

Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Stanislav Basovník

### Vícerozměrná Mandelbrotova množina

Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Lukáš Krump, Ph.D.

Studijní program: Obecná informatika

2008



## Poděkování

Děkuji vedoucímu své práce Mgr. Lukáši Krumpovi, Ph.D. za odborné konzultace a cenné podněty, které mi poskytl při psaní práce.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 20.5.2008

Stanislav Basovník



# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>7</b>
1.1	Úvod . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Matematický základ</b>	<b>8</b>
2.1	Iterační předpis . . . . .	8
2.2	Komplexní čísla . . . . .	8
2.3	Kvaterniony . . . . .	9
2.3.1	Definice . . . . .	9
2.3.2	Vlastnosti . . . . .	9
2.3.3	Pojmy související s kvaterniony . . . . .	10
2.4	Euklidovský metrický prostor . . . . .	10
2.5	Další použité pojmy . . . . .	11
2.5.1	Definice . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Úvod do problematiky</b>	<b>13</b>
3.1	Co je to fraktální množina . . . . .	13
3.2	Juliovy množiny . . . . .	14
3.2.1	Definice Juliových množin . . . . .	14
3.2.2	Aproximace Juliových množin . . . . .	14
3.3	Mandelbrotova množina . . . . .	16
3.3.1	Definice Mandelbrotovy množiny . . . . .	16
3.3.2	Aproximace Mandelbrotovy množiny . . . . .	18
3.3.3	Vlastnosti Mandelbrotovy množiny . . . . .	19
3.3.4	Mandelbrotova množina v oboru kvaternionů . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Zobecnění Mandelbrotovy množiny</b>	<b>22</b>
4.1	Zobecnění definice Mandelbrotovy množiny . . . . .	22
4.1.1	Označení . . . . .	22

4.1.2	Definice Mandelbrotovy množiny v n-rozměrném prostoru . . . . .	23
4.1.3	Aproximace vícerozměrné Mandelbrotovy množiny . . . . .	24
<b>5</b>	<b>Vlastnosti zobecněné Mandelbrotovy množiny</b>	<b>25</b>
5.1	Vztah mezi množinami o různých dimenzích . . . . .	25
5.2	Symetrie množiny . . . . .	25
5.2.1	Důkaz symetrie . . . . .	25
5.2.2	Využití symetrie . . . . .	28
5.3	Fraktální dimenze povrchu Mandelbrotovy množiny . . . . .	31
<b>6</b>	<b>Program HyperVisualizer</b>	<b>32</b>
6.1	Popis programu . . . . .	32
6.1.1	Metoda zobrazení řezu . . . . .	32
	<b>Literatura</b>	<b>34</b>

Název práce: Vícerozměrná Mandelbrotova množina  
Autor: Stanislav Basovník  
Katedra (ústav): Matematický ústav UK  
Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Lukáš Krump, Ph.D.  
e-mail vedoucího: krump@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme nejznámější fraktál, kterým je Mandelbrotova množina. Tato množina byla definována ve dvou- a čtyř-rozměrném prostoru. V této práci Mandelbrotovu množinu zobecňujeme do  $n$ -rozměrného prostoru se zachováním většiny známých vlastností. V práci jsou zkoumány hlavní vlastnosti dvou- a čtyř-rozměrné Mandelbrotovy množiny, mezi které patří vztah mezi množinami různých dimenzí, symetrie a fraktální dimenze povrchu množiny. Dále jsou popsány a dokázány vlastnosti zobecněné Mandelbrotovy množiny. Porovnáním vlastností původní a zobecněné množiny ověřujeme správnost zobecnění. Součástí práce je také zobrazovací software, který je připojen jako příloha. Tento software názorně ukazuje některé vlastnosti Mandelbrotovy množiny.

Klíčová slova: Mandelbrotova množina,  $n$ -rozměrný prostor, fraktální dimenze

Title: Multidimensional Mandelbrot set  
Author: Stanislav Basovník  
Department: Mathematical Institute, Charles University  
Supervisor: Mgr. Lukáš Krump, Ph.D.  
Supervisor's e-mail address: krump@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we study the best known fractal set – the Mandelbrot set. This set has been defined in two- and four-dimensional space. We generalize this set to  $n$ -dimensional space keeping the most of its known properties. We study main properties of the Mandelbrot set in two- and four-dimensional space, namely relations between sets of different dimensions, symmetry of the Mandelbrot set and the fractal dimension of its surface. We describe and prove several properties of the generalized Mandelbrot set. By comparing properties of the original and the generalized Mandelbrot set we approve the correctness of the generalization. Visualization software is included as an additional part of the work. This software shows some pro-

perties of the Mandelbrot set visually.

Keywords: Mandelbrot set,  $n$ -dimensional space, fractal dimension

# Kapitola 1

## Úvod

### 1.1 Úvod

Ve své práci jsem se zabýval nejznámějším fraktálem, kterým je Mandelbrotova množina. Byla objevena polským matematikem Benoît Mandelbrotem v roce 1979. Mandelbrot se ve svém experimentu pokoušel obarvit body komplexní roviny na základě velmi jednoduchých pravidel. I přes jednoduchost použitého postupu vznikly velmi pozoruhodné obrazce, které obletěly celý svět. Bylo to v době, kdy se možnosti grafického zobrazování pomocí počítače teprve rozvíjely.

Později vznikly pokusy o zobrazování Mandelbrotovy množiny ve více-rozměrném prostoru a to pomocí rozšíření komplexních čísel, kterým byly kvaterniony.

Kvaterniony objevil William Rowan Hamilton z Irska v roce 1843. Hamilton hledal způsob, jak rozšířit komplexní čísla do vícerozměrného prostoru. Nedokázal sice najít zobecnění do trojrozměrného prostoru, ale zavedl místo toho kvaterniony, které lze zobrazit ve čtyřrozměrném prostoru. Napadlo ho řešení ve tvaru  $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ . Tuto identitu tehdy vyryl do Broughamského mostu (nyní Broom Bridge) v Dublinu.

Pomocí kvaternionů a díky možnostem dnešních počítačů můžeme zobrazovat i složité trojrozměrné řezy Mandelbrotovy množiny, které jsou náročné na výpočet.

Cílem této práce bylo zobecnit Mandelbrotovu množinu do  $n$ -rozměrného prostoru i se všemi jejími vlastnostmi. Součástí práce je také program, který zobrazuje řezy  $n$ -rozměrných množin a umožňuje tak lépe pohlédnout do světa vícerozměrných fraktálů.

# Kapitola 2

## Matematický základ

### 2.1 Iterační předpis

Iterační předpis s počátečními podmínkami jednoznačně určuje posloupnost prvků. Obecně můžeme iterační předpis zapsat jako:

$$x_{n+1} = f(x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_l}), \quad \text{kde } k_1, k_2, \dots, k_l < n + 1$$

V dalším textu budeme často používat předpis ve tvaru:  $x_{n+1} = f(x_n)$ , pro který si zavedeme speciální značení:

**Značení 2.1.**  $x \rightarrow f(x)$  je zjednodušený zápis pro  $x_{n+1} = f(x_n)$ .

### 2.2 Komplexní čísla

Všechna komplexní čísla budeme zapisovat ve tvaru  $z = a + bi$ , kde  $a, b \in \mathbb{R}$  a  $i^2 = -1$ .

**Značení 2.2.** *Reálná část* čísla  $z = a + bi$  je číslo  $\operatorname{Re} z = a$ .

*Imaginární část* čísla  $z = a + bi$  je číslo  $\operatorname{Im} z = b$ .

**Značení 2.3.** *Komplexně sdružené číslo*  $\bar{z}$  k číslu  $z = a + bi$  je definováno jako  $\bar{z} = \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z = a - bi$ .

**Značení 2.4.** *Absolutní hodnota*  $|z|$  čísla  $z$  je definována jako  $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ .



## 2.3 Kvaterniony

V částech 2.3.1., 2.3.2. a 2.3.4. bylo čerpáno z článku na internetové adrese [i1].

### 2.3.1 Definice

Zatímco komplexní čísla získáme přidáním imaginární jednotky  $i$ , která splňuje rovnici  $i^2 = -1$ , k reálným číslům, kvaterniony získáme přidáním imaginárních jednotek  $i$ ,  $j$ , a  $k$  k reálným číslům. Tyto imaginární jednotky splňují následující vztah:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \quad (2.1)$$

Každý kvaternion je lineární kombinací jednotkových kvaternionů  $1$ ,  $i$ ,  $j$  a  $k$ , tj. každý kvaternion je jednoznačně vyjádřen ve tvaru  $a + bi + cj + dk$ , kde  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Násobení kvaternionů je dáno multiplikatívní tabulkou pro jednotky kvaternionů:

	1	$i$	$j$	$k$
1	1	$i$	$j$	$k$
$i$	$i$	-1	$k$	$-j$
$j$	$j$	$-k$	-1	$i$
$k$	$k$	$j$	$-i$	-1

Např.  $i \cdot j = k$ .

*Poznámka 2.5.* Kvaterniony lze psát i ve tvaru  $a + bi + (c + di)j$ .

### 2.3.2 Vlastnosti

Při sčítání a odčítání kvaternionů platí všechna pravidla jako u komplexních čísel. Při násobení splňují kvaterniony asociativní zákon a každý nenulový prvek má právě jeden prvek inverzní. Na rozdíl od komplexních čísel je násobení kvaternionů nekomutativní. Např.:  $ij = k$ ,  $ji = -k$  atd.

### 2.3.3 Pojmy související s kvaterniony

**Definice 2.6.** *Reálná část* čísla  $z = a + bi + cj + dk$  je číslo  $\operatorname{Re} z = a$ .

*Imaginární část* čísla  $z = a + bi + cj + dk$  je číslo  $\operatorname{Im} z = bi + cj + dk$ . Na rozdíl od imaginární části komplexního čísla zde necháváme imaginární jednotky.

**Definice 2.7.** *Sdružený kvaternion*  $\bar{z}$  ke kvaternionu  $z = a + bi + cj + dk$  je definován jako  $\bar{z} = \operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z = a - bi - cj - dk$ .

**Definice 2.8.** *Absolutní hodnota*  $|z|$  čísla  $z$  je definována jako  $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ .

## 2.4 Euklidovský metrický prostor

**Definice 2.9.** Metrický prostor [1] (str. 302): „Množinu  $M$  nazýváme *metrickým prostorem*, jestliže pro každou dvojici jejích prvků  $u, v$  je definována tzv. *vzdálenost*  $d(u, v)$ , splňující následující požadavky:

$$\begin{aligned}d(u, v) &\geq 0, \quad \text{přičemž} \quad d(u, v) = 0 \quad \text{tehdy a jen tehdy, je-li} \quad u = v \\d(u, v) &= d(v, u) \\d(u, z) &\leq d(u, v) + d(v, z) \quad \text{pro všechna } u, v, z \in M.\end{aligned}$$

Říkáme také, že na množině  $M$  (v množině  $M$ ) je dána *metrika*  $d$ . Místo o prvcích mluvíme často o bodech množiny  $M$ , resp. prostoru  $M$ .

**Definice 2.10.** *Euklidovský metrický prostor*  $E_n$  je speciální případ metrického prostoru, kdy vzdálenost  $d(X, Y)$  mezi každými dvěma body  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  a  $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]$  je definována vztahem

$$d(X, Y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2} \geq 0 \quad (2.2)$$

Pokaždé, když budeme mluvit o  $n$ -rozměrném nebo vícerozměrném prostoru, bude tím myslet právě Euklidovský metrický prostor.

**Definice 2.11.** Nechť  $(X, d)$  je metrický prostor,  $x \in X$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $\mathcal{U}_\varepsilon(x) = \{y \in X; d(x, y) < \varepsilon\}$  je  $\varepsilon$ -ové okolí  $x$ .

Množina  $G \subseteq X$  je *otevřená*  $\Leftrightarrow \forall x \in G \exists \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(x) \subseteq G$ .

Množina  $F \subseteq X$  je *uzavřená*  $\Leftrightarrow X \setminus F$  je otevřená.

**Definice 2.12.** Necht  $(X, d)$  je metrický prostor,  $A \subseteq X$ .

$\bar{A} = \bigcap \{F \supseteq A : F \text{ je uzavřená}\}$  je *uzávěr* množiny  $A$  v  $(X, d)$ .

$\partial A = \bar{A} \cap \overline{X \setminus A}$  je *hranice* množiny  $A$  v  $(X, d)$ .

**Definice 2.13.** Necht  $(X, d)$  je metrický prostor,  $M \subseteq X$ .

$M$  se nazývá *souvislá*, pokud v  $X$  neexistují takové neprázdné otevřené množiny  $A$  a  $B$ , že platí:

$$A \cap B = X$$

$$A \cup B = \emptyset$$

**Definice 2.14.** Necht  $(X, d)$  je metrický prostor,  $M \subseteq X$ .

$M$  se nazývá *nesouvislá*, pokud  $M$  není souvislá.

**Definice 2.15.** Necht  $(X, d)$  je metrický prostor,  $M \subseteq X$ .

$M$  se nazývá *totálně nesouvislá*, pokud každá její podmnožina  $A$  taková, že počet jejích prvků je větší než 1, je nesouvislá.

## 2.5 Další použité pojmy

### 2.5.1 Definice

V této části uvedeme definice některých pojmů, které pro nás budou důležité v dalším textu. Ve všech definicích budeme předpokládat, že  $(X, d)$  je metrický prostor dle definice 2.9.

**Definice 2.16.** Necht  $A, B, S \subset X$  jsou disjunktní a neprázdné. Množina  $S$  *odděluje* množiny  $A$  a  $B$ , pokud pro každou souvislou množinu  $M \subseteq X$  obsahující množiny  $A, B$  platí:  $M \cap S \neq \emptyset$ .

Prázdná množina  $S$  *odděluje*  $A$  a  $B$  právě když  $X$  obsahuje pouze izolované body.

**Definice 2.17.** (převzato z [2], str. 79–81): Prázdná množina má dimenzi  $-1$ . Lze-li dvě uzavřené disjunktní podmnožiny  $X$  oddělit prázdnou množinou, pak  $\dim X \leq 0$ . Lze-li dvě uzavřené disjunktní podmnožiny  $X$  oddělit množinou  $L$  a  $\dim L \leq k - 1$ , pak  $\dim X \leq k$ . Množina  $X$  má *topologickou dimenzi*  $k$ , právě když  $\dim X \leq k$  a zároveň není pravda, že  $\dim X \leq k - 1$ .

**Definice 2.18.** (převzato z [4], str. 7):

*Průměr množiny*  $A$  je  $|A| = \sup\{|x - y|; x, y \in A\}$ .

**Definice 2.19.** (převzato z [3], str. 147–149): *s*-dimenzionální Hausdorffova vnější míra  $M \subset X$  se definuje pro libovolné  $s > 0$  jako

$$H^s(M) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_\varepsilon^s(M) \quad (2.3)$$

kde  $H_\varepsilon^s(M) = \inf \{ \sum_j |A_j|^s : |A_j| \leq \varepsilon, \bigcup_j A_j \supset M \}$ , kde infimum se bere přes všechna spočetná pokrytí  $\{A_j\}$  množiny  $M$  a  $\varepsilon > 0$ . Platí, že existuje právě jedno  $s_0 \in \langle 0, \infty \rangle$  takové, že

$$\forall s < s_0 : H^s = +\infty$$

$$\forall s > s_0 : H^s = 0$$

Takové  $s_0$  se nazývá *Hausdorffova dimenze* množiny  $M$ .

*Poznámka 2.20.* Topologická dimenze je celé číslo. Hausdorffova dimenze je v  $\langle 0, +\infty \rangle$ .

Vždy platí: topologická dimenze  $\leq$  Hausdorffova dimenze.

# Kapitola 3

## Úvod do problematiky

### 3.1 Co je to fraktální množina

Definice fraktální množiny, neboli fraktálu, dosud není vhodně zformulována. Zatím existují pouze pokusy o definici, ale u každého z nich se podařilo najít případ, kdy definice selhala. Většina matematiků považuje za nejpřesnější tuto definici:

#### **Pokus o definici.**

*Fraktální množiny* jsou takové množiny, jejichž Hausdorffova dimenze je větší než topologická dimenze.

Juliova a Mandelbrotova množina, o kterých budeme mluvit dále, této definici vyhovují, ale existují množiny, které bychom rádi označili jako fraktály, ale podle této definice fraktály nejsou.

Pro jednoduchou představu nám bude stačit, když si popíšeme některé základní vlastnosti fraktálů. Na první pohled můžeme o fraktální množině říci, že je to velice složitý útvar s neomezeným množstvím detailů. Tyto útvary ale nejsou úplně náhodné. Fraktální množiny mají řád. Jednou z hlavních vlastností je *soběpodobnost*. Množina  $M$ , která je *soběpodobná*, obsahuje podmnožinu (většinou ne jednu), která je po určité transformaci kopií množiny  $M$ .

## 3.2 Juliovy množiny

### 3.2.1 Definice Juliových množin

Juliovy množiny jsou určeny iterační rovnicí  $z_{n+1} = z_n^2 + c$ , kde  $z_0$  je bod komplexní roviny a  $c$  je komplexní konstanta. Podle této iterační rovnice můžeme body roviny rozdělit do dvou množin:  $E_c$ , tzv. *úniková množina* a  $P_c$ , tzv. *setrvalá množina*. Formální definice vypadají takto:

**Definice 3.1.** Do množiny  $E_c$  patří všechny body  $z_0$  takové, že členy posloupnosti  $z_{n+1} = z_n^2 + c$  v absolutní hodnotě divergují k nekonečnu.

**Definice 3.2.** Do množiny  $P_c$  patří všechny body  $z_0$  takové, které nepatří do množiny  $E_c$ .

Po zavedení těchto pojmů můžeme přejít k definici *Juliových množin*:

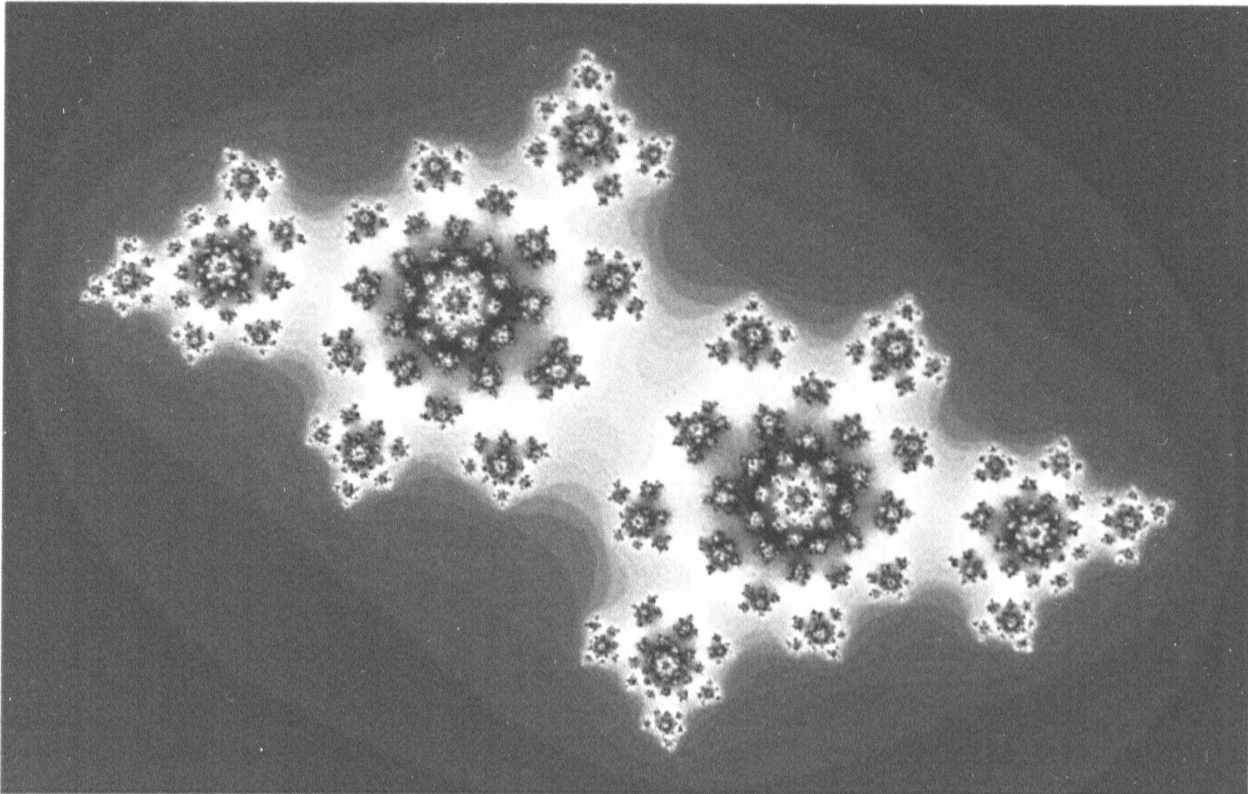
**Definice 3.3.** Juliova množina  $J_c$  s parametrem  $c$  je množina bodů tvořících hranici množiny  $E_c$ .

I když definice *Juliových množin* vypadá jednoduše, obrazy této množiny jsou až neuvěřitelně složité a zajímavé útvary.

### 3.2.2 Aproximace Juliových množin

Zobrazení Juliových množin a dalších fraktálů je možné s pomocí počítače. Budeme chtít na obrazovce monitoru, která nám reprezentuje rovinu komplexních čísel, zobrazit jednou barvou množinu  $E_c$  a jinou barvou množinu  $P_c$  tak, abychom si mohli prohlédnout rozhraní mezi těmito množinami, tj. *Juliovu množinu*. Pokud bychom chtěli dosáhnout co nejpřesnějšího výsledku, museli bychom pro každý bod na obrazovce provést nekonečně mnoho iteračních kroků výpočtu. To je ale na počítači nemožné. Proto si musíme určit maximální počet iterací, čímž dosáhneme alespoň přibližných výsledků. K tomu, abychom pak mohli zařadit bod do správné množiny ( $E_c$  nebo  $P_c$ ) použijeme následující větu:

**Věta 3.4.** *Nechť  $z, c \in \mathbb{C}$ ,  $|z| \geq |c|$ ,  $|z| > 2$ . Pak  $z$  náleží do únikové množiny  $E_c$  pro iterační rovnici  $z \rightarrow z^2 + c$ .*



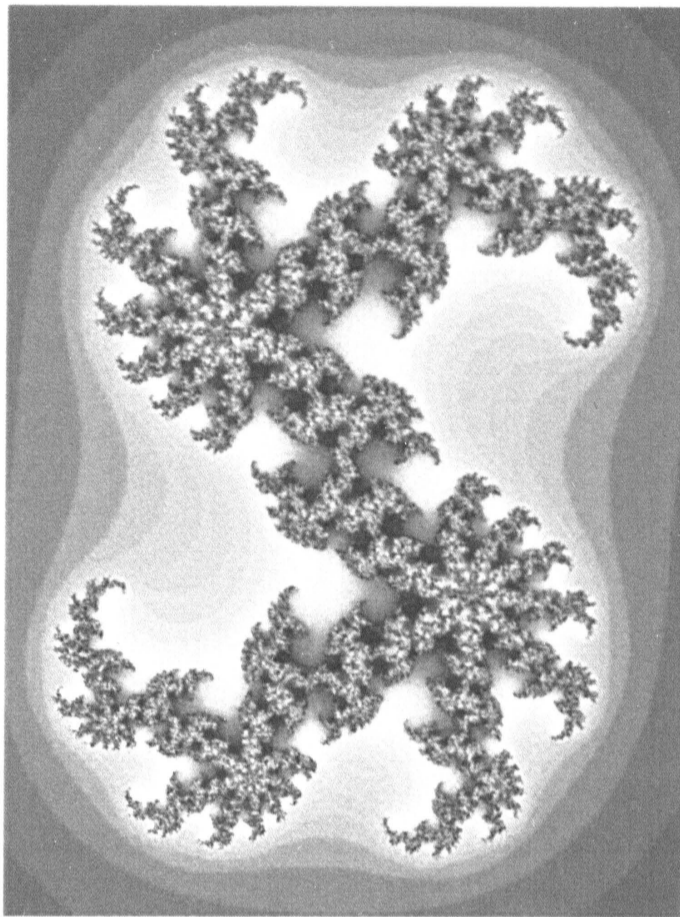
Obrázek 3.1: Juliova množina,  $c = -0,6 - 0,5i$

*Důkaz.* Platí:  $|z| > 2$  a  $|z| \geq |c|$ . Pak existuje kladné reálné číslo  $h$  takové, že  $|z| = 2 + h$ . Odvodíme absolutní hodnotu následujícího členu posloupnosti  $|z^2 + c|$ :

$$\begin{aligned}
 |z^2 + c| &\geq |z^2| - |c| \quad \dots \text{trojúhelníková nerovnost} \\
 &= |z|^2 - |c| \\
 &\geq |z|^2 - |z| \\
 &= (2 + h)^2 - (2 + h) = 2 + 3h + h^2 = (2 + h) + (2h + h^2) \\
 &= |z| + (2h + h^2)
 \end{aligned}$$

Vidíme, že posloupnost absolutních hodnot je rostoucí a navíc roste i rozdíl dvou sousedních členů. Z toho plyne, že posloupnost  $z \rightarrow z^2 + c$  je pro  $|z| > 2$  a  $|z| \geq |c|$  divergentní, tj. bod  $z$  patří do únikové množiny  $E_c$ .  $\square$

S pomocí této věty již dokážeme sestavit algoritmus pro aproximaci Juliovy množiny. Během každého kroku budeme testovat, zda absolutní hodnota čísla  $z$  nepřesáhla hodnotu 2. Pokud se tak stane, můžeme výpočet ihned ukončit a prohlásit, že tento bod leží v množině  $E_c$ . Pokud po skončení poslední iterace absolutní hodnota čísla  $z$  nepřesáhla hodnotu 2, je šance, že tento bod patří do množiny  $P_c$  nebo je aspoň blízko ní. Čím větší budeme mít maximální počet iterací, tím přesnější bude výpočet a uvidíme více detailů na rozhraní množin  $E_c$  a  $P_c$ .



Obrázek 3.2: Juliova množina,  $c = 0.37 + i$

*Poznámka 3.5.* Juliova množina je symetrická, tj.  $z \in J_c \Leftrightarrow -z \in J_c$ , což nám ušetří půlku výpočtu při aproximaci.

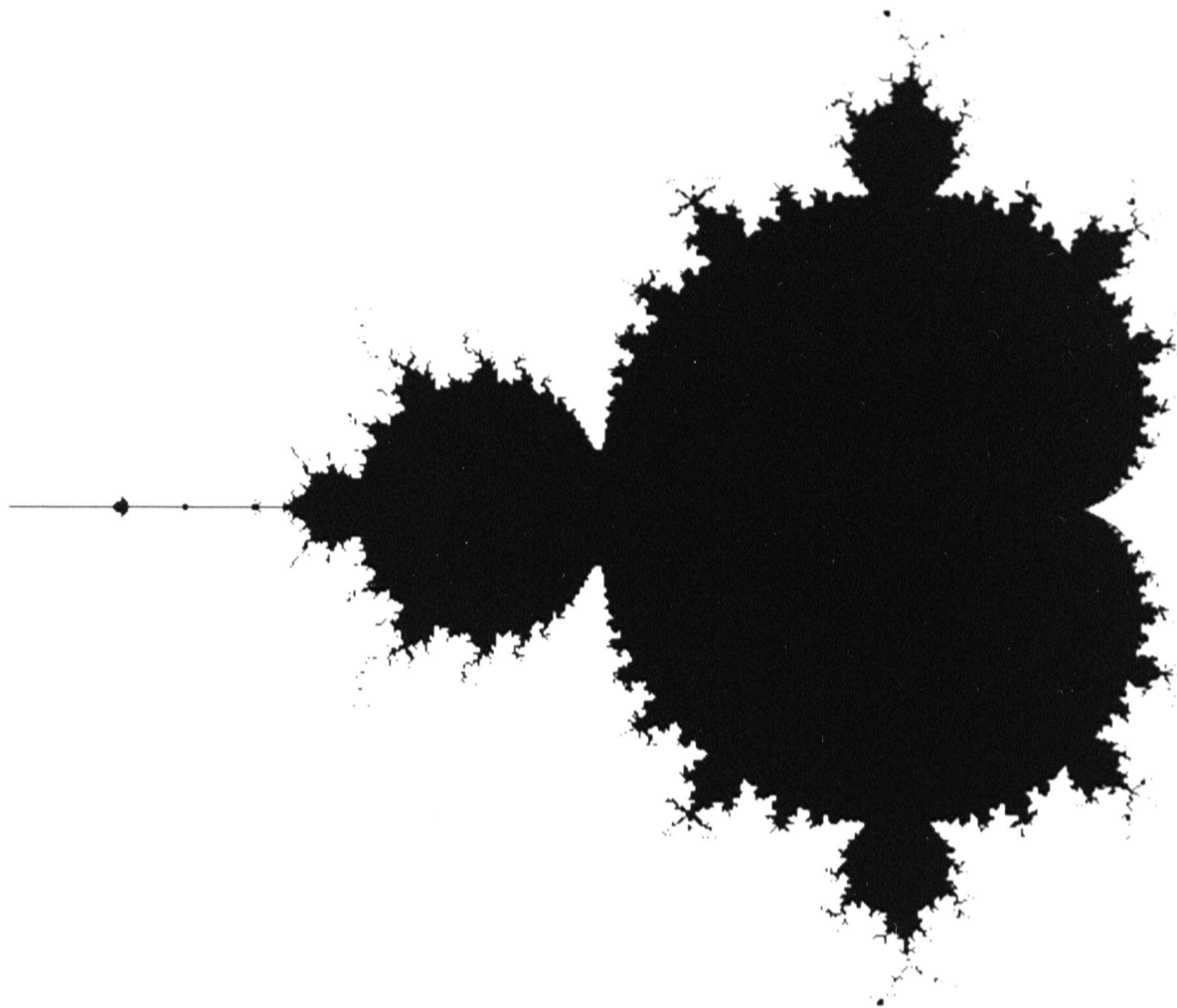
Množina  $E_c$  je pro nás zajímavá tím, že do této množiny zařazujeme pouze ty body, o kterých jsme si opravdu jistí, že do této množiny patří. U každého takového bodu tedy víme, po kolika krocích absolutní hodnota čísla  $z$  přesáhla hodnotu 2, čímž zároveň výpočet tohoto bodu skončil. Tyto body můžeme obarvit podle počtu potřebných iterací. Výsledné obrázky viz obr. 3.1 a 3.2.

## 3.3 Mandelbrotova množina

### 3.3.1 Definice Mandelbrotovy množiny

Benoît Mandelbrot provedl v roce 1979 pozoruhodný experiment, jehož výsledkem byly obrázky, které obletěly celý svět. Mandelbrot studoval matematické dílo [6], str. 47–245, jehož autory jsou Gaston Julia a Pierre Fatou. V tomto díle se objevuje strukturální dvojakost, která uvádí, že pro libovolnou volbu konstanty  $c$  je Juliova množina  $J_c$  a zároveň množina  $P_c$  buďto *souvislá* nebo *totálně nesouvislá*. Kolem roku 1979 měl Mandelbrot nápad,





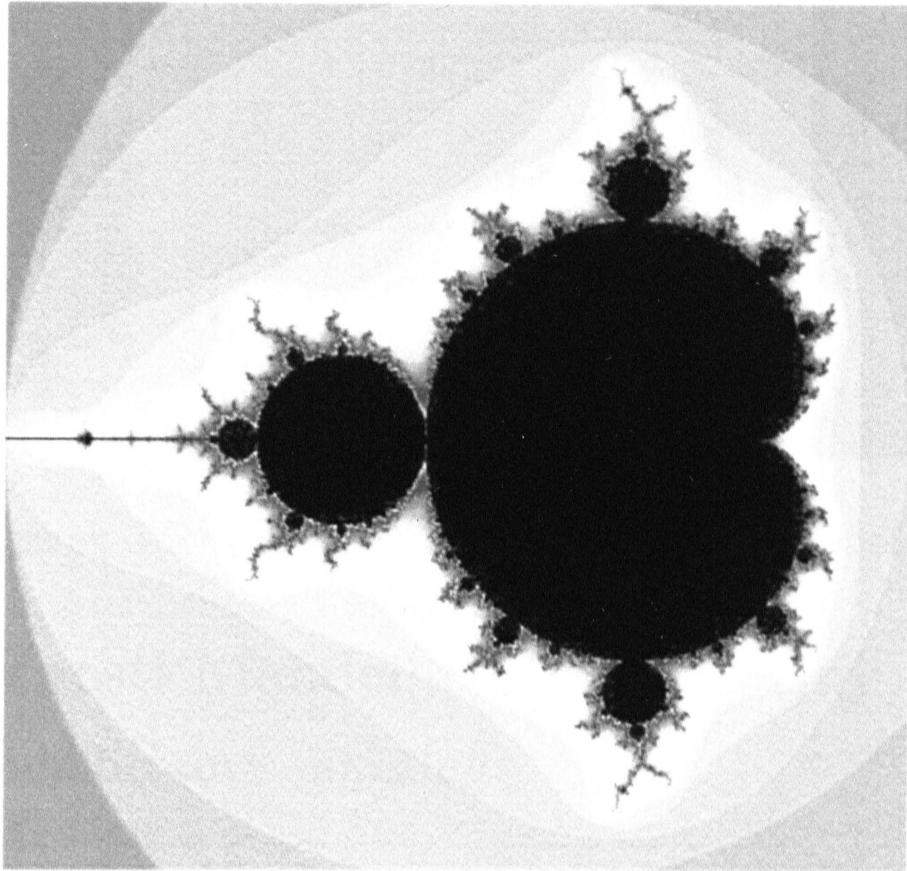
Obrázek 3.3: Mandelbrotova množina

jak tuto dvojakost zobrazit se všemi parametry  $c$ , ležících v rovině komplexních čísel. Tato myšlenka vedla přímo k definici *Mandelbrotovy množiny*:

**Definice 3.6.** Do *Mandelbrotovy množiny*  $M$  patří všechny komplexní parametry  $c$ , pro které je Juliova množina  $J_c$  souvislá.

Mandelbrot obarvil jednotlivé body roviny čísel  $c$  bílou nebo černou barvou podle toho, jestli byla příslušná Juliova množina souvislá nebo nesouvislá. Výsledkem byl černobílý obrázek podobný obr. 3.3 (v roce 1979 s tehdejšími možnostmi grafického zobrazení to nebylo příliš kvalitní).

Při výpočtu bychom ale narazili na problém, jak pomocí počítače rozhodnout, zda parametr  $c$  patří do Mandelbrotovy množiny nebo ne, tj. určit, zdali je příslušná Juliova množina souvislá nebo nesouvislá. Když Mandelbrot prováděl svůj experiment, byl jedním z mála lidí, kteří znali podrobně práci Julii a Fatoua. Především si byl vědom tvrzení o úzkém vztahu mezi dvojakostí Juliových množin a bodem  $0 + 0i$  (zdroj [6]):



Obrázek 3.4: Mandelbrotova množina

**Tvrzení 3.7.** *Množina  $J_c$  je souvislá tehdy a jen tehdy, pokud posloupnost  $z_{n+1} = z_n^2 + c$ , kde  $z_0 = 0$ , je omezená.*

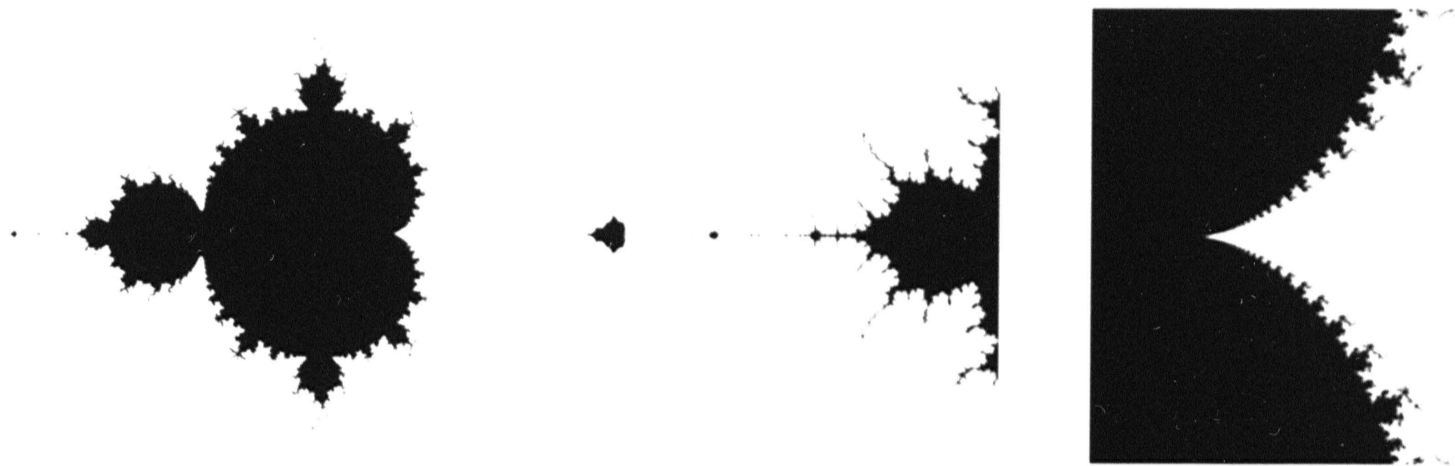
Jinými slovy, množina  $J_c$  (a zároveň i množina  $P_c$ ) je souvislá tehdy a jen tehdy, pokud  $0 \in P_c$ . Z tohoto tvrzení plyne věta:

**Věta 3.8.** *Do Mandelbrotovy množiny patří všechny body  $c$ , pro které je posloupnost  $z_{n+1} = z_n^2 + c$ , kde  $z_0 = c$ , omezená.*

Tato věta popisuje důležitou vlastnost Mandelbrotovy množiny a dá se dokázat, že je ekvivalentní s definicí 3.6, tzn., že z definice 3.6 odvodíme větu 3.8 a naopak. Tuto větu navíc Mandelbrot použil jako definici množiny  $M$  ve svých experimentech roku 1979. Při zobecňování Mandelbrotovy množiny proto také použijeme tuto větu jako alternativní definici.

### 3.3.2 Aproximace Mandelbrotovy množiny

Pomocí alternativní definice jsme schopni sestavit algoritmus pro aproximaci Mandelbrotovy množiny. Tento algoritmus bude podobný algoritmu pro aproximace Juliových množin — viz 3.2.2. Jediný rozdíl bude v tom, že parametr  $c$  bude pro každý bod jiný. Jako parametr  $c$  použijeme souřadnici právě počítaného bodu. Počáteční podmínka  $z_0 = 0$ .



Obrázek 3.5: Mandelbrotova množina a její detaily

### 3.3.3 Vlastnosti Mandelbrotovy množiny

#### Symetrie Mandelbrotovy množiny

Zajímavou vlastností Mandelbrotovy množiny je její symetrie kolem reálné osy. I když to z definice 3.6 nebo z věty 3.8 přímo nevyplývá, je tato vlastnost dobře viditelná na obrázku v komplexní rovině – viz obr. 3.5

Tuto symetrii v komplexní rovině si rovnou dokážeme. Budeme chtít ukázat, že hodnoty  $|z_n|$  v posloupnosti  $z \rightarrow z^2 + c$  nezávisí na znaménku imaginární části počáteční podmínky  $c$ . Z tohoto tvrzení pak plyne, že Mandelbrotova množina je symetrická podle reálné osy.

Do rovnice  $z_{n+1} = z_n^2 + c$  dosadíme  $z_k = a_k + b_k i$  a  $c = a_0 + b_0 i$ :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n^2 - b_n^2 + a_0 \\ b_{n+1} &= 2a_n b_n + b_0 \end{aligned}$$

Hodnota  $a_{n+1}$  závisí na  $a_n$ ,  $|b_n|$  a  $a_0$ . Ve výrazu  $b_{n+1} = 2a_n b_n + b_0$  budeme opakovaně dosazovat za  $b_k$ :

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 2a_n b_n + b_0 = 2a_n(2a_{n-1} b_{n-1} + b_0) + b_0 = \\ &= 2a_n(2a_{n-1}(2a_{n-2} b_{n-2} + b_0) + b_0) + b_0 = \dots = \\ &= 2a_n(2a_{n-1}(2a_{n-2} \dots (2a_0 b_0 + b_0) + \dots + b_0) + b_0) + b_0 \end{aligned}$$

Odtud odvodíme, na čem závisí  $b_{n+1}$ . Vytkneme  $b_0$ :

$$b_{n+1} = b_0(2a_n(2a_{n-1}(2a_{n-2} \dots (2a_0 + 1) + \dots + 1) + 1) + 1)$$

a pro absolutní hodnotu  $|b_{n+1}|$  dostáváme

$$|b_{n+1}| = |b_0| \cdot |(2a_n(2a_{n-1} \cdots + 1) + 1)|$$

Hodnota  $|b_{n+1}|$  je tedy funkcí  $f_2(a_0, a_1, \dots, a_n, |b_0|)$ . Nyní můžeme odvodit, na čem závisí hodnota  $|z_{n+1}|$ . Spočítáme ji pomocí  $|z_{n+1}| = \sqrt{a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2}$ , z čehož můžeme usoudit, že  $|z_{n+1}|$  závisí na těchto dvou výrazech:

$$a_{n+1} = f_1(a_n, |b_n|, a_0) \quad (3.1)$$

$$|b_{n+1}| = f_2(a_0, a_1, \dots, a_n, |b_0|) \quad (3.2)$$

Shrnutí:  $|z_{n+1}| = f(a_0, a_1, \dots, a_n, |b_0|, |b_n|)$ . Indukcí podle (3.1) a (3.2) zjistíme, že hodnota  $|z_{n+1}|$  závisí pouze na  $n$ ,  $a_0$  a  $|b_0|$ , přičemž  $n$  a  $a_0$  nezávisí na  $b_0$ . Z tohoto faktu již plyne dokazovaná symetrie Mandelbrotovy množiny v komplexní rovině.

### Hausdorffova dimenze okraje Mandelbrotovy množiny

Japonský matematik Mitsuhiro Shishikura roku 1994 dokázal, že Hausdorffova dimenze okraje Mandelbrotovy množiny je přesně 2. Celý důkaz viz internetová adresa [i2].

Okraj Mandelbrotovy množiny leží v rovině, proto jeho Hausdorffova dimenze může být maximálně 2. Přesný důkaz tohoto tvrzení viz [5] str. 104. Topologická dimenze okraje množiny je 1.

Pokud shrneme všechny poznatky popsané výše, tak zjistíme, že rozdíl mezi Hausdorffovou a topologickou dimenzí je maximální možný, tedy 1.

### 3.3.4 Mandelbrotova množina v oboru kvaternionů

Tak jako jsme definovali Mandelbrotovu množinu v komplexních číslech (viz def. 3.6), můžeme stejnou definici použít i pro kvaterniony.

Tímto rozšířením dostáváme další vlastnost Mandelbrotovy množiny:

### Vztah mezi Mandelbrotovými množinami v komplexních číslech a v kvaternionech

Při výpočtu Mandelbrotovy množiny v oboru kvaternionů dosazujeme do iterační rovnice  $z \rightarrow z^2 + c$  kvaterniony ve tvaru  $a + bi + cj + dk$ , čímž dostaneme čtyřrozměrnou Mandelbrotovu množinu. Dvojrozměrný řez této

množiny, který získáme položením  $c = d = 0$ , je Mandelbrotova množina v oboru komplexních čísel. Dosáhli jsme toho tím, že do iterační rovnice  $z \rightarrow z^2 + c$  jsme dosazovali kvaterniony ve tvaru  $a + bi + 0j + 0k$ , které jsou zároveň komplexními čísly. Čtyřrozměrná Mandelbrotova množina v oboru kvaternionu tedy obsahuje jako svůj řez dvojrozměrnou Mandelbrotovu množinu v oboru komplexních čísel.

Pokud bychom dosazovali kvaterniony např. ve tvaru  $a + 0i + cj + 0k$ , dostaneme opět Mandelbrotovu množinu v oboru komplexních čísel, ale tentokrát se jedná o jiný řez čtyřrozměrné množiny. Čtyřrozměrná Mandelbrotova množina tedy obsahuje několik Mandelbrotových množin v oboru komplexních čísel jako svůj dvojrozměrný řez. V části 5.2.1 dokážeme, že takových řezů je nekonečně mnoho.

*Poznámka 3.9.* Mandelbrotova množina v oboru kvaternionu splňuje analogickou vlastnost z věty 3.4.

# Kapitola 4

## Zobecnění Mandelbrotovy množiny

### 4.1 Zobecnění definice Mandelbrotovy množiny

#### 4.1.1 Označení

$M_n$  bude značit  $n$ -rozměrnou Mandelbrotovu množinu.

Budeme používat iterační rovnici, ve které se vyskytnou funkce  $n$ -rozměrných vektorů. Tyto vektory budou reprezentovat body v  $n$ -rozměrném prostoru. Vektory budeme značit tučným písmenem. Jednotlivé složky vektoru budeme značit stejným písmenem, jako jsme označili vektor, a budeme je rozlišovat indexem vpravo dole. Např.  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

Vektory v posloupnosti určené iterační rovnicí budeme rozlišovat pomocí indexu vpravo nahoře. Abychom tyto indexy rozeznali od exponentů mocnin, budeme indexy dávat do kulaté závorky. Např.  $\mathbf{a}^{(k)} = (a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \dots, a_n^{(k)})$ .

$n$ -rozměrný prostor, se kterým budeme pracovat dále, bude mít jeden rozměr význačný. Odpovídající složkou vektoru pro tento význačný rozměr bude prvek  $a_1$ . Budeme jej zobecněně nazývat reálnou částí vektoru  $\mathbf{a}$ . Značení:  $\operatorname{Re} \mathbf{a} = a_1$ . Ostatní složky budeme nazývat imaginární částí vektoru  $\mathbf{a}$ . Značení:  $\operatorname{Im} \mathbf{a} = (a_2, a_3, \dots, a_n)$ . Toto označení zavádíme podle analogických pojmů u komplexních čísel.

Velikost, nebo také absolutní hodnota, vektoru  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  bude skalár, který spočítáme pomocí  $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$ . Budeme ji značit  $|\mathbf{a}|$ .

## 4.1.2 Definice Mandelbrotovy množiny v n-rozměrném prostoru

**Definice 4.1.** Máme posloupnost  $(\mathbf{z}^{(0)}, \mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)}, \dots)$ , která je dána vztahy:

$$\begin{aligned}
 z_1^{(m+1)} &= \left(z_1^{(m)}\right)^2 - \left(z_2^{(m)}\right)^2 - \left(z_3^{(m)}\right)^2 - \dots - \left(z_n^{(m)}\right)^2 + z_1^{(0)} \\
 z_2^{(m+1)} &= 2z_1^{(m)}z_2^{(m)} + z_2^{(0)} \\
 z_3^{(m+1)} &= 2z_1^{(m)}z_3^{(m)} + z_3^{(0)} \\
 &\vdots \\
 z_n^{(m+1)} &= 2z_1^{(m)}z_n^{(m)} + z_n^{(0)}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

kde  $\mathbf{z}^{(0)} = c$  a  $\mathbf{z}^{(k)} = \left(z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, \dots, z_n^{(k)}\right)$ . Do *n-rozměrné Mandelbrotovy množiny*  $M_n$  patří všechny takové body  $c$  *n-rozměrného prostoru*, pro které je posloupnost  $(|\mathbf{z}^{(0)}|, |\mathbf{z}^{(1)}|, |\mathbf{z}^{(2)}|, \dots)$  omezená.

Iterační rovnice z definice 4.1 zobecňuje iterační rovnici pro komplexní čísla a kvaterniony z věty 3.8:

Pro komplexní čísla:

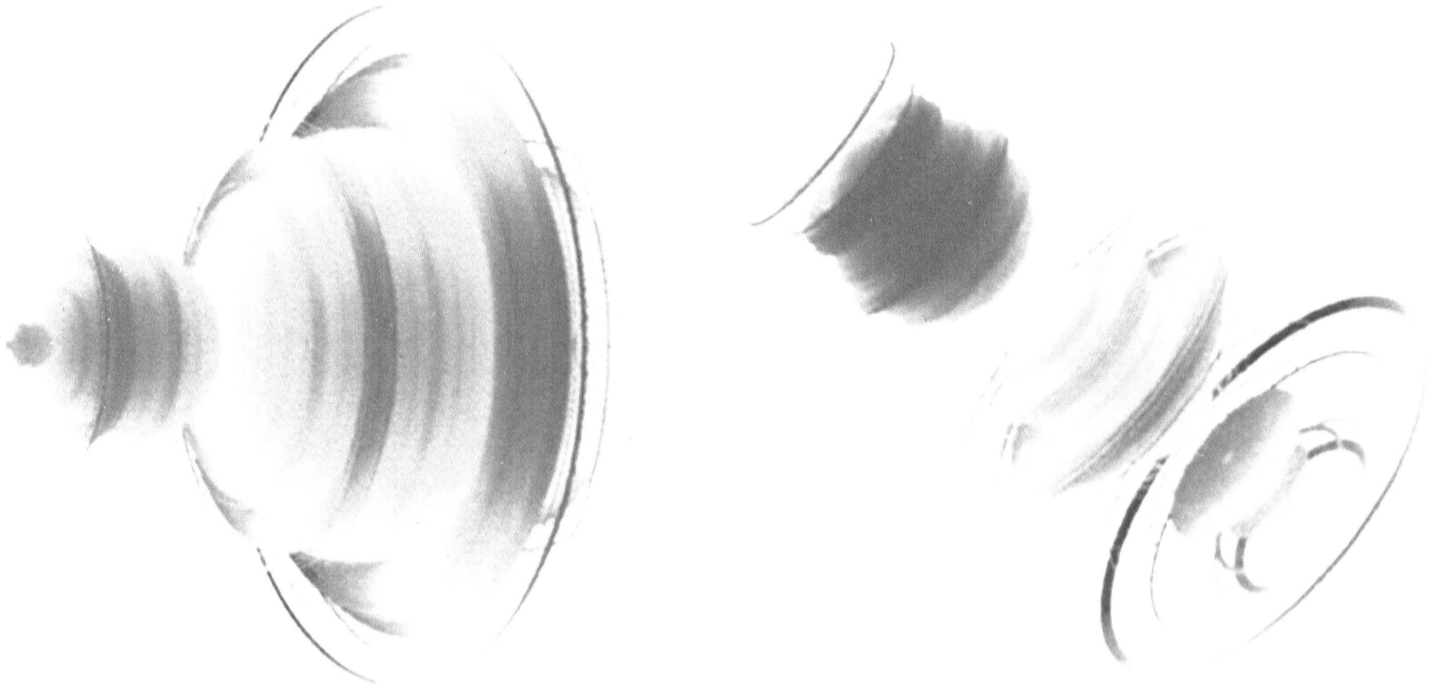
$$(z_1, z_2) \rightarrow (z_1^2 - z_2^2 + c_1, 2z_1z_2 + c_2)$$

Pro kvaterniony:

$$\begin{aligned}
 (z_1, z_2, z_3, z_4) \rightarrow & (z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - z_4^2 + c_1, \\
 & 2z_1z_2 + c_2, \\
 & 2z_1z_3 + c_3, \\
 & 2z_1z_4 + c_4)
 \end{aligned}$$

Obecně:

$$\begin{aligned}
 (z_1, z_2, \dots, z_n) \rightarrow & (z_1^2 - z_2^2 - \dots - z_n^2 + c_1, \\
 & 2z_1z_2 + c_2, \\
 & \vdots \\
 & 2z_1z_n + c_n)
 \end{aligned}$$



Obrázek 4.1: Mandelbrotova množina: vlevo: trojrozměrná množina, vpravo: řez čtyřrozměrnou množinou obsahuje body  $(-1, 0, 0, 0)$ ,  $(0, 1, -1, 0)$ ,  $(0, 1, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 0, 1)$

### 4.1.3 Aproximace vícerozměrné Mandelbrotovy množiny

Výpočet zobecněné Mandelbrotovy množiny provedeme stejným způsobem, jako kdybychom počítali Mandelbrotovu množinu v komplexních číslech. Jediná odlišnost bude v tom, že budeme muset zavést více souřadnic pro implementaci vztahu (4.1). Aby byl výpočet korektní, musíme ještě zobecnit větu 3.4 o mezním poloměru:

**Věta 4.2.** *(Zobecněný mezní poloměr) Nechť  $\mathbf{v}$  je takový vektor, že  $|\mathbf{v}| \geq |\mathbf{c}|$  a zároveň  $|\mathbf{v}| > 2$ . Pak posloupnost vektorů  $(|\mathbf{z}^{(0)}|, |\mathbf{z}^{(1)}|, |\mathbf{z}^{(2)}|, \dots)$  z definice 4.1 je pro  $\mathbf{z}^{(0)} = \mathbf{v}$  neomezená.*

Tato věta se dokáže analogicky jako věta 3.4.



# Kapitola 5

## Vlastnosti zobecněné Mandelbrotovy množiny

### 5.1 Vztah mezi množinami o různých dimenzích

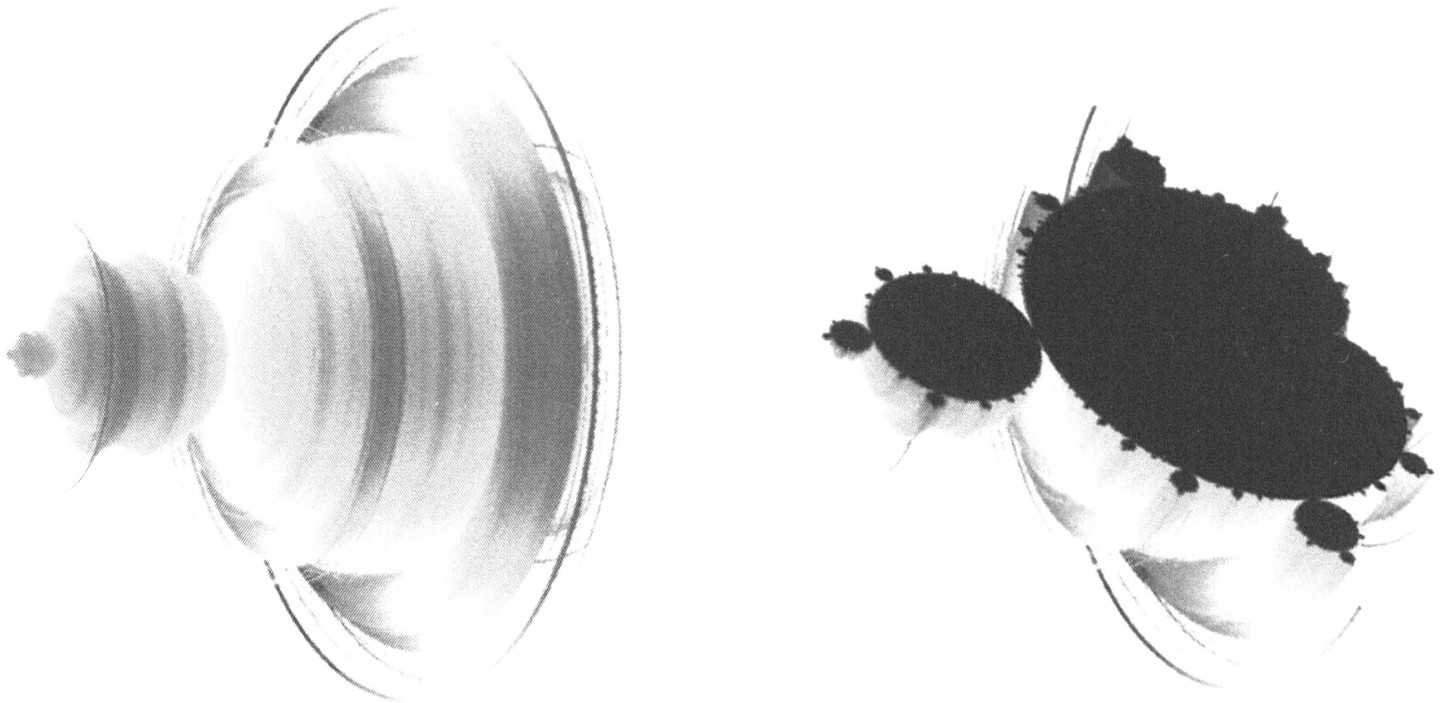
Zvolme si  $k$  libovolných složek vektoru  $\mathbf{c}$  tak, že mezi nimi je obsažena i reálná složka. Počet  $k$  zvolíme tak, aby byl menší než  $n$ . Nyní necháme  $k$  vybraných složek vektoru  $\mathbf{c}$  probíhat přes všechna reálná čísla a zbývající složky necháme nulové. Všechny takto získané vektory  $\mathbf{c}$  dosadíme do vztahů (4.1) za  $\mathbf{z}^{(0)}$ . S těmito počátečními podmínkami dostaneme  $k$ -rozměrnou Mandelbrotovu množinu  $M_k$ . Tato množina je podmnožinou  $n$ -rozměrné množiny  $M_n$ , což je dáno volbou  $n$ -rozměrných vektorů  $\mathbf{z}^{(0)}$ . Platí  $M_k \subset M_n$  pro  $k < n$ . Názornou ukázkou můžeme vidět na obrázku 5.1.

### 5.2 Symetrie množiny

#### 5.2.1 Důkaz symetrie

V této části si dokážeme, že Mandelbrotova množina je symetrická podle reálné osy ve všech rozměrech. Tato osová symetrie je myšlena tak, že  $n$ -rozměrná Mandelbrotova množina je shodná s množinou, která vznikne rotací dvojrozměrné Mandelbrotovy množiny kolem reálné osy.

Při důkazu symetrie použijeme vztahy (4.1). Vidíme, že hodnota  $z_1^{(m+1)}$  závisí na  $z_1^{(m)}$ ,  $z_1^{(0)}$  a na  $|\operatorname{Im} \mathbf{z}^{(m)}|$ :



Obrázek 5.1: Trojrozměrná Mandelbrotova množina a její řez

$$\begin{aligned}
 z_1^{(m+1)} &= \left(z_1^{(m)}\right)^2 - \left(z_2^{(m)}\right)^2 - \left(z_3^{(m)}\right)^2 - \dots - \left(z_n^{(m)}\right)^2 + z_1^{(0)} \\
 &= \left(z_1^{(m)}\right)^2 - \left(\left(z_2^{(m)}\right)^2 + \left(z_3^{(m)}\right)^2 + \dots + \left(z_n^{(m)}\right)^2\right) + z_1^{(0)} \\
 &= \left(z_1^{(m)}\right)^2 - |\operatorname{Im} \mathbf{z}^{(m)}|^2 + z_1^{(0)} \tag{5.1}
 \end{aligned}$$

Rozebereme si nyní členy  $z_k^{(m)}$ ,  $2 \leq k \leq n$ , vektoru  $\operatorname{Im} \mathbf{z}^{(m)}$ . Budeme opakovaně dosazovat za  $z_k^{(q)}$ , kde  $q$  je postupně  $(m-1)$ ,  $(m-2)$ ,  $\dots$ ,  $1$ :

$$\begin{aligned}
 z_k^{(m)} &= 2z_1^{(m-1)} z_k^{(m-1)} + z_k^{(0)} \\
 &= 2z_1^{(m-1)} \left(2z_1^{(m-2)} z_k^{(m-2)} + z_k^{(0)}\right) + z_k^{(0)} \\
 &\quad \vdots \\
 &= 2z_1^{(m-1)} \left(2z_1^{(m-2)} \dots \left(2z_1^{(0)} z_k^{(0)} + z_k^{(0)}\right) + \dots + z_k^{(0)}\right) + z_k^{(0)}
 \end{aligned}$$

a v poslední úpravě vytkneme člen  $z_k^{(0)}$ :

$$z_k^{(m)} = z_k^{(0)} \left(2z_1^{(m-1)} \left(2z_1^{(m-2)} \dots \left(2z_1^{(0)} + 1\right) + \dots + 1\right) + 1\right) \tag{5.2}$$

a dosadíme do  $|\operatorname{Im} \mathbf{z}^{(m)}|^2$ :

$$\begin{aligned}
 |\operatorname{Im} \mathbf{z}^{(m)}|^2 &= \left(z_2^{(m)}\right)^2 + \left(z_3^{(m)}\right)^2 + \cdots + \left(z_n^{(m)}\right)^2 \\
 &= \left(\left(z_2^{(0)}\right)^2 + \left(z_3^{(0)}\right)^2 + \cdots + \left(z_n^{(0)}\right)^2\right) \\
 &\quad \cdot \left(2z_1^{(m-1)} \left(2z_1^{(m-2)} \cdots + 1\right) + 1\right)^2 \\
 &= |\operatorname{Im} \mathbf{z}^{(0)}|^2 \left(2z_1^{(m-1)} \left(2z_1^{(m-2)} \cdots + 1\right) + 1\right)^2
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Tyto vztahy použijeme k odvození  $|\mathbf{z}^{(m+1)}|$ :

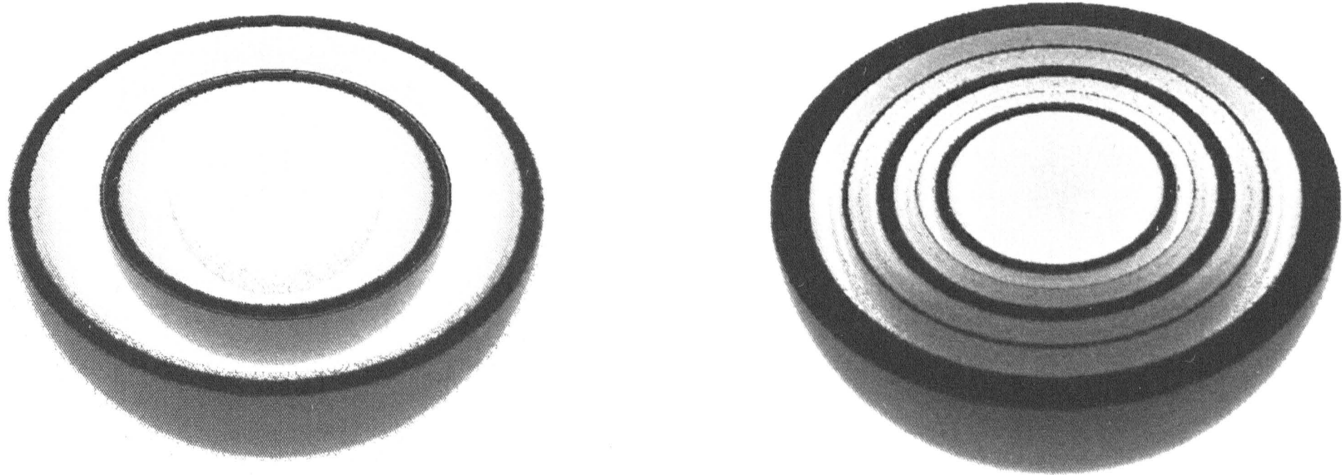
$$\begin{aligned}
 |\mathbf{z}^{(m+1)}| &= \sqrt{\left(z_1^{(m+1)}\right)^2 + \left(z_2^{(m+1)}\right)^2 + \cdots + \left(z_n^{(m+1)}\right)^2} \\
 &= \sqrt{\left(z_1^{(m+1)}\right)^2 + |\operatorname{Im} \mathbf{z}^{(m+1)}|^2}
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Dosadíme (5.1) za  $z_1^{(m+1)}$ :

$$|\mathbf{z}^{(m+1)}| = \sqrt{\left(z_1^{(m)}\right)^2 - |\operatorname{Im} \mathbf{z}^{(m)}|^2 + z_1^{(0)} + |\operatorname{Im} \mathbf{z}^{(m+1)}|^2} \tag{5.5}$$

Opakovaně budeme v (5.5) dosazovat výraz (5.1) za  $\left(z_1^{(m)}\right)^2$ , kde  $m$  se bude postupně redukovat na  $(m-1), (m-2), \dots, 0$  a současně budeme nahrazovat výrazy tvaru  $|\operatorname{Im} \mathbf{z}^{(q)}|^2$ , kde  $q = 1, 2, \dots, (m+1)$  pomocí (5.3). Po konečně mnoha krocích (počet dosazení závisí na  $m$ ) zredukujeme výraz (5.5) na tvar, který bude závislý pouze na  $m$ ,  $z_1^{(0)}$  a na  $|\operatorname{Im} \mathbf{z}^{(0)}|^2$ .  $m$  už je dále nezávislé na zbývajících dvou konečných hodnotách. Z tohoto již plyne, že  $n$ -rozměrná Mandelbrotova množina je symetrická podle reálné osy.

Posloupnost (4.1) pro daný bod je jednoznačně dána reálnou složkou  $a_1$  a vzdáleností tohoto bodu od reálné osy:  $|\operatorname{Im} \mathbf{z}^{(0)}| = \sqrt{a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2}$ . Z toho plyne, že body v  $n$ -rozměrném prostoru s pevnou reálnou složkou  $a_1$  a konstantní vzdáleností  $d = \sqrt{a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2}$  od reálné osy buď všechny leží v Mandelbrotově množině nebo v ní neleží žádný z nich. Zde je formální zápis této věty:



Obrázek 5.2: Dva různé řezy čtyřrozměrnou množinou kolmé na reálnou osu, které byly rozpůleny rovinou procházející středem. V obou případech dostaneme koule, ale pod povrchem koule se skrývají další soustředné vrstvy. Řez vlevo obsahuje body:  $(0, 4; 0; 0; 0)$ ,  $(0, 4; 1; 0; 0)$ ,  $(0, 4; 0; 1; 0)$ ,  $(0, 4; 0; 0; 1)$  a řez vpravo:  $(0, 38; 0; 0; 0)$ ,  $(0, 38; 1; 0; 0)$ ,  $(0, 38; 0; 1; 0)$ ,  $(0, 38; 0; 0; 1)$

**Věta 5.1.** (*Symetrie Mandelbrotovy množiny*) Pro každý bod  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$   $n$ -rozměrného prostoru, ve kterém je definována Mandelbrotova množina podle definice 4.1, platí, že

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \in M_n \Leftrightarrow \left( a_1, \sqrt{a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2} \right) \in M_2$$

Tato vlastnost je dobře viditelná na trojrozměrném řezu čtyřrozměrné množiny, který je kolmý na reálnou osu. Viz obr. 5.2.

Skutečnost, že Mandelbrotova množina je osově symetrická ve všech rozměrech, nám velmi zjednodušuje některé výpočty. Na využití symetrie se zaměříme v následující kapitole.

## 5.2.2 Využití symetrie

### Aproximace množiny

Hlavní výhodou symetrie je zjednodušení výpočtu při aproximaci více-rozměrné Mandelbrotovy množiny. Díky symetrii k výpočtu nepotřebujeme vztahy z definice 4.1. Stačí vždy provést transformaci počítaného bodu, jak bylo popsáno ve větě 5.1. To znamená, že bod  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$   $n$ -rozměrného prostoru převedeme na bod  $\left( a_1, \sqrt{a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2} \right)$  dvojrozměrného prostoru a pro tento nový bod pak vypočítáme výsledek v komplexní rovině. Tento postup nám výrazně urychluje výpočet. Výsledný algoritmus bude mít

(až na transformaci bodu) časovou i paměťovou složitost nezávislou na počtu dimenzí Mandelbrotovy množiny.

## Výpočet objemu

Další výhodou symetrie je zjednodušení numerického výpočtu objemu Mandelbrotovy množiny. Ze symetrie plyne, že když vedeme  $(n-1)$ -rozměrný řez  $n$ -rozměrné množiny kolmo na reálnou osu, dostáváme na řezu  $(n-1)$ -rozměrnou kouli. Tato koule ovšem nemusí být vždy zcela vyplněná. Uvnitř koule se může vyskytovat soustava soustředných  $(n-1)$ -rozměrných mezisfér. Při výpočtu objemu tedy zjistíme poloměry jednotlivých mezisfér z množiny v komplexní rovině. Poloměry budeme měřit ve směru imaginární osy. Nyní přičteme objemy koulí, jejichž poloměry jsou vnějšími poloměry povrchů zjištěných mezisfér a odečteme objemy koulí, jejichž poloměry jsou vnitřními poloměry povrchů mezisfér. Některé mezisféry mohou být degenerované na koule. To jsou takové mezisféry, které nemají vnitřní povrch. Při výpočtu budeme potřebovat vzorec na objem  $n$ -rozměrné koule (s poloměrem  $R$ ):

$$V_n(R) = R^n \cdot \frac{\pi^{(n-1)/2} 2^n \left(\frac{n-1}{2}\right)!}{n!} \quad \text{pro liché } n$$

$$V_n(R) = R^n \cdot \frac{\pi^{n/2}}{\left(\frac{n}{2}\right)!} \quad \text{pro sudé } n$$

Zde jsou výsledky pro některé dimenze (pro  $R = 1$ ):

dimenze $n$	2	3	4	5	6	7
objem $V$	1,513100	1,347767	1,139479	0,910310	0,690777	0,501235

Přesnost výpočtu je  $10^{-3n}$ . Počet iterací: 1000.

## Výpočet Fraktální dimenze

Pokud bychom chtěli numericky vypočítat fraktální dimenzi povrchu  $n$ -rozměrné Mandelbrotovy množiny, můžeme opět využít symetrii k zjednodušení výpočtu. K výpočtu použijeme *mřížkovou metodu*. K tomu si zavedeme pojem *fraktální dimenze*:

**Definice 5.2.**  $d$ -rozměrná míra množiny  $M$  se definuje jako

$$m^d(M) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N(\varepsilon) \cdot \varepsilon^d$$

kde  $N(\varepsilon)$  je minimální počet krychlí o hraně  $\varepsilon$ , které jsou potřeba k pokrytí množiny  $M$ . Platí, že  $\exists! d_0 \in \langle 0, \infty \rangle$  takové, že

$$\begin{aligned} \forall d < d_0 : m^d &= +\infty \\ \forall d > d_0 : m^d &= 0 \end{aligned}$$

Takové  $d_0$  se nazývá *fraktální dimenze* množiny  $M$ .

Při výpočtu fraktální dimenze mřížkovou metodou si nejdříve zvolíme jednotku  $\varepsilon_1$  a překryjeme zkoumanou množinu mřížkou s velikostí jednoho čtverečku  $\varepsilon_1$ . Spočítáme počet čtverečků  $N_1$ , kterými prochází okraj množiny. Nyní si zvolíme jinou jednotku  $\varepsilon_2$  a podobně jako v předchozím případě spočítáme  $N_2$ . Pro hledanou fraktální dimenzi  $d$  musí platit:

$$N_1 \varepsilon_1^d = N_2 \varepsilon_2^d$$

Z této rovnice odvodíme dimenzi  $d$ :

$$\begin{aligned} N_1 \varepsilon_1^d &= N_2 \varepsilon_2^d \\ \log N_1 \varepsilon_1^d &= \log N_2 \varepsilon_2^d \\ \log N_1 + d \log \varepsilon_1 &= \log N_2 + d \log \varepsilon_2 \\ d &= \frac{\log N_2 - \log N_1}{\log \varepsilon_1 - \log \varepsilon_2} \end{aligned}$$

Při výpočtu fraktální dimenze  $n$ -rozměrné Mandelbrotovy množiny nemusíme díky symetrii počítat krychličky na povrchu celé množiny, ale stačí spočítat čtverečky na okraji dvojrozměrné množiny a u každého z nich si zaznamenat vzdálenost od reálné osy. Tato vzdálenost je poloměr  $(n - 1)$ -rozměrné koule na řezu, jejíž povrch umíme pomocí poloměru spočítat přesně. Tento povrch vydělíme objemem krychličky o straně  $\varepsilon$ , čímž získáme počet krychliček, které pokryjí tuto kouli. Pro povrch koule o poloměru  $R$  použijeme tyto vzorce:

$$\begin{aligned} P_n(R) &= nR^{(n-1)} \cdot \frac{\pi^{(n-1)/2} 2^n \left(\frac{n-1}{2}\right)!}{n!} \quad \text{pro liché } n \\ P_n(R) &= nR^{(n-1)} \cdot \frac{\pi^{n/2}}{\left(\frac{n}{2}\right)!} \quad \text{pro sudé } n \end{aligned}$$

Fraktální dimenzi Mandelbrotovy množiny nebudeme počítat numericky. V následující části si rovnou ukážeme její přesnou hodnotu.

## 5.3 Fraktální dimenze povrchu Mandelbrotovy množiny

Víme, že fraktální dimenze okraje dvojrozměrné Mandelbrotovy množiny, stejně jako Hausdorffova dimenze, je přesně 2. Na základě symetrie si dokážeme, že fraktální dimenze povrchu  $n$ -rozměrné Mandelbrotovy množiny je přesně  $n$ . K tomu budeme potřebovat tuto větu:

**Věta 5.3.** *Kartézským součinem množiny s fraktální dimenzí  $d_1$  a množiny s fraktální dimenzí  $d_2$  dostaneme množinu s fraktální dimenzí  $d_1 + d_2$ .*

*Důkaz.* Máme množinu s dimenzí  $d_1$  a mírou  $M_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N_1 \varepsilon^{d_1}$ . Tato množina je pokryta  $N_1$  objekty o velikosti  $\varepsilon^{d_1}$ . Každému tomuto objektu přiřadíme jednu množinu, z nichž každá má dimenzi  $d_2$  a míru  $m_k = n_k \varepsilon^{d_2}$ . Míra výsledné množiny bude vypadat takto:

$$\begin{aligned} M &= \varepsilon^{d_1} m_1 + \varepsilon^{d_1} m_2 + \cdots + \varepsilon^{d_1} m_{N_1} \\ &= \sum_{i=1}^{N_1} \varepsilon^{d_1} m_i = \sum_{i=1}^{N_1} \varepsilon^{d_1} n_i \varepsilon^{d_2} = \varepsilon^{d_1+d_2} \sum_{i=1}^{N_1} n_i \\ &= N \varepsilon^{d_1+d_2} \end{aligned}$$

což je podle definice 5.2 míra  $(d_1 + d_2)$ -rozměrné množiny. Výsledná množina má tedy fraktální dimenzi  $d_1 + d_2$ .  $\square$

$n$ -rozměrná Mandelbrotova množina vznikne rotací dvojrozměrné Mandelbrotovy množiny kolem reálné osy. Ke každému bodu dvojrozměrné množiny jsme tedy přiřadili povrch  $(n-1)$ -rozměrné koule, jejíž dimenze (fraktální i topologická, neboť se nejedná o fraktál) je přesně  $(n-2)$ . Vzhledem k tomu, že fraktální dimenze okraje původní dvojrozměrné Mandelbrotovy množiny byla přesně 2, je výsledná fraktální dimenze povrchu  $n$ -rozměrné Mandelbrotovy množiny podle věty 5.3 přesně  $n$ , což je maximální možná hodnota.

# Kapitola 6

## Program HyperVisualizer

### 6.1 Popis programu

Hlavní funkcí programu je zobrazování libovolných trojrozměrných nebo dvojrozměrných řezů  $n$ -rozměrné množiny (např. Mandelbrotovy nebo Juliovy množiny). Řez je jednoznačně určen uživatelem a tento řez se po zadání parametrů zobrazí v okně programu pomocí trojrozměrné projekce. Díky osvětlení scény je dobře viditelné, která část množiny se nachází blíže oku uživatele.

#### 6.1.1 Metoda zobrazení řezu

Trojrozměrný, resp. dvojrozměrný, řez je jednoznačně určen čtyřmi nekoplanárními, resp. třemi nekolineárními, body. Pomocí takto zadaných bodů je program schopen zobrazit požadovaný řez. Metodu zobrazení si popíšeme na trojrozměrné variantě řezu. Dvojrozměrný řez se získá pouhým zjednodušením trojrozměrné varianty.

Zkoumaná množina je definovaná ve vektorovém prostoru  $V$ . Uživatel určí řez jednoznačně pomocí čtyř vektorů  $o, a, b, c \in V$ . Tyto vektory určují afinní podprostor  $S = o + U = \{o + u, u \in U\}$ , kde  $o$  je vektor posunutí a  $U$  je vektorový podprostor generovaný vektory  $a - o, b - o, c - o$ . Tento afinní podprostor obsahuje čtveřici zadaných vektorů.

Po zadání řezu program spočítá ortonormální bázi  $w_1, w_2, w_3$  podprostoru  $U$  pomocí Gramm-Schmidtovy ortonormalizace.

Vykreslovaná scéna obsahující řez je vektorový prostor  $Q = \mathbb{R}^3$ . Pro určení bodu na vykreslované scéně potřebujeme lineárně zobrazit vektor  $x \in$



$Q$  na  $x' \in S$  tak, aby nedošlo k žádnému zkreslení (tj. všechna vlastní čísla lineárního zobrazení jsou 1). To provedeme tak, že souřadnice vektoru  $x' \in S$  vzhledem k ortonormální bázi  $w_1, w_2, w_3$  vektorového podprostoru  $U$  sjednotíme se souřadnicemi vektoru  $x \in Q$  vzhledem ke kanonické bázi vektorového prostoru  $Q$ . Protože  $S$  je afinní podprostor, musíme vektor  $x'$  ještě posunout o vektor  $o$ .

Zobrazení tedy bude vypadat takto:  $x' = o + x_1w_1 + x_2w_2 + x_3w_3$ , kde  $x_1, x_2, x_3$  jsou souřadnice vektoru  $x \in Q$  vzhledem ke kanonické bázi  $Q$ .