4	Závěr	43
	Literatura	45

Název práce: Dynamika systémů s proměnnou hmotností

Autor: Kamil Daněk

Katedra (ústav): Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Podolský Jiří, Csc., Dsc.

e-mail vedoucího: Jiri.Podolsky@mbox.troja.mff.cuni.cz

Abstrakt: V práci studujeme dynamiku systémů, jejichž hmotnost se mění. Vycházíme z obecného Newtonova pohybového zákona a v pohybových rovnicích uvažujeme změnu hybnosti související ze změnou hmotnosti. V první části této práce formulujeme a řešíme pohybové rovnice pro různé příklady takovýchto systémů. Příklady jsou rozděleny do tří skupin. První skupinu tvoří Buquoyovy úlohy s hmotností přímo závislou na poloze, druhá je tvořena úlohami dopravního pásu pro hmotnost závislou na čase a v třetí uvádíme úlohy kapky v mraku, pluhu a rakety. V druhé části práce podrobně zkoumáme zákon zachování energie v obecném případě systémů s proměnnou hmotností. Presentujeme jeho formulaci v několika verzích a ukazujeme její platnost na většině příkladů z první části práce.

Klíčová slova: proměnná hmotnost, zákon zachování energie, Buquoyovy úlohy, dopravní pás, kapka v mraku

Title: Dynamics of variable mass systems

Author: Kamil Daněk

Department: Institute of Theoretical Physics

Supervisor: Doc. RNDr. Jiří Podolský, CSc., DSc.

Supervisor's e-mail address: Jiri.Podolsky@mbox.troja.mff.cuni.cz

Abstract: In this work we study dynamics of systems in which their mass can change. We start from general Newton's law of motion, and in equations of motion we consider momentum change connected with the change of mass. In the first part of work we formulate and solve equations of motion for different examples of such systems. Examples are divided into three groups. The first group include Buquoys' problems where the mass is a function of coordinates. The second group includes conveyor-belt problems where the mass is function of time. In third group we present falling of a drop in a cloud, a motion of plow and a rocket problem. In the second part of this work we study conservation of energy in a completely general case of variable mass systems. We present its formulation in several versions, and we demonstrate its validity for most of examples included in the first part of this work.

Keywords: variable mass systems, conservation of energy, Buquoys' problems, conveyor-belt, drop in a cloud

Kapitola 1

Úvod

Mechanické systémy s proměnnou hmotností patří k zajímavým, ovšem poněkud opomíjeným partiím mechaniky.¹ V této práci podrobně popíšeme řadu systémů tohoto typu a poté ukážeme, že pro systémy s proměnnou hmotností neplatí zákon zachování mechanické energie v obvyklém tvaru rovnosti mezi prací vnějších sil a změnou kinetické energie. Předložíme jeho zobecnění a podrobně ho rozebereme.

Vzhledem k tomu, že v této práci nezabýváme relativistickými efekty, realisuje se změna hmotnosti tím, že si systém vyměňuje hmotu s okolím. Budeme uvažovat spojitou změnu hmotnosti pohybujícího se tělesa. Pokud hmota vstupuje do systému (resp. vystupuje z něj) s nulovou rychlostí, můžeme v obecném Newtonově zákoně rozepsat časovou změnu hybnosti následujícím způsobem: $\dot{p} = m\dot{v} + \dot{m}v$. Spojitý nárůst hmotnosti tělesa o rychlosti v tedy vede na dodatečný člen $\dot{m}v$ v pohybové rovnici. V této práci však budeme uvažovat i případy, kdy se hmotnost systému mění „bez-interakčně“, a dále případy, kdy se celková hmotnost systému nemění, nebo kdy rychlost okolní hmoty není nulová.

První dochovaná zmínka o systémech s proměnnou hmotností pochází od Daniela Bernoulliho(1700-1782))², který zkoumal loď poháněnou proudem kapaliny. Systémy s proměnnou hmotností však pro Bernoulliho nebyly hlavním středem zájmu; zabýval se jimi pouze v rámci hydrodynamiky při studiu vodních trysek k pohonu lodi. První, kdo podrobně zkoumal systémy s

¹Například zobecnění Lagrangeova či Hamiltonova formalismu pro případ, kdy se hmotnost může měnit, není v česky psané literatuře dostupné. V použité literatuře k [5] je zmíněn např. článek [6] pojednávající o systémech s proměnnou hmotností v Hamiltonově formalismu

²V článku [5] se uvádí přímo odkaz na práci [1]

proměnnou hmotností, byl hrabě Jiří František August Buquoy (1781-1851)³. V roce 1812 formuloval pohybové rovnice pro případ proměnné hmotnosti [3] a v roce 1814 přidal několik konkrétních příkladů. V srpnu 1815 prezentoval své výsledky na Pařížské akademii věd před Laplaccem, Poissonem, Ampérem a dalšími, ale jeho práce nevyvolala dostatečnou pozornost. Na její význam upozornil až v osmdesátých letech dvacátého století Michailov [10]. Na práci Buquoye reagoval Poisson, který systémy s proměnnou hmotností začlenil do Lagrangeova formalismu [13]. Dalšími, kteří se touto problematikou zabývali, byli Tait a Steele [15], kteří zavedli formalismus popisující systémy s proměnou hmotností pomocí síly spojené se změnou hmotnosti systému. V letech 1897 až 1904 Meščerskij [9] rozšířil práci Taita a Steele a položil základy dynamiky s proměnnou hmotností jako speciálního oboru mechaniky. Této problematice se věnoval dále Levi-Civita [8]. Od druhé světové války se danému tématu věnuje velká pozornost kvůli raketové technice.

Východiskem naší práce jsou historické Buquoyovy úlohy. V novodobé literatuře je částečně zpracoval Panovko v učebnici [11]. V české literatuře se Buquoyova úloha objevila ve skriptech [14], což vedlo ke vzniku článku [12] a následně této práce. Další zajímavé související odkazy lze nalézt v použité literatuře článku [5], který se zabývá stabilitou rotujících systémů s proměnnou hmotností.

³Jiří Buquoy byl českým šlechticem, matematikem a vynálezcem. Buquoy studoval matematiku, přírodní vědu, filosofii, právo a ekonomii v Praze a Vídni. V roce 1803 převzal správu nad rozsáhlým rodinným majetkem. V roce 1810 sestrojil parní stroj. Věnoval se také sklářství. Na základě mnoha experimentů se mu podařilo vyvinout černé sklo podobné odsidiánu zvané hyalit.

Kapitola 2

Příklady systémů s proměnnou hmotností

2.1 Buquoyovy úlohy

Buquoyovými úlohami¹ v této práci nazývám systémy, ve kterých se vyskytuje idealizované lanko, které se bez tření odvíjí působením vnějších sil ze svého ložiska (např. volně smotané na zemi). Vnější síly působí pouze na již odmotanou část (a právě odmotávanou) lana. Zadáním lineární hustoty získáme vztah mezi hmotností systému a odmotanou délkou lana. V následujících úlohách budeme předpokládat, že pohyb lana je jednorozměrný (souřadnice x bude určovat polohu konce lana; řešení s $x < 0$ nebudou mít fyzikální význam), že lineární hustota lana η je konstantní a že délka lana může být nekonečná (ve smyslu, že neuvažujeme situaci, kdy lano odmotáme celé). Ložisko lana je v bodě $x = 0$.

Dynamikou podobných systémů se zabývá ještě [11] a [16].

Harpuna:

Na lano odmotané do délky x_0 je připevněn předmět (harpuna) o hmotnosti M s kladnou počáteční rychlostí $v_0 = 0$, který lano odmotává. Na systém nepůsobí žádné vnější síly.

Řešení: Pohybová rovnice z obecného Newtonova zákona je

$$m\dot{x} + m\ddot{x} = 0. \tag{2.1}$$

¹Tento název jsem použil, neboť v této podkapitole uvádím řešení historické úlohy Jiřího Buquoye z článku [12] a rovněž zjednodušené verze této úlohy.

Po dosazení $m = M + \eta x$ obdržíme,

$$\eta \dot{x}^2 + (M + \eta x)\ddot{x} = 0, \quad (2.2)$$

kterou lze integrovat podle času. Po dosazení počátečních podmínek získáme rovnici

$$\eta x \dot{x} + M \dot{x} - (M + \eta x_0)v_0 = 0, \quad (2.3)$$

ze které lze vyjádřit závislost rychlosti na poloze

$$\dot{x} = \frac{(M + \eta x_0)v_0}{\eta x + M}. \quad (2.4)$$

Rovnici (2.3) lze opět integrovat podle času. Výsledkem je kvadratická rovnice pro x , která má jen jeden kladný (a tedy fyzikální) kořen

$$x = \frac{1}{\eta}(\sqrt{(M + \eta x_0)^2 + 2\eta v_0(\eta x_0 + M)t} - M). \quad (2.5)$$

Z rovnice (2.5) lze nyní dosadit do (2.4), čímž obdržíme explicitní závislost rychlosti na čase (případně lze také rovnici (2.4) derivovat podle času):

$$\dot{x} = \frac{(M + \eta x_0)v_0}{\sqrt{(M + \eta x_0)^2 + 2\eta v_0(\eta x_0 + M)t}}. \quad (2.6)$$

Rychlost systému tedy klesá s časem (a s x), pro konečné časy je však nenulová. Pro čas jdoucí do nekonečna bude mít systém nulovou rychlost, nekonečnou hmotnost a konečnou hybnost.

Pro $M = 0$ a $x_0, v_0 > 0$ se rovnice (2.5) zjednoduší na

$$x = \sqrt{x_0^2 + 2x_0v_0t}, \quad (2.7)$$

která představuje časový vývoj systému, ve kterém se samotné lanko odmotává setrvačností své již odmotané části.

Zachování celkové hybnosti systému je ekvivalentní s výchozí rovnicí (2.1). Z vyjádření kinetické energie podle obvyklého vztahu $T = \frac{1}{2}mv^2$, do kterého dosadíme za rychlost z rovnice (2.4),

$$T = \frac{(M + \eta x_0)^2 v_0^2}{2(M + \eta x)}, \quad (2.8)$$

je však vidět, že celková kinetická energie se nezachovává.

Buquoyova úloha v beztíží:

Na lanko působí konstantní síla F v kladném směru osy x . Dále předpokládáme počáteční podmínku $v_0 \geq 0$.

Řešení: Výchozí rovnici

$$m\dot{x} + m\ddot{x} = F \quad (2.9)$$

lze po dosazení $m = \eta x$ vyjádřit

$$\dot{x}^2 + x\ddot{x} = \frac{F}{\eta}, \quad (2.10)$$

poté přenásobit členem $x\dot{x}$ a zintegrovat podle času:

$$\frac{1}{2}(x\dot{x})^2 - \frac{1}{2}(x_0v_0)^2 = \frac{Fx^2}{2\eta} - \frac{Fx_0^2}{2\eta}. \quad (2.11)$$

Odtud lze vyjádřit závislost rychlost na x :

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{F}{\eta} \left(1 - \frac{x_0^2}{x^2}\right) + \left(v_0 \frac{x_0}{x}\right)^2}. \quad (2.12)$$

Z rovnice (2.12) je vidět, že pro volbu $x_0 = 0$ a v_0 konečné je $\dot{x} = \sqrt{\frac{F}{\eta}}$, a tedy konstantní. V tomto případě je také řešení nezávislé na volbě v_0 , což není příliš překvapivé vzhledem k tomu, že tato veličina představuje rychlost lana nulové délky a tedy nulové hmotnosti. Počáteční rychlost v_0 je vhodné spojitě navázat na řešení $\dot{x} = \sqrt{\frac{F}{\eta}}$. Pro $x_0 \neq 0$ se \dot{x} limitně, pro x jdoucí do nekonečna, blíží $\sqrt{\frac{F}{\eta}}$. Dojde tedy k vyrovnání tažné síly F a setrvačné síly $m\dot{x}$, která vzniká díky změně hmotnosti systému.

Abychom získali závislost x na čase t , integrujeme rovnici (2.10) podle času

$$x\dot{x} - x_0v_0 = \frac{F}{\eta}t, \quad (2.13)$$

do které dosadíme za \dot{x} z (2.12) a vyjádříme x

$$x = \sqrt{\frac{F}{\eta}t^2 + 2x_0v_0t + x_0^2}. \quad (2.14)$$

Pro $F = 0$ přejde rovnice (2.14) na rovnici (2.7) popisující pohyb harpuny. Z rovnice (2.12) lze vyjádřit závislost okamžité kinetické energie lana na x :

$$T = \frac{1}{2}Fx + \frac{1}{2x}(\eta v_0^2 x_0^2 - Fx_0^2). \quad (2.15)$$

Obvyklý zákon zachování energie by měl mít tvar rovnosti mezi prací vnější síly F a změnou kinetické energie lanka. Práce síly F je lineární funkcí souřadnice x , tedy $W = F(x - x_0)$, ovšem závislost kinetické energie lanka na x lineární není, jak je vidět ze vztahu (2.15). Pro rozdíl vykonané práce a přírůstku kinetické energie $W - \Delta T = E_D$ platí vztah

$$E_D = F \frac{(x - x_0)^2}{2x} + \frac{1}{2} \eta x_0 v_0^2 \left(1 - \frac{x_0}{x}\right). \quad (2.16)$$

Veličina E_D určená vztahem (2.16) je rostoucí funkcí x . Konkrétně pro počáteční podmínku $x_0 = 0$ je právě rovna polovině práce vykonané silou F .

Buquoyova úloha (1811):

Lanko je taženo konstantní vertikální silou F z horizontální podložky proti působení homogenního gravitačního pole. Kladný směr osy x nyní představuje směr nahoru. Při pohybu orientovaném dolů (proti směru osy x , tedy $\dot{x} < 0$) lanko opět mizí ve svém ložisku (aniž by interagovalo se zbytkem, který se ještě pohybuje).

Řešení: Podrobné řešení této úlohy je uvedeno v [12]. Výsledky zde tedy pouze shrneme a uvedeme několik základních bodů výpočtu. Vychází se zde z Newtonova zákona $\dot{p} = F - mg$, ale je nutno uvážit, že rychlost změny hybnosti \dot{p} ve výchozí rovnici má jiný tvar pro pohyb vzhůru než pro pohyb lana dolů. Konkrétně se při pohybu lana dolů neuplatní člen $m\dot{x}$. Úloha tedy vede na dvě pohybové rovnice pro dvě orientace rychlosti:

$$\ddot{x} = \frac{F}{\eta x} - g - \frac{\dot{x}^2}{x} \quad (2.17)$$

pro pohyb nahoru a

$$\ddot{x} = \frac{F}{\eta x} - g \quad (2.18)$$

pro pohyb dolů. Tyto rovnice jdou na sebe formálně napojit pomocí funkce $\text{sgn } \dot{x}$ v bodech obratu, kde $\dot{x} = 0$. Rovnice popisující celkový pohyb lana je

$$\ddot{x} = g \left(\frac{x_c}{x} - 1 \right) - \frac{1}{2} (1 + \text{sgn } \dot{x}) \frac{\dot{x}^2}{x}, \quad (2.19)$$

kde $x_c \equiv \frac{F}{\eta g}$.

Dále je v [12] diskutován pohyb lana vzhůru a dolů zvlášť, přičemž se využívá toho, že pohybové rovnice lze převést na tvar odpovídající pohybu virtuální částice jednotkové hmotnosti v efektivním potenciálu síly, která závisí na x . Pro pohyb nahoru platí

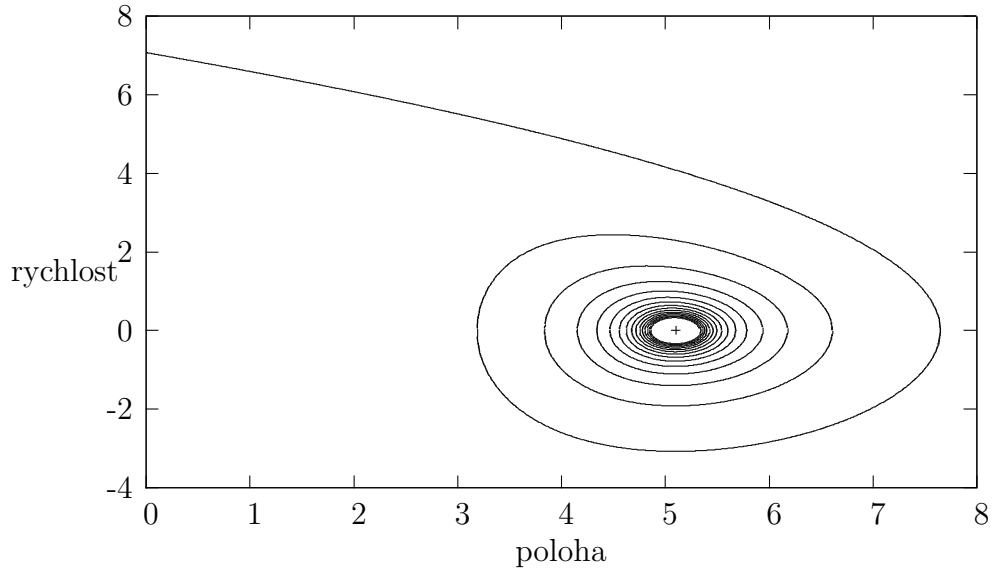
$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 + V_{ef}^\uparrow = \frac{F}{2\eta}, \quad \text{kde} \quad V_{ef}^\uparrow \equiv \frac{g}{3}x - \frac{C}{x^2}, \quad (2.20)$$

přičemž veličina $\frac{F}{2\eta}$ představuje celkovou mechanickou energii virtuální částice a $C = \frac{1}{2}(x_0 v_0)^2 - \frac{F}{2\eta} x_0^2 - (g/3)x_0^3$ je konstanta závislá na počátečních podmínkách. Pro pohyb dolů se v [12] odvozuje, že

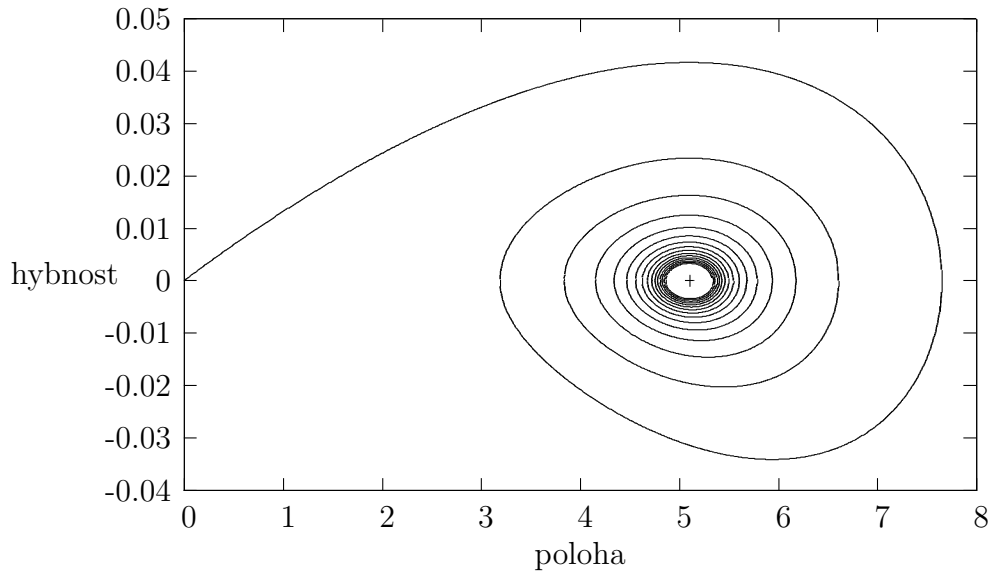
$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 + V_{ef}^\downarrow(x) = V_{ef}^\downarrow(x_1), \quad \text{kde} \quad V_{ef}^\downarrow(x) = gx - \frac{F}{\eta} \ln(x), \quad (2.21)$$

kde x_1 má smysl počáteční polohy při pohybu dolů, tedy x_1 je bod obratu předchozího pohybu vzhůru. Celkové řešení vede na tlumené oscilace okolo stacionárního bodu $x_c = \frac{F}{\eta g}$.

K výsledkům článku [12] zde pouze dodejme, že na základě znalosti rovnic (2.20) a (2.21) lze vykreslit fázové diagramy poloha-rychlost a poloha-hybnost demonstrující charakter tlumených oscilací. Načrtnutý fázový diagram s body obratu pro tuto úlohu je uveden v [11]. V této práci jsme exaktně vykreslili závislost rychlosti na poloze lana a závislost hybnosti na poloze lana pro $F = 0.1\text{N}$, $\eta = 0.002\text{kgm}^{-1}$, $g = 9.8\text{ms}^{-2}$, $x_0 = 0\text{m}$, $v_0 = \sqrt{\frac{F}{\eta}} \doteq 7.1\text{ms}^{-1}$



Obrázek 2.1: Fázový diagram poloha-rychlost

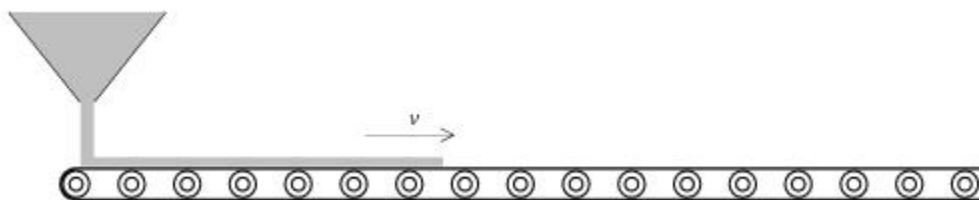


Obrázek 2.2: Fázový diagram poloha-hybnost

Bod označený křížkem představuje stacionární bod $x_c = \frac{F}{\eta g} \doteq 5.1\text{m}$, ke kterému obě křivky konvergují.

2.2 Dopravní pásy

V této podkapitole budou diskutovány základní úlohy obsahující dopravní pás o hmotnosti M , na který se z jakési sýpky bude rovnoměrně sypat hmota (např. písek) známou rychlostí, čímž bude dána vazba mezi hmotností pásu a časem (viz. Obrázek 2.3). V následujících úlohách budeme uvažovat konstantní rychlost nárůstu hmotnosti pásu $\dot{m} = \mu$. O pásu budeme dále předpokládat, že je dokonale tuhý a nekonečně dlouhý. Materiál, který se na pás kolmo sype, na pásu neprokluzuje, je po dopadu okamžitě stržen a dále pokračuje stejnou rychlostí jako pás. Souřadnice x bude mít význam polohy referenčního bodu na povrchu pásu.



Obrázek 2.3: Dopravní pás

Doběh pásu:

Na dopravní pás nepůsobí vnější síly. Počáteční rychlost pásu je v_0 .

Řešení: Vzhledem k absenci vnějšího silového působení se musí zachovávat celková hybnost systému, díky čemuž můžeme rovnou psát

$$\dot{x} = \frac{p_0}{m} = \frac{Mv_0}{M + \mu t}, \quad (2.22)$$

kde p_0 má význam počáteční hybnosti pásu a v_0 je jeho počáteční rychlost. Integrací (2.22) podle času získáme závislost polohy na čase

$$x = x_0 + \frac{M}{\mu} v_0 \ln \left(\frac{M + \mu t}{M} \right). \quad (2.23)$$

V limitě $t \rightarrow \infty$ jde rychlost \dot{x} asymptoticky k nule zatímco poloha koncového bodu pásu jde do nekonečna. Nezachování kinetické energie systému

je opět evidentní z rovnice (2.22), neboť okamžitá rychlost je nepřímo úměrná celkové hmotnosti systému.

Běžící dopravní pás:

Dopravní pás je tažen konstantní silou F ve směru osy x . Počáteční rychlost v_0 je nezáporná.

Řešení: Newtonův pohybový zákon $\dot{p} = F$ integrujeme podle času s výsledkem

$$\dot{x} = \frac{Ft + Mv_0}{M + \mu t} = \frac{F}{\mu} + \frac{v_0 - \frac{F}{\mu}}{M + \mu t}M. \quad (2.24)$$

Je vidět, že v řešení pohybu dopravního pásu se vyskytuje řešení s konstantní rychlostí $v = v_0 = \frac{F}{\mu}$, a tomuto řešení se rychlost blíží pro velké časy. V tom je jistá podobnost s Buquoyovou úlohou v beztíži. Rovnici (2.24) lze dále integrovat podle času

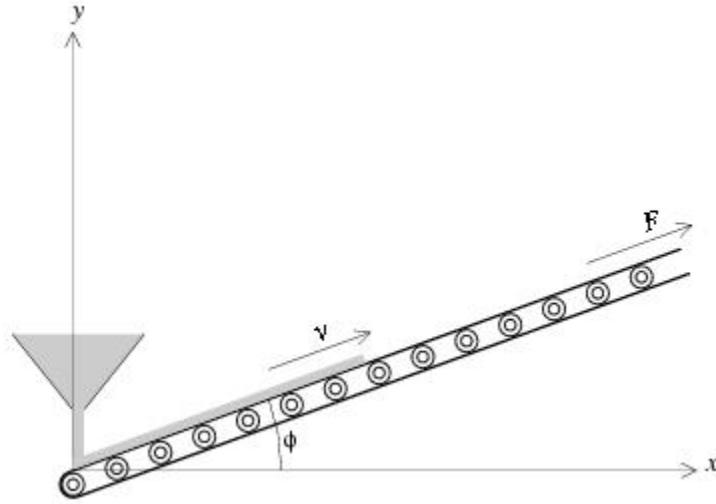
$$x = \frac{F}{\mu}t + \frac{M}{\mu} \left(v_0 - \frac{F}{\mu} \right) \ln \left(\frac{M + \mu t}{M} \right). \quad (2.25)$$

Opět vidíme, že pro $t \rightarrow \infty$ je $x \rightarrow \infty$.

Nakloněný pás/rypadlo:

Pás je v homogenním gravitačním poli g a s horizontální rovinou svírá úhel $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, na pás dále působí konstantní síla F ve směru pásu. V čase $t = 0$ se na pás začne sypat materiál konstantní rychlostí μ . Pás je na posuvných kolech namotán tak, že se gravitační působení na něj vyruší s reakcí kol, takže budeme uvažovat pouze působení gravitační síly na hmotu na pásu, nikoli na pás samotný. Známe rychlost a polohu pásu v čase $t = 0$. Úlohu uvažujme pouze pro případ, že rychlost pásu je nezáporná.

V případě, pro ϕ blízké $\frac{\pi}{2}$ je lepší si místo pásu představovat spíše rypadlo, které samo hmotu nabírá pomocí radlic a vyváží ji nahoru (nutno si uvědomit, že \dot{m} musí zůstat konstantní, tedy radlice nemohou být zaplněny stejně při nekonstantní rychlosti rypadla), ovšem opět v idealizaci, že celý děj probíhá spojitě.



Obrázek 2.4: Nakloněný dopravní pás

Řešení: Bod na pásu se tedy pohybuje po přímce, kterou parametrizují $x = s \cos \phi$ a $y = s \sin \phi$. Z geometrie úlohy vyplývá, že

$$\dot{p} = F - \mu t g \sin \phi. \quad (2.26)$$

Tuto rovnici lze rovnou integrovat podle času:

$$(M + \mu t)\dot{s} - Mv_0 = Ft - \frac{1}{2}\mu t^2 g \sin \phi, \quad (2.27)$$

a po úpravách vyjádřit rychlost ve tvaru

$$\dot{s} = C_1 - C_2 t + \frac{C_3}{M + \mu t}, \quad (2.28)$$

kde

$$C_1 = \frac{F}{\mu} + \frac{Mg \sin \phi}{2\mu}, \quad (2.29)$$

$$C_2 = \frac{1}{2}g \sin \phi, \quad (2.30)$$

$$C_3 = M \left(\dot{s}_0 - \frac{F}{\mu} \right) - \frac{M^2 g \sin \phi}{2\mu} = M(\dot{s}_0 - C_1). \quad (2.31)$$

Z rovnice (2.28) je tedy vidět, že pohyb nakloněného pásu vzhůru lze formálně rozložit na tři pohyby: Pohyb konstantní rychlostí C_1 , rovnoměrně zrychlený se zrychlením $-C_2$ a pohyb, jehož rychlost je nepřímo úměrná okamžité hmotnosti pásu (tedy pohyb podobný doběh pásu s počáteční hybností C_3).

Z rovnice (2.28) je dále vidět, že rychlost pásu je klesající funkcí času. Pás začíná na počáteční rychlosti \dot{s}_0 a dále jeho rychlost klesá, až se v konečném čase zastaví. Tento čas zastavení (resp. čas obratu) t_f lze vyjádřit z rovnice (2.27):

$$t_f = \frac{F + \sqrt{F^2 + 2M\dot{s}_0\mu g \sin \phi}}{\mu g \sin \phi}. \quad (2.32)$$

Rovnici (2.28) lze dále integrovat podle času, čímž obdržíme závislost polohy počátečního bodu na čase

$$s - s_0 = C_1 t - \frac{1}{2} C_2 t^2 + \frac{C_3}{\mu} \ln \left(\frac{M + \mu t}{M} \right). \quad (2.33)$$

Volba počáteční polohy, narozdíl od Buquoyových úloh, neovlivní dynamiku systému, proto je vhodné v dalších úlohách volit $s_0 = 0$.

Dopravní pás a rypadlo konečné délky:

Uvažujme nyní dopravní pás podobný jako v předchozí úloze, který ovšem má konečnou délku L . Pás svírá s horizontální rovinou úhel ϕ . Na pás se sype hmota konstantní rychlostí μ . Ve směru rovnoběžném s pásem působí konstantní síla F , na hmotu na pásu působí homogenní gravitační pole. Hmota, která dorazí na konec pásu, pás opouští rychlostí rovnou okamžité rychlosti pásu.

Řešení: Konečná délka pásu se na jeho dynamice projeví až v momentě, kdy nasypaná hmota dorazí na konec pásu a začne unikat ze systému. Toto unikání hmoty ze systému však nelze započítávat v pohybových rovnicích v členu souvisejícím s časovou změnou hmotnosti systému, neboť tento pokles hmotnosti není způsoben působením uvažovaných sil. Případně lze hmotu, která opustila pás, považovat stále za součást systému, v tom případě samotný proces opouštění pásu neznamena změnu hybnosti systému. Člen související se změnou hybnosti systému bude mít tedy v pohybových rovnicích tvar $\dot{m}\dot{s} = \mu\dot{s}$. Obtížnější ovšem bude určit okamžitou hmotnost pásu.

Zkusme nejdříve spočít lineární hustotu hmoty $\eta(s') \equiv \frac{dm}{ds'}$ v bodě s' vysypané na pás pro případ, kdy nasypaná hmota již dorazila na konec pásu a pás je tedy hmotou zcela pokryt. Při pohybu pásu vzhůru pro přírůstek hmotnosti platí

$$dm = \mu dt = \mu \frac{ds}{\dot{s}}, \quad (2.34)$$

kde se využívá $ds = \dot{s} dt$. Odtud určíme lineární hustotu hmoty na pásu:

$$\eta(s') = \frac{dm}{ds'} = \frac{\mu dt'}{\dot{s}(t') dt'} = \frac{\mu}{\dot{s}(t')}, \quad (2.35)$$

kde t' je čas, kdy bod, který je nyní (když už je pás celý pokryt hlínou) v místě s' , procházel počátkem. Čas t' můžeme určit z rovnice (2.33) jako inverzní funkci k $s(t)$ v bodě $s = L - s'$. Inverzní funkci jsme schopni explicitně vyjádřit pro speciální případ $C_3 = 0$ jako kořen kvadratické rovnice

$$t' = \frac{C_1 + \sqrt{C_1^2 - 2C_2(L - s')}}{C_2}. \quad (2.36)$$

Odtud lze vyjádřit lineární hustotu nasypané hmoty na pásu v bodě s' pro případ, kdy bod, který v nulovém čase nacházel v počátku a měl rychlost $\dot{s}_0 = C_1$, dorazil do bodu s_f :

$$\eta(s') = \frac{\mu}{\sqrt{C_1^2 - 2C_2(L - s')}}. \quad (2.37)$$

Pro $C_2 = 0$ rovnice (2.37) odpovídá konstantní lineární hustotě pásu bez působení gravitace $g = 0$, případně pro pás v horizontální rovině ($\phi = 0$), při řešení s konstantní rychlostí $\dot{s} = \frac{F}{\mu}$.

V obecnějším případě pro $C_2 \neq 0$ (ovšem stále uvažujeme případ $C_3 = 0$) pohyb pásu do chvíle, než se začne hmota z pásu unikat, je stejný jako pro pás nekonečné délky. Poté, co bod, který byl v nulovém čase v počátku, dorazí do bodu $s = L$, přesouvá se na spodní stranu pásu a dále pokračuje opačným směrem. Proto je vhodnější pohyb po dosažení konce pásu počítat zvlášť a poloze s dát význam polohy bodu, který se nachází v počátku v okamžiku, kdy první nasypaná hmota dorazí na konec pásu. K získání pohybových rovnic potřebujeme vyjádřit okamžitou hmotnost hmoty na pásu. Integrací (2.37) podle s' lze získat konečný úbytek hmotnosti Δm při konečném po-

sunu pásu,

$$\Delta m(s) = \int_{L-s}^L \frac{\mu}{\sqrt{C_1^2 - 2C_2(L-s')}} ds' = \frac{\mu}{C_2} \left(C_1 - \sqrt{C_1^2 - 2C_2 s} \right). \quad (2.38)$$

Speciálně pro $C_2 = 0$ z (2.37) je úbytek hmotnosti

$$\Delta m(s) = \eta s = \frac{\mu^2}{F} s. \quad (2.39)$$

Hmotnost systému tedy můžeme psát ve tvaru $m = M + \mu t - \Delta m(s)$, tedy hmotnost samotného pásu M s celkovou hmotností hmoty, která se na pás vysypala za čas t , bez hmoty, která z pásu unikla $\Delta m(s)$. Pohybová rovnice pro rypadlo konečné délky má tedy tvar:

$$(M + \mu t - \Delta m(s))\ddot{s} + \mu\dot{s} = F - (\mu t - \Delta m(s))g \sin(\phi). \quad (2.40)$$

Rovnice (2.40) ovšem platí pouze pro $t \geq t_f$. Veličina t_f má význam doby, za kterou hmota dosáhne konce pásu, pokud se na pás začala sypat v nulovém čase. Čas t_f lze vyjádřit například z rovnice (2.36):

$$t_f = \frac{C_1 + \sqrt{C_1^2 - 2C_2 L}}{C_2}, \quad (2.41)$$

přičemž pro $C_2 = 0$ má t_f tvar

$$t_f = \frac{\mu L}{F}. \quad (2.42)$$

Pro $C_2 = 0$ a $C_1 = \frac{F}{\mu}$ má úloha řešení s konstantní rychlostí $\dot{s} = \frac{F}{\mu}$, dynamika je stejná jako pro případ nekonečného pásu.

Zpětný pohyb nakloněného pásu:

Pás je v homogenním gravitačním poli a s horizontální rovinou svírá úhel ϕ , na pás působí navíc konstantní F ve směru pásu. V čase t_0 se na pás začne sypat materiál konstantní rychlostí μ . Uvažujme situaci, kdy je na pásu dostatek hmoty, aby gravitační působení způsobilo zpětný pohyb pásu.

Řešení: Budeme uvažovat pouze případ $C_3 = 0$, kdy jsme schopni určit lineární hustotu hmoty na pásu $\eta(s)$. Podobně jako v případě Buquoyovy úlohy platí rovnice (2.27) a (2.28) pro případ $\dot{s} \geq 0$. Pro záporné rychlosti se vnější síly *nepodílejí* na změně hybnosti spojené s poklesem hmotnosti systému, hmota, která byla na pás vysypána při jeho pohybu nahoru ($\dot{s} > 0$) při pohybu dolů opouští systém rychlostí rovnou okamžité rychlosti systému. Ze zadání úlohy není zcela jasné, co se děje s hmotou sypající se na pás konstantní rychlostí $\dot{m} = \mu$ při záporné rychlosti pásu $\dot{s} < 0$. Přirozené jsou dvě možnosti: Buď hmota bez interakce s pásem sklouzává (což je přirozené spíše pro rypadlo) a pro $\dot{s} < 0$ se člen typu $\dot{m}\dot{s}$ neuplatní, nebo opět strhává dopadající hmotu a uděluje jí svou okamžitou rychlost, což znamená, že rychlost změny hybnosti bude mít tvar $\dot{p} = m\dot{s} + \mu\dot{s}$. Polohu referenčního bodu budeme volit v bodě, který se v nulovém čase nacházel v počátku pásu, tedy $s_0 = 0$. Lineární hustota hmoty nasypané na pás je dána vztahem (2.37), místo délky pásu L však musíme vzít bod obratu. Tedy hodnotu souřadnice s , kdy se pás po pohybu vzhůru zastaví a dále se bude pohybovat zpětným směrem. Čas, kdy dojde k obratu pohybu pásu lze určit ze vztahu (2.28):

$$t_{ob} = \frac{C_1}{C_2} \quad (2.43)$$

a bod obratu lze určit z (2.33):

$$s_{ob} = \frac{C_1^2}{2C_2}. \quad (2.44)$$

Úbytek hmotnosti určíme integrací lineární hustoty užitím (2.37):

$$\begin{aligned} \Delta m(s) &= \int_0^{s_{ob}-s} \eta(s') ds' = \frac{\mu}{C_2} \left(\sqrt{C_1^2 - 2C_2 s} - \sqrt{C_1^2 - 2C_2 s_{ob}} \right) = \\ &= \frac{C_1}{C_2} \mu \sqrt{1 - \frac{s}{s_{ob}}}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Budeme se zabývat případem, kdy hmota padající na pás bez interakce sklouzává. Hmotnost systému bude hmotnost pásu M , plus hmotnost hmoty, která se vysypala na pás μt_{ob} , bez hmoty $\Delta m(s)$, která z pásu unikla. Pohybová rovnice je:

$$\left(M + \mu \frac{C_1}{C_2} - \Delta m(s)\right) \ddot{s} = F - \left(\mu \frac{C_1}{C_2} - \Delta m(s)\right) g \sin \phi. \quad (2.46)$$

Pohybovou rovnici lze vydělit okamžitou hmotností, násobit \dot{s} a integrovat podle času

$$\frac{1}{2} \dot{s}^2 = (F + Mg \sin \phi) \frac{C_2}{\mu^2} \left(m_{ob} \ln \left(1 - \frac{\Delta m(s)}{m_{ob}} \right) + \Delta m(s) \right) + (s_{ob} - s) g \sin \phi, \quad (2.47)$$

kde

$$m_{ob} = M + \mu t_{ob} = M + \mu \frac{C_1}{C_2} \quad (2.48)$$

má význam hmotnosti pásu s nasýpanou hmotou v bodě obratu. Řešením rovnice (2.47) pro $\dot{s} = 0$ bychom dostali další bod obratu. Při opětovném pohybu pásu vzhůru však již nebude splněna podmínka $C_3 = 0$ a tedy nepůjde vyjádřit úbytek hmotnosti na pásu Δm pomocí vztahu (2.45). Můžeme tedy očekávat, že v obecném případě funkce vyskytující se v pohybové rovnici nebude explicitně vyjádřitelná. Pro vyšetření dynamiky tohoto systému bychom tedy museli použít numerické metody.

2.3 Kapka, pluh, raketa

Padající kapka v mraku:

Mějme dešťovou kapku v mraku, která nabírá při pádu hmotu díky kondenzaci vodních par. Na kapku působí vnější síla (např. homogenní gravitační pole nebo odporové síly v mraku).

Řešení: O kapce můžeme předpokládat, že množství páry, jež se jí podaří z kondenzovat, je úměrné objemu, kterým kapka projde. Polohu kapky popíšeme souřadnicí x , která bude mít význam vertikální osy orientované směrem

dolů. Okamžitou hmotnost kapky a odporové síly v mraku nebude snadné určit. Nejprve zkusme určit pohybovou rovnici při idealizaci, kde neuvažujeme změnu rozměru kapky a odporové síly v mraku R budeme pokládat za konstantní. Přírůstek hmotnosti bude úměrný uražené dráze kapky, tedy časová změna hmotnosti bude přímo úměrná okamžité rychlosti kapky, $\dot{m} = \eta \dot{x}$. Hmotnost tedy bude $m = \eta x$. (Pro uvážení kapky, která vzniká s nenulovou hmotností M můžeme volit počáteční podmínku $M = \mu x_0$, $v_0 = 0$, tedy kapka vzniká v poloze x_0). Pohybovou rovnici

$$\eta x \ddot{x} + \eta \dot{x}^2 = \eta x g - R \quad (2.49)$$

lze přenásobit členem $x \dot{x}$ a integrovat podle času

$$\frac{1}{2}(x \dot{x})^2 = \frac{1}{3} g x^3 - \frac{R x^2}{2\eta} + C, \quad (2.50)$$

kde C je konstanta závislá na počátečních podmínkách

$$C = \frac{1}{2}(x_0 v_0)^2 - \frac{1}{3} g x_0^3 + \frac{R x_0^2}{2\eta}. \quad (2.51)$$

Rovnici (2.50) lze formálně převést na tvar zákona zachování energie fiktivní částice jednotkové hmotnosti v poli síly o efektivním potenciálu $V_{ef} = -\left(\frac{2}{3} g x + \frac{C}{x^2}\right)$, která by měla zápornou celkovou mechanickou energii ($E = -\frac{R}{2\eta}$). Lze však rovnou vyjádřit rychlost kapky na poloze:

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{3} g x - \frac{R}{\eta} + \frac{2C}{x^2}}, \quad (2.52)$$

ze které je vidět, že od určité hodnoty x je rychlost rostoucí funkcí polohy.

Nyní bychom mohli uvážit změnu rozměrů kapky, přičemž budeme uvažovat, že kapka mění rozměr, nikoli tvar. Budeme tedy předpokládat, že jistý charakteristický rozměr (např. průměr kapky při horizontálním řezu) bude úměrný třetí odmocnině z objemu kapky a při uvážení toho, že kapka je homogenní, je tento charakteristický rozměr úměrný také třetí odmocnině z okamžité hmotnosti. Element objemu, kterým kapka projde bude $dV \propto S dx$, kde S je okamžitý průřez kapky, který je úměrný kvadrátu charakteristického rozměru. Pro přírůstek hmotnosti by tedy mělo platit

$$dm = C_1 m^{\frac{2}{3}} dx, \quad (2.53)$$

kde C_1 je konstanta. Pokud formálně položíme $x_0 = 0, m_0 = 0$ (tedy uvažujeme kapku, která vzniká s nulovou hmotností v $x = 0$), vztah mezi polohou a hmotností bude

$$m = K_1 x^3, \quad K_1 = \left(\frac{C_1}{3}\right)^3. \quad (2.54)$$

Dále budeme předpokládat, že odporová síla bude úměrná průřezu kapky, tedy kvadrátu charakteristického rozměru, konstantu úměrnosti označím K_2 . Pohybová rovnice pro kapku je tedy

$$K_1 x^3 \ddot{x} + 3K_1 x^2 \dot{x}^2 = K_1 x^3 g - K_2 x^2. \quad (2.55)$$

Tuto pohybovou rovnici lze integrovat

$$\frac{1}{2} x^6 \dot{x}^2 = \frac{1}{7} g x^7 - \frac{K_2}{6K_1} x^6 + K_3, \quad K_3 = \frac{1}{2} x_0^6 v_0^2 - \frac{1}{7} g x_0^7 + \frac{K_2}{6K_1} x_0^6 \quad (2.56)$$

a vyjádřit okamžitou rychlost v závislosti na poloze:

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{7} g x - \frac{K_2}{3K_1} + \frac{2K_3}{x^6}}. \quad (2.57)$$

Dalším příkladem kapky v mraku je příklad kapky v beztíži pro odporovou sílu lineárně závislou na rychlosti a průřezu kapky. Předpokládejme závislost hmotnosti na poloze podle vztahu (2.54) a odporovou sílu ve tvaru

$$R = K_4 x^2 \dot{x}. \quad (2.58)$$

Pohybová rovnice kapky je tedy

$$K_1 x^3 \ddot{x} + 3K_1 x^2 \dot{x} = -K_4 x^2 \dot{x}, \quad (2.59)$$

její integrací obdržíme

$$K_1 x^3 \dot{x} = -\frac{K_4}{3} x^3 + K_5, \quad K_5 = K_1 x_0^3 v_0 + \frac{K_4}{3} x_0^3, \quad (2.60)$$

odkud lze snadno vyjádřit rychlost

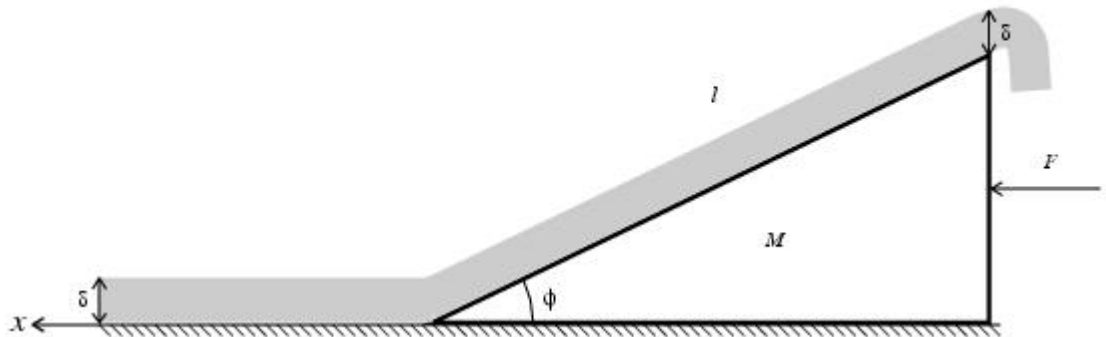
$$\dot{x} = -\frac{K_4}{3K_1} + \frac{K_5}{K_1 x^3}. \quad (2.61)$$

Je nutno si uvědomit, že úloha má smysl pouze pro $x_0 > 0$ (kvůli nenulové hmotnosti kapky na počátku), $v_0 > 0$ a tedy $K_5 > 0$. Rovnice (2.61) má smysl pouze pro kladnou rychlost. Rychlost je klesající funkcí polohy, začíná tedy na počáteční hodnotě v_0 a na konečné dráze klesne na nulu. Dráhu x_f , na které se kapka zastaví lze z rovnice (2.61) vyjádřit

$$x_f = \sqrt[3]{\frac{3K_5}{K_4}}. \quad (2.62)$$

Pluh (Buquoy, 1814):

Pluh, který je tvořen klínem o sklonu ϕ , délce l hmotnosti M je bez tření tažen silou F po horizontální rovině, na které je vrstva hlíny. Jak se pluh pohybuje, nabírá hlínu, která z něj následně padá. Budeme předpokládat, že pluh hlínu pouze zvedá (nemění její polohu v x -ové ose), nepřesypává ji. Lineární hustota hlíny bude η .



Obrázek 2.5: Pluh

Řešení: Pro případ, že celá délka pluhu je již pokryta hlínou lze řešení nalézt v [11]. Uvedu zde jeho zkrácenou verzi. Uváděná pohybová rovnice má tvar

$$M\ddot{x} + \eta l \frac{\sin^2 \phi}{\cos \phi} \ddot{x} + \eta \tan^2 \phi \dot{x}^2 = F - \eta l g \sin \phi, \quad (2.63)$$

kde pravá strana vyjadřuje působení konstantní síly F na pluh a gravitační síly na hlínu, kterou pluh nabral. Levou stranu rovnice (2.63) tvoří (zleva doprava) setrvačná síla pluhu, setrvačná síla hmoty na pluhu a člen vyjadřující přibývání hmoty u hrotu pluhu. Rovnici (2.63) lze řešit například separací proměnných

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{C}{B}} \left(1 + \frac{2}{E \exp\left(\frac{2\sqrt{BC}}{A}t\right) - 1} \right), \quad (2.64)$$

kde

$$\begin{aligned} A &= M + \eta l \frac{\sin^2 \phi}{\cos \phi}, & B &= \eta \tan^2 \phi, \\ C &= F - g\eta l \sin \phi, & E &= \frac{v_0 + \sqrt{\frac{C}{B}}}{v_0 - \sqrt{\frac{C}{B}}}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Je vidět, že limitní rychlost pro velké časy je

$$\dot{x}(t \rightarrow \infty) = \sqrt{\frac{C}{B}} = \sqrt{\frac{F - g\eta l \sin \phi}{\eta \tan^2 \phi}}. \quad (2.66)$$

Pro speciální podmínku, kdy je počáteční rychlost pluhu v_0 rovna limitní rychlosti z rovnice (2.66), je rychlost pluhu konstantní podobně jako u Buquoyovy úlohy v beztlíží a úloze běžícího pásu. Z (2.64) lze určit integrací podle času závislost polohy na čase. Při výpočtu použijeme substituci $u = E \exp\left(\frac{2\sqrt{BC}}{A}t\right) - 1$ a pak rozklad na parciální zlomky:

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \int_{t_i}^{t_f} \sqrt{\frac{C}{B}} \left(1 + \frac{2}{E \exp\left(\frac{2\sqrt{BC}}{A}t\right) - 1} \right) dt = \left[\sqrt{\frac{C}{B}} t \right]_{t_i}^{t_f} + \\ &+ \frac{A}{B} \int_{u_i}^{u_f} \frac{1}{u(u+1)} du = \left[-\sqrt{\frac{C}{B}} t + \frac{A}{B} \ln \left(E \exp\left(\frac{2\sqrt{BC}}{A}t\right) - 1 \right) \right]_{t_i}^{t_f}. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Raketa:

Z trysek rakety o počáteční hmotnosti m_0 vylétají spaliny konstantní rychlostí $-u$ relativně vůči raketě. Za čas dt vyletí spaliny o hmotnosti $dm_s = \mu dt$ ($\mu > 0$). Na raketu dále působí dodatečná síla F (například gravitační). Předpokládejme, že spaliny a raketa interagují tím způsobem, že pro systém rakety se spalinami platí zákon zachování hybnosti (přirozeně také celková hmotnost systému „raketa plus spaliny“ se zachovává).

Řešení: Hledejme pohybovou rovnici z hlediska pozorovatele, v jehož systému měla raketa v čase $t = 0$ rychlost v_0 a polohu x_0 . Obecný Newtonův pohybový zákon můžeme rozepsat následujícím způsobem:

$$F = \dot{p} = \dot{p}_R + \dot{p}_S = m\dot{v} + \dot{m}v + \dot{m}_S(v - u), \quad (2.68)$$

kde p_R , m je hybnost a hmotnost rakety, zatímco p_S , m_S je hybnost a hmotnost spalin. Dále využijeme zachování hmotnosti $\dot{m}_S = -\dot{m} = \mu$, takže

$$F = m\dot{v} + \dot{m}u = m\dot{v} - \mu u. \quad (2.69)$$

Vyřešme nyní rovnici (2.69) pro speciální případ $F = 0$. Vynásobíme formálně rovnici (2.69) členem dt/m , dosadíme za $\mu = -\dot{m}$ a pomocí separace proměnných získáme:

$$v - v_0 = -u \ln \frac{m}{m_0}. \quad (2.70)$$

Jak je vidět z rovnice (2.70), okamžitá rychlost rakety v je pouze funkcí počáteční a koncové hmotnosti a nezávisí na tom, jak se v průběhu děje hmotnost měnila (nezávisí na konkrétním tvaru $\mu(t)$). Předpokládejme nyní, že časová změna hmotnosti rakety μ je konstantní. S tímto předpokladem lze z (2.70) rovnou vyjádřit časovou závislost rychlosti:

$$v = v_0 - u \ln \frac{m_0 - \mu t}{m_0}, \quad (2.71)$$

kteřou lze dále integrovat podle času:

$$x - x_0 = v_0 t + ut + u \frac{m_0 - \mu t}{\mu} \ln \frac{m_0 - \mu t}{m_0}, \quad (2.72)$$

Rychlost rakety určená podle (2.71) diverguje v konečné čase $t = \frac{m_0}{\mu}$. To odpovídá případu, kdy raketa spotřebuje veškerou svou hmotnost. Reálnější

model by ale měl předpokládat to, že raketa se neskládá pouze z paliva. Raketa tedy vypotřebuje palivo v konečném čase $t_f < \frac{m_0}{\mu}$ a dále pokračuje konstantní rychlostí $v = v(t_f)$

Rozeberme nyní ještě vertikální pohyb rakety v homogenním gravitačním poli, tedy případ $F = -mg$. Pohybová rovnice (2.69) má tvar:

$$-mg = m\dot{v} - \mu u. \quad (2.73)$$

Do pohybové rovnice dosadíme $m = m_0 - \mu t$ a vyjádříme zrychlení rakety:

$$\dot{v} = -g + \frac{\mu u}{m_0 - \mu t}, \quad (2.74)$$

které lze integrovat

$$v = v_0 - gt - u \ln \frac{m_0 - \mu t}{m_0}. \quad (2.75)$$

Rovnice (2.75) se od rovnice (2.71) liší pouze členem $-gt$. Pohyb rakety proti působení gravitačního pole lze tedy rozložit na pohyb rakety bez působení vnějších sil a volný pád rakety. Což je v souladu s intuitivním předpokladem, že pokud v gravitačním poli všechna tělesa padají se zrychlením g , bude se stejným zrychlením padat i objekt, který v průběhu pádu svou hmotnost mění. Tento intuitivní předpoklad ovšem není pro systémy s proměnnou hmotností splněn obecně. Například rozdíl časové závislosti rychlosti nakloněného dopravního pásu pro $\phi = \frac{\pi}{2}$ a $F = 0$ a časové závislosti rychlosti doběhu pásu *nedá* člen $-gt$.

Rakety jsou nejvíce diskutovaným systémem s proměnnou hmotností a jejich dynamika je dobře rozebrána v jiné literatuře, proto se jimi v této práci nebudu podrobněji zabývat. Doporučil bych však článek [7] který podrobně rozebírá dvojdimensionální pohyb raket. Rakety také z hlediska této práce nejsou tak zajímavými systémy, neboť je k jejich pohonu potřeba ještě další síla urychlující spaliny, která přímo nevystupuje v pohybových rovnicích a kterou jde těžko kvantifikovat. Proto nejsou rakety tak zajímavé z hlediska zákona zachování energie.

Kapitola 3

Zákon zachování energie pro systémy s proměnnou hmotností

Jak bylo ukázáno na příkladech v Kapitole 2, jedním z obecných rysů systémů s proměnnou hmotností je neplatnost zákona zachování energie v obvyklém smyslu rovnosti práce vnějších sil a změny celkové kinetické energie systému mezi počátečním a koncovým stavem. Přirozeně, nepředpokládáme, že by tím, že připustíme, aby se v systému měnila hmotnost, byl narušen fundamentální fyzikální princip. Spíše se zde pokusíme interpretovat děje v těchto systémech tak, aby nebyly ve sporu s zákonem zachování energie v obecnější podobě. Nejprve se pokusíme přeformulovat zákon rovnosti práce vnějších sil a změny kinetické energie na rovnost práce vnějších sil a vhodné veličiny, která bude v určitém smyslu zobecnění změny kinetické energie. Dále se pokusíme analyzovat některé z modelů systémů s proměnnou hmotností z Kapitoly 2 tak, aby z nich bylo možné určit příslušné formy energie na které se bude měnit práce vnějších sil. Tím ilustrujeme užitečnost zobecněného tvaru zákona zachování energie.

3.1 Práce vnějších sil a funkcionál energie

Pokud hledáme ekvivalent zákona zachování energie pro systémy s proměnnou hmotností, můžeme opět vyjít z obecného Newtonova pohybového zákona

$$F = \dot{p}, \tag{3.1}$$

který dává do souvislosti vnější sílu a změnu hybnosti systému. Odvozuje-li obdobu zákona zachování energie, můžeme integrovat obě strany rovnice podle dráhy. V případě systémů s *konstantní* hmotností se jedná o rovnost typu „práce vnějších sil je rovna změně kinetické energie“ tedy:

$$\int_{s_i}^{s_f} F ds = m \int_{s_i}^{s_f} \dot{v} ds = m \int_{t_i}^{t_f} \dot{v} v dt = m \int_{v_i}^{v_f} v dv = \left[\frac{1}{2} m v^2 \right]_{v_i}^{v_f}, \quad (3.2)$$

neboli

$$W = \Delta T, \quad (3.3)$$

kde

$$W \equiv \int_{s_i}^{s_f} F ds \quad (3.4)$$

a

$$\Delta T \equiv \left[\frac{1}{2} m v^2 \right]_{v_i}^{v_f}. \quad (3.5)$$

V našem obecném případě vypadá rovnost následovně:

$$\int_{s_i}^{s_f} F ds = \int_{s_i}^{s_f} \dot{p} ds. \quad (3.6)$$

Rozepsáním integrační proměnné $ds = v dt$ obdržíme rovnici

$$\int_{s_i}^{s_f} F ds = \int_{t_i}^{t_f} \dot{p} v dt, \quad (3.7)$$

kterou lze použitím věty o substituci a zaměněním integrace podle času za integraci podle hybnosti převést na tvar

$$\int_{s_i}^{s_f} F ds = \int_{p_i}^{p_f} v dp. \quad (3.8)$$

Rozepsáním diferenciálu hybnosti $dp = m dv + v dm$ získáme rovnici

$$\int_{s_i}^{s_f} F ds = \int_{v_i}^{v_f} m v dv + \int_{m_i}^{m_f} v^2 dm. \quad (3.9)$$

Levá strana rovnice (3.9) je opět rovna práci W vnějších sil na systém. Není těžké si povšimnout, že druhý člen na pravé straně je v případě konstantní hmotnosti identicky nulový a že první člen přechází na známou změnu kinetické energie ΔT , jak je vidět ze vztahu (3.2). Je důležité upozornit na to, že přírůstek kinetické energie je v takovém speciálním případě funkcí pouze počáteční a koncové rychlosti, tedy nezávisí na „dráze“ (tj. na tom, jak se v průběhu děje rychlost měnila) mezi koncovými body. *Práce vnějších sil pro systém s proměnnou hmotností již na konkrétním průběhu děje mezi koncovými stavy záviset bude.* Lze ji tedy chápat jako *funkcionál* závislosti hmotnosti na rychlosti (či opačně). V integrálu (3.9) je tedy nutné uvážit konkrétní funkce $m(v)$ a inverzní funkce $v(m)$.

Trochu názornější tvar funkcionálu energie lze získat z (3.7) následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} \int_{s_i}^{s_f} F ds &= \int_{t_i}^{t_f} \dot{p} v dt = \int_{t_i}^{t_f} (m v \dot{v} + \dot{m} v^2) dt = \\ &= \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) + \frac{1}{2} \dot{m} v^2 \right) dt = \left[\frac{1}{2} m v^2 \right]_{v_i}^{v_f} + \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} \dot{m} v^2 dt, \end{aligned} \quad (3.10)$$

Levá strana rovnice (3.10) je opět celkovou prací W vnějších sil. Na pravé straně se vyskytuje přírůstek kinetické energie ΔT systému, navíc je tam však dodatečný člen:

$$\mathcal{E} \equiv \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} \dot{m}(t) v^2(t) dt. \quad (3.11)$$

Celkově lze tedy psát:

$$W = \Delta T + \mathcal{E} \quad (3.12)$$

Za zmínku navíc stojí, že převedením druhého členu na pravé straně rovnice (3.10) na levou stranu obdržíme zákon zachování energie ve tvaru, že práce síly $F - \frac{1}{2} \dot{m} v$. Lze tedy ekvivalentně psát:

$$W^* = \Delta T, \quad (3.13)$$

kde W^* je práce modifikované síly

$$F - \frac{1}{2} \dot{m} v. \quad (3.14)$$

Dodatečná síla $-\frac{1}{2}\dot{m}v$ by mohla být interpretována jako jistá „třetí síla“ související s přírůstkem hmotnosti.

V Kapitole 2 jsme také uvažovali dva typy úloh, které nemají za všech okolností všechny atributy systému s proměnnou hmotností. V obou případech se ze systému bezinterakčně oddělí část hmoty, která dále již nemá vliv na dynamiku systému. V prvním případě bezinterakční změna hmotnosti bude znamenat, že se v pohybových rovnicích neuplatní člen s časovou změnou hmotnosti. Tomuto případu odpovídá například pohyb lana směrem dolů v Buquoyově úloze. V druhém typu úloh je přírůstek hmotnosti roven bezinterakčnímu úbytku hmotnosti, takže se celková hmotnost systému nemění, to odpovídá úloze s pluhem.

Úlohy prvního druhu:

Pokud bychom tedy uvážili bezinterakční změnu hmotnosti systému, můžeme rozepsat změnu hybnosti $\dot{p} = m\dot{v}$ a dosadit do (3.7). Přičtením nuly pak můžeme výraz upravit do podobného tvaru jako (3.10):

$$\begin{aligned} \int_{s_i}^{s_f} F ds &= \int_{t_i}^{t_f} \dot{p} v dt = \int_{t_i}^{t_f} \left(m v \dot{v} + \frac{1}{2} \dot{m} v^2 - \frac{1}{2} \dot{m} v^2 \right) dt = \\ &= \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) - \frac{1}{2} \dot{m} v^2 \right) dt = \left[\frac{1}{2} m v^2 \right]_{v_i}^{v_f} - \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} \dot{m} v^2 dt, \end{aligned} \quad (3.15)$$

tedy

$$W = \Delta T - \varepsilon. \quad (3.16)$$

Úlohy druhého druhu:

V případě, kdy je interakční změna hmotnosti vyvážena jinou (opačnou) bezinterakční změnou hmotnosti, takže celková hmotnost systému je konstantní, lze časovou změnu hybnosti rozepsat ve tvaru $\dot{p} = m\dot{v} + \mu v$, kde hmotnost m je konstantní a μ je interakční časová změna hmotnosti, která v obecném případě konstantní není (v případě pluhu je například funkcí rychlosti). Opět rozepíšeme hybnost ve vztahu (3.7) a upravíme do vhodného tvaru:

$$\int_{s_i}^{s_f} F ds = \int_{t_i}^{t_f} \dot{p} v dt = \int_{t_i}^{t_f} (m v \dot{v} + \mu v^2) dt = \left[\frac{1}{2} m v^2 \right]_{v_i}^{v_f} + \int_{t_i}^{t_f} \mu v^2 dt, \quad (3.17)$$

tedy

$$W = \Delta T + 2\varepsilon^*, \quad (3.18)$$

kde $\varepsilon^* \equiv \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} \mu(t)v^2(t)dt$ je analogií ε pro systémy, ve který se celková hmotnost zachovává. Rovnice (3.17) má tedy podobný tvar jako (3.10), s tím rozdílem, že hmotnost m je konstantní a veličinu μ proto nelze interpretovat jako změnu celkové hmotnosti systému. Tyto výrazy lze použít k popisu situací, kdy se nějaké těleso pohybuje v prostředí, které mu klade odpor. Ze systému s odporem prostředí získáme systém s proměnnou hmotností tak, že uvážíme pouze systém, který bude tvořit těleso a jistá část hmoty okolního prostředí (např. hmota na pluhu).

Zákon zachování energie pro systémy s proměnnou hmotností je diskutován také v [4] a stručně ve skriptech [14]. V [4] je zaveden pojem přítoku a odtoku hmotnosti ze systém. Také se zde zavádí rychlost u , kterou se pohybuje přitékající či odtékající hmota. Při odvozování vztahu pro energetickou bilanci se zde vyjde z modifikovaného Newtonova pohybového zákona:

$$\dot{p} = F + u\dot{m}, \quad (3.19)$$

ve kterém se rozepíše hybnost $\dot{p} = m\dot{v} + \dot{m}v$, přenásobí se rychlostí v a dosadí se $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) = mv\dot{v} + \frac{1}{2}\dot{m}v^2$. Ve výsledné rovnici

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) = vF + v \left(u - \frac{1}{2}v \right) \dot{m} \quad (3.20)$$

lze ještě rozepsat člen $v \left(u - \frac{1}{2}v \right) = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}(u - v)^2$, čímž obdržíme

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) = vF + \frac{1}{2}u\dot{m} - \frac{1}{2}(u - v)^2\dot{m}, \quad (3.21)$$

kde druhý člen na pravé straně představuje časový přírůstek kinetické energie, kterou systému dodá přitékající hmota (resp. časový úbytek kinetické energie odnášené odtékající hmotou). Rovnici (3.21) lze integrovat podle času:

$$\Delta T = W + \frac{1}{2} \int u^2 dm - \frac{1}{2} \int (u - v)^2 dm. \quad (3.22)$$

V naší práci jsme zákon zachování energie rozebírali pouze pro případ, kdy do systému vniká hmota s nulovou rychlostí ($u = 0$), nebo případ, kdy hmota ze systému uniká rychlostí rovnou okamžité rychlosti systému

($u = v$). Pro případ $u = 0$ vztah (3.22) přejde na (3.12). Pro případ $u = v$ vztah (3.22) přejde na (3.16). V úloze s pluhem dochází současně ke dvěma vzájemně se kompenzujícím změnám hmotnosti. Hmotnost u „hrotu“ pluhu přibývá s $u = 0$ a zároveň na konci pluhu hmota uniká s $u = v$. Započítáním uniklé kinetické energie a energie související se změnou hmotnosti získáme z (3.22) rovnici (3.18).

3.2 Energetická bilance pro konkrétní případy systémů s proměnnou hmotností

Vztahy (3.12), (3.16) a (3.18) představují tvary zobecněného zákona zachování energie formulované tak, aby platily i pro systémy s proměnnou hmotností. Zkusme nyní ověřit jejich platnost na několika konkrétních příkladech uváděných v Kapitole 2.

Buquoyova úloha:

Lanko je taženo konstantní vertikální silou F z horizontální podložky proti působení homogenního gravitačního pole. Kladný směr osy x nyní představuje směr nahoru. Při pohybu orientovaném dolů (proti směru osy x , tedy $\dot{x} < 0$) lanko opět mizí ve svém ložisku (aniž by interagovalo se zbytkem, který se ještě pohybuje).

Dynamika systému:

Pro pohyb lanka směrem vzhůru platí:

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + V_{ef}^{\uparrow} = \frac{F}{2\eta}, \quad \text{kde} \quad V_{ef}^{\uparrow} \equiv \frac{g}{3}x - \frac{C}{x^2}. \quad (3.23)$$

Pro pohyb lanka směrem dolů platí:

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + V_{ef}^{\downarrow}(x) = V_{ef}^{\downarrow}(x_1), \quad \text{kde} \quad V_{ef}^{\downarrow}(x) = gx - \frac{F}{\eta} \ln(x), \quad (3.24)$$

Energetická bilance: Ověřme nejdříve platnost rovnice (3.12) pro Buquoyovu úlohu při pohybu vzhůru. Můžeme vyjít z (3.23), odkud vyjádříme kvadrát rychlosti $v^2 = \frac{F}{\eta} + \frac{2C}{x^2} - \frac{2}{3}gx$. Dále je vhodné přepsat integrand a integrační proměnnou $\dot{m}v^2 dt = \eta v^2 dx$. Pak můžeme integrovat

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \frac{1}{2} \int_{x_i}^{x_f} \eta v^2 dx = \int_{x_i}^{x_f} \left(\frac{F}{2} + \frac{\eta C}{x^2} - \frac{g\eta}{3} x \right) dx = \\ &= \left[\frac{F}{2} x - \frac{\eta C}{x} - \frac{g\eta}{6} x^2 \right]_{x_i}^{x_f}.\end{aligned}\quad (3.25)$$

Rozdíl kinetických energií je:

$$\Delta T = \left[\frac{1}{2} m v^2 \right]_{v_i}^{v_f} = \left[\frac{1}{2} \eta x v^2 \right]_{x_i}^{x_f} = \left[\frac{F}{2} x + \frac{\eta C}{x} - \frac{g\eta}{3} x^2 \right]_{x_i}^{x_f}.\quad (3.26)$$

Práci vnějších sil snadno spočteme:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} (F - mg) dx = \left[Fx - \frac{g\eta}{2} x^2 \right]_{x_i}^{x_f}.\quad (3.27)$$

Součet pravých stran rovnic (3.25) a (3.26) zjevně dává pravou stranu rovnice (3.27), tedy $\mathcal{E} + \Delta T = W$, čímž je ověřena platnost rovnice (3.12) pro pohyb lana vzhůru v Buquoyově úloze. Pro Buquoyovu úlohu v beztíží nebo harpunu lze provést obdobné ověření, pokud speciálně položíme gravitační sílu nebo obě síly rovny nule.

Pro pohyb lanka dolů budeme ověřovat vztah (3.16). Ze vztahu (3.24) plyne $\dot{x} = \sqrt{2g(x_1 - x) + 2\frac{F}{\eta} \ln \frac{x}{x_1}}$. Vyjádříme práci vnějších sil

$$W = \int_{x_i}^{x_f} (F - g\eta x) dx = \left[Fx - \frac{g\eta}{2} x^2 \right]_{x_i}^{x_f},\quad (3.28)$$

přírůstek kinetické energie

$$\begin{aligned}\Delta T &= \left[\frac{1}{2} \eta x \left(2g(x_1 - x) + 2\frac{F}{\eta} \ln \frac{x}{x_1} \right) \right]_{x_i}^{x_f} = \\ &= \left[g\eta x_1 x - g\eta x^2 + F x \ln \frac{x}{x_1} \right]_{x_i}^{x_f},\end{aligned}\quad (3.29)$$

a veličinu \mathcal{E} :

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} \dot{m} v^2 dt = \frac{1}{2} \int_{x_i}^{x_f} \dot{m} v dx = \frac{1}{2} \int_{x_i}^{x_f} \eta v^2 dx = \int_{x_i}^{x_f} \eta \left(g(x_1 - x) + \frac{F}{\eta} \ln \frac{x}{x_1} \right) dx = \\
&= \left[g\eta x_1 x - \frac{g\eta}{2} x^2 + Fx \ln \frac{x}{x_1} - Fx \right]_{x_i}^{x_f}. \tag{3.30}
\end{aligned}$$

Opravdu vidíme, že $W = \Delta T - \varepsilon$.

Nakloněný pás/rypadlo:

Pás je v homogenním gravitačním poli g a s horizontální rovinou svírá úhel $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, na pás dále působí konstantní síla F ve směru pásu. V čase $t = 0$ se na pás začne sypat materiál konstantní rychlostí μ . Pás je na posuvných kolech namotán tak, že se gravitační působení na něj vyruší s reakcí kol, takže budeme uvažovat pouze působení gravitační síly na hmotu na pásu, nikoli na pás samotný. Známe rychlost a polohu pásu v čase $t = 0$. Úlohu uvažujme pouze pro případ, že rychlost pásu je nezáporná.

Dynamika systému: Rychlost pásu je dána:

$$\dot{s} = C_1 - C_2 t + \frac{C_3}{M + \mu t}, \tag{3.31}$$

kde

$$C_1 = \frac{F}{\mu} + \frac{Mg \sin \phi}{2\mu}, \tag{3.32}$$

$$C_2 = \frac{1}{2} g \sin \phi, \tag{3.33}$$

$$C_3 = M \left(\dot{s}_0 - \frac{F}{\mu} \right) - \frac{M^2 g \sin \phi}{2\mu} = M(\dot{s}_0 - C_1). \tag{3.34}$$

Energetická bilance: Ukážeme platnost vztahu (3.10) pro úlohu nakloněného nekonečného dopravního pásu (resp. rypadla). Nejdříve vyjádříme práci vnějších sil na pás:

$$\begin{aligned}
W &= \int_{s_i}^{s_f} (F - \mu t g \sin \phi) ds = \\
&= \int_{t_i}^{t_f} (F - \mu t g \sin \phi) \left(C_1 - C_2 t + \frac{C_3}{M + \mu t} \right) dt, \quad (3.35)
\end{aligned}$$

kde jsme za rychlost \dot{s} dosadili ze vztahu (3.31). Dále integrand roznásobíme a integrujeme

$$\begin{aligned}
W &= \left[t^3 \frac{1}{3} C_2 g \mu \sin \phi - t^2 \left(\frac{1}{2} F C_2 + \frac{1}{2} C_1 \mu g \sin \phi \right) + t (F C_1 - C_3 g \sin \phi) + \right. \\
&\quad \left. + \ln \left(\frac{M + \mu t}{M} \right) C_3 \left(\frac{F}{\mu} + \frac{M g \sin \phi}{\mu} \right) \right]_{t_i}^{t_f}. \quad (3.36)
\end{aligned}$$

Dále s užitím (3.31) vyjádříme přírůstek kinetické energie ΔT :

$$\begin{aligned}
\Delta T &= \left[\frac{1}{2} m \dot{s}^2 \right]_{t_i}^{t_f} = \left[\frac{1}{2} (M + \mu t) \left(C_1 - t C_2 + \frac{C_3}{M + \mu t} \right)^2 \right]_{t_i}^{t_f} = \\
&= \left[t^3 \frac{C_2^2 \mu}{2} + t^2 \left(\frac{C_2^2 M}{2} - C_1 C_2 \mu \right) + t \left(\frac{C_1^2 \mu}{2} - C_1 C_2 M - C_2 C_3 \right) + \right. \\
&\quad \left. + C_1 C_3 + \frac{C_1^2 M}{2} + \frac{C_3^2}{2(M + \mu t)} \right]_{t_i}^{t_f} \quad (3.37)
\end{aligned}$$

a veličinu \mathcal{E} definovanou v části 3.2:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \int_{t_i}^{t_f} \dot{m} \dot{s}^2 dt = \int_{t_i}^{t_f} \mu \left(C_1 - C_2 t + \frac{C_3}{M + \mu t} \right)^2 dt = \left[t^3 \frac{C_2^2 \mu}{6} - \right. \\
&\quad \left. - t^2 \frac{C_1 C_2 \mu}{2} + t \left(\frac{C_1^2 \mu}{2} - C_2 C_3 \right) + \ln \left(\frac{M + \mu t}{M} \right) C_3 \left(C_1 + \frac{C_2 M}{\mu} \right) \right]_{t_i}^{t_f}. \quad (3.38)
\end{aligned}$$

Rovnost (3.12), tedy $W = \Delta T + \mathcal{E}$ by se po dosazení z rovnic (3.36), (3.37) a (3.38) stala značně nepřehlednou, proto raději porovnáme zvlášť koeficienty u členů se stejnou závislostí na čase t .

V rovnici pro kubické členy dosadíme C_2 z (3.33) :

$$\frac{1}{3}C_2g\mu \sin \phi = \frac{C_2^2\mu}{2} + \frac{C_2^2\mu}{6}, \quad (3.39)$$

$$\frac{2}{3}C_2^2\mu = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)C_2^2\mu, \quad (3.40)$$

což platí. Rovnici pro kvadratické členy nejdříve vykrátíme členem $-\frac{1}{2}C_2$ a pak dosadíme za C_1 z (3.32) :

$$-\frac{1}{2}FC_2 - \frac{1}{2}C_1\mu g \sin \phi = \frac{C_2^2M}{2} - C_1C_2\mu - \frac{C_1C_2\mu}{2}, \quad (3.41)$$

$$F + 2C_1\mu = -C_2M + 2C_1\mu + C_1\mu, \quad (3.42)$$

$$F = -C_2M + F + C_2M, \quad (3.43)$$

což také zjevně platí. V rovnici pro lineární členy nejdříve dosadíme C_2 z (3.33), zkrátíme C_1 a pak za C_1 dosadíme z (3.32):

$$FC_1 - C_3g \sin \phi = \frac{C_1^2\mu}{2} - C_1C_2M - C_2C_3 + \frac{C_1^2\mu}{2} - C_2C_3, \quad (3.44)$$

$$F = C_1\mu - C_2M, \quad (3.45)$$

$$F = F + C_2M - C_2M, \quad (3.46)$$

což opět platí. V rovnici pro členy s logaritmickou závislostí na čase zkrátíme C_3 a dosadíme C_1 z rovnice (3.32):

$$C_3 \left(\frac{F}{\mu} + \frac{Mg \sin \phi}{\mu} \right) = C_3 \left(C_1 + \frac{C_2M}{\mu} \right), \quad (3.47)$$

$$C_1 + C_2 \frac{M}{\mu} = C_1 + C_2 \frac{M}{\mu}, \quad (3.48)$$

což je identicky splněno.

Členy nezávislé na čase se neuplatní a koeficienty u lineárně lomených členů se v (3.36) a (3.37) rovnají. Ověřili jsme tedy platnost zobecněného zákona zachování energie (3.12) i pro případ nakloněného pásu. Platnost (3.12) bychom ověřili pro dopravní pás dosazením za $g = 0$ (resp. $\phi = 0$, $C_2 = 0$) a pro doběh dopravního pásu $F = 0$.

Kapka v mraku:

Mějme dešťovou kapku v mraku, která nabírá při pádu hmotu díky kondenzaci vodních par. Na kapku působí vnější síla (např. homogenní gravitační pole nebo odporové síly v mraku).

Dynamika systému:

Pro případ, kdy na kapku s neměnnými rozměry působí konstantní odporová síla R a gravitační síla mg , platí

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{3}gx - \frac{R}{\eta} + \frac{2C}{x^2}}. \quad (3.49)$$

Pro případ, kdy na kapku s proměnnými rozměry působí odporová síla úměrná průřezu kapky $R = K_2x^2$ a gravitační síla mg je

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{7}gx - \frac{K_2}{3K_1} + \frac{2K_3}{x^6}}. \quad (3.50)$$

Pro případ, kdy na kapku s proměnnými rozměry působí odporová síla úměrná průřezu kapky a rychlosti kapky $R = K_4x^2\dot{x}$ je

$$\dot{x} = -\frac{K_4}{3K_1} + \frac{K_5}{K_1x^3}. \quad (3.51)$$

Energetická bilance: Spočítáme nejdříve energetickou bilanci pro kapku v mraku, která nemění své rozměry. Rychlost kapky je určena (3.49). Síla působící na kapku je $F = gm - R$, kde $m = \eta x$ a tedy $\dot{m} = \eta v$ a R je konstanta. Nyní můžeme spočítat veličiny vystupující ve vztahu (3.12):

$$W = \int_{x_i}^{x_f} (g\eta x - R) dx = \left[\frac{1}{2}g\eta x^2 - Rx \right]_{x_i}^{x_f}, \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \Delta T &= \left[\frac{1}{2}mv^2 \right]_{x_i}^{x_f} = \left[\frac{1}{2}\eta x \left(\frac{2}{3}gx - \frac{R}{\eta} + \frac{2C}{x^2} \right) \right]_{x_i}^{x_f} = \\ &= \left[\frac{1}{3}g\eta x^2 - \frac{1}{2}Rx + \frac{C\eta}{x} \right]_{x_i}^{x_f}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \int_{t_i}^{t_f} \frac{1}{2}\dot{m}v^2 dt = \int_{x_i}^{x_f} \frac{1}{2}\eta v^2 dx = \int_{x_i}^{x_f} \frac{1}{2}\eta \left(\frac{2}{3}gx - \frac{R}{\eta} + \frac{2C}{x^2} \right) dx = \\ &= \left[\frac{1}{6}g\eta x^2 - \frac{1}{2}Rx - \frac{C\eta}{x} \right]_{t_i}^{t_f}, \end{aligned} \quad (3.54)$$

Porovnánm pravé strany rovnice (3.52) a součtu pravých stran rovnic (3.53) a (3.54) je platnost vztahu (3.12) patrná.

Pro kapku s proměnnými rozměry v homogenním gravitačním poli máme závislost rychlosti na poloze určenou vztahem (3.50). Hmotnost kapky je $m = K_1 x^3$ a rychlost změny kapky bude $\dot{m} = 3K_1 x^2 v$. Pro tento případ jsme navíc uvážili odporovou sílu úměrnou (s konstantou úměrnosti K_2) průřezu kapky, tedy kvadrátu charakteristického rozměru. Vnější síly působící na kapku jsou tedy $F = gK_1 x^3 - K_2 x^2$. Veličiny vystupující ve vztahu (3.12) spočteme následovně:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} (gK_1 x^3 - K_2 x^2) dx = \left[\frac{1}{4} gK_1 x^4 - \frac{1}{3} K_2 x^3 \right]_{t_i}^{t_f}, \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \Delta T &= \left[\frac{1}{2} m v^2 \right]_{x_i}^{x_f} = \left[\frac{1}{2} K_1 x^3 \left(\frac{2}{7} g x - \frac{K_2}{3K_1} + \frac{2K_3}{x^6} \right) \right]_{x_i}^{x_f} = \\ &= \left[\frac{1}{7} g K_1 x^4 - \frac{K_2}{6} x^3 + \frac{K_1 K_3}{x^3} \right]_{x_i}^{x_f}, \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \int_{t_i}^{t_f} \frac{1}{2} m v^2 dt = \int_{x_i}^{x_f} \frac{3}{2} K_1 x^2 \left(\frac{2}{7} g x - \frac{K_2}{3K_1} + \frac{2K_3}{x^6} \right) dx = \\ &= \left[\frac{3}{28} g K_1 x^4 - \frac{1}{6} K_2 x^3 - \frac{K_1 K_3}{x^3} \right]_{t_i}^{t_f}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Opět lze snadno vidět, že součet pravých stran rovnic (3.56) a (3.57) dává pravou stranu rovnice (3.55) a tedy zákon zachování energie ve tvaru (3.12) je platný i pro tento systém.

Nakonec rozebereme případ, kdy na kapku s proměnnými rozměry působí pouze odporová síla úměrná rychlosti kapky a jejímu průřezu $F = -K_4 x^2 v$ a rychlost kapky je určena rovnicí (3.51). Hledané veličiny jsou:

$$\begin{aligned} W &= \int_{x_i}^{x_f} (-K_4 x^2 v) dx = \int_{x_i}^{x_f} K_4 x^2 \left(\frac{K_4}{3K_1} - \frac{K_5}{K_1 x^3} \right) dx = \\ &= \left[\frac{K_4^2}{9K_1} x^3 - \frac{K_4 K_5}{K_1} \ln x \right]_{t_i}^{t_f}, \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned}\Delta T &= \left[\frac{1}{2} m(x) v(x)^2 \right]_{x_i}^{x_f} = \left[\frac{1}{2} K_1 x^3 \left(\frac{K_5}{K_1 x^3} - \frac{K_4}{3K_1} \right)^2 \right]_{x_i}^{x_f} = \\ &= \left[\frac{K_4^2 x^3}{18K_1} - \frac{K_4 K_5}{3K_1} + \frac{K_5^2}{2K_1 x^3} \right]_{x_i}^{x_f},\end{aligned}\quad (3.59)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \int_{t_i}^{t_f} \frac{1}{2} \dot{m} v^2 dt = \int_{x_i}^{x_f} \frac{3}{2} K_1 x^2 \left(\frac{K_5}{K_1 x^3} - \frac{K_4}{3K_1} \right) dx = \\ &= \left[\frac{K_4^2 x^3}{18K_1} - \frac{K_4 K_5}{K_1} \ln x - \frac{K_5^2}{2K_1 x^3} \right]_{t_i}^{t_f}.\end{aligned}\quad (3.60)$$

Koeficient u členu s kubickou závislostí na x v rovnici (3.58) je roven součtu koeficientu u kubických členů v rovnicích (3.59) (3.60), koeficienty u členů s logaritmickou závislostí se v (3.58) a (3.60) rovnají, koeficienty u členů s kubicky lomenou závislostí v rovnicích (3.59) (3.60) jsou opačné a vyruší se. Vztah (3.10) je tedy splněn i pro tento systém.

Pluh:

Pluh, který je tvořen klínem o sklonu ϕ , délce l hmotnosti M je bez tření tažen silou F po horizontální rovině, na které je vrstva hlíny. Jak se pluh pohybuje, nabírá hlínu, která z něj následně padá. Budeme předpokládat, že pluh hlínu pouze zvedá (nemění její polohu v x -ové ose), nepřesypává ji. Lineární hustota hlíny bude η .

Dynamika systému: Rychlost pluhu je dána:

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{C}{B}} \left(1 + \frac{2}{E \exp\left(\frac{2\sqrt{BC}}{A}t\right) - 1} \right), \quad (3.61)$$

kde

$$\begin{aligned}A &= M + \eta l \frac{\sin^2 \phi}{\cos \phi}, & B &= \eta \tan^2 \phi, \\ C &= F - g\eta l \sin \phi, & E &= \frac{v_0 + \sqrt{\frac{C}{B}}}{v_0 - \sqrt{\frac{C}{B}}}.\end{aligned}\quad (3.62)$$

Poloha pluhu je dána:

$$x = \left[-\sqrt{\frac{C}{B}}t + \frac{A}{B} \ln \left(E \exp \left(\frac{2\sqrt{BC}}{A}t \right) - 1 \right) \right]_{t_i}^{t_f}. \quad (3.63)$$

Energetická bilance: Vzhledem k tomu, že vnější síly se při pohybu pluhu nemění je jejich práce součinem působící síly $F - g\eta l \sin \phi$ a změny polohy pluhu:

$$\begin{aligned} W &= (F - g\eta l \sin \phi) [x(t)]_{t_i}^{t_f} = \\ &= (F - g\eta l \sin \phi) \left[\frac{A}{B} \ln \left(E \exp \left(\frac{2\sqrt{BC}}{A}t \right) - 1 \right) - \sqrt{\frac{C}{B}}t \right]_{t_i}^{t_f}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Kinetická energie systému se bude skládat z kinetické energie samotného pluhu pohybujícího se rychlostí v určenou rovnicí (3.61) v horizontálním směru a kinetické energie hlíny na pluhu o hmotnosti $m = \eta l \cos \phi$, která se pohybuje ve vertikálním směru rychlostí $v_h = v \tan \phi$. Hmota, která už opustila pás, do kinetické energie systému nepřispívá. Celkovou změnu kinetické energie pak určíme následovně :

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{1}{2}M [v^2(t)]_{t_i}^{t_f} + \frac{1}{2}\eta l \cos \phi [v^2(t) \tan^2 \phi]_{t_i}^{t_f} = \\ &= \frac{1}{2} \left(M + \eta l \frac{\sin^2 \phi}{\cos \phi} \right) \left[\frac{C}{B} \left(1 + \frac{2}{E \exp \left(\frac{2\sqrt{BC}}{A}t \right) - 1} \right)^2 \right]_{t_i}^{t_f} = \\ &= \frac{C(M + \eta l \frac{\sin^2 \phi}{\cos \phi})}{2B} \left[1 + \frac{4}{E \exp \left(\frac{2\sqrt{BC}}{A}t \right) - 1} + \frac{4}{\left(E \exp \left(\frac{2\sqrt{BC}}{A}t \right) - 1 \right)^2} \right]_{t_i}^{t_f} \end{aligned} \quad (3.65)$$

Abychom spočetli $\mathcal{E}^* = \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} \mu(t) v^2(t) dt$ z výrazu (3.18), musíme dosadit za $\mu v'^2$ vhodnou funkci. Veličina v' v (3.17) má význam rychlosti, kterou získává hmota při vstupu do systému. V případě pluhu se tedy jedná o vertikální rychlost hlíny $v_h = v \tan \phi$. Interakční rychlost změny hmotnosti μ je hmotnost hlíny, kterou pluh nabere za čas dt , tedy $\mu = \frac{dm}{dt} = \eta v$. V

následující integraci použijeme substituci $u = E \exp\left(\frac{2\sqrt{BC}}{A}t\right) - 1$ a pak rozklad na parciální zlomky:

$$\begin{aligned}
2\mathcal{E}^* &= \int_{t_i}^{t_f} \mu v'^2 dt = \int_{t_i}^{t_f} \eta \tan^2 \phi v^3 dt = \\
&= \int_{t_i}^{t_f} \eta \tan^2 \phi \left(\sqrt{\frac{C}{B}} \left(1 + \frac{2}{E \exp\left(\frac{2\sqrt{BC}}{A}t\right) - 1} \right) \right)^3 dt = \\
&= \frac{\eta AC \tan^2 \phi}{2B^2} \int_{u_i}^{u_f} \left(1 + \frac{2}{u} \right)^3 \frac{1}{u+1} du = \\
&= \frac{\eta AC \tan^2 \phi}{2B^2} \int_{u_i}^{u_f} \left(\frac{8}{u^3} + \frac{4}{u^2} + \frac{2}{u} - \frac{1}{u+1} \right) du = \\
&= \frac{\eta AC \tan^2 \phi}{2B^2} \left[-\frac{2\sqrt{BC}}{A}t + 2 \ln \left(\exp \frac{2\sqrt{BC}}{A}t - 1 \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{4}{E \exp\left(\frac{2\sqrt{BC}}{A}t\right) - 1} - \frac{4}{\left(E \exp\left(\frac{2\sqrt{BC}}{A}t\right) - 1\right)^2} \right]_{t_i}^{t_f}. \quad (3.66)
\end{aligned}$$

Důkaz rovnosti (3.18) si nyní opět rozložíme do několika rovnic pro koeficienty stojící u členů s různou závislostí na čase t . Pro lineární členy:

$$-\sqrt{\frac{C}{B}}(F - g\eta l \sin \phi) = -\frac{\eta AC \tan^2 \phi 2\sqrt{BC}}{2B^2 A}, \quad (3.67)$$

$$F - g\eta l \sin \phi = \frac{\eta C \tan^2 \phi}{B}, \quad (3.68)$$

kde stačí dosadit za B a C z (3.62) Pro člen s exponenciálou v posunutém argumentu logaritmu:

$$\frac{A}{B}(F - g\eta l \sin \phi) = 2\frac{\eta AC \tan^2 \phi 2\sqrt{BC}}{2B^2 A}, \quad (3.69)$$

$$F - g\eta l \sin \phi = \frac{\eta C \tan^2 \phi}{B}, \quad (3.70)$$

což už jsme dosazením ověřili pro lineární členy. Lineárně a kvadraticky lomené výrazy mají stejné koeficienty:

$$0 = 2 \frac{C \left(M + \eta l \frac{\sin^2 \phi}{\cos \phi} \right)}{2B} - \frac{\eta AC \tan^2 \phi}{2B^2}, \quad (3.71)$$

$$0 = M + \eta l \frac{\sin^2 \phi}{\cos \phi} - \frac{\eta A \tan^2 \phi}{B}, \quad (3.72)$$

čímž je, po dosazení za A a B, rovnost (3.18) ověřena pro úlohu s pluhem.

Kapitola 4

Závěr

V této práci, konkrétně v druhé kapitole, jsme shromáždili základní úlohy pro systémy s proměnnou hmotností. Pro každou z nich jsme sestavili pohybové rovnice a diskutovali jejich řešení. Vycházeli jsme přitom z prací [12] a [11], referujících o původních úlohách Jiřího Buquoye (Buquoyova úloha, pluh), ale přidali jsme také další úlohy tohoto typu (dopravní pásy, kapka v mraku, raketa).

První dvě části druhé kapitoly jsou věnovány Buquoyově úloze (s jejími speciálními případy) a úlohám dopravního pásu. Buquoyovy úlohy představují příklad systému, ve kterém hmotnost závisí na poloze referenčního bodu. V případě úloh dopravního pásu závisí hmotnost na čase. Mezi těmito dvěma skupinami úloh jsme našli analogie. Úlohy o harpuně a o doběhu dopravního pásu (tedy úlohy bez vnějších sil) mají pro čas jdoucí do nekonečna asymptoticky nulovou rychlost a nekonečnou hmotnost. Řešení úlohy dopravního pásu a Buquoyovy úlohy v beztíži (tedy úlohy s konstantní působící silou) mají tu vlastnost, že (nezávisle na počátečních podmínkách) se asymptoticky blíží řešením s konstantní rychlostí. V obou systémech tedy v nekonečném čase dochází k vyrovnání vnější síly se silou související se změnou hmotnosti. Vlastní Buquoyova úloha a úloha o nakloněném dopravním pásu představují systémy, ve kterých se kromě konstantní vnější síly vyskytuje také gravitační síla závislá na okamžité hmotnosti systému. Oba tyto systémy se pro konečnou počáteční rychlost a konečnou působící sílu v konečném čase zastaví a začnou se pohybovat opačným směrem. V případě Buquoyovy úlohy pohybové rovnice vedou na tlumené oscilace. Charakter těchto tlumených oscilací jsme demonstrovali pomocí fázových diagramů. V případě dopravního pásu se ovšem za obecných počátečních podmínek nedá závislost rozložení

hmoty na pásu explicitně vyjádřit, takže nelze takto vyjádřit ani okamžitou hmotnost pásu.

Poslední část druhé kapitoly rozebírá tři odlišné úlohy: pád kapky v mraku, pluh a raketu. Kapka v mraku je dalším příkladem, v němž okamžitá hmotnost systému závisí na poloze. Úlohu lze chápat jako modifikovanou Buquoyovu úlohu pro pohyb vzhůru se silou $F < 0$ a $g < 0$. Rychlost kapky v takovém případě roste do nekonečna pro nekonečné časy. Uvážením změny rozměrů kapky jsme dostali místo lineární závislosti na poloze kubickou závislost hmotnosti na poloze. Pokud uvážíme odporovou sílu závislou lineárně na rychlosti a průřezu kapky a nulovou gravitační sílu, zastaví se kapka na konečné dráze. Úloha o pluhu je historická úloha z Buquoyovy knihy [3]. Tato úloha je zvláštní tím, že se celková hmotnost systému nemění. Další zvláštností je, že systém lze rozložit na dva podsystemy. Samotný pluh, jehož hmotnost se nemění a který se pohybuje v horizontálním směru, a hlínu, která přibývá u hrotu pluhu stejnou rychlostí jakou ubývá na jeho konci. Hlína se pohybuje pouze ve vertikálním směru. I pro pluh existuje specifická rychlost, nezávislá na počátečních podmínkách, které systém dosáhne v nekonečném čase. Poslední řešenou úlohou je raketa. Tuto úlohu jsme řešili pro případ bez vnějších sil, kdy je okamžitá rychlost funkcí okamžité a počáteční hmotnosti, a pro případ, kdy se raketa pohybuje proti působení homogenního gravitačního pole.

V třetí kapitole jsme pak obecně diskutovali zákon zachování energie pro systémy s proměnnou hmotností. Ukázali jsme neplatnost obvyklé rovnosti mezi prací vnějších sil a změnou kinetické energie v těchto případech. Navíc se nám podařilo nalézt obecnější formy zákona zachování energie platné i pro systémy s proměnou hmotností, aniž bychom zaváděli do systému nové síly (tření, napětí atd.). V obecném případě práce vnějších sil není rovna změně kinetické energie, ale jiné veličině, která již není stavovou funkcí na fázovém prostoru. Zachovávaná energie je v těchto případech dána jako funkcionál. Tento obecnější zákon zachování energie jsme pak uvedli v několika různých tvarech pro speciální případy změny hmotnosti. Platnost tohoto zákona zachování energie v novém tvaru jsme pak explicitně ukázali na většině příkladů uváděných v druhé kapitole této práce, konkrétně na Buquoyově úloze, úloze s nakloněným pásem, kapce v mraku a pluhu.

Literatura

- [1] D. Bernoulli: *Hydrodynamica*, Argentorati, 1738.
- [2] G. von Buquoy: *Analytische Bestimmung des Gesetzes der virtuellen Geschwindigkeiten in mechanischer und statischer Hinsicht*, Breikopf und Härtel, Leipzig 1812.
- [3] G. von Buquoy: *Weitere Entwicklung und Anwendung des Gesetzes der virtuellen Geschwindigkeiten in mechanischer und statischer Hinsicht*, Breikopf und Härtel, Leipzig 1814.
- [4] J. Copeland: *Work-Energy Theorem for Variable Mass Systems.*, American Journal of Physics 50(7) 1982: 599-601.
- [5] F. O. Eke: *Dynamics of variable mass systems*, NASA report 1998-208246, 1998.
- [6] Z.-M. Ge, Y.-H. Cheng: *The Hamilton's Principle Of Nonholonomic Variable Mass Systems.*, Applied Mathematics and Mechanics, English Edition 4(2) 1983: 291-302.
- [7] Y. Kang, S. Bae: *Two-dimensional motions of rockets*, Eur. J. Phys. 28 (2007) 135–144.
- [8] T. Levi-Civita: *Ancora sul moto un corpo di massa variable*. Rend. Accad. Naz. Lincei 11 (1930): 626-632.
- [9] I. V. Meščerskij: *Dinamika točki perennoj massy*. Tipografija Akademii nauk, St Petersburg, 1897.
- [10] G. K. Michailov: *Georg Bukua i načala dinamiki sistem s peremennymi massami*, Issledovanija po istom fiziki i mehaniki, Nauka, Moskva, 1986, 191-238.

- [11] J. G. Panovko: *Mechanika deformirujemogo tverdogo tela*, Nauka, Moskva, 1985.
- [12] V. Šíma, J. Podolský: *Buquoy's problem*, Eur. J. Phys. 26 (2005) 1037-1045.
- [13] S. D. Poisson: *Sur le mouvement d'un systeme de corps, en supposant les masses variables*, Bull. Sci. Soc. Philomat. Paris (Avril) 1819 60-62.
- [14] J. Slavík: *Teoretická mechanika*. Západočeská universita, Plzeň 1994, 22-23.
- [15] P. G. Tait, W. L. Steele: *A Treatise on Dynamics of a Particle*. Macmillan, London, 1856.
- [16] C. W. Wong, S. H. Youn, K. Yasui: *The falling chain of Hopkins, Tait, Steele and Cayley*, Eur. J. Phys. 28 (2007) 385–400.