

Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Jakub Haláček

### Řezy Schwarzschildovým prostorem

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Tomáš Ledvinka, PhD.

Studijní program: Obecná fyzika

2008

Chtěl bych velmi poděkovat vedoucímu mé bakalářské práce, Mgr. Tomášovi Ledvinkovi PhD., za jeho enormní nasazení a kolegiální přístup při vedení mé práce. Také bych chtěl poděkovat mojí rodině za podporu jak psychickou, tak i materiální a finanční, bez které by tato práce nikdy nevznikla.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 29. května 2008

Jakub Haláček

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>7</b>
1.1	Historický vhléd . . . . .	7
1.2	První řešení . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Schwarzschildův prostoročas</b>	<b>9</b>
2.1	Schwarzschildovo řešení . . . . .	9
2.2	Schwarzschildova geometrie . . . . .	11
2.2.1	Schwarzschildovy souřadnice . . . . .	11
2.3	Další souřadné soustavy . . . . .	13
2.3.1	Isotropní souřadnice . . . . .	15
2.3.2	Singularity ve Schwarzschildových souřadnicích . . . . .	17
2.3.3	Eddington-Finkelsteinovy souřadnice . . . . .	18
2.3.4	Lemaîtreovy souřadnice . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Kauzální struktura Schwarzschildova prostoročasu v různých souřadných systémech</b>	<b>24</b>
3.1	Kauzální struktura v Schwarzschildových souřadnicích . . . . .	25
3.2	Kauzální struktura v Eddington-Finkelsteinových souřadnicích . . . . .	25
3.3	Kauzální struktura v Kruskal-Szekerových souřadnicích . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Kruskal-Szekerovy souřadnice</b>	<b>32</b>
4.1	Konstrukce Kruskal-Szekerových souřadnic . . . . .	32
4.2	Struktura Kruskal-Szekerova diagramu . . . . .	34
4.3	Vztah Kruskal-Szekerových souřadnic k ostatním souřadným systémům . . . . .	37
4.3.1	Kruskal-Szekerovy souřadnice a Schwarzschildovy souřadnice . . . . .	37
4.3.2	Kruskal-Szekerovy nulové a Schwarzschildovy souřadnice . . . . .	42

4.3.3	Kruskal-Szekerovy a isotrovní souřadnice . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Novikovovy souřadnice</b>	<b>46</b>
5.1	Zavedení Novikovových souřadnic . . . . .	46
5.2	Vnořený Novikovův diagram pro plochy s konstantním vlastním časem . . . . .	47
5.3	Novikovovy souřadnice v Kruskal-Szekerově diagramu . . . . .	51
<b>6</b>	<b>Závěr</b>	<b>54</b>
<b>A</b>	<b>Geometrizované jednotky</b>	<b>56</b>
<b>B</b>	<b>Vnořené diagramy</b>	<b>57</b>
<b>C</b>	<b>Vybrané zdrojové kódy z programu Maple</b>	<b>59</b>
C.1	Vnořené plochy . . . . .	59
C.1.1	Schwarzschildův vnořený diagram . . . . .	59
C.1.2	Vnořený Novikovův diagram . . . . .	60
C.2	Řezy . . . . .	61
C.2.1	Řezy Schwarzschildovým diagramem v Kruskal-Szekerově diagramu . . . . .	61
C.2.2	Řezy Novikovovým diagramem v Kruskal-Szekerově diagramu . . . . .	62
<b>D</b>	<b>Výpočet Kretschmannova invariantu za pomocí programu Maple</b>	<b>65</b>
D.1	Kretschmannův invariant pro Schwarzschildovu metriku . . . . .	65
D.2	Kretschmannův invariant pro isotrovní metriku . . . . .	66
	<b>Literatura</b>	<b>68</b>

Název práce: Řezy Schwarzschildovým prostoročasem  
Autor: Jakub Haláček  
Katedra (ústav): Ústav teoretické fyziky  
Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Tomáš Ledvinka, PhD.  
e-mail vedoucího: Tomas.Ledvinka@mff.cuni.cz

Abstrakt:

V předložené práci studujeme Schwarzschildův prostoročas. Předmětem našeho zájmu je seznámení a porozumění Schwarzschildovu řešení a souřadnicím. Zavádíme další významné systémy souřadnic, konkrétně Isotropní, Eddington-Finkelsteinovy, Lemaitreovy, Novikovovy a Kruskal-Szekerovy, a ukazujeme povahu sféry  $r = 2M$ . Dále ilustrujeme kauzální struktury Schwarzschildova prostoročasu ve vybraných souřadnicích. Poté zkonstruujeme Kruskal-Szekerův diagram a studujeme jeho strukturu a pokrytí jednotlivými souřadnicemi. Posledním bodem naší práce je zavedení Novikovových souřadnic, studium vnořovacích diagramů ploch  $\tau = konst.$  a vzhled řezů  $\tau = konst.$  a  $R^* = konst.$  v Kruskal-Szekerově diagramu.

Klíčová slova:

Schwarzschildův prostoročas, Kruskal-Szekerův diagram, Novikovovy souřadnice

Title: Slicing the Schwarzschild spacetime  
Author: Jakub Haláček  
Department: Institute of Theoretical Physics  
Supervisor: Mgr. Tomáš Ledvinka, PhD.  
Supervisor's e-mail address: Tomas.Ledvinka@mff.cuni.cz

Abstract:

In this work we study Schwarzschild's spacetime. Subject of our focus is introducing and understanding of Schwarzschild's solution and coordinates, we introduce another significant systems of coordinates, e.g. Isotropic, Eddington-Finkelstein's, Lemaitre's, Novikov's and Kruskal-Szekeres, and we show nature of sphere  $r = 2M$ . In the following we illustrate the causal structures of Schwarzschild's spacetime in these coordinates. Then we construct Kruskal-Szekeres diagram and study it's structure, and the way it is covered by different coordinates. Finally, we introduce Novikov's coor-

dinates, study embedding diagrams of surfaces  $\tau = \textit{konst.}$  and plot slices  $\tau = \textit{konst.}$  and  $R^* = \textit{konst.}$  in Kruskal-Szekeres diagram.

Keywords:

Schwarzschild spacetime, Kruskal-Szekeres diagram, Novikov's coordinates

# Kapitola 1

## Úvod

V této práci se budeme snažit podat kompaktní vhléd do problematiky Schwarzschildova prostoročasu, jenž hraje ve zkoumání vesmíru velmi významnou roli.

V první části si vysvětlíme význam a podstatné rysy Schwarzschildova řešení v Schwarzschildových souřadnicích, obeznámíme se s některými problémy jenž v sobě skrývá zavedení těchto souřadnic a v dalších částech si ukážeme jak se dají tyto neduhy odstranit.

Dále se podíváme na alternativní souřadné systémy, obzvláště na souřadný systém Novikovův, který má hned několik zajímavých vlastností, prostudujeme jeho strukturu a nakreslíme vnořený diagram pro řezy skrze tento diagram.

Také si ukážeme jak vypadá v jednotlivých souřadných systémech kauzální struktura a nakonec zavedeme Kruskal-Szekerovy souřadnice a zkonstuuujeme tzv. Kruskal-Szekerův diagram, který hlouběji prostudujeme a ukážeme si vzhled některých řezů skrze jiné diagramy v Kruskal-Szenkerově diagramu a naopak.

### 1.1 Historický vhléd

V roce 1905 publikoval Albert Einstein svou práci o elektrodynamice pohybujících se těles [1]. Tato práce byla jistým smyslem revoluční, a zároveň svázána pouze s inerciálními soustavami. A. Einstein začal hned přemýšlet jak tuto teorii rozšířit i na neinerciální soustavy.

Takovou teorii se mu podařilo dokončit koncem roku 1915<sup>1</sup>. Dnes se tato teorie nazývá obecnou teorií relativity.

Jako každá teorie má i obecná teorie relativity svou rovnici a tou je (1.1)<sup>2</sup>, kde  $G_{\mu\nu}$  je tzv. Einsteinův tenzor,  $T_{\mu\nu}$  je tenzor energie a hybnosti,  $R_{\mu\nu}$  je Ricciho tenzor,  $R$  je skalární křivost,  $\Lambda$  je kosmologická konstanta a  $g_{\mu\nu}$  je metrický tenzor, bližší seznámení v [2].

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

Pokud bychom chtěli řešit nějakou úlohu, rovnice (1.1) nám říká, že musíme vyřešit soustavu parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu, které jsou navíc nelineární. Těchto obtíží si byl vědom i A. Einstein, když dokončil svou práci.

## 1.2 První řešení

O to víc bylo překvapující, když Karl Schwarzschild představil<sup>3</sup> první (a netriviální) exaktní řešení[14]. Jak jsme již předeslali, soustava rovnic k řešení je velmi složitá, ale můžeme si hledání řešení značně ulehčit zavedením vysokého stupně *symetrie*, například sférické symetrie. Dále můžeme předpokládat stacionaritu řešení.

Takto postupoval Schwarzschild a našel sféricky symetrické statické a stacionární řešení.

---

<sup>1</sup>Správné polní rovnice našel taktéž německý matematik David Hilbert

<sup>2</sup>V celé práci budeme pracovat v geometrizovaných jednotkách ( $c = 1, G = 1$ ). Viz Dodatek A.

<sup>3</sup>Ve skutečnosti toto řešení publikoval A. Einstein, jemuž ho zaslal K. Schwarzschild z ruské fronty.



# Kapitola 2

## Schwarzschildův prostoročas

### 2.1 Schwarzschildovo řešení

V případě kdy budeme řešit úlohu s centrálně symetrickým rozložením hmoty, budeme taktéž předpokládat, že i vzbuzené gravitační pole bude centrálně symetrické. Při hledání řešení budeme také předpokládat, že rozložení hmoty v prostoru se s časem nemění<sup>1</sup>, což znamená že výsledné gravitační pole bude statické. Potom všechny fyzikální veličiny budou záviset pouze na vzdálenosti od středu symetrie. Dále budeme předpokládat, že prostoročas v dostatečně velké vzdálenosti od středu symetrie přechází v *plochý*–Minkowskiho prostoročas.

Souřadnou soustavu v tomto případě volíme tak, aby ladila se symetrií prostoročasu, tudíž použijeme sférické souřadnice  $(r, \theta, \phi)$ . Střed symetrie klademe do počátku  $r = 0$ . Prostoročasový element tudíž můžeme hledat ve tvaru:

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.1)$$

kde metrické koeficienty (2.2) jsou funkcemi pouze vzdálenosti  $r$  od středu symetrie.

$$g_{tt} = -A(r), g_{rr} = B(r), g_{\theta\theta} = r^2, g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2\theta \quad (2.2)$$

Dále budem předpokládat že těleso je prostorově omezené a sahá jen do jisté vzdálenosti  $R$ . Pro  $r > R$  je již vakuum, tudíž v této oblasti je  $T^{\mu\nu} = 0$ .

---

<sup>1</sup>Při bližším zkoumání zjistíme, že tento předpoklad není nutný, i při nezachování rozložení hmoty v prostoru bude výsledek stejný, pokud zachováme centrální symetrii, viz pokračování.

Budeme hledat řešení pro  $r > R$ , tzv. *vnější řešení*<sup>2</sup>.

Pokud vyřešíme Einsteinovy polní rovnice, dospějeme k výsledným metrickým koeficientům ve tvaru:

$$g_{tt} = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right), \quad g_{rr} = \frac{1}{\left( 1 - \frac{2M}{r} \right)} \quad (2.3)$$

čímž dostáváme přesné řešení Einsteinových rovnic ve vakuu pro sféricky symetrické gravitační pole. V této tzv. *Schwarzschildově geometrii* nabývá prostoročasový element tvaru:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \frac{1}{\left( 1 - \frac{2M}{r} \right)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.4)$$

Pokud bychom připustili možnost závislosti metrických koeficientů na čase, tj.  $g_{tt} = g_{tt}(r, t)$ ,  $g_{rr} = g_{rr}(r, t)$ , pak z řešení Einsteinových rovnic po úpravě dostaneme, že  $\frac{\partial g_{rr}}{\partial t} = 0$  (čili  $g_{rr}$  na čase nezávisí) a  $g_{tt} = \frac{f(t)}{g_{rr}}$ , kde  $f(t)$  je zatím libovolná funkce závisující *pouze* na čase. Tuto funkci určíme následující úvanou: Ve velmi vzdálené oblasti prostoročasu ( $r \rightarrow \infty$ ) by měla vyšetřovaná metrika přecházet v Minkowskiho metriku kde  $g_{tt} = -1$ , tudíž musí být  $f(t) = \text{const.}$  a na čase tedy nezávisí ani tento metrický koeficient.

Takto jsme dospěli k závěru, že gravitační pole s centrální symetrií musí být *automaticky statické*, bez ohledu na to, jak se chová těleso (mohlo by například radiálně–při zachování sférické symetrie–pulzovat). Tento výsledek se shrnuje do následující věty:

**Věta 1 (Schwarzschild-Birkhoff)** *V asymptoticky rovinném prostoročase je centrálně symetrické gravitační pole ve vakuu popsáno Schwarzschildovou geometrií s metrickou formou (2.4) ve Schwarzschildových souřadnicích.*

*Toto pole je tedy statické a je určeno jediným parametrem–celkovou hmotností  $M$ .*

Tento poznatek je v podstatě speciálním případem "*No hair theorem*", který nám říká, že po „dokončení“ gravitačního kolapsu (tj. po utvoření horizontu a po vymizení všech gravitačních a elektromagnetických vln) je vnější elektromagnetické a gravitační pole stacionární černé díry ve vakuu zcela určeno jen *třemi nezávislými parametry* : celkovou hmotností  $M$ , elektrickým nábojem  $Q$  a vlastním rotačním momentem hybnosti  $J$ , bez ohledu na to, z čeho a jakým způsobem černá díra vznikla.

---

<sup>2</sup>Toto řešení poslal Schwarzschild Einsteinovi v prvním dopisu, vnitřní řešení vypracoval následovně a taktéž zaslal k publikaci

## 2.2 Schwarzschildova geometrie

### 2.2.1 Schwarzschildovy souřadnice

Pro dobré pochopení Schwarzschildova prostoročasu je nutné správně chápat fyzikální význam souřadnic.

Jako Schwarzschildovy souřadnice jsme zvolili čtveřici  $r, t, \theta, \phi$ . Při tom jsme vycházeli z popisu sféricky symetrického problému. Proto nás příliš nepřekvapí, že význam dvojice úhlových souřadnic  $\theta, \phi$  je stejný jako u sférických souřadnic. Například pro určení vzdálenosti dvou infinitezimálně vzdálených událostí, při konstantích  $r$  a  $t$  můžeme použít vztah:

$$ds^2 = r^2 d\Omega^2 = r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.5)$$

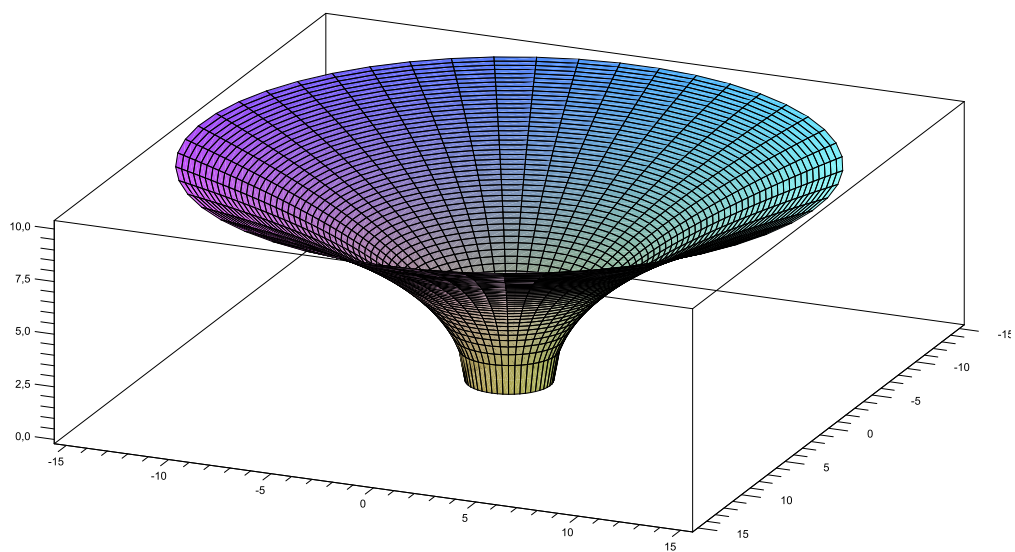
Jiná situace nastává u radiální souřadnice  $r$ , někdy také nazývaná jako „obvodový poloměr“, protože pokud bychom v nějakém místě Schwarzschildova prostoročasu znali obvod „sféry symetrie“, danou vzdálenost místa na této sféře bychom mohli označit štítkem s uvedením právě této hodnoty obvodového poloměru:  $r_0 = \frac{\text{obvod}}{2\pi}$ . To je zároveň vzdálenost od středu v eukleidovském prostoru, ale důležité je si zapamatovat, že hodnota souřadnice je jedna věc, a vzdálenost druhá. Pokud se budeme nacházet v nějakém bodě o radiální Schwarzschildovské souřadnici  $r_1$ , pak ale vzdálenost od počátku taková není, tu nám určuje metrika. Pokud bychom tuto vzdálenost chtěli určit, pak si zafixujeme ostatní tři souřadnice  $t, \theta, \phi$  – tak zkonstruujeme radiální geodetiku – a vzdálenost dopočteme z metriky (2.4).

U souřadnicového času  $t$  je situace obdobná jako u souřadnic. Opět nám hodnota „nic“ neříká o skutečném čase. Každý pozorovatel prožívá svůj vlastní čas a ten může být naprosto odlišný od času souřadnicového.

V obou případech,  $r$  i  $t$ , bude hodnota odpovídat nám běžné zkušenosti s chováním těchto veličin z normálního života v oblastech velmi vzdálených od počátku ( $r \rightarrow \infty$ , neovlivněné gravitací, asymptoticky plochých oblastech).

Poměrně často se v literatuře (např.: [2]) setkáváme s pojmem vnořený diagram (angl.: embedding diagram). Takovýto vnořený diagram je vykreslen na obrázku 2.1. Pro jeho vykreslení jsme použili program Maple s příkazem viz doplněk C

Význam tohoto diagramu je v tom, že dobře znázorňuje povahu prostoročasu a ukazuje jak je svázán prostoročasný interval s radiálním  $dr$  intervalem. Pro upřesnění významu souřadnic je zde ještě jeden obrázek 2.2



Obrázek 2.1: Vnoření Schwarzschildovy  $t = konst.$  a  $\theta = \pi/2$  do Euklidovského prostoru.

(převzato z [3]), kde je vykreslena projekce na rovinu  $z = 0$  a pak řez  $x = 0$ . V tomto obrázku je vyznačen vztah mezi prostoročasovým intervalem  $ds$  a radiální Schwarzschildovou souřadnicí  $dr$  graficky.

## 2.3 Další souřadné soustavy

Jak ještě uvidíme, tak Schwarzschildova metrika má dvě singularity  $r = 0$  a  $r = 2M$ , z nichž první je křivostní singularita a druhá je jen souřadnicovou singularitou, neboli nevhodně zvoleným souřadným systémem.

Z těchto důvodů se na Schwarzschildově prostoročase zavádějí další souřadné systémy, které tuto potíž eliminují a ve kterých lze lépe popsat některé konkrétní fyzikální situace jako je například pád částice skrze horizont událostí. Další nepříjemnou vlastností Schwarzschildových souřadnic je, že deformují časupodobné kužely (viz obr. 3.1).

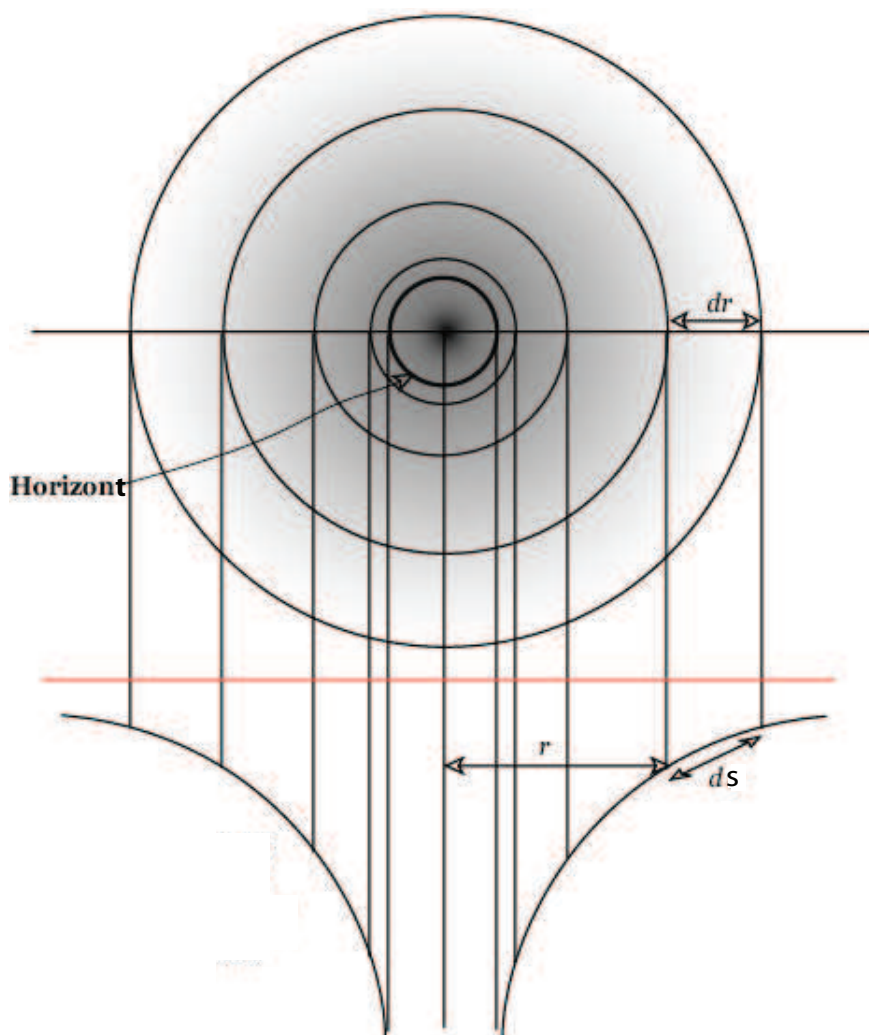
Zavádění různých souřadných systémů na Schwarzschildově prostoročase je často motivováno konkrétní fyzikální situací, nebo dějem, který lze v takto zavedených souřadnicích vhodně popisovat. Jako první exaktní řešení, jak již bylo řečeno, bylo řešení Schwarzschildovo (1916), které bylo motivováno sféricky symetrickým tělesem. Jak již víme, ve Schwarzschildových souřadnicích není metrika v  $r = 2M$  regulární. Toho si všimlo mnoho lidí, a jako první vyřešil tuto obtíž Eddington (1924)<sup>3</sup>[9], který zkonstruoval souřadnice nesingulární v  $r = 2M$ . Sám si však neuvědomil důležitost jeho výsledku. Až později zavedl Lemaître (1933) [16] jiné souřadnice, taktéž nesingulární v  $r = 2M$ , a jako první rozeznal, že tato část prostoročasu, nazývaná jako *Schwarzschildova sféra*<sup>4</sup> není pravou singularitou.

Z hlediska geometrie mluvíme o různých souřadnicích pokrývajících různé části prostoročasové variety. Při popisu variety je obvyklé mluvit o atlasu souřadnicových map. Schwarzschildovy souřadnice jsou jednou z takových map, pokrývajících jen půlku Schwarzschildova prostoročasu—jak bude ukázáno dále. První kdo ukázal nekompletnost souřadnic a zavedl nové, pokrývajících celou geometrii Schwarzschildova prostoročasu, byl G. Synge (1950). Nezávislým způsobem totéž objevil C. Fronsdal (1959)[15], který nebyl ani

---

<sup>3</sup>Znovuobjevení těchto souřadnic provedl Finkelstein (1958)[10]

<sup>4</sup>Často se vyskytují alternativní pojmy pro oblast  $r = 2M$ , jako například Schwarzschildův poloměr, gravitační poloměr, Schwarzschildův horizont, Schwarzschildova plocha a ve starší literatuře se také vyskytuje pojem Schwarzschildova singularita, což je mylný název, protože jak jsme si ukázali, tak nejde o skutečnou singularitu.



Obrázek 2.2: Na tomto obrázku je vykreslen vnořený diagram Schwarzschildovy metriky do Euklidovského prostoru, při pohledu z osy  $z$  (horní část obrázku) a boční pohled – řez  $x = 0$ – (spodní část), kde je vyznačena radiální vzdálenost  $r$ , přírůstek radiální souřadnice  $dr$  a k němu příslušející přírůstek vlastní vzdálenosti  $ds$ . Jak je z obrázku patrné, platí nerovnost  $ds \geq dr$

seznalý se Syngeho prací.

Nejlepším souřadným systémem, poskytující maximální vhled do již zavedené Schwarzschildovy geometrie, je tzv. Kruskal-Szekerův souřadný systém, zkonstruovaný nezávisle Kruskalem (1960)[11] a Szekerem (1960)[12], o němž pojednáme v samostatné kapitole.

### 2.3.1 Isotropní souřadnice

Na skutečnost, že Schwarzschildova varieta obsahuje i místa, která nejsou dostupná ve Schwarzschildových souřadnicích poukazují například tzv. Isotropní souřadnice. Motivací k jejich konstrukci je prostorová metrika úměrná  $\delta_{ij}$ , již dostaneme zavedením následující transformace radiální souřadnice:

$$r = \rho \left( 1 + \frac{M}{2\rho} \right)^2 \quad (2.6)$$

s inverzním vztahem:

$$\rho = -\frac{M-r}{2} \pm \frac{r}{2} \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} \quad (2.7)$$

a metrika s isotropní souřadnicí má tvar:

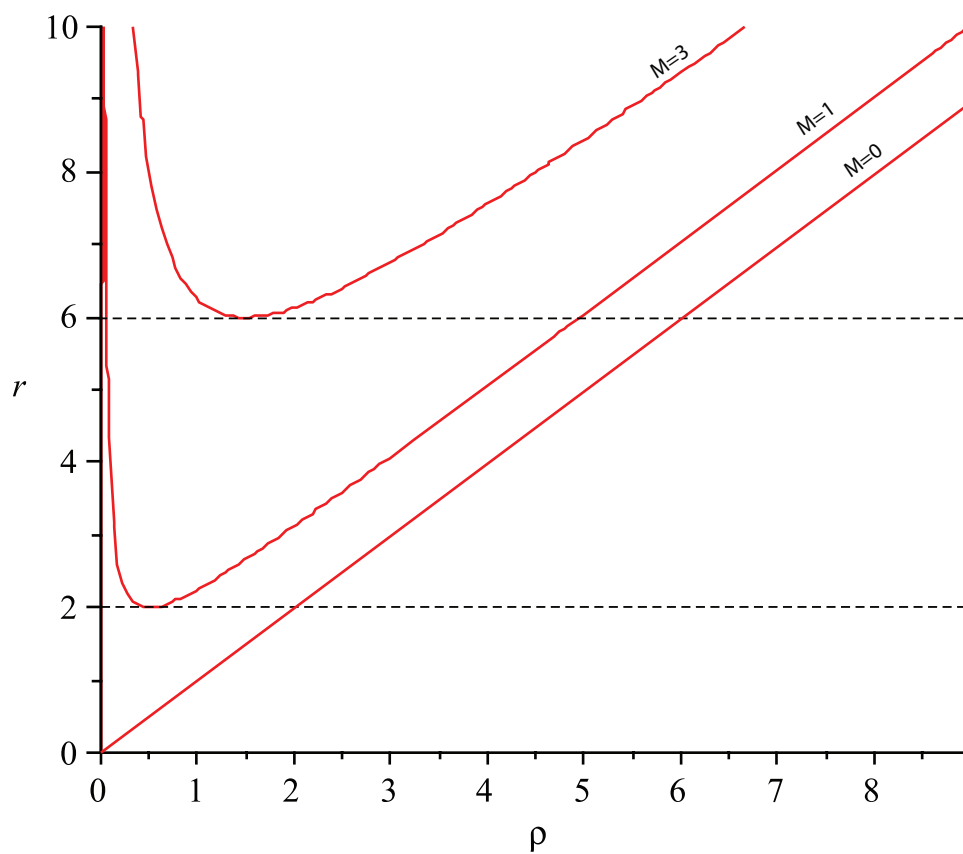
$$ds^2 = - \left( \frac{1 - \frac{M}{2\rho}}{1 + \frac{M}{2\rho}} \right)^2 dt^2 + \left( 1 + \frac{M}{2\rho} \right)^4 [d\rho^2 + \rho^2(d\rho^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \quad (2.8)$$

jelikož je souřadnice  $\rho$  definována, mimo vztah k souřadnici  $r$ , také jako  $\rho = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ , tak můžeme metriku (2.8) přepsat do tvaru:

$$ds^2 = - \left( \frac{1 - \frac{M}{2\rho}}{1 + \frac{M}{2\rho}} \right)^2 dt^2 + \left( 1 + \frac{M}{2\rho} \right)^4 (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (2.9)$$

Odvození výše uvedených vztahů není nijak složité a lze ho nalézt např. v [2] nebo [13]. Grafické znázornění je na obrázku 2.3.

Z tohoto obrázku se zdá, že tato neprostá funkce  $\rho$  pokrývá oblast nad  $r = 2M$  dvakrát. Co se zde opravdu děje si ukážeme za malou chvíli v další sekci.



Obrázek 2.3: Grafické znázornění vztahu isotropní a radiální souřadnice pro různé hmotnosti. Přímka pro  $M = 0$  zde nemá fyzikální význam ale, jde spíše o limitní případ pro velice malé hmotnosti.



### 2.3.2 Singularity ve Schwarzschildových souřadnicích

Singulární bod nelze považovat za součást sledované prostoročasové variety, nelze v něm principiálně provádět žádná fyzikální měření. Pro zachování prostoročasu jako variety je nutné všechny singulární body z něj *vyložit* („vyříznout“) ([6], kap. 3.7). Takováto definice neříká mnoho, ale jak vzápětí uvidíme, je to pojem dobře osvojitelný.

Pokud se nyní budeme hlouběji zabývat Schwarzschildovou metrikou ve Schwarzschildových souřadnicích, ihned vidíme že máme dva podezřelé body. Bod  $r = 0$  a  $r = 2M$  jsou místa, kde nám kolabuje metrika, neboli prostoročasový interval roste nadevšechny meze. Otázkou však je, zdali oba body jsou „problémové“. Při prvním zamyšlení se dá odhadnout, že v bodě  $r = 0$  bude skutečná, podstatná nebo také neodstranitelná<sup>5</sup> singularita. To můžeme provést třeba tak, že si spočteme tzv. Kretschmannův invariant (viz dodatek D), který je definovaný vztahem:

$$K \equiv R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad (2.10)$$

kde  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  je již zavedený Riemannův tenzor. Z tohoto invariantu vidíme, že výraz pro  $r \rightarrow 0$  diverguje.

Bod  $r = 2M$  je ale poměrně neintuitivní, kolabuje zde Schwarzschildova metrika, ale Kretschmannův invariant nám zde dává konečnou hodnotu  $K = \frac{3}{4M^2}$ . Tudíž bychom si měli vyšetřit sféru  $r = 2M$  důkladně.

Abychom zjistili, zda-li bod  $r = 2M$  je neodstranitelnou singularitou anebo zda-li se jedná jen o špatně zvolené souřadnice, najdeme geodetiku.

Rovnice geodetiky v obecném vyjádření má tvar:

$$\frac{D}{d\lambda} \left( \frac{dx^\mu}{d\lambda} \right) = \frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0, \quad (2.11)$$

kde  $\frac{D}{d\lambda}$  značí kovariantní nebo také absolutní derivaci a  $\lambda$  je tzv. afinní parametr.

Abychom mohli spočítat rovnici geodetiky, je nutné si nyní spočítat Christoffelovy symboly. Ze vztahu<sup>6</sup>:

$$\Gamma^\mu_{\nu\sigma} = \frac{1}{2}g^{\mu\kappa}(g_{\kappa\sigma,\nu} + g_{\kappa\nu,\sigma} - g_{\nu\sigma,\kappa}) \quad (2.12)$$

<sup>5</sup>V jednotlivých literaturách se takovýto bod označuje různými pojmy, všechny vyjmenované jsou ekvivalentní.

<sup>6</sup>Držíme se obvyklého značení  $g_{\kappa\sigma,\nu} = \frac{\partial g_{\kappa\sigma}}{\partial x^\nu}$ , a platí  $g_{\mu\nu}g^{\nu\sigma} = \delta_\mu^\sigma$

je vidět, že se budou uplatňovat jen složky metrického tensoru  $g_{\mu\nu}$ , protože ostatní jsou nulové. Toto nám značně zjednoduší hledání Christoffelových symbolů, protože nenulových je jen sedm – ostatní jsou buď nulové, nebo s nimi symetrické –  $\Gamma^t_{rt}, \Gamma^r_{tt}, \Gamma^r_{rr}, \Gamma^r_{\theta\theta}, \Gamma^r_{\phi\phi}, \Gamma^\phi_{r\phi}$  a  $\Gamma^\phi_{\theta\phi}$ .

Vyhledem k tomu, že vyšetřujeme jen radiální souřadnici  $r$ , tak můžeme uvažovat radiální geodetiku prostorového charakteru a zafixovat ostatní souřadnice  $t, \theta, \phi = konst.$  čímž se nám zjednoduší soustava rovnic ze tří na jedinou rovnici:

$$\frac{d^2r}{d\lambda^2} - \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = 0 \quad (2.13)$$

Jak je vidět, tak v rovnici (2.13) je opět singulární člen, takže jsme si nepomohli. Nyní zkusme spočítat rovnici geodetiky v isotropních souřadnicích.

Nenulových Christoffelových symbolů je 9 –  $\Gamma^t_{t\rho}, \Gamma^\rho_{tt}, \Gamma^\rho_{\rho\rho}, \Gamma^\rho_{\theta\theta}, \Gamma^\rho_{\phi\phi}, \Gamma^\theta_{\rho\theta}, \Gamma^\theta_{\phi\phi}, \Gamma^\phi_{\rho\phi}$  a  $\Gamma^\phi_{\theta\phi}$ .

Opět vyšetřujeme jen radiální geodetiku, takže zafixujeme zbylé souřadnice, čímž se nám výsledné rovnice zredukuje na jedinou:

$$\frac{d^2\rho}{d\lambda^2} - \frac{2M}{\rho(2\rho + M)} \left(\frac{d\rho}{d\lambda}\right)^2 = 0 \quad (2.14)$$

Z této rovnice je ihned vidět, že geodetika nemá v bodě  $r = 2M$  ( $\rho = M/2$ ) žádný problém, nevyskytuje se v ní singulární člen a je v  $r = 2M$  regulární, takže  $r = 2M$  je problematický bod pouze z pohledu Schwarzschildových souřadnic. Jak je vidět,  $g_{\rho\rho}$  v (2.8) je regulární funkcí souřadnice  $\rho$  a tedy radiální geodetika  $\rho(\lambda)$  je hladkou funkcí afiního parametru od  $\rho = 0$  až do  $\rho = \infty$ . Protože vztah (2.6) říká, že v  $\rho = 0$  je Schwarzschildova radiální souřadnice nekonečná, vypadá to, že tato geodetika spojuje dvě prostorová nekonečna, a nikoli že by pokrývala tutéž oblast dvakrát.

### 2.3.3 Eddington-Finkelsteinovy souřadnice

Při pádu skrze horizont, jdou vinou přítomnosti divergujících složek konexe (stejně jako v rovnici (2.13)) světelné geodetiky k  $t \rightarrow \infty$ , viz obrázek 3.1, a částice se „zastavují“, proto nás může napadnout svázat souřadnice s částicemi či fotony padajícími skrze horizont. To je i základní myšlenkou pro zavedení Eddington-Finkelsteinových souřadnic. Svazujeme souřadnice s

volně padajícími nebo vyletujícími fotony. Konkrétně se zavádějí souřadnice  $\tilde{U}$  a  $\tilde{V}$ , které popisují vlétající a vyletující<sup>7</sup>, radiální, nulové geodetiky. Takovéto geodetiky jsou dány vztahem:

$$ds^2 = 0 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2. \quad (2.15)$$

Vyletující geodetiky jsou dány pro  $\tilde{U} = konst.$ , kde

$$\tilde{U} \equiv t - r^*, \quad (2.16)$$

a vlétající geodetiky pro  $\tilde{V} = konst.$ , kde

$$\tilde{V} \equiv t + r^*. \quad (2.17)$$

Na novou souřadnici  $r^*$  klademe požadavek, aby odpovídala dráze, jíž urazí foton:  $(1 - 2M/r)[-dt^2 + dr^{*2}]$ . Tato podmínka nás dovede k diferenciální rovnici  $dr^* = (1 - 2M/r)dr$ . řešení této diferenciální rovnice nám poté zavádí novou souřadnici  $r^*$  a příslušný vztah k Schwarzschildově souřadnici  $r$  je:

$$r^* \equiv r + 2M \ln |r/2M - 1|. \quad (2.18)$$

Po takto zavedených transformacích souřadnic již snadno nalezneme vzhled metrik. Pro vyletující geodetiky:

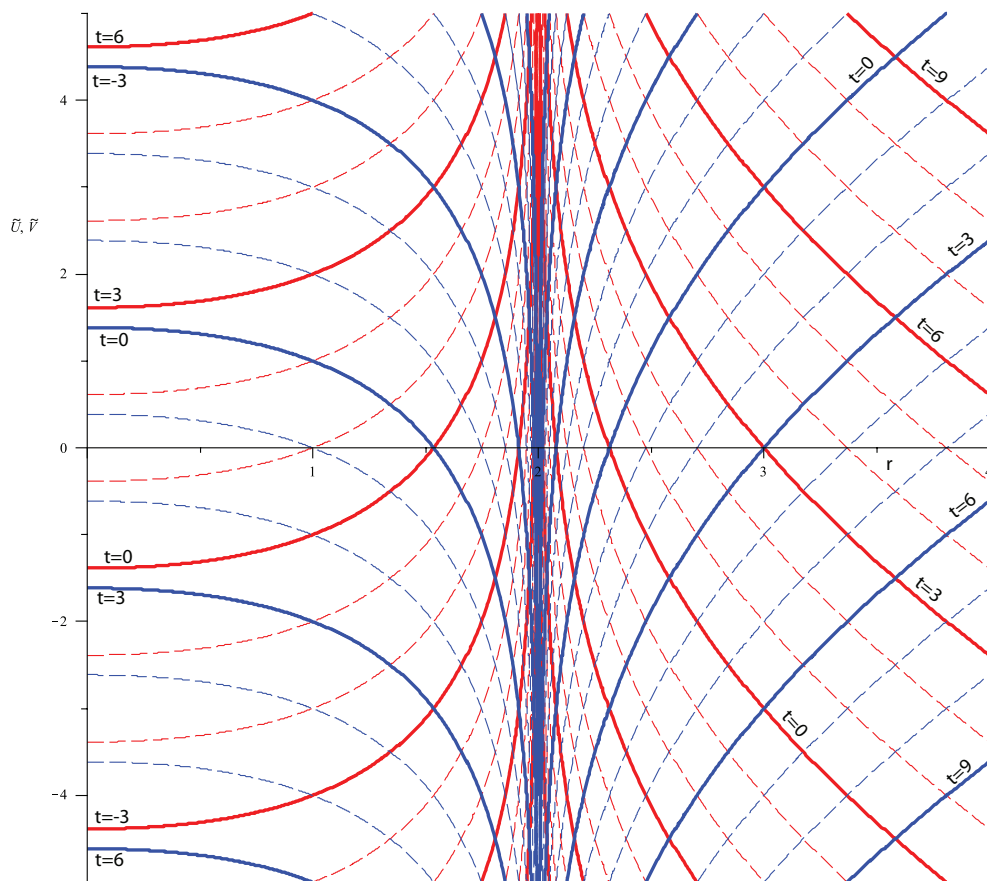
$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\tilde{U}^2 - 2d\tilde{U}dr + r^2 d\Omega^2 \quad (2.19)$$

a pro vlétající geodetiky:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\tilde{V}^2 + 2d\tilde{V}dr + r^2 d\Omega^2 \quad (2.20)$$

Je dobré si uvědomit, že obě–vlétající a vyletující–souřadnice se chovají na gravitačním poloměru  $r = 2M$  lépe než-li Schwarzschildovi souřadnice, ale nejsou úplně vhodně zvoleny. Vyletující souřadnice  $(\tilde{U}, r, \theta, \phi)$  popisují bez problémů částice vyletující z  $r = 0$  skrze  $r = 2M$  (obr. 3.3), ale pro vletující částice skrze  $r = 2M$  trpí stejným nedostatkem jako Schwarzschildovy souřadnice, a analogicky pro vletující souřadnice  $(\tilde{V}, r, \theta, \phi)$  (obr. 3.2). Řešením tohoto problému je v zavedení vhodnějších souřadnic, pro které není rozhodující zda-li částice či fotony vletují či vyletují. Takové souřadnice jsou například již zmiňované Kruskal-Szekerovy, viz dále.

<sup>7</sup>Toto jsou počestěné výrazy autorem, z anglických výrazů „ingoing” a „outgoing”



Obrázek 2.4: Grafické znázornění vztahu mezi Eddington-Finkelsteinovými a Schwarzschildovými souřadnicemi v konstantních časech, což je méně častý příklad, než-li se obvykle prezentuje v klasických knihách, jako například v [2]. Prostorčas s  $M = 1$

### 2.3.4 Lemaîtreovy souřadnice

Konstrukci Lemaîtreových souřadnic si zde provedeme důkladněji, než-li v předešlých sekcích, protože není nikterak složitá, je to první nesesingulární řešení v  $r = 2M$  a také abychom si naznačili postup, jak se nové souřadné systémy hledají. Při odvození se budeme držet postupu z [4].

Jak již tušíme, nemusíme při hledání nových souřadnic měnit úhlovou část souřadnic  $\theta$  a  $\phi$ . Místo souřadnic  $r, t$  zavedeme nové souřadnice  $\tau, R$  pomocí vztahu:

$$d\tau = dt + \frac{f(r)}{1 - \frac{r_g}{r}} dr \quad (2.21)$$

$$dR = dt + \frac{g(r)}{1 - \frac{r_g}{r}} dr, \quad (2.22)$$

kde  $f(r)$  a  $g(r)$  jsou zatím neznámé funkce a  $r_g \equiv 2M$  značí poloměr Schwarzschildovy sféry. Nikde jsme si zatím neřekli, proč hledáme nové souřadnice dle výše uvedených vztahů. Tuto transformaci jsme jaksí „uhádli“, a to protože člen  $(1 - r_g/r)^{-1}$  by nám mohl pomoci odstranit singulární člen v  $g_{rr}$ .

Ze vztahů (2.21) a (2.22) můžeme vyjádřit  $dt$  a  $dr$ :

$$dt = \frac{1}{g(r) - f(r)} (g(r)d\tau - f(r)dR) \quad (2.23)$$

$$dr = \frac{1 - \frac{r_g}{r}}{f(r) - g(r)} (d\tau - dR) \quad (2.24)$$

a dosadit do Schwarzschildovy metriky (2.4). Takto dostaneme nově vyjádřenou metriku, kde vystupuje i nediagonální člen  $g_{\tau R}$ , pokud budeme požadovat, aby nová metrika byla taktéž diagonální, dostaneme podmínku na funkce  $f(r), g(r)$  ve tvaru:  $g(r) = f^{-1}(r)$ , s tímto vztahem již máme metriku s jednou neznámou funkcí, taková metrika má tvar:

$$ds^2 = \frac{1 - \frac{r_g}{r}}{1 - f^2(r)} [-d\tau^2 + f^2(r)dR^2] + r^2 d\Omega^2 \quad (2.25)$$

z čehož je jasné, že volbou  $f(r) = \sqrt{r_g/r}$ , získáme metriku nesesingulární v  $r = 2M = r_g$  tvaru:

$$ds^2 = -d\tau^2 + \frac{2M}{r} dR^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2.26)$$

Tato metrika je již na horizontu regulární. Je nutno podotknout, že nejsme ještě hotovi, především souřadnice  $r$  vystupující v (2.26) je již funkcí od  $R, \tau$ , takže bychom si měli tuto funkční závislost najít a metriku (2.26) přepsat za pomoci *Lemaîtreových souřadnic*  $(\tau, R, \theta, \phi)$ . Vyjádření souřadnic  $\tau, R$  za pomoci  $t, r$  obdržíme prostou integrací vztahů (2.21), (2.22). Odečtením těchto vztahů obdržíme:  $\tau - R = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{r^3}{r_g}}$ , což nám dává hledanou závislost  $r = r(\tau, R)$  jako:

$$r = r_g^{1/3} \left[ \frac{3}{2}(R - \tau) \right]^{2/3} \quad (2.27)$$

a tím pádem můžeme zapsat *Schwarzschildovu metriku v Lemaîtreových souřadnicích* ve finálním tvaru:

$$ds^2 = -d\tau^2 + r_g^{2/3} \left[ \frac{3}{2}(R - \tau) \right]^{-\frac{2}{3}} dR^2 + r_g^{2/3} \left[ \frac{3}{2}(R - \tau) \right]^{4/3} d\Omega^2 \quad (2.28)$$

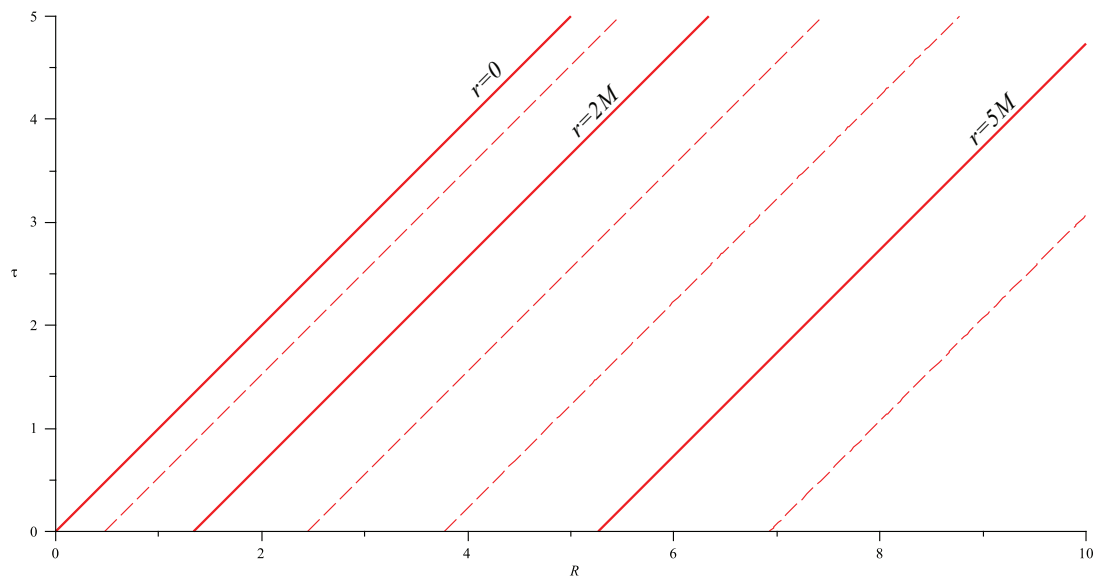
Význam souřadnic  $\theta, \phi$  je stejný jako ve u Schwarzschildových souřadnic. Souřadnice  $\tau$  má význam vlastního času pozorovatele (částice) stojícího vůči zbylým souřadnicím, čili  $R = \theta = \phi = konst.$ , jak jasně plyne z metriky (2.28).

Pokud se pozorovatel vůči souřadnici  $R$  nepohybuje, neznamená to však že stojí, ale pohybuje se prostorem, například vůči Schwarzschildově souřadnici  $r$ , což je vidět ze vztahu (2.27), který mám říkat že částice padá do singularity  $r = 0$ , pro vlastní čas  $\tau = R$ . To znamená, že tuto souřadnou soustavu můžeme reprezentovat volně padajícími pozorovateli (nebo částicemi) z nekonečna s nulovou počáteční rychlostí, kteří jsou „číslování“ pomocí souřadnice  $R$ , a čas je měřen jejich vlastním časem<sup>8</sup>.

Grafické vynesení několika řezů  $r = konst.$  skrze Schwarzschildův prostorčas do Lemaîtreova diagramu je na obrázku 2.5

---

<sup>8</sup>Takovéto souřadné systémy nazýváme *synchronními*.



Obrázek 2.5: Řezy  $r = konst.$  v Lemaîtreově diagramu. Prostorčas s  $M = 1$ .

## Kapitola 3

# Kauzální struktura Schwarzschildova prostoročasu v různých souřadných systémech

Pro pojem kauzalita (z lat. *causa*, příčina) je také jiný český, a poněkud intuitivnější, termín příčinnost. Tím pojmem tedy rozumíme, že žádná událost (A) nesmí ovlivnit jinou událost (B) dříve než-li se událost B dozví o události A. V matematickém termu bychom to zapsali tak, že vzdálenost  $l$  mezi událostmi musí být menší nebo rovna času za který se z A do B dostane signál, nebo-li  $l < ct$ .

Kauzální strukturou rozumíme to, že budeme sledovat nulové geodetiky, které nám vyznačují světelné kužely. Veškeré hmotné testovací částice se mohou nacházet *pouze uvnitř* světelného kuželu<sup>1</sup>, a nehmotné (povětšinou uvažujeme fotony) se mohou pohybovat *pouze po hranici* světelného kuželu, neboli po nulové geodetice.

Veškeré další výpočty a vizualizaci výsledků budeme provádět v řezu skrze Schwarzschildův prostoročas s konstantními úhlovými souřadnicemi  $\phi = 0, \theta = \pi/2$

---

<sup>1</sup>Tím se dá také sledovat pohyb částic v Schwarzschildově prostoročasu.



### 3.1 Kauzální struktura v Schwarzschildových souřadnicích

Jak jsme již viděli u Eddington-Finkelsteinových souřadnic, hledání nulových geodetik znamená podmínku na prostoročasový interval:  $ds^2 = 0$ .

Po aplikaci této podmínky na Schwarzschildovu metriku (2.4), a s uvážením nulovosti úhlové části dostaneme pro nulové geodetiky vztah:

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 = 0, \quad (3.1)$$

což po snadné úpravě přejde na tvar:

$$\frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right), \quad (3.2)$$

kde různá znaménka značí vlétávající nebo vyletující částice.

Předchozí vztah je jednoduchá diferenciální rovnice, již snadno vyřešíme jako:

$$t = \pm(r + 2M \ln|r - 2M|) + C, \quad (3.3)$$

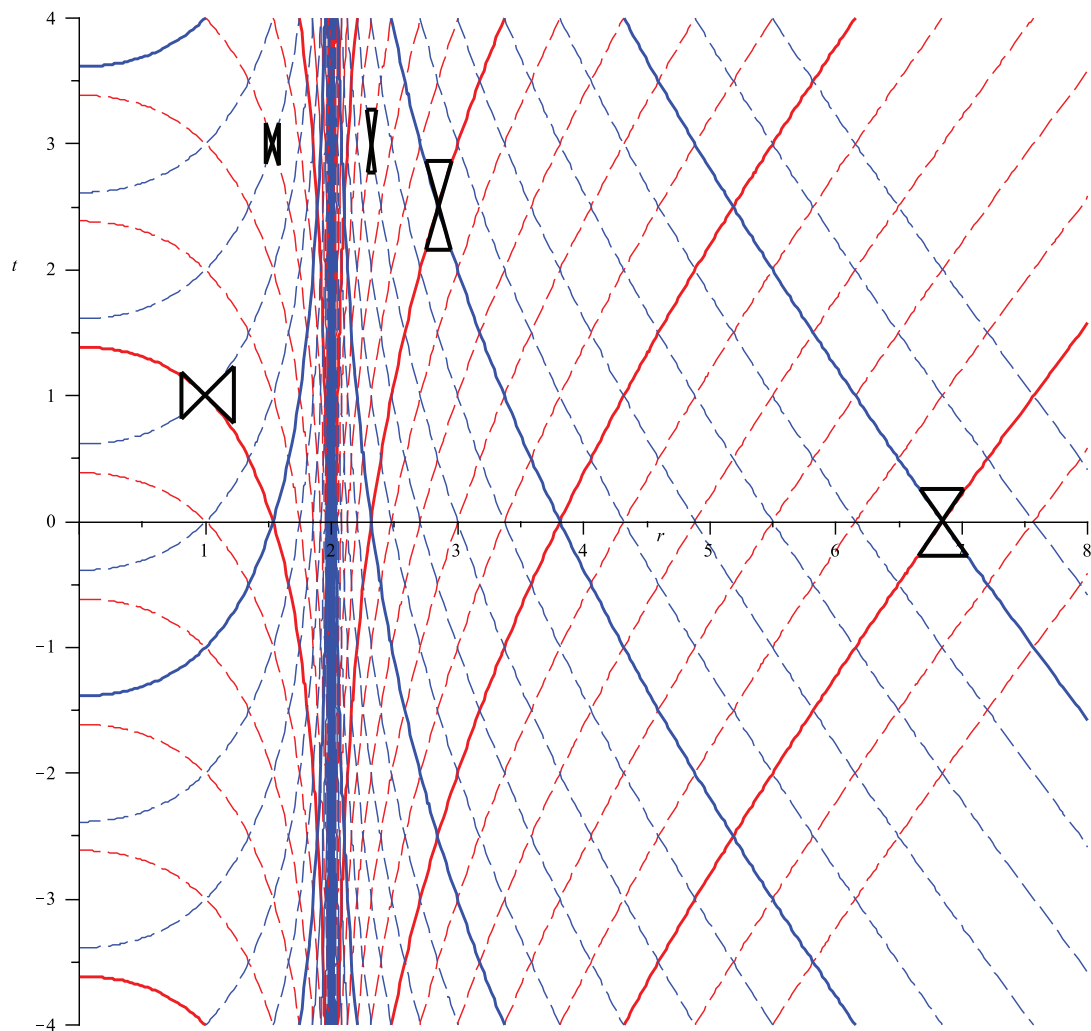
kde  $C$  je integrační konstanta, kterou lze volit dle počátečních podmínek času a místa odkud částice vylétává či padá.

Tento výraz nám říká jak jsou svázány  $r$  a  $t$  souřadnice pro nulové geodetiky. Grafické znázornění geodetik ve Schwarzschildově prostoročasu je na obrázku 3.1.

Na tomto obrázku je dobré si povšimnout jedné skutečnosti, že světelné kužely se pod horizontem „překlopí“. To je důsledkem toho, že časová souřadnice pod horizontem mění svou roli s radiální a naopak, jak je vidět z Schwarzschildovy metriky (2.4). To také znamená, že veškeré částice, které se dostanou pod horizont nutně skončí v singularitě  $r = 0$ , viz další diskuze v následujících kapitolách.

### 3.2 Kauzální struktura v Eddington-Finkelsteinových souřadnicích

Zde jako v předchozí podkapitole vycházíme ze stejných předpokladů a podmínek na nulovost geodetik. Po aplikaci těchto podmínek a předpokladů



Obrázek 3.1: Nulové geodetiky vletujících (modře) a vyletujících (červeně) částic ve Schwarzschildově diagramu s vyznačením několika světelných kuželů.

na metriky (2.20) a (2.19) obdržíme rovnice pro nulové geodetiky ve tvaru:

$$\frac{d\tilde{V}}{dr} = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{d\tilde{V}}{dr} = \frac{2}{1 - 2M/r} \quad (3.5)$$

pro vlétávající Eddington-Finkelsteinovy souřadnice a pro vyletující:

$$\frac{d\tilde{U}}{dr} = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{d\tilde{U}}{dr} = \frac{-2}{1 - 2M/r}. \quad (3.7)$$

Vyřešení takovéto sady diferenciálních rovnic je snadné a nebudeme se s ním zde zabývat. Po vyřešení obdržíme dvojce rovnic pro vlétávající a vyletující částice v Eddington-Finkelsteinových vlétávajících a vyletujících souřadnicích<sup>2</sup>.

Pro lepší znázornění zde zavedeme takzvaný Eddington-Finkelsteinův čas  $\tilde{t}$ , definovaný pomocí vztahů  $\tilde{t} \equiv \tilde{V} - r$  a  $\tilde{t} \equiv \tilde{U} - r$ .

S pomocí takto zavedeného času již můžeme vykreslit nulové geodetiky, jak je na obrázcích 3.2 a 3.3.

V těchto souřadnicích, jak již bylo řečeno při jejich zavádění, není problém s horizontem  $r = 2M$ , ale vždy jen pro vletující nebo vyletující geodetiku.

Také z obrázků je vidět deformace světelných kuželů, ale nedochází již k překlápění.

### 3.3 Kauzální struktura v Kruskal-Szekerových souřadnicích

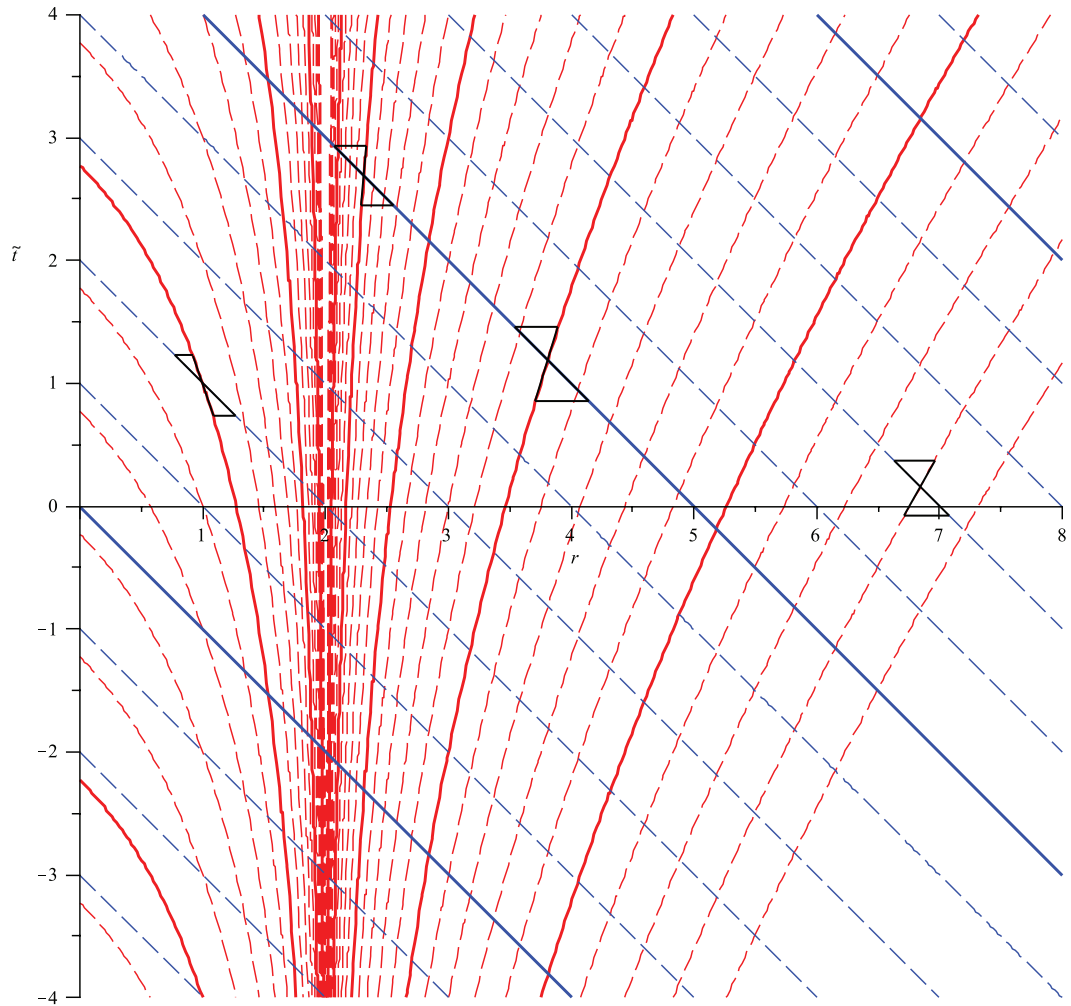
V následující kapitole zavedeme Kruskal-Szekerovy souřadnice.

Jak uvidíme, nulové geodetiky v Kruskal-Szekerových souřadnicích s metrikou (4.11), máme diferenciální vztah:

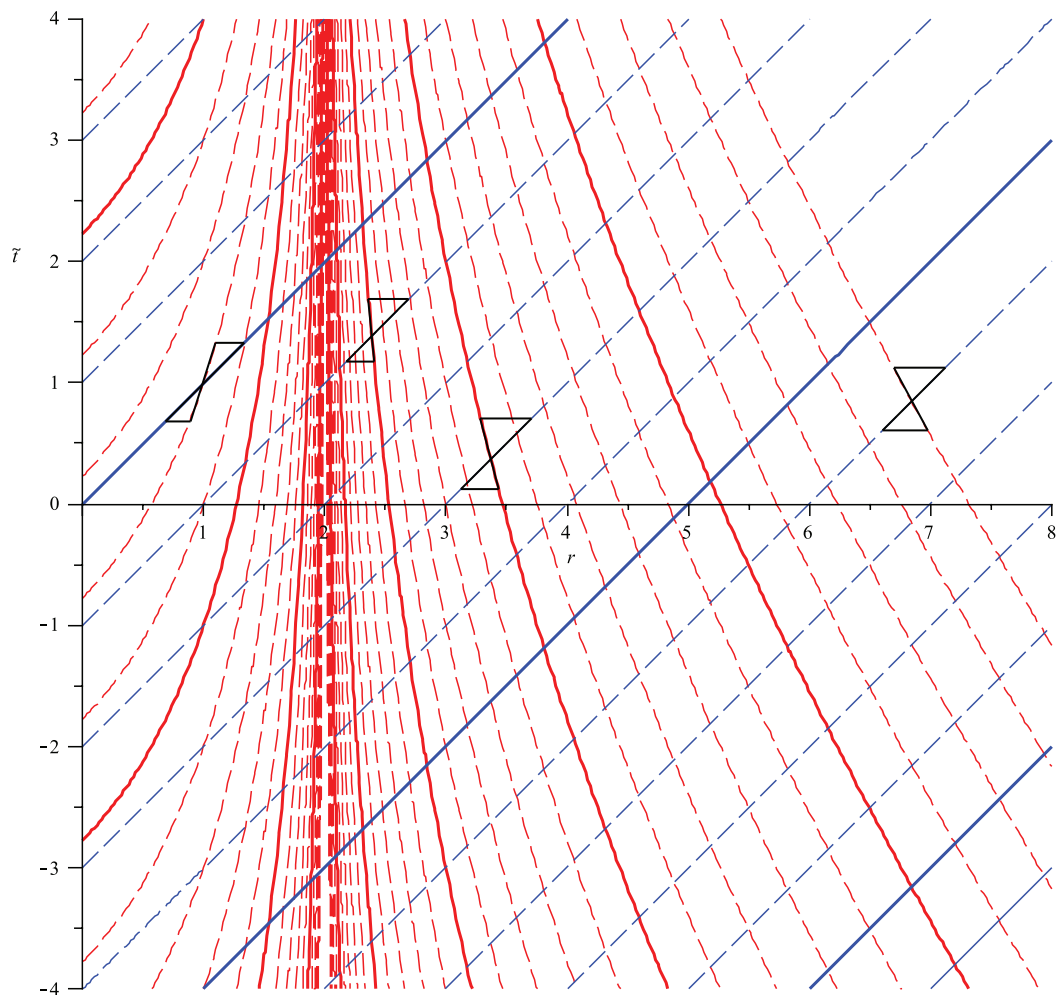
$$du^2 = dv^2 \quad (3.8)$$

---

<sup>2</sup>Zde musíme dávat pozor na terminologii, a rozlišovat zda se bavíme o geodetikách či souřadnicích.

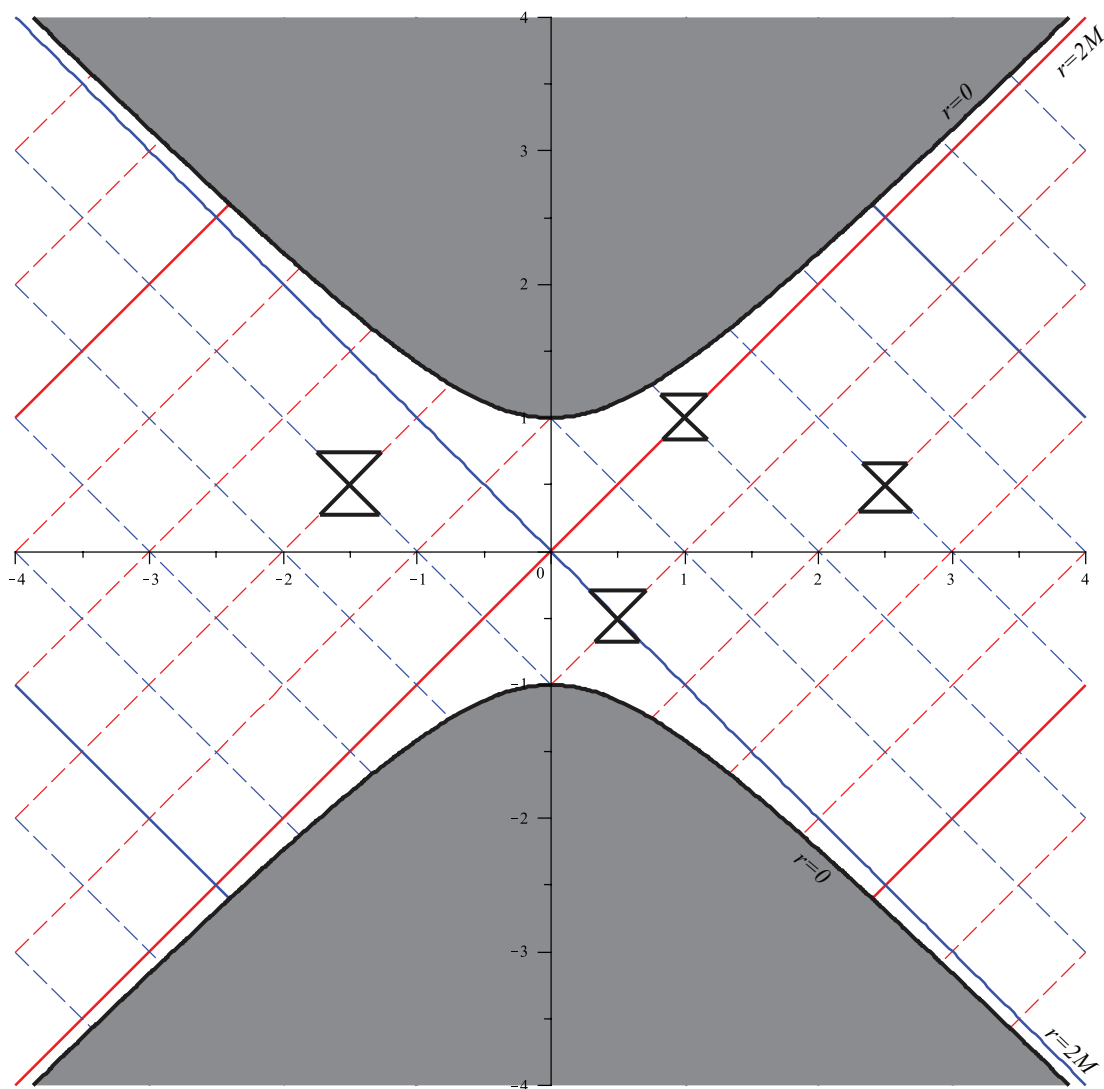


Obrázek 3.2: Nulové geodetiky vletujících (modře) a vyletujících (červeně) částic v upraveném Eddington-Finkelsteinově vletujícím diagramu s vyznačením několika světelných kuželů.



Obrázek 3.3: Nulové geodetiky vletujících (červeně) a vyletujících (modře) částic v upraveném Eddington-Finkelsteinově vyletujícím diagramu s vyznačením několika světelných kuželů.

Grafické zpracování nulových geodetik je na obrázku 3.4, kde je vidět, že světelné kužely svírají v celém Kruskal-Szekerově diagramu úhel  $45^\circ$ , stejně jako v plochém Minkowskiho prostoročase. Tato vlastnost je obzvláště výhodná, a proto se také tento souřadný systém hojně využívá při zkoumání vlastností Schwarzschildova prostoročasu.



Obrázek 3.4: Nulové geodetiky vletujících (červeně) a vylétujících (modře) částic v Kruskal-Szekerově diagramu s vyznačením několika světelných kuželů.

# Kapitola 4

## Kruskal-Szekerovy souřadnice

Jak jsme již psali na začátku v sekci 2.3, tak Kruskal-Szekerovy souřadnice poskytují maximální vhléd do problematiky Schwarzschildova prostoročasu, proto jsme se rozhodli věnovat těmto souřadnicím celou kapitolu. Budeme se zabývat jejich konstrukcí a zavedením, poté si nakreslíme *Kruskal-Szekeřuv diagram* do nějž budeme vynášet jiné souřadnice a řezy a sledovat jak se chovají.

### 4.1 Konstrukce Kruskal-Szekeřových souřadnic

V předchozí části jsme pojednávali o Eddington-Finkelsteinových souřadnicích, a o tom jak „dobře“ popisují průchod přes horizont. Jak jsme naznačili, bylo by vhodné obě-vlétající a vylétující-metriky nějak sloučit, a nalézt metriku takovou, aby nerozlišovala směr letících částic – fotonů.

Jakmile začneme slučovat obě metriky dohromady, jako první musíme vyloučit závislost na souřadnici  $r$  a použít pouze souřadnice  $(\tilde{U}, \tilde{V}, \theta, \phi)$ . Snadno si všimneme že platí:

$$\tilde{V} - \tilde{U} = 2r^* \tag{4.1}$$

$$\tilde{V} + \tilde{U} = 2t, \tag{4.2}$$

kde  $r^*$  jsem zavedli ve vztahu (2.18). Takto se přetransformujeme k metrice:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) d\tilde{U}d\tilde{V} + r^2 d\Omega^2 \tag{4.3}$$



Nyní jsme se zbavili závislosti na souřadnici  $r$ , ale stále v metrice vystupuje singulární člen  $(1 - 2M/r)$ , toho se můžeme zbavit pokud zavedeme vhodně zvolené nové souřadnice  $\tilde{u} = \tilde{u}(\tilde{U})$  a  $\tilde{v} = \tilde{v}(\tilde{V})$ . Takové souřadnice se podařilo nalézt Kruskalovi ve tvaru:

$$\tilde{u} \equiv -e^{-\tilde{U}/4M} = -\left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M} e^{-t/4M} \quad (4.4)$$

$$\tilde{v} \equiv e^{\tilde{V}/4M} = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M} e^{t/4M}. \quad (4.5)$$

Za pomoci takto zavedených nových souřadnic můžeme již zapsat metriku ve tvaru:

$$ds^2 = -\left(\frac{32M^3}{r}\right) e^{-r/2M} d\tilde{u}d\tilde{v} + r^2 d\Omega^2 \quad (4.6)$$

kde souřadnice  $r$  je již funkcí souřadnic  $\tilde{u}, \tilde{v}$  a s nimi svázána implicitní rovnicí:

$$\left(\frac{r}{2M} - 1\right) e^{r/2M} = -\tilde{u}\tilde{v} \quad (4.7)$$

Takto zavedené souřadnice  $\tilde{u}, \tilde{v}$  jsou nazývány nulovými souřadnicemi, protože popisují světelné geodetiky směřující ven a dovnitř horizontu. Pokud se budeme chtít přetransformovat do časupodobných a prostorupodobných souřadnic  $u$  a  $v$ , pak tyto souřadnice definujeme jako:

$$u \equiv \frac{1}{2}(\tilde{v} - \tilde{u}) = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) \quad (4.8)$$

$$v \equiv \frac{1}{2}(\tilde{v} + \tilde{u}) = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right). \quad (4.9)$$

Takto zavedené souřadnice se nazývají Kruskal-Szekerovy. Snadno se lze přesvědčit, že mezi nulovými a času(prostoru)podobnými souřadnicemi platí:

$$dv^2 - du^2 = d\tilde{v}d\tilde{u} \quad (4.10)$$

a s pomocí tohoto vztahu již lze zapsat metriku v Kruskal-Szekerových souřadnicích ve tvaru:

$$ds^2 = -\left(\frac{32M^3}{r}\right) e^{-r/2M} (du^2 - dv^2) + r^2 d\Omega^2 \quad (4.11)$$

Jak si všimneme tak souřadnice definované vztahy (4.8) a (4.9) nemají problém s oblastí  $r = 2M$ , ale pod touto oblastí bychom museli odmocnit záporné číslo ( $u$  a  $v$  se stávají „imaginárními“). Tento nedostatek se

snadno odstraní, pokud zavedeme ještě jednu dvojici souřadnic, popisující Schwarzschildův prostoročas pod horizontem. Tyto doplňující souřadnice mají tvar:

$$u = \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{r/4M} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) \quad (4.12)$$

$$v = \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{r/4M} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right). \quad (4.13)$$

Takto obdržíme dvě souřadné mapy pokrývající celou oblast Schwarzschildova prostoročasu, jednu oblast pro  $r \geq 2M$  pokrývají vztahy (4.8) a (4.9) a oblast pro horizontem  $r < 2M$  vztahy (4.12) a (4.13).

V metrice (4.11) opět vystupuje souřadnice  $r$ , kde jako již v předchozích kapitolách je funkcí nových souřadnic  $u$  a  $v$  a je s nimi svázaná vztahem:

$$\left(\frac{r}{2M}\right) e^{r/2M} = u^2 - v^2 \quad (4.14)$$

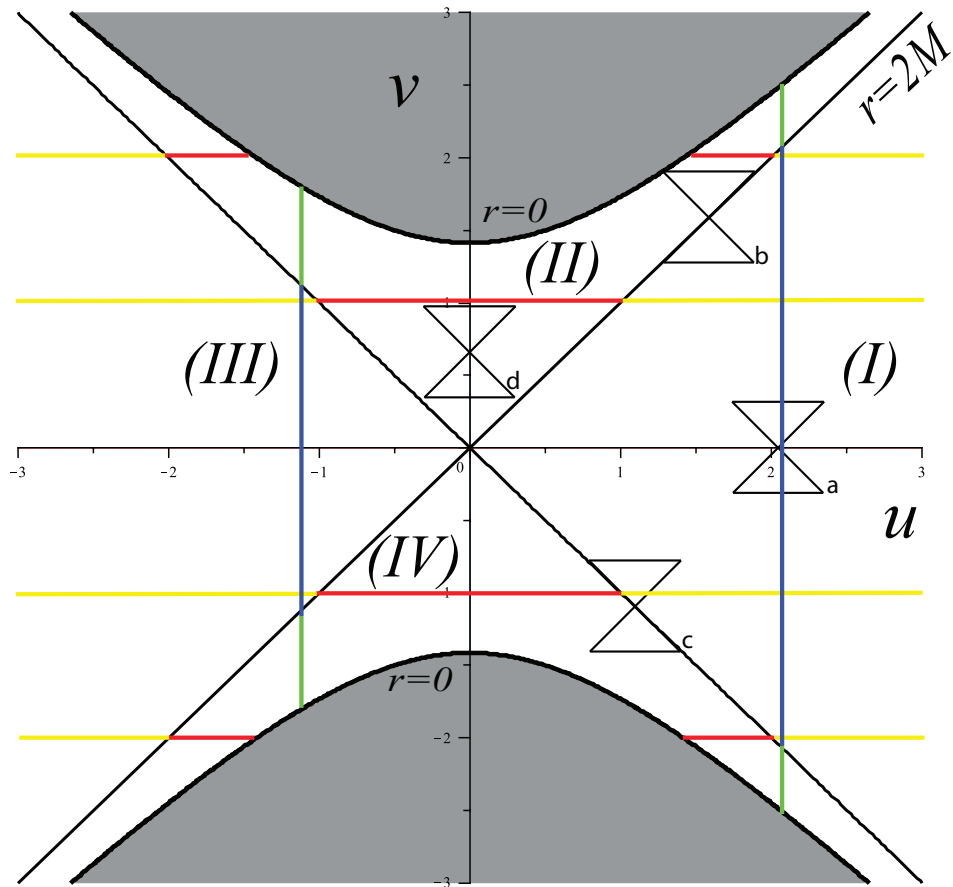
toto je rovnice pro analytické vyjádření parabol. Grafické znázornění je na obrázku 4.3.

## 4.2 Struktura Kruskal-Szekerova diagramu

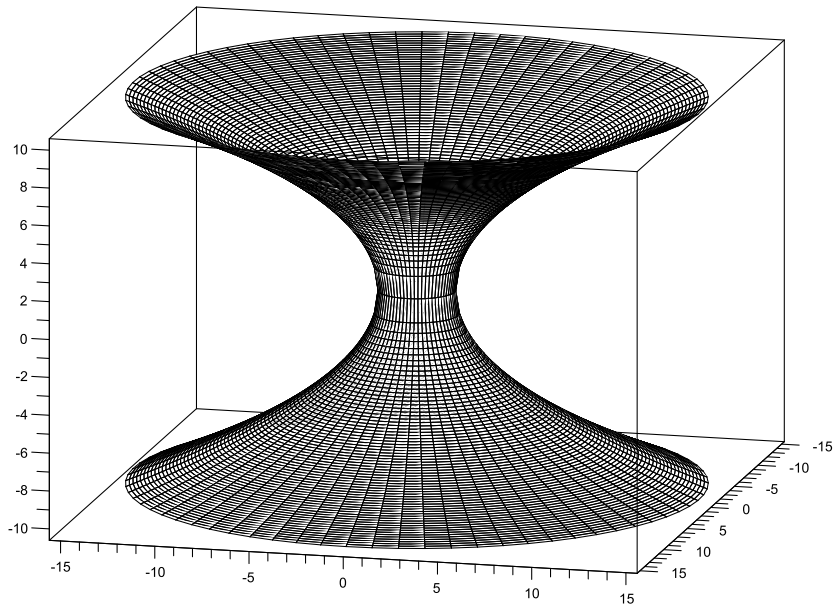
Je důležité si pořádně prozkoumat strukturu Kruskal-Szekerova diagramu. Jak je znázorněno na obrázku 4.1, tak horizont nám rozdělí diagram na 4 kvadranty, kde ve dvou z nich je vždy singularita (oblasti II a IV) a leží pod horizontem. Další dvě oblasti leží nad horizontem (oblasti I a III). Tato skutečnost je dosti překvapující, a úplně nová. Takto popsaný prostoročas má totiž dvě asymptoticky ploché oblasti. Tyto dvě ploché oblasti jsou znázorněny na obrázku 4.2, kde je dobře vidět propojení dvou oblastí přes tzv. Einstein-Rosenův most.

Tato hyperplocha vznikla opět za pomoci vnoření, a je dobré si pořádně vysvětlit co vyjadřuje. Vnoření jsme provedli při konstantních souřadnicích  $t, \theta$ , konkrétně  $t = 0$  a  $\theta = \pi/2$ . Zafixováním hodnoty  $t = 0$  znamená, že máme i konstantní souřadnici  $v = 0$ , viz obrázek 4.3.

Další významnou vlastností Kruskal-Szekerova diagramu je také ta, že světelné kužly svírají všude úhel  $45^\circ$ . Toto je velmi užitečné při zkoumání pohybu například testovacích částic (hmotných i nehmotných). Pár těchto kuželů je zakresleno ve schématickém obrázku 4.1.



Obrázek 4.1: Rozpad Kruskal-Szekeerova diagramu na čtyři kvadranty a vyznačení důležitých světelných kuželů.



Obrázek 4.2: Propojení dvou asymptoticky plochých oblastí tzv. Einstein-Rosenovým mostem. Prostorčas s  $M = 1$

Je dobré si rovnou takový pohyb rozebrat. Jako první si vezmeme světelný kužel označený jako  $a$  na obrázku 4.1, kde je částice v čase nula v nějakém bodě vně horizontu. Tato částice se může pohybovat pod úhlem menším nebo rovným  $45^\circ$ , tak vidíme, že tato částice se může pohybovat od horizontu nebo k horizontu, a není nikterak ve svém pohybu omezená (je samozřejmé, že jsou zde omezení jako konečná rychlost světla).

Světelný kužel  $b$  je umístěn na horizontu, taktéž i kužel  $c$ , na tomtéž obrázku jako v předchozím odstavci. V případě  $b$  je z obrázku jasně patrné, že částice nalétající do singularity, pokud je hmotná, pak nutně skončí v singularitě  $r = 0$ , pokud je tato částice nehmotná, pak zůstane navždy uvězněná na Schwarzschildově sféře. Přímkou značící horizont je taktéž souřadnicí pro  $t = +\infty$ , takže tato „zamrzlá“ částice na horizontu skončí v čase  $t = +\infty$ , což je čas pozorovatele v nekonečnu. Zde je opět vidět, jaká je povaha „singularity“  $r = 2M$ , je to jen špatně zvolená souřadnice, protože částice k horizontu dorazí a skrze něj projde bez problému, ale vzdálený pozorovatel uvidí, jak se částice bude přibližovat k horizontu až v jeho nekonečném čase se tato částice na horizontu zastaví (nehmotná) nebo skrze horizont projde (hmotná).

Světelný kužel  $d$  je umístěn uvnitř horizontu, je vidět že libovolná částice se v budoucnu vždy ocitne v singularitě  $r = 0$ .

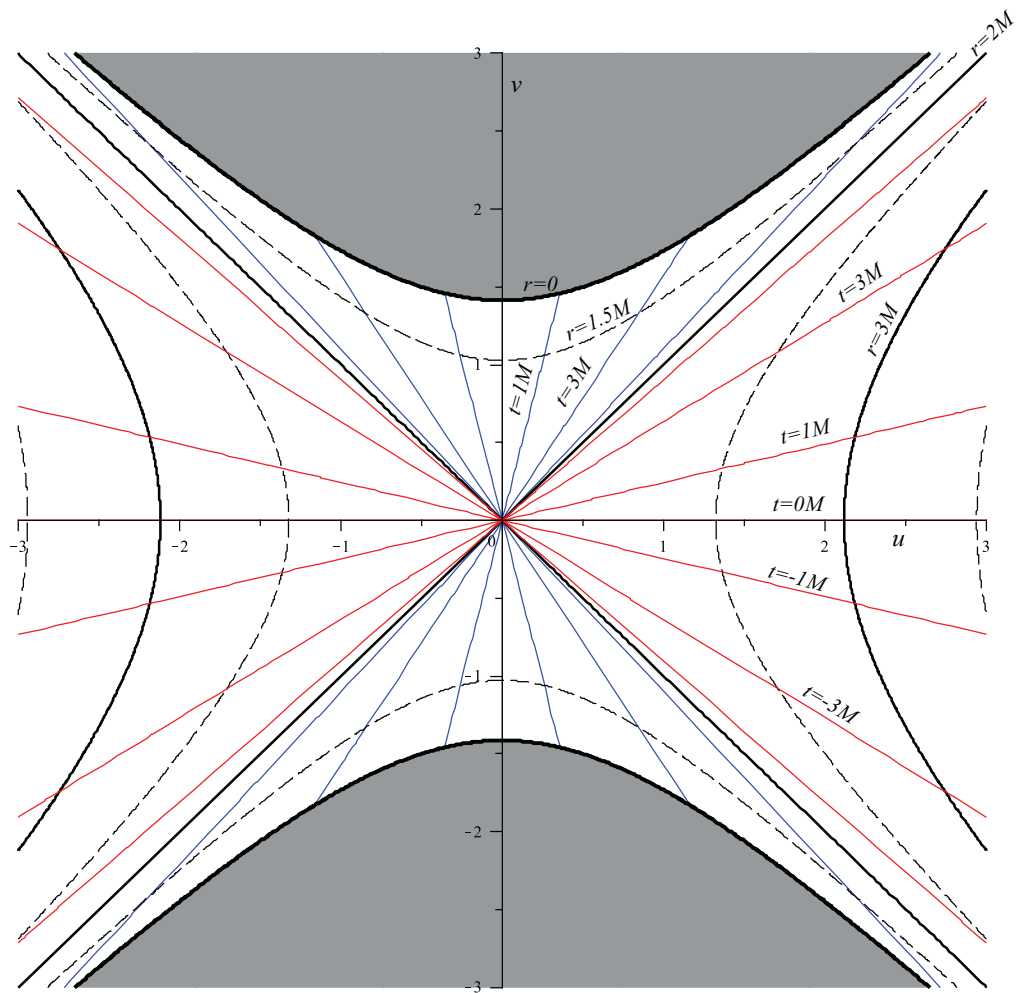
## 4.3 Vztah Kruskal-Szekerových souřadnic k ostatním souřadným systémům

Je namístě si ukázat, jak se chovají různé souřadné systémy navzájem, obzvláště v Kruskal-Szekerově diagramu.

### 4.3.1 Kruskal-Szekerovy souřadnice a Schwarzschildovy souřadnice

Jako první souřadnou soustavu si logicky vezmeme Schwarzschildovy souřadnice, zakreslené v Kruskal-Szekerově diagramu, viz obrázek 4.3. Je vidět že souřadnice  $r$  odpovídá parabolám, ležícím pro  $r > 2M$  v oblastech I a III, na obrázku 4.1, a pro  $r < 2M$  leží paraboly v oblastech II a IV. Tyto paraboly jsou zadány implicitním vztahem:

$$\left(\frac{r}{2M} - 1\right) e^{r/2M} = u^2 - v^2, \quad (4.15)$$



Obrázek 4.3: Schwarzschildovy souřadnice v Kruskal-Szekerově diagramu. Prostorčas s  $M = 1$

který platí všude v Kruskal-Szekeřově diagramu.

Schwarzschildova souřadnice  $t$  je v obrázku 4.3 vynesena jako série přímek procházejících počátkem, vztah mezi Schwarzschildovou souřadnicí  $t$  a Kruskal-Szekeřovými souřadnicemi  $u, v$  je:

$$t = \begin{cases} 4M \tanh^{-1}(v/u), & \text{pro oblasti I a III} \\ 4M \tanh^{-1}(u/v), & \text{pro oblasti II a IV} \end{cases} \quad (4.16)$$

Horizont událostí se v obrázku 4.3 redukuje na dvě přímky, které nám rozdělují tento diagram na čtyři oblasti, jak již bylo pojednáno výše. Zároveň nám tyto dvě přímky splývají s časovými Schwarzschildovými souřadnicemi  $t = \pm\infty$ .

Rozbor toho, jak vypadají Schwarzschildovy souřadnice v kruskalově diagramu je poměrně často vykládaný (např.: [2]), ale už není tak časté ukázat obrácenou možnost a to vzhled Kruskal-Szekeřových souřadnic (i nulových  $\tilde{u}, \tilde{v}$ ) ve Schwarzschildově diagramu, viz obrázky 4.4 a 4.5.

Nejprve si projdeme první z těchto obrázků (Obr. 4.4). Obrázek vznikne tak, že provádíme vertikální ( $v = konst.$ ) a horizontální řezy ( $u = konst.$ ), a sledujeme jak se vyvíjejí souřadnice  $t$  a  $r$ .

Pro lepší přehlednost dále vykládaného textu jsou řezy Kruskal-Szekeřovým diagramem vyznačeny na obrázku 4.1, kde jsou příslušné části řezů označeny stejnými barvami jako je tomu v obrázku 4.4.

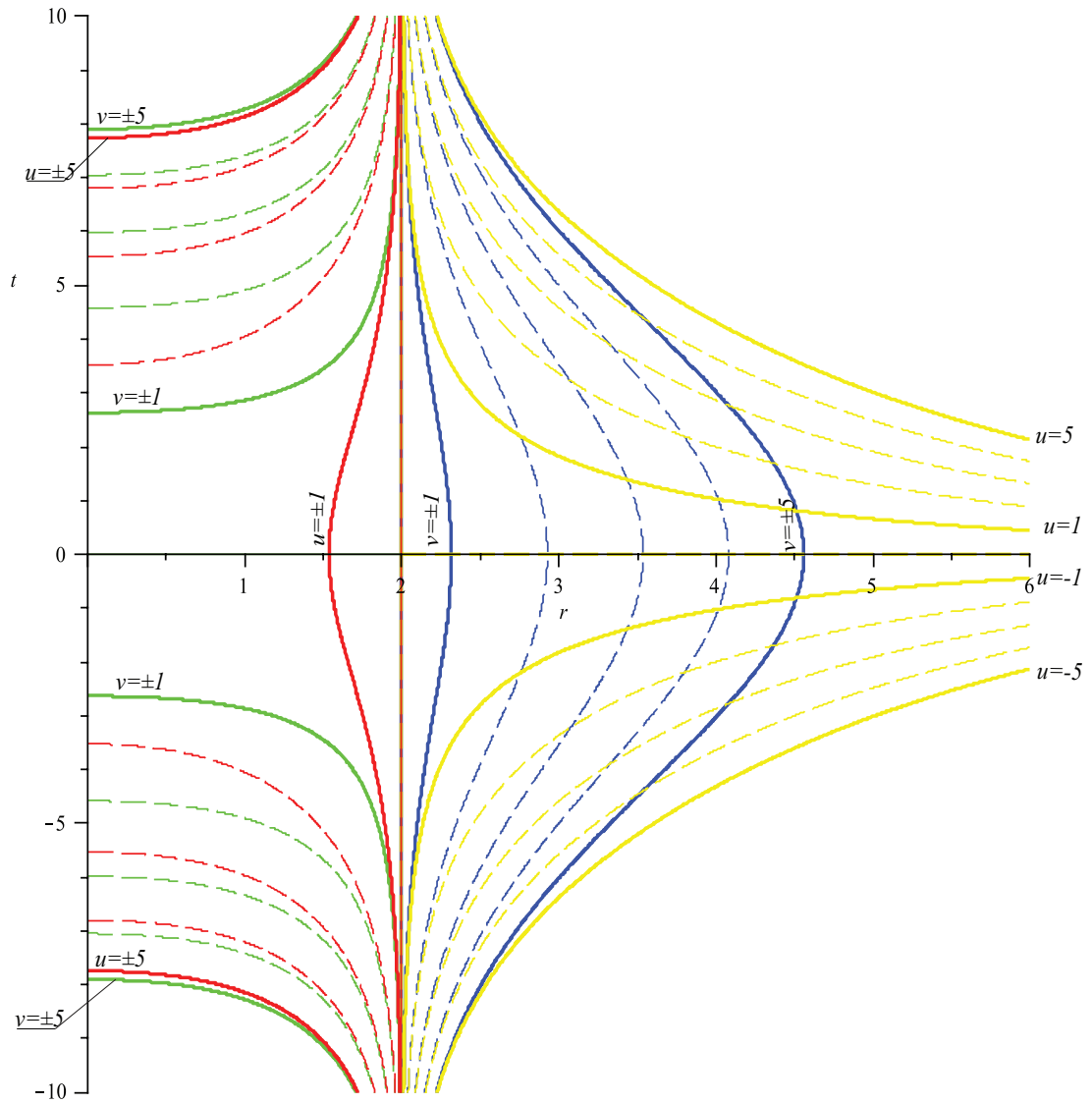
Při konstantí souřadnici  $u$  (v obr. 4.4 značeno zeleně a modře) se nám skládá řez ze dvou částí—uvnitř a vně horizontu. Což je poměrně zřejmé ze zavedení souřadnic a obrázku 4.3.

Část ležící pod horizontem se vyvíjí tak, že křivka běží z  $r = 0$  v nějakém konkrétním čase do horizontu  $t = \pm\infty$  a  $r = 2M$  a pak druhá část znovu běží z horizontu  $t = \pm\infty$  a  $r = 2M$   $r = 0$  v jiném konkrétním čase. To je snadno pochopitelné při pohledu na obrázek 4.3, kde vidíme že *každý* řez  $u = konst.$  má konečnou délku, začíná v minulé singularitě (singularita v oblasti IV), pak projde skrze horizont ( $t = \pm\infty$ ) pokračuje oblastí I nebo III, projde opět horizontem ( $t = \pm\infty$ ) až skončí v budoucí singularitě<sup>1</sup> (oblast II).

V oblasti I (resp. III) je situace poměrně snadná. Řez vychází z horizontu, kde je  $t = \pm\infty$  projde skrze  $v = 0$  což odpovídá  $t = 0$ , kde nabývá hodnota

---

<sup>1</sup>Terminologie minulá a budoucí singularita vychází z toho, že minulá singularita leží vždy pod libovolným světelným kuželem a žádná částice do ní nemůže doletět, jen z ní vylétnout. Pro budoucí singularitu je situace analogická.



Obrázek 4.4: Kruskal-Szekerovy souřadnice v Schwarzschildově diagramu. Prostorčas s  $M = 1$ . Pozn.: V tomto obrázku jsou znaménka  $\pm$  u řezů z toho důvodu, že řezy jdou skrze oba propojené prostoročasy, což nelze do Schwarzschildova diagramu „rozumně“ zakreslit.



$r$  své určité maximální hodnoty a zase řez pokračuje do horizontu  $r = 2M$  v  $t = \pm\infty$ , tato část vertikálního řezu je vynesena v obrázku modrou barvou.

U horizontálních řezů  $v = konst.$  se nám situace mění a hlavně tím, že tyto řezy můžeme rozdělit na dvě části. A to řezy které leží mezi vrcholy singularit  $r = 0$ , které nejsou nijak omezeny a pak řezy, které jsou singularitami přerušeny a skládají se tedy ze dvou polopřímek. Toto je zásadní rozdíl, v předchozím případě byl *každý* řez omezený, v řeči geometrie byl *každý* řez *úsečkou* v Kruskal-Szekerově diagramu, naproti tomu řezy  $v = konst.$  jsou geometricky řečeno *vždy* *přímkou*, nebo se skládají ze dvou polopřímek.

Otázka je jak se nám tato rozdílnost projeví v Schwarzschildově diagramu?

Nejprve si vezmem řezy které jsou neomezeny. Takovýto řez probíhá z  $u = -\infty$ , kde je  $t = 0^2$  pak řez prochází horizontem  $r = 2M$ ,  $t = \pm\infty$ , dále prochází vnitřní částí horizontu<sup>3</sup>, opět projde horizontem a pokračuje do  $u = \infty$ , s analogickou diskuzí jako v úvodu této věty.

Řez, který jsme popsali v předchozím odstavci máme na obrázku 4.4 jen jediný, a to pro  $u = 1$ . Je vidět že při tomto řezu nabyde souřadnice  $r$  v oblasti pod horizontem jisté minimální hodnoty, takový průběh při řezech  $v = konst.$  nikdy nenastane. To je podstatný rozdíl. Pro limitní případ, kdy bychom provedli řez tak, aby přímka řezu byla tečnou jednoho z vrcholů singularit, by se nám takovýto řez ve Schwarzschildově diagramu vynesl (oblast uvnitř horizontu) jako křivka jdoucí z  $t = \pm\infty$  a  $r = 2M$ , přes  $t = 0$  a  $r = 0$  do oblasti  $t = \pm\infty$  a  $r = 2M$ .

Oblasti vně horizontů jsou na obrázku vyneseny žlutou barvou, jejich interpretace je poměrně snadná. Řez probíhá z  $r = \infty$  a  $t = 0$  a míří do horizontu  $r = 2M$  a  $t = \pm\infty$ . Část řezu probíhající z horizontu do nekonečna je analogická.

Rozbor druhé skupiny řezů  $v = konst.$  bude poměrně jednoduchý, a provedeme ji jen na jedné z polopřímek, pro druhou je situace opět analogická.

Polopřímka běží z  $r = \infty$  a  $t = 0$  do horizontu, zde se nic nemění, a platí předešlá diskuze. V oblasti pod horizontem jde řez z horizontu přímo do singularity  $r = 0$ , což je opět již rozebraný případ v části o řezech  $u = konst.$

Na obrázku 4.4 jsou souřadnice  $u$  a  $v$  v rozmezí hodnot 1 . . . 5, avšak jsou

<sup>2</sup>Je však rozdíl pro řezy s kladnou nebo zápornou hodnotou souřadnice  $u$  v tom, že jednou se k nulovému času  $t$  blížíme z kladných hodnot  $t$  a podruhé ze záporných hodnot  $t$ , viz obrázek.

<sup>3</sup>Pamatujme, že rozebíráme příklad, kdy řez leží mezi vrcholy singularit.

tam vyneseny i řezy  $u = v = 0$ , bohužel vizualizace těchto řezů je malinko složitější, a v obrázku toto vnesení trošku zaniká, proto si zde popíšeme jak tyto řezy vypadají.

Řez  $v = 0$  probíhá od  $r = \infty$  přes  $r = 2M$  zpět do  $r = \infty$ . Tento řez probíhá přes počátek  $[u, v] = [0, 0]$ , kde jsou zastoupeny všechny časy, proto vizualizace tohoto řezu má tvar  $\vdash$ , kde vertikální oblast tohoto symbolu odpovídá přímce  $r = 2M$ , a horizontální část symbolu náleží v Schwarzschildově diagramu polopřímce  $r = 2M.. \infty$  a  $t = 0$ .

Řez  $u = 0$  probíhá od singularity  $r = 0$  přes horizonty  $[u, v] = [0, 0]$  a dále do druhé singularity  $r = 0$ . To je důvod proč máme opět malý problém s vizualizací, a zase si pomůžeme symbolem, tentokrát má řez v Schwarzschildově diagramu tvar  $\dashv$ . Zde má vertikální část stejný význam jako v předešlém odstavci, a horizontální část popisuje úsečku  $r = 0..2M$ .

### 4.3.2 Kruskal-Szekerovy nulové a Schwarzschildovy souřadnice

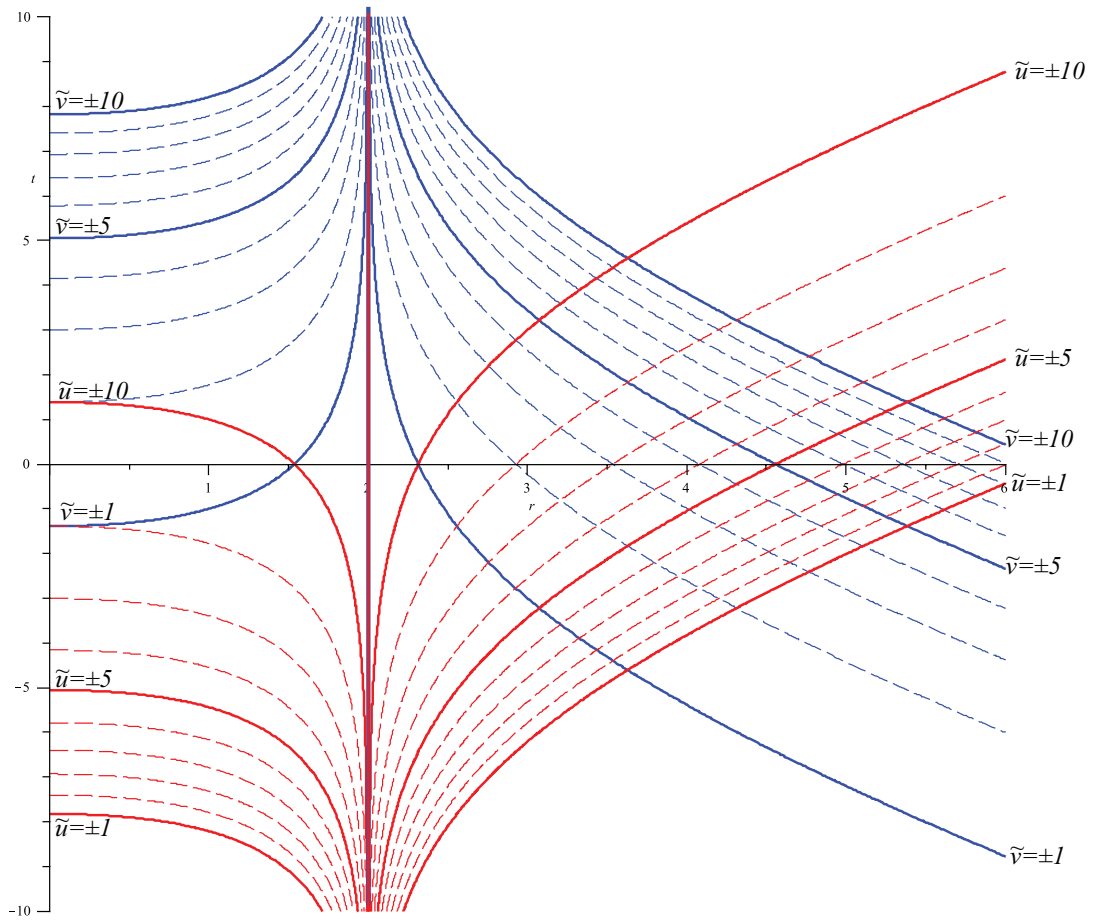
V předchozích odstavcích jsme podrobně prozkoumali, jak se chovají Kruskal-Szekerovy souřadnice v Schwarzschildově diagramu. Ukázali jsme si jak postupovat při vyšetřování a jak vůbec provádět jednotlivé řezy.

V dalších částech této práce budeme sledovat vzhled a chování Kruskal-Szekerových souřadnic vůči jiným souřadným systémům, a naopak. Často se budeme odkazovat na předešlé odstavce a tak podrobný rozbor nebudeme již provádět znovu, nebude-li to nutné, povětšinou se budeme odkazovat na již známý případ.

Nyní si již prozkoumáme, jak vypadají Kruskal-Szekerovy nulové souřadnice v Schwarzschildově diagramu. Opět přidáváme pro lepší orientaci obrázek 3.4, kde jsou nulové geodetiky (pro nás nyní řezy  $\tilde{u}, \tilde{v}$ ) značeny stejnou barvou jako v obrázku 4.5.

Kruskal-Szekerovy nulové souřadnice jsme zavedli na začátku této kapitoly a metrika v těchto souřadnicích má vzhled (4.6). Pod pojmem Kruskal-Szekerovými nulovými souřadnicemi rozumíme, takové, které sledují nulové geodetiky volných nehmotných částic (většinou uvažujeme fotony). Tyto souřadnice jsme označili jako  $\tilde{u}$  a  $\tilde{v}$  (viz (4.4) a (4.5)). Vztah mezi nulovými a „normálními“ Kruskal-Szekerovými souřadnicemi jsme zavedli pomocí vztahů (4.8) a (4.9). Grafické znázornění řezů pro  $\tilde{u} = konst.$  a  $\tilde{v} = konst.$  je na obrázku 4.5.

Každý řez, pro  $\tilde{u}$  či  $\tilde{v}$ , je polopřímkou, vyjma  $\tilde{u} = \tilde{v} = 0$ . Tedy můžeme



Obrázek 4.5: Kruskal-Szekerovy nulové souřadnice v Schwarzschildově diagramu. Prostorčas s  $M = 1$ . Znaménka  $\pm$  ze stejného důvodu jako u předešlého obrázku 4.4

použít předchozí diskuzi, protože první část polopřímek jde ze singularity  $r = 0$  přes horizont, a pokračuje do  $r = \infty$ ,  $t = \pm\infty$ , zde je rozdíl oproti předchozím souřadnicím. V předešlé podkapitole jsme měli v limitě  $r \rightarrow \infty$ ,  $t = 0$ , nyní máme pro tu samou limitu  $t = \pm\infty$ .

Toto chování je krásně vidět na již zmiňovaném obrázku 4.5., kde je taktéž vidět, co se děje při řezech  $\tilde{u} = \tilde{v} = 0$ . Tyto řezy jsou vedeny skrze  $r = 2M$  v nekonečných časech (buď  $t = +\infty$ , nebo  $t = -\infty$ , podle toho, který řez provádíme), ale zároveň procházíme počátkem souřadné soustavy  $[\tilde{u}, \tilde{v}] = [0, 0]$ , kde jsou zastoupeny všechny časy, čili se nám tyto řezy „roztáhnou“ v Schwarzschildově diagramu jako přímka  $r = 2M$ . V limitách  $\tilde{u}, \tilde{v} \rightarrow \pm\infty$ , nám oba řezy začínají i končí v singularitě, což bohužel v našem obrázku nelze zachytit.

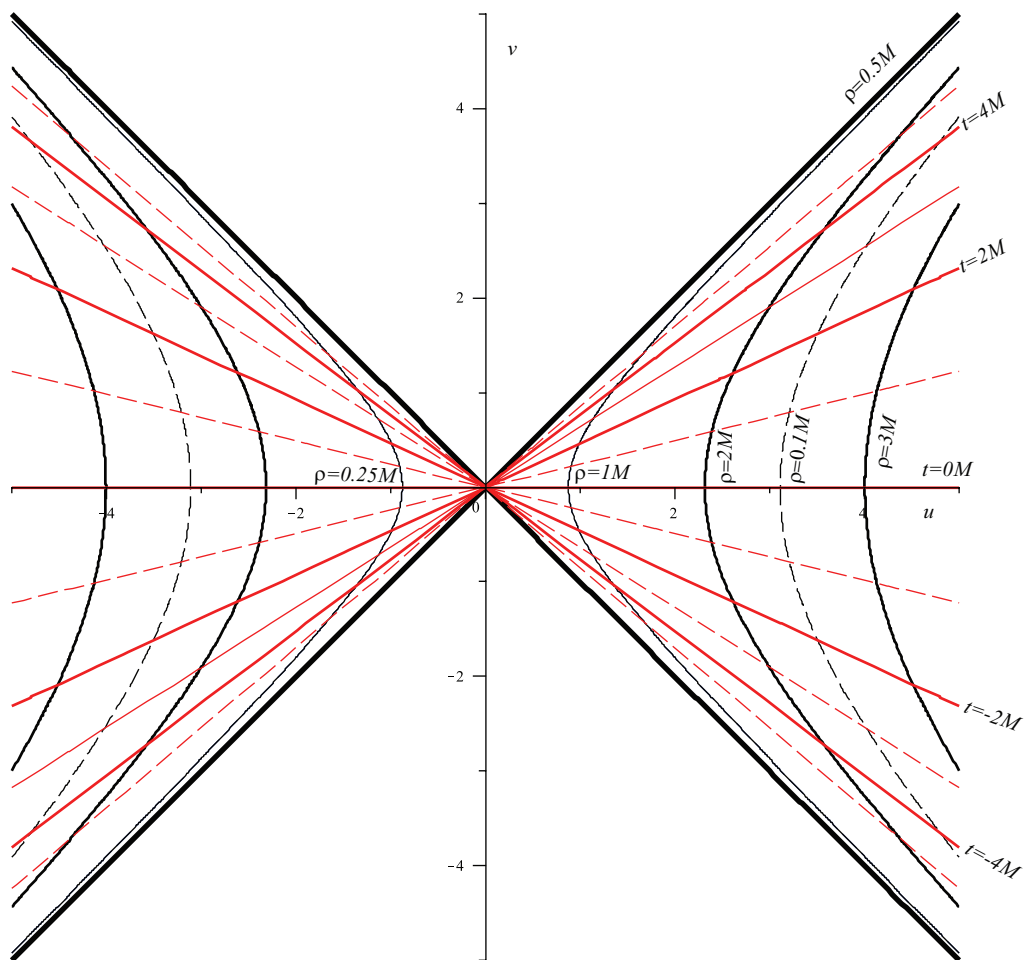
### 4.3.3 Kruskal-Szekerovy a isotrovní souřadnice

Isotropní souřadnici jsme si zavedli v části 2.3.1. Otázkou nyní je, jak se projeví tato souřadnice v Kruskal-Szekerově diagramu?

Vzhled isotrovní souřadnice jsme vykreslili v obrázku 4.6. Je dobré si všimnout, že se tento obrázek výrazně liší od obrázku 4.3, kde jsou zakresleny Schwarzschildovy souřadnice, především v tom, že zde není zakreslena žádná singularita.

To lze pochopit velice rychle, pokud si vzpomeneme na obrázek 2.3, na němž je vidět vztah mezi isotrovní a Schwarzschildovou souřadnicí  $r$ . Dá se říct, že přechod k isotrovní souřadnici nám pro  $\rho > M/2$  jistým způsobem „přeskákuje souřadnici  $r$ “. Pro konkrétní hodnotu souřadnice  $r$  nám vztah (2.6) přiřadí *dvě* –vyjma hodnoty  $r = 2M$  – různé hodnoty souřadnice  $\rho$ , otázkou tedy je, jak se nám to projeví v Kruskal-Szekerově diagramu?

Na obrázku 4.6 je zakreslena souřadnice  $\rho = 0.25M$  v kvadrantu III. Znamená to tedy, že isotrovní souřadnice pro  $\rho > M/2$  jsou v Kruskal-Szekerově diagramu zakresleny v oblasti I, zatímco souřadnice  $\rho < M/2$  jsou v Kruskal-Szekerově diagramu vynášeny v oblasti III. Z toho tedy plyne, že isotrovní souřadnice pokrývají i oblast, kterou Schwarzschildovy souřadnice nepokrývají vůbec! Toto je z pohledu zavedení isotrovní souřadnice jako nějakého přeskálování souřadnice  $r$  nový a překvapující fakt, pokud si však vzpomeneme na rozbor radiální geodetiky pro isotrovní souřadnici, pak tento by nás tento fakt neměl příliš překvapit.



Obrázek 4.6: Isotropní souřadnice v kruskalově diagramu. Prostorčas s  $M = 1$

# Kapitola 5

## Novikovovy souřadnice

### 5.1 Zavedení Novikovových souřadnic

Novikov zavedl (1963)[17] souřadnice podobně motivované jako Eddington-Finkelsteinovy souřadnice, jen s tím rozdílem, že je nespojil s volně vletujícími, nebo vyletujícími fotony, ale částicemi. Novikov zavedl novou souřadnici  $R^*$ , svázanou s bodem obratu  $r_{max}$  vztahem:

$$R^* = \left( \frac{r_{max}}{2M} - 1 \right)^{1/2}. \quad (5.1)$$

Jako čas zvolil vlastní čas částice  $\tau$ , normalizovaný tak, že v bodě obratu  $r_{max}$  je  $\tau = 0$ , a v tom samém bodě je zvolen Schwarzschildův čas  $t = 0$ . Vlastní čas, Schwarzschildův čas a Schwarzschildova radiální souřadnice jsou svázány s Novikovovými souřadnicemi vztahy:

$$r = M(R^{*2} + 1)(1 + \cos \eta) \quad (5.2)$$

$$\tau = M(R^{*2} + 1)^{3/2}(\eta + \sin \eta) \quad (5.3)$$

$$t = 2M \ln \left| \frac{R^* + \tan \frac{\eta}{2}}{R^* - \tan \frac{\eta}{2}} \right| + 2MR^* \left( \eta + \frac{1}{2}(R^{*2} + 1)(\eta + \sin \eta) \right) \quad (5.4)$$

odvození těchto vztahů nalezneme v [2] (kap. 31) nebo poněkud podrobnější výklad v [7] (kap. 12, §101-103).

Pokud si vyjádříme  $t$  jako  $t(\tau, R^*)$  a obdobně  $r$  jako  $r(\tau, R^*)$ , pak lze vyjádřit metriku Schwarzschildova prostoročasu v Novikovových souřadnicích jako:

$$ds^2 = -d\tau^2 + \left( \frac{R^{*2} + 1}{R^*} \right) \left( \frac{\partial r}{\partial R^*} \right)^2 dR^{*2} + r^2 d\Omega^2, \quad (5.5)$$

kde je nutno si uvědomit, že  $r$  není nadále radiální souřadnicí, ale metrickou funkcí  $r(\tau, R^*)$ , danou implicitně vztahem (5.6)<sup>1</sup>, který získáme ze vztahů (5.2)–(5.4) [2].

$$\pm \frac{\tau}{2M} = (R^{*2} + 1) \left[ \frac{r}{2M} - \frac{(r/2M)^2}{R^{*2} + 1} \right]^{1/2} + (R^{*2} + 1)^{3/2} \cos^{-1} \left[ \left( \frac{r/2M}{R^{*2} + 1} \right)^{1/2} \right] \quad (5.6)$$

Grafické znázornění vzhledu Schwarzschildových souřadnic v Novikovově diagramu je na obrázku 5.1. Obrácená úloha, tedy Novikovova souřadnice  $R^* = konst.$  je vynesena na obrázku 5.2, na kterém je jasně vidět jak se chová Schwarzschildův čas v okolí souřadnice  $r = 2M$  – utíká do nekonečna. Pokud se podíváme na diagram, kdy pád částice vyjadřujeme pomocí vlastního času  $\tau$ , pak v  $r = 2M$  se „nic“ neděje, vlastní čas dále narůstá až do okamžiku, kdy částice skončí v singularitě.

## 5.2 Vnořený Novikovův diagram pro plochy s konstantním vlastním časem

Vnořený diagram jsme konstruovali pro Schwarzschildův diagram v sekci 2.2.1, a tuto konstrukci jsme si popsali v dodatku B.

Nyní budeme chtít zkonstruovat vnořený diagram pro řezy skrze Novikovův diagram pro  $\tau = konst.$ . V případě Schwarzschildova diagramu nebyla konstrukce příliš složitá, nyní je poněkud obtížnější, proto si zde provedeme kompletní odvození.

Budeme vycházet ze vztahů (5.2), (5.3) a (5.5). Řezy provádíme pro  $\tau = konst.$  a  $\theta = \pi/2$ , tudíž metriku (5.5) můžeme zapsat v tomto případě jako:

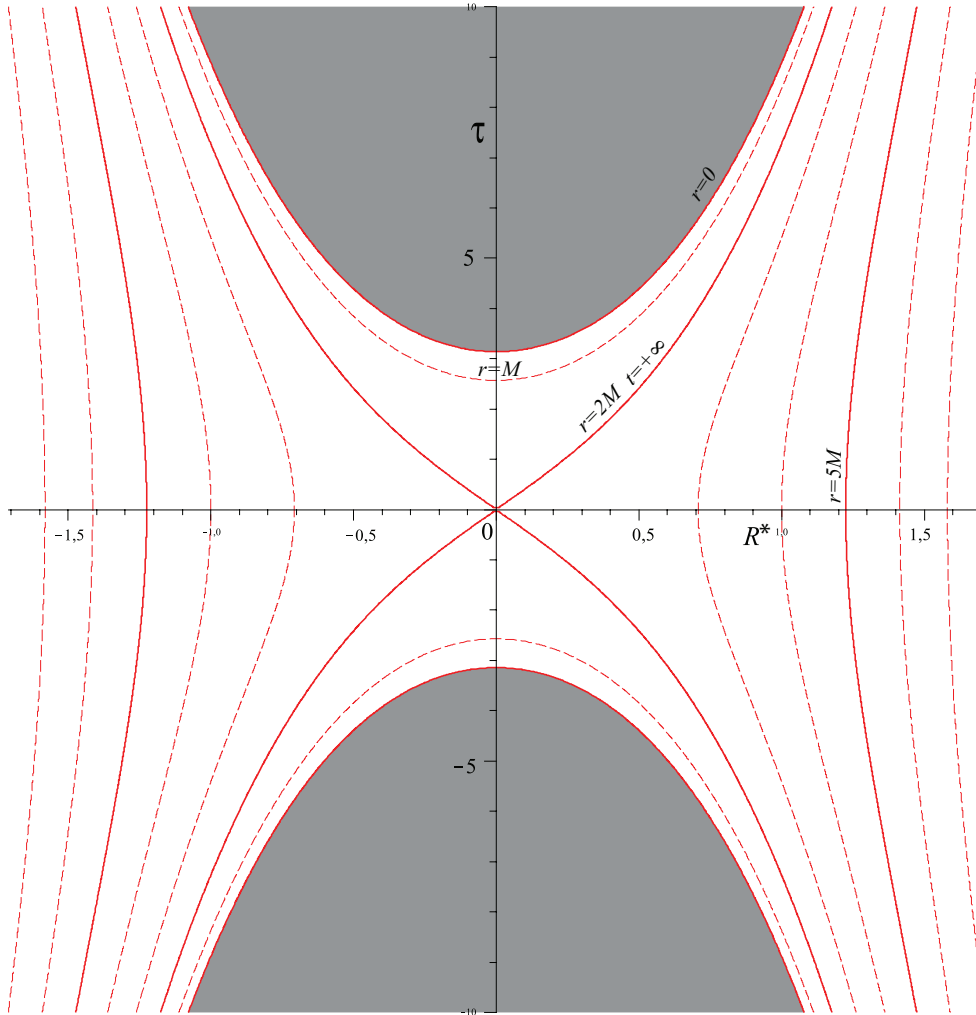
$$ds^2 = \left( \frac{R^{*2} + 1}{R^{*2}} \right) \left( \frac{\partial r}{\partial R^*} \right)^2 dR^{*2} + r^2 d\phi^2. \quad (5.7)$$

Pokud si dále všimneme, že platí  $\left( \frac{\partial r}{\partial R^*} \right)^2 dR^{*2} = dr^2$ , pak se nám metrika dále zjednoduší jako:

$$ds^2 = \left( \frac{R^{*2} + 1}{R^{*2}} \right) dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (5.8)$$

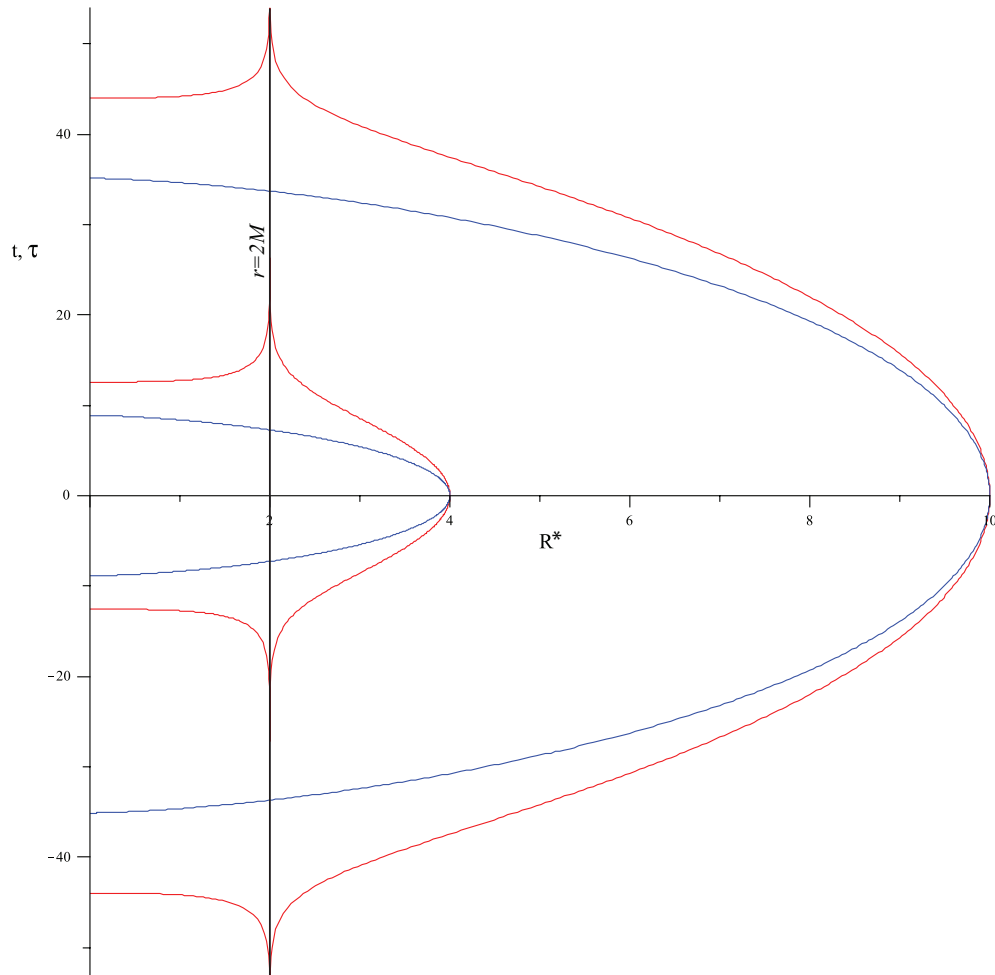
---

<sup>1</sup>V tomto vztahu vystupuje na levé straně znaménko  $\pm$ , to vyplývá ze zavedení, kdy musíme odmocnit obě strany.



Obrázek 5.1: Schwarzschildovy souřadnice v Novikovově diagramu. Prostor-čas s  $M = 1$ .





Obrázek 5.2: Na tomto diagramu je červenou barvou vynesena závislost  $t$  na  $r$ , pro Novikovovy souřadnice  $R^* = 1M$  a  $R^* = 2M$ . Modrou barvou je vynesena závislost  $\tau$  na  $r$  pro stejné hodnoty Novikovovy souřadnice  $R^*$ . Prostorčas s  $M = 1$ .

Pokud porovnáme takto přepsanou metriku se vztahem (B.3), vidíme že pro vnořenou plochu musí platit:

$$dz(R^*) = \pm \frac{dr}{R^*} \quad \text{neboli} \quad dz(R^*) = \pm \frac{1}{R^*} \frac{\partial r}{\partial R^*} dR^*. \quad (5.9)$$

Pro určení členu  $\frac{\partial r}{\partial R^*}$  si nejprve uděláme pomocný výpočet  $\frac{d\eta}{dR^*}$ . Použijeme rovnici (5.2) a podmínku  $\tau = konst.$ , tuto rovnici pak derivujeme dle pravidel o derivování implicitní funkce, tím obdržíme:

$$\frac{d\eta}{dR^*} = - \left( \frac{3R^*}{R^{*2} + 1} \right) \frac{\eta + \sin \eta}{1 + \cos \eta}, \quad (5.10)$$

a tedy z (5.2) dostáváme:

$$\left. \frac{\partial r}{\partial R^*} \right|_{\tau=konst.} = M \left[ 2R^*(1 + \cos \eta) + 3R^* \sin \eta \left( \frac{\eta + \sin \eta}{1 + \cos \eta} \right) \right]. \quad (5.11)$$

Nyní již můžeme vyjádřit diferenciální rovnici pro  $z$  souřadnici vnořené plochy, která má tvar:

$$\frac{dz(R^*)}{dR^*} = \pm M \left[ 2(1 + \cos \eta) + 3 \sin \eta \left( \frac{\eta + \sin \eta}{1 + \cos \eta} \right) \right] \quad (5.12)$$

nesmíme zapomínat, že  $\eta$  je funkcí  $R^*$ .

Nyní již máme připravené vše co potřebujeme ke konstrukci vnořého Novikovova diagramu. Tu provádíme v několika krocích:

1. (a) Pokud provádíme řez pro  $\tau \in (0, \pi)$ , pak si zvolíme  $\eta_0$ , čímž z rovnice (5.3), získáme  $\tau_0$  jako:

$$\tau_0 = M(\eta_0 + \sin \eta_0), \quad (5.13)$$

kde  $\tau_0$  volíme na vertikální ose, čili za  $R^*$  dosazujeme hodnotu 0.

- (b) Pokud je řez z oblasti  $\tau \in (\pi, \infty)$ , pak zvolíme  $\eta = \pi$ , řešíme rovnici (5.3) pro  $R_0^*$ , což nám dá počáteční podmínky pro řešení soustavy diferenciálních rovnic jako  $\eta(R_0^*) = \pi$  a  $z(R_0^*) = \tau_0$ .

2. Vezmeme počáteční podmínku  $[\eta = \eta_0, z = 0]$ , nebo  $[\eta(R_0^*) = \pi, z(R_0^*) = \tau_0]$ , podle toho který řez provádíme.

3. Řešíme soustavu diferenciálních rovnic (5.10) a (5.12), čímž získáme  $\eta = \eta(R^*)$  a  $z = z(R^*)$ , s tím, že máme funkci  $r = r(\tau_0, \eta(R^*))$ .

Pak kreslíme vnoření pro dané  $\tau_0$ , a proměnlivé  $R^*$ .

Provedení výše zmíněné procedury není příliš jednoduché, protože vyřešení soustavy diferenciálních rovnic nelze provést analyticky, pouze numericky. Řešení soustavy a kreslení diagramu provádíme zapomocí programu `Maple` viz dodatek C. Diagramy získané tímto způsobem jsou na obrázku 5.3.

### 5.3 Novikovovy souřadnice v Kruskal-Szeke-rově diagramu

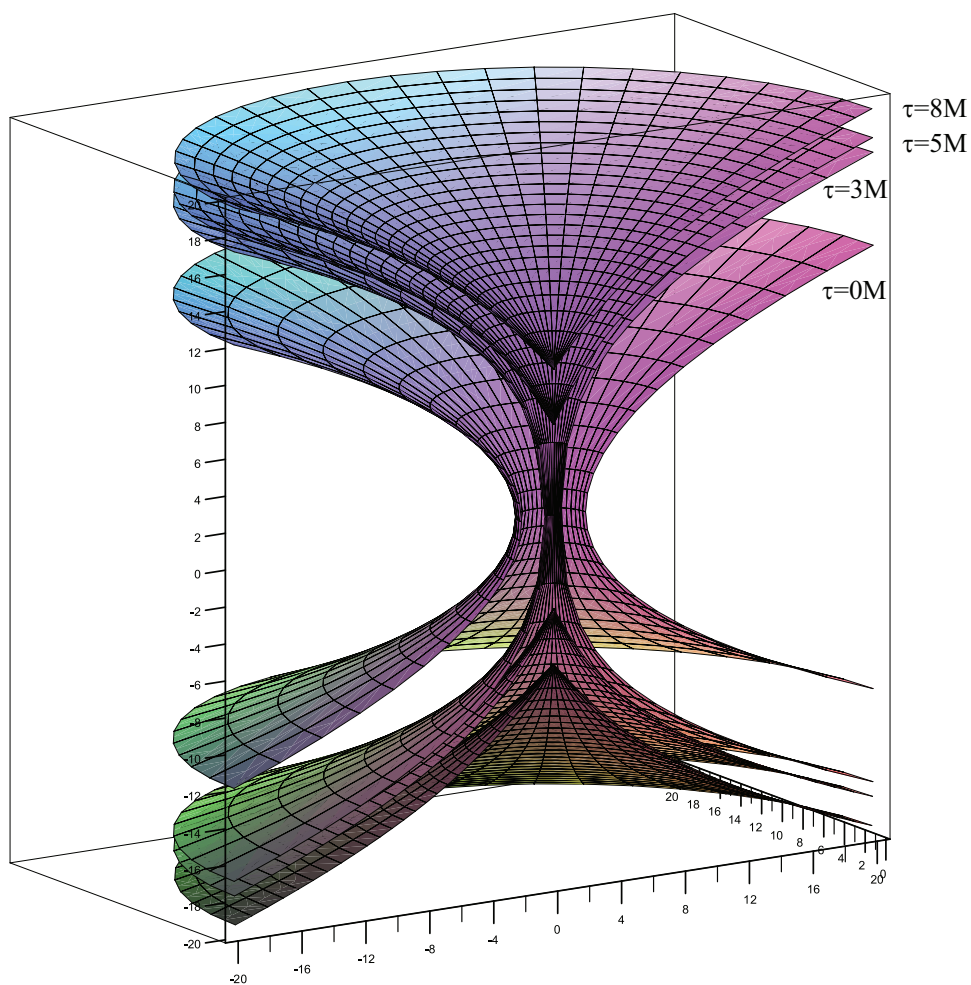
Z předchozích kapitol jsme vybaveni veškerými znalostmi, abychom mohli zobrazit Novikovovy souřadnice (řezy) v Kruskal-Szeke-rově diagramu, avšak vztahy vedoucí k vykreslení jsou velice dlouhé, a nemělo by význam si je zde vypisovat – bez ohledu na to, že by se nevešly ani na několik řádků. Tudíž si zde jen popíšeme, jak dospějeme ke konkrétním vztahům, o tom že tyto vztahy jsou velice dlouhé se můžeme přesvědčit při nahlédnutí do dodatku C.

Vyjdeme ze vztahů mezi Kruskal-Szeke-rovými a Schwarzschildovými souřadnicemi (4.8), (4.9), (4.12) a (4.13). Dále si vzpomeneme na vztahy (5.2), (5.3) a (5.4). Nyní do Kruskal-Szeke-rových souřadnic dosadíme za  $t$  a  $r$  parametrické vyjádření, čímž obdržíme Kruskal-Szeke-rové souřadnice jako funkce  $u = u(R^*, \eta)$  a  $v = v(R^*, \eta)$ , tím pro  $R^* = konst.$  dostáváme řezy v Kruskal-Szeke-rově diagramu jako parametrické křivky od parametru  $\eta$ .

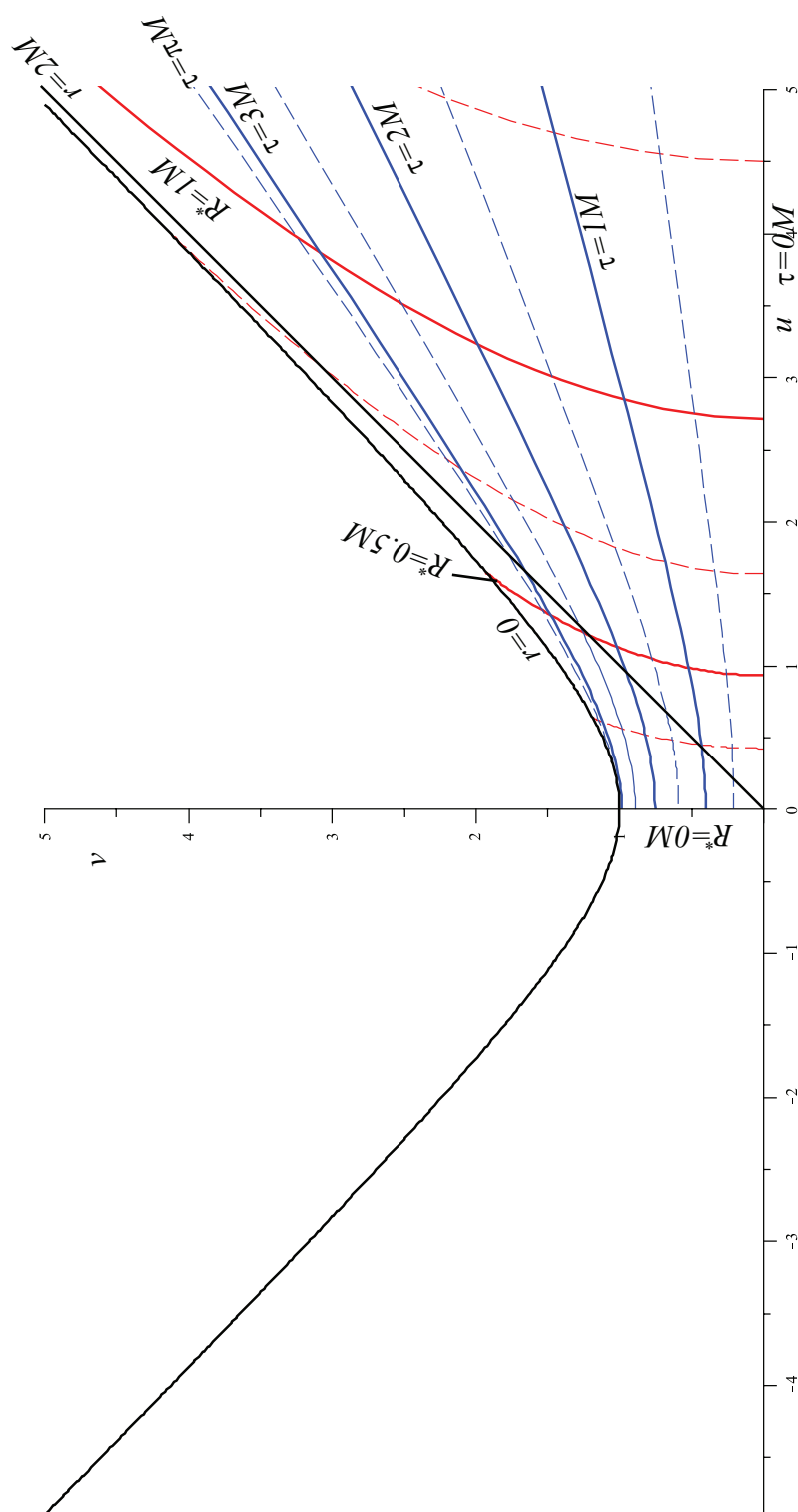
Pokud budeme chtít kreslit řezy  $\tau = konst.$ , pak použijeme již stávající funkce  $u = u(R^*, \eta)$  a  $v = v(R^*, \eta)$ , ze vztahu (5.3) si vyjádříme  $R^* = R^*(\tau, \eta)$  a dosadíme do Kruskal-Szeke-rových souřadnic, čímž obdržíme opět Kruskal-Szeke-rové souřadnice jako funkce  $u = u(\tau, \eta)$  a  $v = v(\tau, \eta)$ , a můžeme je opět vykreslit jako parametrické křivky parametru  $\eta$ .

V obou případech si však musíme uvědomit, že parametr  $\eta$  neprobíhá celý interval  $(-\pi, \pi)$ . Tím že máme Kruskal-Szeke-rové souřadnice definovány pro oblasit  $r > 2M$  nebo  $r < 2M$ , existuje pro každý řez  $\eta_0$ , který nám udává interval hodnot parametru  $\eta$ .

Grafické vynesení řezů je na obrázku 5.4.



Obrázek 5.3: Na tomto obrázku je vyneseno několik vnořených Novikovových diagramů. Pro  $\tau = 0M$  je vidět stejný průběh jako pro Schwarzschildův vnořený diagram, ale pro narůstající  $\tau$  se průběh začíná měnit, až v čase  $\tau = \pi M$ , se tento řez dotkne singularity (viz obrázek 5.1), kde se Einstein-Rosenův most stáhne do bodu a pro vzrůstající  $\tau$  se diagram *roztrhne* na dvě části.



Obrázek 5.4: Novikovovy souřadnice v Kruskal-Szekerově diagramu. Vykreslená je jen část z důvodů výpočetní náročnosti. Ostatní části si snadno domyslíme, protože se tyto řezy zobrazují symetricky, podobně jako Schwarzschildovy souřadnice.

# Kapitola 6

## Závěr

V této práci jsme se seznámili se Schwarzschildovým prostoročasem a jeho vlastnostmi. Začali jsme tím, že jsme prostudovali Schwarzschildovo řešení, s ním zavedli Schwarzschildovy souřadnice a prozkoumali jejich vlastnosti.

Dále jsme zavedli některé významné souřadné soustavy, a ukázali si motivaci k jejich zavádění, vztah k Schwarzschildovým souřadnicím a jejich vlastnosti.

V další části jsme zkoumali vlastnost Schwarzschildovy sféry  $r = 2M$  a ukázali si, že Schwarzschildova metrika zde kolabuje pouze z důvodu špatně zvolených souřadnic, což jsme snadno odstranili zavedením již výše zmíněných souřadných soustav.

Další kapitolu jsme věnovali kauzální struktuře Schwarzschildova prostoročasu, obzvláště v jiných souřadných systémech, což se příliš často nedělá v klasicky dostupné literatuře. Zde jsme si vyznačovali nulové geodetiky a sledovali deformace světelných kuželů. Pro všechny souřadné systémy svíraný úhel světelného kuželu se blížil k  $45^\circ$  se vzrůstající vzdáleností od  $r = 0$ .

Jako další část naší práce je zavedení Kruskal-Szekerových souřadnic a konstrukce tzv. Kruskal-Szekerova diagramu. V této části jsme si rozebrali vlastnosti a chování tohoto souřadného systému, a především jsme si znázornili některé význačné řezy skrze Kruskal-Szekerův diagram a vynesli je v Schwarzschildově diagramu, toto je opět část, která se v literatuře vyskytuje velmi zřídka. Součástí této kapitoli je i obrácená úloha, a to vynesení význačných řezů v ostatních souřadných soustavách do Kruskal-Szekerova diagramu.

Zavedením Kruskal-Szekerova diagramu jsme provedli úplnou analytickou extenzi Schwarzschildova prostoročasu, a objevili druhý asymptoticky

plochy prostoročas. Tento poznatek ukazuje, že ačkoli je Schwarzschildovo řešení nejstarší a nejjednodušší, tak ale obsahuje velice zajímavé chování časoprostoru.

V poslední části jsme zavedli významné Novikovovy souřadnice a studovali jejich chování a vztah k Schwarzschildovým a Kruskal-Szekerovým souřadnicím. Také jsme nakreslili vnořenou plochu pro řezy  $\tau = konst.$ , což je velmi netriviální nadplocha, navíc je dynamická a proto se odlišuje ode všech ostatních vnořených ploch v této práci. Na obrázku vnoření je vidět jak se zužuje Einstein-Rosenův most, až se zcela „zaškrtí“ a roztrhne na dvě části. Tento výsledek je velmi zajímavý a nelze ho nalézt v žádné klasické literatuře.

V této práci jsme se neseznamovali pouze se Schwarzschildovým prostoročasem, ale taktéž jsme se učili jak vizualizovat výsledky v prostředí **Maple** – kreslit vnořené plochy, implicitní a parametrické křivky, pracovat s tensory,... Některé kódy k kreslení určitých ploch nebo diagramů jsou přiloženy v dodatku C. Zde si může čtenář udělat představu jak takové diagramy vznikají, popřípadě začít sám podobné obrázky kreslit.

# Dodatek A

## Geometrized units

V obecné teorii relativity se obvykle pracuje s geometrizedými jednotkami. Při takto zaváděných jednotkách pokládáme Newtonovu gravitační konstantu  $G = 1$  a konstantu rychlosti světla také rovnou jedné –  $c = 1$ . Tak například Schwarzschildova metrika (2.4) má v klasických jednotkách tvar:

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2MG}{rc^2}\right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2MG}{rc^2}\right)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (\text{A.1})$$

Dále využíváme toho, že „geometrizedujeme“ veličiny které jinak jsou v jiných jednotkách než-li délkových. Například vztah mezi hmotnostmi v klasických kilogramech a geometrizedých metrech je:

$$M[m] = \frac{G}{c^2} M[kg] \quad (\text{A.2})$$

v takto zavedených jednotkách má pak Země hmotnost  $M_Z = 4,44 \cdot 10^{-3} m$  a Slunce  $M_S = 1,47 \cdot 10^3 m$ .



# Dodatek B

## Vnořené diagramy

Pro konstrukci vnořného diagramu budeme vycházet ze Schwarzschildovy metriky (2.4). Vnoření provádíme do našeho běžně vnímaného 3-D prostoru, jehož metrika má v cylindrických souřadnicích tvar:

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (\text{B.1})$$

Pro vnoření budeme fixovat souřadnice  $t = konst.$  a  $\theta = \pi/2$  (rovníkový řez), pak přejde metrika (2.4) na tvar:

$$ds^2 = \underbrace{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}}_{g_{rr}} dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (\text{B.2})$$

a přidáme požadavek vnoření:  $z = z(r)$ . Ve vztahu (B.1) nahradíme diferenciál  $z$  pomocí vztahu  $dz = (dz/dr)dr$  a dospějeme tak k formuli:

$$ds^2 = \left[1 + \left(\frac{dz(r)}{dr}\right)^2\right] dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (\text{B.3})$$

Porovnáním vztahů (B.3) a (B.2) dospějeme ke vztahu pro  $z$  jako:

$$z(r) = \int \sqrt{g_{rr} - 1} dr = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{r}{2m(r)} - 1}}, \quad (\text{B.4})$$

a tím můžeme vykreslit vnořenou plochu do 3-D prostoru. Poslední integrál–vnoření Schwarzschildova prostoru do Euklidovského prostoru – dá jako

výsledek výraz  $z^2(r) = 8M(r - 2M) + C$ , kde  $C$  je integrační konstanta, kterou klademe rovnou nule. V tomto okamžiku je jasné, že vnořená plocha na obrázcích (2.1) a (4.2) je částmi rotačních paraboloidů, což není na první pohled zcela zřejmé.

# Dodatek C

## Vybrané zdrojové kódy z programu Maple

Zde si uvedeme několik málo vybraných zdrojových kódů, abychom si udělali představu jak se kreslí řezy v programu Maple<sup>1</sup>. Pro ilustraci si zde uvedeme jeden jednodušší kód pro pochopení techniky a užitých metod, a druhý, složitější, pro ilustraci složitosti některých vykreslení některých řezů.

### C.1 Vnořené plochy

#### C.1.1 Schwarzschildovův vnořený diagram

Příkazem:

```
restart;  
with(plots):  
plot3d([r*cos(phi), r*sin(phi), sqrt(8*(r-2))], r = 2 .. 10,  
phi = 0 .. 2*Pi, grid = [20, 20]);
```

vykreslíme parametrickou 3-D plochu, kde  $x, y$  souřadnice jsou přepsány do souřadnic polárních a pro  $z$  souřadnici máme vztah (B.4), s tím, že naše

---

<sup>1</sup>Čtenáře neznalého příkazů tohoto programu odkazujeme na [18].

integrační meze jsou  $r = 2M$  až  $r$ , čili máme vztah<sup>2</sup>:

$$z(r) = \sqrt{8M(r - 2M)}.$$

### C.1.2 Vnořený Novikovův diagram

V případě vnoření Schwarzschildova diagramu byla situace celkem jednoduchá, proto zde uvedu pro srovnání ještě příkaz pro vnořenou plochu Novikovova diagramu. Je na první pohled jasné, že v tomto případě je situace značně složitější.

```
restart;
Digits:=14;
with(plots):
with(plottools):

emnov3d := proc (tau0)
  local rce1, rce2, a, sol1, vel, i, eta, Z, r, R0, Z0, MensiPi, UhelToceniGrafu;

  MensiPi:=3.1415;
  UhelToceniGrafu:=Pi;
  rce1 := diff(eta(R), R) = -3*R*(eta(R)+sin(eta(R)))/((R^2+1)*
    (1+cos(eta(R))));

  rce2 := diff(z(R), R) = 2+2*cos(eta(R))+3*sin(eta(R))*
    (eta(R)+sin(eta(R)))/(1+cos(eta(R)));

  a := fsolve(tau0=eta+sin(eta) , eta);
  if evalf( tau0<Pi ) then

    sol1 := dsolve({rce1, rce2, eta(0) = a, z(0) = 0}, {eta(R), z(R)},
      type = numeric);

    Z := (rho)->subs(sol1(rho), z(R));
```

---

<sup>2</sup>Ve formuli (B.4) je připuštěná i závislost hmotnosti na  $r$ , v našem případě máme řešení mimo těleso  $m(r) = M$ , a implicitně je v tomto řešení obažen předpoklad že celé těleso se nachází pod poloměrem  $r = 2M$ , jinak by spodní integrační mez byla od okraje tělesa.

```

r := (rho)->subs(sol1(rho), (R^2+1)*(1+cos(eta(R))));

plot3d(' [r(R)*cos(f), r(R)*sin(f), Z(R)] ', R=-3..3, f=0..UhelToceniGrafu,
        scaling=constrained);
else

R0 := evalf( sqrt( (tau0/Pi)^(2/3)-1 ) );
Z0 := evalf(tau0);
sol1 := dsolve({rce1, rce2, eta(R0) = MensiPi, z(R0) = Z0},
               {eta(R), z(R)}, type = numeric);

Z := (rho)->subs(sol1(rho), z(R));
r := (rho)->subs(sol1(rho), (R^2+1)*(1+cos(eta(R))));

display(plot3d(' [r(R)*cos(f), r(R)*sin(f), Z(R)] ', R=R0..3,
               f=0..UhelToceniGrafu, scaling=constrained),
        plot3d(' [r(R)*cos(f), r(R)*sin(f), -Z(R)] ', R=R0..3,
               f=0..UhelToceniGrafu, scaling=constrained));

fi;
end:
display( seq( emnov3d(i) , i=[0,3,5,8]));

```

## C.2 Řezy

### C.2.1 Řezy Schwarzschildovým diagramem v Kruskal-Szekerově diagramu

Zde uvádíme kód pro nakreslení Schwarzschildových souřadnic v Kruskal-Szekerově diagramu, takto byl kreslen obrázek 4.3. Kód je čitelný, poměrně krátký a srozumitelný.

```

restart;
with(plots):

schwarzschild := proc (radius, t, m, gr)

```

```

local velr, i, velt, smernice, gt1, gt2, g;

velr := nops(radius);

for i to velr do
g[i] := plots[implicitplot](x^2-y^2 = (radius[i]-2*m)*
    exp((1/2)*radius[i]/m), x = -10 .. 10, y = -10 .. 10,
    grid = gr, color = "black");
end do;

velt := nops(t);

smernice := seq(tanh((1/4)*t[i]/m), i = 1 .. velt);

for i to velt do
gt1[i] := plots[implicitplot](x-smernice[i]*y = 0,
    x = -10 .. 10, y = -10 .. 10, grid =gr, color = "blue");

gt2[i] := plots[implicitplot](smernice[i]*x-y = 0,
    x = -10 .. 10, y = -10 .. 10, grid = gr)
end do;

display([seq(gt1[i], i = 1 .. velt), seq(g[i], i = 1 .. velr),
    seq(gt2[i], i = 1 .. velt)]);

end proc:

```

### C.2.2 Řezy Novikovovým diagramem v Kruskal-Sze-kerově diagramu

Tento kód zde vložíme jen pro srovnání a ilustraci, že některé řezy nejdou nakreslit tak jednoduše jako tomu bylo v předešlém případě. Tento uvedený kód sloužil k sestrojení obrázku 5.4. Jak je vidět, tak oproti minulému případu je kód značně dlouhý a méně čitelný.

```

restart;
with(plots):
novik:=proc(R,tau,M,npoint)

```

```

local velt,velr, i, g1,g2,g3,g4,g5,mez:

    velr:=nops(R);

for i from 1 by 1 to velr do
    mez:= fsolve(((R[i])^(2)+1)*(1+cos(eta[0]))-2,eta[0]);
    g1[i]:=plot([sqrt(|1/2 (R[i]^(2)+1) (1+cos(eta))-1|)
        (e)^(1/4 (R[i]^(2)+1) (1+cos(eta)))
        cosh(1/4 (2 M ln(|(R[i]+tan(1/2 eta))/
        (R[i]-tan(1/2 eta))|))+2 M R[i] (eta+1/2 (R[i]^(2)+1)
        (eta+sin(eta))))/(M)),
        sqrt(|1/2 (R[i]^(2)+1) (1+cos(eta))-1|)
        (e)^(1/4 (R[i]^(2)+1) (1+cos(eta)))
        sinh(1/4 (2 M ln(|(R[i]+tan(1/2 eta))/
        (R[i]-tan(1/2 eta))|))+2 M R[i] (eta+1/2 (R[i]^(2)+1)
        (eta+sin(eta))))/(M)),eta=0..mez],
        0..5,0..5,numpoints=npoint);

    g2[i]:=plot([sqrt(|1/2 (R[i]^(2)+1) (1+cos(eta))-1|)
        (e)^(1/4 (R[i]^(2)+1) (1+cos(eta)))
        sinh(1/4 (2 M ln(|(R[i]+tan(1/2 eta))/
        (R[i]-tan(1/2 eta))|))+2 M R[i] (eta+1/2 (R[i]^(2)+1)
        (eta+sin(eta))))/(M)),
        sqrt(|1/2 (R[i]^(2)+1) (1+cos(eta))-1|)
        (e)^(1/4 (R[i]^(2)+1) (1+cos(eta)))
        cosh(1/4 (2 M ln(|(R[i]+tan(1/2 eta))/
        (R[i]-tan(1/2 eta))|))+2 M R[i] (eta+1/2 (R[i]^(2)+1)
        (eta+sin(eta))))/(M)),eta=mez..Pi],
        0..5,0..5,numpoints=npoint);
    end do;

    velt:=nops(tau);

    for i from 1 by 1 to velt do
        mez:=fsolve(((2)/(1+cos(eta)))^(3/2))*(eta+sin(eta))-tau[i],eta);
    g3[i]:=plot([sqrt(|1/2 ((tau[i])/(eta+sin(eta)))^(2/3)*(1+cos(eta))-1|)

```

```

(e)^(1/4 ((tau[i])/(eta+sin(eta)))^(2/3) (1+cos(eta)))
cosh(1/4 (2 M ln(|sqrt(((tau[i])/(eta+sin(eta)))^(2/3)-1)+
tan(1/2 eta))/sqrt(((tau[i])/(eta+sin(eta)))^(2/3)-1)-
tan(1/2 eta))|)+2 M sqrt(((tau[i])/(eta+sin(eta)))^(2/3)-1)
(eta+1/2 ((tau[i])/(eta+sin(eta)))^(2/3) (eta+sin(eta))))/(M)),
sqrt(|1/2 ((tau[i])/(eta+sin(eta)))^(2/3) (1+cos(eta))-1|)
(e)^(1/4 ((tau[i])/(eta+sin(eta)))^(2/3) (1+cos(eta)))
sinh(1/4 (2 M ln(|sqrt(((tau[i])/(eta+sin(eta)))^(2/3)-1)+
tan(1/2 eta))/sqrt(((tau[i])/(eta+sin(eta)))^(2/3)-1)-
tan(1/2 eta))|)+2 M sqrt(((tau[i])/(eta+sin(eta)))^(2/3)-1)
(eta+1/2 ((tau[i])/(eta+sin(eta)))^(2/3)
(eta+sin(eta))))/(M)),eta=-mez..mez],
0..5,0..5,colour=blue,numpoints=npoint) ;

g4[i]:=plot([sqrt(|1/2 ((tau[i])/(eta+sin(eta)))^(2/3) (1+cos(eta))-1|)
(e)^(1/4 ((tau[i])/(eta+sin(eta)))^(2/3) (1+cos(eta)))
sinh(1/4 (2 M ln(|sqrt(((tau[i])/(eta+sin(eta)))^(2/3)-1)+
tan(1/2 eta))/sqrt(((tau[i])/(eta+sin(eta)))^(2/3)-1)-
tan(1/2 eta))|)+2 M sqrt(((tau[i])/(eta+sin(eta)))^(2/3)-1)
(eta+1/2 ((tau[i])/(eta+sin(eta)))^(2/3) (eta+sin(eta))))/(M)),
sqrt(|1/2 ((tau[i])/(eta+sin(eta)))^(2/3) (1+cos(eta))-1|)
(e)^(1/4 ((tau[i])/(eta+sin(eta)))^(2/3) (1+cos(eta)))
cosh(1/4 (2 M ln(|sqrt(((tau[i])/(eta+sin(eta)))^(2/3)-1)+
tan(1/2 eta))/sqrt(((tau[i])/(eta+sin(eta)))^(2/3)-1)-
tan(1/2 eta))|)+2 M sqrt(((tau[i])/(eta+sin(eta)))^(2/3)-1)
(eta+1/2 ((tau[i])/(eta+sin(eta)))^(2/3)
(eta+sin(eta))))/(M)),eta=mez..Pi],
0..5,0..5,colour=blue,numpoints=npoint);
end do;

g5:=plots[implicitplot](u^(2)-v^(2)=1,v=0..5,u=0..5,
colour=black,grid=[300,300],thickness=2);

display(seq(g1[i],i=1..velr),seq(g2[i],i=1..velr),
seq(g3[i],i=1..velt),seq(g4[i],i=1..velt),g5);
end proc:

```



## Dodatek D

# Výpočet Kretschmannova invariantu za pomocí programu Maple

Pro jeho výpočet v prostředí Maple použijeme balíček `tensor`.

### D.1 Kretschmannův invariant pro Schwarzschildovu metriku

Nejprve si zadefinujeme metrický tenzor a k němu inverzní sekvencí příkazů:

```
>restart;
  with(tensor)
  coord := [t, r, theta, phi];
> g[compts] := array(symmetric, sparse, 1 .. 4, 1 .. 4);
> g[compts][1, 1] := -1+2*M/r;
> g[compts][2, 2] := 1/(1-2*M/r);
> g[compts][3, 3] := r^2;
> g[compts][4, 4] := r^2*sin(theta)^2;
> g := create([-1, -1], eval(g[compts]));
> ginv := invert(g, 'detg');
```

Dále si spočteme první a druhé parciální derivace komponent kovariantního metrického tenzoru a necháme si spočíst Christofflův symbol prvního druhu. Tím již máme vše k spočtení Riemannova tenzoru. Opět následuje sekvence příkazů:

```

> D1g := d1metric(g, coord);
> D2g := d2metric(D1g, coord);
> Cf1 := Christoffel1(D1g);
> RMN := Riemann(ginv, D2g, Cf1);

```

Program nám takto spočte čtyři krát kovariantní Riemannův tensor, takže zvedneme čtyřikrát index:

```

> pr := prod(RMN, ginv, [1, 1]);
> pr := prod(pr, ginv, [1, 1]);
> pr := prod(pr, ginv, [1, 1]);
> RMNhore := prod(pr, ginv, [1, 1]);

```

a následně vysčítáme přes všechny indexy:

```
prod(RMNhore, RMN, [1, 1], [2, 2], [3, 3], [4, 4]).
```

Výstupem je Kreschmannův invariant. Pro Schwarzschildovu metriku je roven:

$$K = \frac{48M^2}{r^6}. \quad (\text{D.1})$$

## D.2 Kreschmannův invariant pro isotropní metriku

Postup výpočtu je totožný jako výše uvedený, tudíž uvedeme jen zdrojový kód a výsledek.

```

> restart;
with(tensor);
> coord := [t, rho, theta, phi];
> g[compts] := array(symmetric, sparse, 1 .. 4, 1 .. 4);
> g[compts][1, 1] := -(1-M/(2*rho))^2/(1+M/(2*rho))^2;
> g[compts][2, 2] := (1+M/(2*rho))^4;
> g[compts][3, 3] := (1+M/(2*rho))^4*rho^2;
> g[compts][4, 4] := (1+M/(2*rho))^4*rho^2*sin(theta)^2;
> g := create([-1, -1], eval(g[compts]));
> ginv := invert(g, 'detg');
> D1g := d1metric(g, coord);
> D2g := d2metric(D1g, coord);

```

```

> Cf1 := Christoffel1(D1g);
RMN := Riemann(ginv, D2g, Cf1)
> pr := prod(RMN, ginv, [1, 1]);
> pr := prod(pr, ginv, [1, 1]);
> pr := prod(pr, ginv, [1, 1]);
> RMNhore := prod(pr, ginv, [1, 1]);
> prod(RMNhore, RMN, [1, 1], [2, 2], [3, 3], [4, 4]);

```

Výsledný Kretschmannův invariant je:

$$K = \frac{196608M^2\rho^6}{(2\rho + M)^{12}}. \quad (\text{D.2})$$

# Literatura

- [1] Einstein A.: *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Annalen der Physik, folge. 17, 1905, 891–921.
- [2] Misner Ch. W., Thorne K. S., Wheeler J. A.: *Gravitation*, San Francisco: W. H. Freeman and company, 1973, 1304 s.
- [3] URL: <http://www.bun.kyoto-u.ac.jp/~suchii/schwarzschild.html>
- [4] Dvořák L.: *Obecná teorie relativity a moderní fyzikální obraz vesmíru*, skriptum SPN, Praha, 1984
- [5] Novikov I.D., Frolov V.P.: *Black Hole Physics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998
- [6] Ullmann V.: *Gravitace, černé díry a fyzika prostoročasu*, Čs. Astronomická spol. ČSAV, Ostrava-Praha, 1987
- [7] Landau L. D., Lifshitz E. M., *The Classical Theory of Fields*, Volume 2., Pergamon, Oxford, 1975
- [8] Wald R.M.: *General Relativity*, University of Chicago Press, Chicago, 1984
- [9] Eddington A. S.: *Nature 113 (2832)*, 1924, 192
- [10] Finkelstein D.: *Phys. Rev. 110*, 1958, 965
- [11] Kruskal M. D.: *Phys. Rev. 119*, 1960, 1743
- [12] Szekeres G.: *Publ. Math. Debrecen 7*, 1960, 285
- [13] URL: <http://io.uwinnipeg.ca/~vincent/4500.6-001/Cosmology/IsotropicCoordinates.htm>

- [14] Překlad Schwarzschildova dopisu A. Einsteinovi, arXiv: physics/9905030v1
- [15] Fronsdal D., *Phys. Rev.* 116, 1959, 778
- [16] Lemaitre G., *Ann. Soc. Sci. Bruxelles A* 53, 1933, 51
- [17] Novikov I.D., *Ph.D. thesis*, Shternberg Astronomical Institute, Moscow, 1963
- [18] *Maple Learning Guide*, Waterloo Maple Inc., Springer-Verlag, 1996