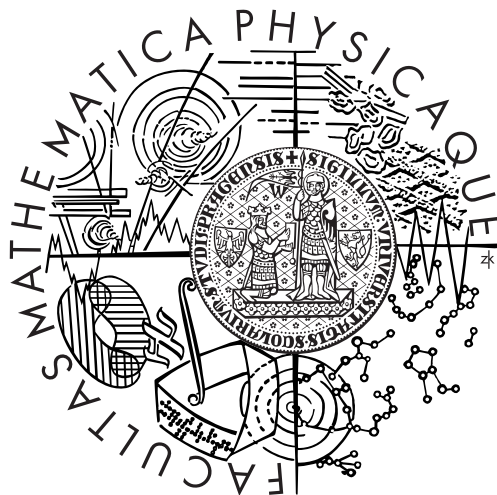


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Lada Vybulková

Kritické chování gravitačního kolapsu

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Tomáš Ledvinka, Ph.D.

Studijní program: obecná fyzika

2008

Ráda bych poděkovala vedoucímu své práce za ochotu a trpělivost při vysvětlování složitých problémů, za jeho nadšení pro vědu, které mě motivovalo k práci, za jeho obětavost, s nímž mi radil a pomáhal s problémy, a za poskytnutou literaturu.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 28.5.2008

Lada Vybulková

Obsah

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Úvod | 7 |
| 1.1 | Gravitační kolaps a hmota černých děr | 7 |
| 1.2 | Choptuikovy objevy | 7 |
| 1.3 | Význam zkoumání nehmotného sféricky symetrického skalárního pole pro kosmickou cenzuru | 8 |
| 1.4 | Řešení polních rovnic jako křivka ve fázovém prostoru | 10 |
| 1.5 | Diskrétní soběpodobnost kritického řešení | 10 |
| 2 | Variační formulace polních rovnic | 12 |
| 2.1 | Hilbertův variační princip | 12 |
| 2.1.1 | Jak získat L_{geom} | 12 |
| 2.1.2 | Od Hilbertova variačního principu k Einsteinovým rovnicím 13 | |
| 2.1.3 | Princip obecné kovariance a Bianchiho identity | 14 |
| 2.2 | Variační odvození tenzoru energie a hybnosti skalárního pole | 15 |
| 3 | Popis kolabujícího prostoročasu | 16 |
| 3.1 | Metrika a sférická symetrie - statické versus dynamické gravitační pole | 16 |
| 3.2 | Schwarzschildova metrika - statické řešení Einsteinových rovnic | 17 |
| 4 | Formulace úlohy kolabujícího prostoročasu | 19 |
| 4.1 | Model hmoty a rovnice hmoty aneb proč skalární pole | 19 |
| 4.2 | Choptuikovy rovnice | 20 |
| 4.3 | Role počátečních dat | 21 |
| 4.4 | Vlnová rovnice na křivém pozadí a rovnice kolabujícího prostoročasu | 22 |
| 5 | Numerické metody | 24 |
| 5.1 | Metoda konečných diferencí | 24 |
| 5.2 | Metoda čar | 26 |
| 5.3 | Konvergence | 26 |
| 6 | Numerická realizace | 29 |
| 6.1 | Popis užití numerických metod | 29 |
| 6.2 | Zvolená počáteční a okrajová data | 30 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 6.3 | Ilustrace konvergence užitého numerického schématu | 33 |
| 7 | Výsledky numerické evoluce | 34 |
| 7.1 | Několik úvah, nutných k interpretaci numerických výsledků . | 34 |
| 7.2 | Pohled na kolabující prostoročas aneb vnoření | 35 |
| 7.3 | Grafické výstupy a jejich interpretace | 36 |
| 7.4 | Závěry | 36 |
| 8 | Přílohy | 47 |
| 8.1 | Příloha č.1 - skript pro výpočet nenulových $G_{\mu\nu}$ v programu Maple | 47 |
| 8.2 | Příloha č.2 - kód programu collapse3.cpp | 48 |
| | Literatura | 56 |

Název práce: Kritické chování gravitačního kolapsu
Autor: Lada Vybulková
Katedra (ústav): Ústav teoretické fyziky
Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Tomáš Ledvinka, Ph.D.
e-mail vedoucího: ledvinka@mbox.troja.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme gravitační kolaps nehmotného reálného sféricky symetrického skalárního pole. Popíšeme kritické chování tohoto kolapsu, především závislost hmotnosti vzniklé černé díry na volbě počátečních dat, objev kritického exponentu, kritické řešení a jeho diskrétní soběpodobnost. Diskutujeme význam objevu kritického chování ve vztahu k hypotéze kosmické cenzury. Odvodíme Einsteinovy rovnice a rovnici hmoty pomocí Hilbertova variačního principu, což následně použijeme k odvození příslušných rovnic nehmotného skalárního pole. Dále odvodíme tvar metriky pro sféricky symetrické dynamické gravitační pole. Formulujeme úlohu kolabujícího prostoročasu jako soustavu čtyř kvazilineárních parciálních diferenciálních rovnic a diskutujeme roli počátečních a okrajových podmínek. Popíšeme numerické metody používané k evoluci takovýchto rovnic, poté představíme a rozebereme použité numerické schéma, ilustrujeme jeho konvergenci a zdůvodníme volbu počátečních a okrajových dat. Představíme a interpretujeme získané výsledky numerické evoluce zvolených počátečních dat.

Klíčová slova: gravitační kolaps, skalární pole, numerické metody

Title: Critical behaviour of gravitational collapse
Author: Lada Vybulková
Department: Institute of theoretical physics
Supervisor: Mgr. Tomáš Ledvinka, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: ledvinka@mbox.troja.mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we study gravitational collapse of massless real scalar field minimally coupled to general relativity in spherical symmetry. We describe critical behaviour of this collapse, especially power-law scaling of the black hole mass and discretely self-similarity of critical solution. We discuss relation between discovery of critical behaviour and the cosmic censorship conjecture. We derive Einstein equations and equation of mass using the Hilbert variational principle and we use it for deriving these equations for massless scalar field. Then we derive metric tensor for dynamical gravitational field in spherical symmetry. We formulate problem as system of four quasilinear partial differential equations and we discuss the role of initial and boundary data. We described numerical methods. We introduce and analyse applied numerical scheme and illustrate its convergence and give reasons for choice of initial and boundary data. We introduce and interpret

obtained results of numerical evolution of chosen initial data.

Keywords: gravitational collapse, scalar field, numerical methods

Kapitola 1

Úvod

1.1 Gravitační kolaps a hmota černých děr

Gravitační kolaps je *proces zrodu černé díry*.

Ve sféricky symetrickém prostoročase, kde uvažujeme rozložení hmoty prostorově omezené - hvězdu, se černá díra zrodí smrtí hvězdy, má-li tato potřebně velkou hmotnost. Tedy hmotnost takto vzniklé černé díry je zdola omezená. Umírající hvězda představuje téměř stacionární počáteční stav [4], protože na počátku gravitačního kolapsu není gravitační pole příliš dynamické. Zaměříme se na obecnější rozložení hmoty (bez důrazu na jeho astrofyzikální význam) a uvažujeme dynamický prostoročas (nestacionární počáteční data [4]). Lze za těchto předpokladů vytvořit libovolně malou černou díru? Jak bude záviset hmotnost vzniklé černé díry na počátečních datech? D. Christodoulou studoval tento problém analyticky a formuloval několik otázek, na něž by odpověď dala numerická analýza:

Uvažujme skupinu hladkých počátečních dat závislých na jednom parametru p , které v nekonečnu zachovají plochý prostoročas, takových, že pro velká p černá díra vznikne a pro malá p ne. Pokud lze bisekcí dojít ke kritické hodnotě parametru p_* přesně na hranici vzniku černé díry, bude mít díra konečnou hmotnost nebo nekonečně malou ?

První, kdo se z tohoto pohledu zabýval problematikou gravitačního kolapsu numericky, byl Matthew W. Choptuik, který v roce 1992 publikoval článek [8] s prvními výsledky svého zkoumání.

1.2 Choptuikovy objevy

Choptuik zvolil co nejjednodušší nastavení problému [4] – *sférickou symetrii* a model hmoty, který nevede k stabilnímu stacionárnímu řešení – *nehmotné skalární pole*. Takto zadanou úlohu řešil numericky pro různé jednoparametrické rodiny počátečních dat, dle úvah D.Christodouloua.

D.Christodoulou ukázal [4], že pro sféricky symetrické skalární pole s dostatečně slabými počátečními daty (dostatečně malými hodnotami parametru p) se systém vyvíjí k plochému prostoročasu – hmota se rozplyne, a pro dostatečně silná počáteční data evoluce vyvrcholí zrodem černé díry. Nebylo však jasné, jestli jsou tyto dva výsledky jediné možné, nebo jestli existuje ještě jiný koncový stav vývoje v závislosti na volbě parametru p .

M.W. Choptuik numerickou analýzou nezjistil žádné omezení hmotnosti vznikající černé díry, naopak podařilo se mu objevit neočekávané výsledky: Pro p blízké p_* nastává **kritické chování** [4] [5]:

- Blízko prahu zrodu ČD se tvoří ČD s libovolně malou hmotou v závislosti na parametru p :

$$M \propto (p - p_*)^\gamma \quad (1.1)$$

kde ČD vzniká pro $p > p_*$

- *Kritický exponent* γ je stejný pro všechna počáteční data - nezávisí na konkrétní rodině jednoparametrických počátečních dat. Liší se v závislosti na užitém modelu hmoty, avšak pro všechny zatím zkoumané modely hmoty má γ neceločíselnou hodnotu.
- Řešení polních rovnic se nezávisle na tom odkud se blíží p k p_* (při jejich dostatečně malé vzdálenosti) vyvíjejí po relativně dlouhou dobu velmi podobným způsobem - blíží se ke *kritickému řešení*.
- Kritické řešení vykazuje *diskrétní soběpodobnost* - zvláštní symetrii: je periodické v logaritmu prostoročasové škály, konkrétně pro nehmotné skalární pole se řešení polních rovnic podobá samo sobě na $(\Delta \cong 3, 44)$ krát větší škále.

M.W.Choptuik objevil kritické chování pro nehmotné skalární pole coby model hmoty, následovala řada dalších dokladů kritického chování pro další modely hmoty ve sférické symetrii a několik případů v axiální symetrii [5].

1.3 Význam zkoumání nehmotného sféricky symetrického skalárního pole pro kosmickou cenzuru

Jak dopadne evoluce počátečních dat pro $p = p_*$? Mohl by to být další koncový stav evoluce - kvalitativně jiný než černá díra nebo plochý prostoročas ? Christodoulou dokázal [14], že existují asymptoticky plochá počáteční data, jejichž evoluce skončí *nahou singularitou*, tj.: singularitou, která není skrytá pod horizontem a může být viděna vnějším pozorovatelem [2]. Choptuik zkoumal kritické řešení primárně kvůli *hypotéze kosmické cenzury* [13]:

Hypotéza slabé kosmické cenzury: Fyzikálně realistický gravitační kolaps vždy skončí zrodem černé díry. (Tedy žádné nahé singularity nemohou vzniknout gravitačním kolapsem fyzikálně reálných modelů hmot.)

Hypotéza silné kosmické cenzury: Všechny singularity, které se vyskytují ve fyzikálně přípustných prostoročasech musí mít prostorupodobný nebo nulový charakter, tedy vzdálený pozorovatel nemůže singularitu vidět (v určitém smyslu).

Základní otázka spojená s hypotézou silné kosmické cenzury je *determinismus*. Zákony klasické (nekvantové) fyziky jsou formulovány ve formě diferenciálních rovnic, jejichž řešení je jednoznačně určeno zadáním vhodných dat v počátečním čase [13]. Výskyt singularit v obecné teorii relativity situaci komplikuje - pokud by byla vytvořena časupodobná singularita, pak by řešení diferenciálních rovnic v oblasti, kde je singularita vidět, už nemuselo být jednoznačně určeno zadáním příslušných dat. Pokud platí hypotéza silné kosmické cenzury, tak i za přítomnosti singularit se v Obecné teorii relativity zachová deterministická povaha fyzikálních zákonů.

Hypotéza slabé kosmické cenzury se dá přeformulovat [13]:

Uvažujme asymptoticky plochá počáteční data na prostorupodobné nadploše pro Einsteinovy rovnice s vhodným rozložením hmoty. Pak největší oblast prostoročasu, která je jednoznačně určena danými počátečními daty je téměř vždy asymptoticky plochá.

Ve formulaci výše jsou nejasná dvě slova: vhodná hmota a téměř vždy. *Vhodná hmota je taková, pro kterou vývoj jí příslušných pohybových rovnic v pevně daném nesingulárním asymptoticky plochém prostoročase vyústí v globálně nesingulární řešení** [13]. Téměř vždy znamená, že množina počátečních dat, která se vyvine v nahé singularity je velmi malá - množina míry nula (malá z hlediska teorie míry), nebo řídká množina (její uzávěr má prázdný vnitřek). Platnost hypotéz kosmické cenzury závisí na vlastnostech řešení Einsteinových rovnic, systému nelineárních parciálních diferenciálních rovnic, o jejichž řešeních (a jejich obecných vlastnostech) toho stále mnoho nevíme. Je však možné analyzovat již nalezená řešení [13].

Do roku 1993 bylo známo mnoho o *Ideální tekutině* coby modelu hmoty: Ideální tekutina je popsána hustotou energie a 4-rychlostí v každém prostoročasovém bodě v tekutině a tlakem. Proto je možné zadáním vhodných počátečních dat koncentrovat konečné množství hmoty do objemu $V = 0$ [13]. Takovéto chování u fyzikálně realistických modelů hmoty neočekáváme. Navíc existují řešení ER pro ideální tekutinu s rázovými vlnami. Tento model umožňuje vznik nahých singularit, ale nespĺňuje *, tedy není vhodným modelem hmoty.

V roce 1993 Christodoulou ukázal, že mezi řešeními Einsteinových rovnic

se sféricky symetrickým skalárním polem coby zdrojem se vyskytují nahé singularity [13]. Skalární pole splňuje mnohé požadavky, které by fyzikálně realistická hmota měla splňovat. A Christodoulou také ukázal, že nahé singularity tvoří množinu míry nula ve třídě řešení Einsteinových rovnic s tímto modelem hmoty.

1.4 Řešení polních rovnic jako křivka ve fázovém prostoru

Uvažujme náš problém coby nekonečně dimenzionální fázový prostor, jehož body jsou množiny počátečních dat (pro $g_{\mu\nu}$ a vhodné funkce reprezentující model hmoty)[5] (tento prostor se nazývá fázový, protože každý jeho bod plně určuje jistý stav, podobně jako ve statistické fyzice) Potom řešení polních rovnic příslušné ke konkrétním počátečním podmínkám tvoří křivku ve fázovém prostoru, jejíž parametr je čas (nultá souřadnice). Izolovaný systém (prostorčas) může svůj časový vývoj ukončit v kvalitativně různých statických stavech. V závislosti počátečních dat na parametru p skončí vývoj nehmotného sféricky symetrického skalárního pole jedním ze dvou odlišných stabilních stavů – černou dírou vzniklou kolapsem, či plochým prostorčasem po rozptýlení hmoty a energie do nekonečna. Fázový prostor lze tedy na základě těchto dvou koncových stavů rozdělit na dvě poloviny. Hranici mezi nimi tvoří tzv. *kritická nadplocha*, množina počátečních dat, kde $p = p^*$. Křivka ve fázovém prostoru, která začíná na kritické nadploše, ji neopustí [5], proto je kritická nadplocha také fázovým prostorem o jednu dimenzi menším než celý prostor. Pokud zde existuje stabilní bod - stav, ke kterému se všechny křivky (evoluce) blíží, nazveme ho kritickým bodem (řešením). Je to atraktor kodimenze 1 v celém prostoru [4] (vývoj téměř kritických počátečních dat se bude po dlouhou dobu blížit ke kritickému řešení).

1.5 Diskrétní soběpodobnost kritického řešení

V newtonovské fyzice je řešení pohybových $Z(\vec{x}, t)$ rovnic soběpodobné (nezávislé na přeškálování), pokud platí [6]:

$$Z(\vec{x}, t) = Z\left(\frac{\vec{x}}{f(t)}\right) \quad (1.2)$$

kde $f(t) \neq 0, \forall t \geq 0$ To znamená, že při změně škály se tvar řešení nezmění, je skutečně podobné samo sobě.

V obecné teorii relativity je situace komplikovanější kvůli provázanosti polních proměnných s metrickými koeficienty. Diskrétní soběpodobnost je

symetrie, kde existuje difeomorfismus ϕ a konstanta Δ , že metrický tenzor splňuje [4]:

$$(\phi_*)^n g_{\mu\nu} = e^{2n\Delta} g_{\mu\nu} \quad (1.3)$$

kde ϕ_* je pull-back ϕ .

Aby byl charakter tohoto chování lépe vidět, zavedeme souřadnice (τ, x^α) , ve kterých předchozí rovnost přejde na [4]

$$g_{\mu\nu}(\tau, x^\alpha) = e^{2\tau} \tilde{g}_{\mu\nu}(\tau, x^\alpha), \quad (1.4)$$

kde

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\tau, x^\alpha) = \tilde{g}_{\mu\nu}(\tau + \Delta, x^\alpha) \quad (1.5)$$

Zde τ je logaritmus prostoročasové škály [4].

Nehmotné skalární pole $\phi(\tau, x^i)$ se v této symetrii obvykle hledá ve tvaru [6]

$$\phi(\tau, x^i) = f(\tau, x^i) + k\tau, \quad (1.6)$$

kde $f(\tau, x^i) = f(\tau + \Delta, x^i)$. Chopuik zvolil $k = 0$ z neznámých důvodů [6]. Na základě předpokladu diskrétní soběpodobnosti byla numericky nalezena kritická řešení pro několik modelů hmoty.

Kapitola 2

Variační formulace polních rovnic

2.1 Hilbertův variační princip

Variační formulace obecné fyzikální teorie se redukuje na nalezení akce, pro níž je Variační princip:

$$\delta S = 0 \quad (2.1)$$

ekvivalentní s pohybovými rovnicemi dané fyzikální teorie, nebo je alespoň nutnou podmínkou splnění pohybových rovnic.

Hilbertův variační princip [10]:

$$S = \int \mathcal{L} d^4x = \int (-g)^{\frac{1}{2}} L d^4x = \text{extrem} \quad (2.2)$$

Lagrangeova funkce L (resp. její hustota $\mathcal{L} = (-g)^{\frac{1}{2}} L$) se dá rozložit na dvě části - L_{geom} odpovídá prázdnému zakřivenému prostoročasu popsanému metrikou $g_{\mu\nu}$, $g = \sqrt{g_{\mu\nu}}$ (v případě, že není přítomna žádná hmota ani pole, redukuje se L jen na L_{geom}), druhá část L_{pole} reprezentuje pole.

$$L = L_{geom} + L_{pole} \quad (2.3)$$

Ukáže se, že variace polní části Lagrangiánu dle metrického tenzoru je výhodná cesta k odvození tenzoru energie a hybnosti [10].

2.1.1 Jak získat L_{geom}

Požadujeme, aby L_{geom} byla skalární funkce nezávislá na volbě $g_{\mu\nu}$ (dále skalární invariant), reprezentující křivost prostoročasu. Volbou souřadnic lze

vždy zařídít, aby v okolí daného bodu vymizely první derivace složek metrického tenzoru. Proto neexistují skalární invarianty vytvořené jen z metrického tenzoru a jeho prvních derivací [10]. To je rozdíl oproti variačnímu principu v mechanice, kde se objevují nejvýše první derivace souřadnice a zobecněné hybnosti. Uvažujeme tedy skalární invarianty závislé na druhých derivacích metrického tenzoru.

Kovariantní objekt, který popisuje geometrii prostoročasu a závisí na druhých derivacích metrického tenzoru je **Riemannův tenzor**:

$$V_{;\mu\nu}^{\alpha} - V_{;\nu\mu}^{\alpha} = -R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} V^{\beta} \quad (2.4)$$

Jeho definice pomocí afinní konexe má tvar:

$$R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\beta\mu,\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\nu,\mu}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\mu}^{\rho} \Gamma_{\rho\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\nu}^{\rho} \Gamma_{\rho\mu}^{\alpha} \quad (2.5)$$

Přičemž afinní konexe a metrický tenzor souvisí vztahem:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} (-g_{\beta\gamma,\rho} + g_{\rho\alpha,\beta} + g_{\beta\rho,\alpha}) \quad (2.6)$$

Z Riemannova tenzoru lze získat 14 nezávislých skalárních invariantů, nezávislých na lokálních rysech zakřivení prostoročasu [10]. Z těchto 14 možností však jen jedna dává invariant, jenž je lineární v druhých derivacích metrického tenzoru, je jím **Skalární křivost**, definovaná pomocí Ricciho tenzoru $R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\lambda\beta}^{\lambda}$:

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \quad (2.7)$$

V roce 1915 publikoval David Hilbert vyjádření L_{geom} [10]

$$L_{geom} = \frac{1}{16\pi} R, \quad (2.8)$$

které umožnilo formulovat Variační princip gravitačního zákona s matematicky nejjednodušší možnou definicí akce. (Zde je užita geometrická soustava jednotek, při přechodu k soustavě SI přejde $\frac{1}{16\pi}$ v $\frac{c^3}{16\pi G}$)

2.1.2 Od Hilbertova variačního principu k Einsteinovým rovnicím

S definicí (2.8) přepíšeme (2.1):

$$\delta S = \frac{1}{16\pi} \int \delta [g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} (-g)^{\frac{1}{2}}] d^4x + \int \delta [L_{pole} (-g)^{\frac{1}{2}}] d^4x \quad (2.9)$$

Předpokládáme, že L_{pole} nezávisí na derivacích $g^{\alpha\beta}$. Tento vztah přepíšeme pomocí

$$\delta(-g)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}(-g)^{\frac{1}{2}} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (2.10)$$

a dostaneme

$$\delta S = \frac{1}{16\pi} \int \left[\left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R \right) \delta g^{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} \right] (-g)^{\frac{1}{2}} d^4 x \quad (2.11)$$

$$+ \int \left(\frac{\partial L_{pole}}{\partial g^{\alpha\beta}} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} L_{pole} \right) (-g)^{\frac{1}{2}} \delta g^{\alpha\beta} d^4 x = 0 \quad (2.12)$$

Z vlastností metrického tenzoru a složek afinní konexe se dá ukázat [10], že v rovnici (2.14) vymizí člen

$$\int g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} (-g)^{\frac{1}{2}} d^4 x. \quad (2.13)$$

Tedy dostáváme Hilbertův variační princip ve tvaru

$$\delta S = \int \left[\frac{1}{16\pi} \left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R \right) + \left(\frac{\partial L_{pole}}{\partial g^{\alpha\beta}} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} L_{pole} \right) \right] (-g)^{\frac{1}{2}} \delta g^{\alpha\beta} d^4 x = 0 \quad (2.14)$$

A toto požadujeme nezávisle na volbě $g^{\alpha\beta}$, proto musí být integrand roven 0. Dostáváme tedy gravitační zákon ve tvaru:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi \left(g^{\alpha\beta} L_{pole} - 2 \frac{\partial L_{pole}}{\partial g^{\alpha\beta}} \right) \quad (2.15)$$

Člen na pravé straně reprezentuje zdroje pole. Zdrojem gravitačního pole je hmota (resp. energie), proto tento člen musí vyjadřovat rozložení hmoty a energie v prostoročase. Zavedeme proto **tenzor energie a hybnosti** vztahem [10]:

$$T_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} L_{pole} - 2 \frac{\partial L_{pole}}{\partial g^{\alpha\beta}} \quad (2.16)$$

Použijeme-li toto vyjádření v (2.15) obdržíme **Einsteinův gravitační zákon**:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (2.17)$$

2.1.3 Princip obecné kovariance a Bianchiho identity

Akce S coby integrál z hustoty Lagrangiánu je skalární invariant, nezávisí na volbě souřadnic, to platí i odděleně pro obě její části (S_{geom}, S_{pole}) [10]. Jestliže $x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}$ je infinitezimální změna souřadnic, pak lze δS_{geom} psát [10]:

$$\delta S_{geom} = \delta \int L_{geom} (-g)^{\frac{1}{2}} d^4 x = -\frac{1}{8\pi} \int G_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} \xi^{\alpha} (-g)^{\frac{1}{2}} d^4 x \quad (2.18)$$

Tato změna geometrie nesmí ovlivnit tvar polních rovnic, tedy ten integrál musí být nulový pro každé ξ^μ , z toho vyplývá podmínka na Einsteinův tenzor [10]:

$$G_{\alpha\beta}{}^{;\beta} = 0 \quad (2.19)$$

Takto z požadavku souřadnicové invariance akce plynou **Bianchiho identity**:

$$T_{\mu\nu}{}^{;\nu} = 0 \quad (2.20)$$

2.2 Variační odvození tenzoru energie a hybnosti skalárního pole

Hustota Lagrangiánu pro obecné skalární pole je [12],[7]:

$$L_{pole} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta} + V(\phi) \quad (2.21)$$

pro volné skalární pole s hmotou m je $V(\phi) = -\frac{1}{2}m^2\phi^2$. Tento tvar byl zvolen tak, aby pro $V = 0$ vyšla jako pohybová rovnice pro zdroje Klein-Gordonova rovnice $\phi_{,\nu}{}^{;\nu} = 0$ (pro $V(\phi) = -\frac{1}{2}m^2\phi^2$ by po přeskálování vyšlo $\phi_{,\nu}{}^{;\nu} + \phi = 0$) [7]. Z pohybové rovnice pro pole však nezjistíme jeho gravitační účinky, proto spočteme

$$\frac{\partial L_{pole}}{\partial g^{\alpha\beta}} = \frac{1}{2}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta} \quad (2.22)$$

a dosazením do definice $T_{\alpha\beta}$ (2.16) získáme

$$T_{\alpha\beta} = \phi_{,\alpha}\phi_{,\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta} [g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - m^2\phi^2] \quad (2.23)$$

(2.23) je hledaný tenzor energie a hybnosti - **zdrojový člen, pro který budeme zkoumat gravitační kolaps**.

Kapitola 3

Popis kolabujícího prostoročasu

3.1 Metrika a sférická symetrie - statické versus dynamické gravitační pole

Pomocí přírůstků souřadnic dx^μ lze vyjádřit vzdálenost dvou blízkých bodů prostoročasu (4-interval), která popisuje lokální geometrické vlastnosti prostoročasu [2]:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (3.1)$$

kde $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^\rho)$ jsou složky kovariantního metrického tenzoru, jenž určuje metriku (křivost) prostoročasu.

Ve sférické symetrii (sféricky symetrické těleso budí sféricky symetrické gravitační pole) se nesmí ds^2 změnit při záměnách $d\Theta \rightarrow -d\Theta$, $d\varphi \rightarrow -d\varphi$, tedy musí platit [2]:

$$g_{0\Theta} = g_{0\varphi} = g_{r\Theta} = g_{r\varphi} = 0 \quad (3.2)$$

Dále se geometrie nesmí změnit libovolným otočením kolem počátku $r = 0$, to splňuje geometrie sféry v plochém prostoru [2]:

$$g_{\Theta\Theta}d\Theta^2 + 2g_{\Theta\varphi}d\Theta d\varphi + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2 = R^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\varphi^2) \quad (3.3)$$

kde $R = R(r, t)$ je obecná funkce.

Pokud změňme souřadnice r, t tak, aby konstantní hodnota radiální souřadnice byla zároveň obvodem hlavní kružnice v křivočarých souřadnicích:

$$\tilde{t} = t, \tilde{r} = R(r, t) \quad (3.4)$$

dostaneme metriku ve tvaru:

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{0r}dtdr + g_{rr}dr^2 + r^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\varphi^2) \quad (3.5)$$

metriku diagonalizujeme zavedením nové časové souřadnice:

$$ds^2 = -\alpha^2(r, \hat{t})d\hat{t}^2 + a^2(r, \hat{t})dr^2 + r^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\varphi^2) \quad (3.6)$$

Diagonalizace:

$$\alpha(r, \hat{t})d\hat{t} = \sqrt{-g_{00}}dt - \frac{g_{0r}}{\sqrt{-g_{00}}}d\tilde{r} \quad (3.7)$$

$$a(r, \hat{t}) = g_{rr} - \frac{g_{0r}^2}{g_{00}} \quad (3.8)$$

(4.3) je **obecná metrika sféricky symetrického prostoročasu**, takovéto zavedení je výhodné kvůli zjednodušení problému, avšak tímto zjednodušením se ochudíme o možnost současně popsat protoročas nad i pod horizontem.

Rozlišíme dva typy gravitačního pole a sice statické a dynamické.

Statické gravitační pole

Gravitační pole je statické, pokud lze najít alespoň jednu souřadnou soustavu, v níž složky metrického tenzoru $g_{\mu\nu}$ nezávisí na čase.

Pokud žádná taková soustava souřadnic neexistuje, mluvíme o **dynamickém gravitačním poli**.

3.2 Schwarzschildova metrika - statické řešení Einsteinových rovnic

Uvažujme situaci, kdy všechna hmota je soustředěna pod pevnou hodnotou poloměru r , tedy všude jinde je vakuum. Zkoumejme nyní řešení Einsteinových rovnic vně onoho poloměru.

Řečeno jinak, zkoumejme rovnice:

$$G_{\mu\nu} = 0 \quad (3.9)$$

Dosadíme-li obecnou metriku sféricky symetrického prostoročasu (3.6) do vztahu (3.9) užitím (2.4), (2.5) a definice Einsteinova tenzoru, zjistíme pozoruhodnou skutečnost:

Birkhoffův teorém

Sféricky symetrické gravitační pole ve vakuu je nutně statické.

Jinými slovy takto vzniklá metrika - **Schwarzschildova metrika** nezávisí

na čase (vně sféry ohraničující hmotu), konkrétně zde z Einsteinových rovnic (3.9) vyjde:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)c^2 dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)} dr^2 + r^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\varphi^2) \quad (3.10)$$

a toto řešení je jednoznačné. M vyjadřuje jak silné gravitační pole zdroj budí.

Kapitola 4

Formulace úlohy kolabujícího prostoročasu

Otázka zní: **Jak vybrat model hmoty, kterým dobře popíšeme kolaps ?**

Jak najít $T^{\mu\nu}$ aby splňoval (2.20) ?

4.1 Model hmoty a rovnice hmoty aneb proč skalární pole

Einsteinovy rovnice (2.17) jsou tvaru *deformace gravitačního pole = zdroje*. Zdroje hmoty zastupuje tenzor energie a hybnosti, který je provázaností gravitace a zakřivení prostoročasu omezen rovnicemi (2.20). Tyto rovnice jsou pohybovými rovnicemi pro zdroje pole, zdrojem gravitačního pole může být kromě hmoty také jakékoli pole – v jistém smyslu i gravitační pole samo přispívá ke svému zdroji, je to důsledek nelinearity Einsteinových rovnic.

Ve vědě je obvyklé nejprve uvažovat nejjednodušší situace a postupně je komplikovat. Nikde není zaručeno, že se touto cestou lze dostat ke komplexitě přírody v celé její kráse, nicméně je to princip přinášející aplikovatelné výsledky.

Požadujeme, aby náš model hmoty byl invariální vůči změně souřadnic $g^{\mu\nu}$. Skalární pole nemá složky, které by se měnily při změně souřadnic, a proto je nejjednodušším takovým modelem. Uvažujeme proto **Skalární pole** coby model hmoty.

Jelikož zkoumáme základní charakteristiky gravitačního kolapsu, není příliš důležitá četnost výskytu skalárních polí v jiných fyzikálních teoriích. Přestože je model skalárního pole užit v teoriích, na jejichž experimentální

ověření stále ještě čekáme, charakteristiky gravitačního kolapsu vystihuje. Choptuikovy závěry totiž potvrzují zkoumání realističtějších modelů hmoty. Příkladem užití skalárního pole v jiných fyzikálních teoriích je Standardní model [11] - jeho základní předpoklad je přítomnost skalárního potenciálu v Lagrangiánu, který umožňuje zrod hmot bosonů a fermionů Higgsovým mechanismem, který též předpovídá existenci Higgsova bosonu.

4.2 Choptuikovy rovnice

Uvažujme nehmotné sféricky symetrické skalární pole, gravitační zákon pro tento zdroj má tvar:

$$G_{\mu\nu} = \phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi_{,\rho}\phi^{,\rho} \quad (4.1)$$

a ϕ splňuje vlnovou rovnici - to je přímý důsledek Bianchiho identit, získáme ji dosazením (2.23) do (2.20)

$$\phi^{;\rho}_{;\rho} = 0 \quad (4.2)$$

Choptuik zvolil metriku Schwarzschildova typu - obecnou metriku sféricky symetrického prostoročasu 4.3

$$ds^2 = -\alpha^2(r, t)dt^2 + a^2(r, t)dr^2 + r^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\varphi^2) \quad (4.3)$$

Souřadnice r je volena tak, aby $4\pi r^2$ byl povrch 2-sféry a t byla k r ortogonální ve smyslu skalárního součinu, daným metrickým tenzorem[5]. Vlastní čas centrálního pozorovatele je pak dán vztahem[8]

$$\tau_0 = \int_0^t \alpha(0, \tilde{t})d\tilde{t} \quad (4.4)$$

Choptuik zavedl substituci $\Phi \equiv \phi'$ a $\Pi \equiv \frac{a}{\alpha}\dot{\phi}$ [8], která převede vlnovou rovnici na systém PDR prvního řádu v nových proměných:

$$\dot{\Phi} = \left(\frac{\alpha}{a}\Pi\right)' \quad \dot{\Pi} = \frac{1}{r^2}\left(r^2\frac{\alpha}{a}\Phi\right)' \quad (4.5)$$

kde $\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t}$ a $f' = \frac{\partial f}{\partial r}$ pro funkce $f = f(r, t)$.

Dosadíme-li do (4.1) vyjádření metriky (4.3) a použijeme definici Einsteinova tenzoru pomocí vztahů mezi Riemmanovým tenzorem a afinní konexí a metrickým tenzorem (2.5),(2.6), obdržíme pět rovnic pro a, α . Z těchto pěti rovnic jsou jen čtyři algebraicky nezávislé, z nichž jedna je kombinací derivací zbylých tří rovnic [5], tedy jen tři jsou skutečně relevantní.

Jsou jimi [5]

$$\frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{a'}{a} + \frac{1-a^2}{r} = 0 \quad (4.6)$$

$$\frac{a'}{a} + \frac{a^2-1}{2r} = 2\pi r (\Pi^2 + \Phi^2) \quad (4.7)$$

$$\frac{\dot{a}}{\alpha} = 4\pi r \Pi \Phi \quad (4.8)$$

Nenulové složky Einsteinova tenzoru jsem získala pomocí Maple, použitý skript je v Příloze č.1.

Z těchto tří rovnic stačí vzít jen dvě, máme totiž čtyři proměnné funkce Φ, Π, a, α . Je výhodné vzít pro numerickou anlyzu rovnice (4.7) a (4.6), protože pak lze svým způsobem oddělit prostor a čas - totiž řešit rovnice pro koeficienty metriky jako soustavu ODR v prostoru pro pevné t a pak z takto časově zmrazené geometrie vyvíjet Φ a Π .

4.3 Role počátečních dat

V této úloze se vyskytují dva typy proměnných, proměnné polní Φ a Π a proměnné geometrické a a α , proto je také potřeba pro ně zadat odlišný typ počátečních podmínek. Jednodušší je to pro a a α , protože jak je vidět z příslušných rovnic, α závisí pouze na a a její derivaci, tedy stačí zadat podmínku pro a v čase $t = 0$. Ale v rovnici pro a tvoří zdrojové členy polní proměnné Φ a Π , tedy a v čase $t = 0$ závisí na $\Phi(r, 0)$ a $\Pi(r, 0)$, což je druhá sada počátečních podmínek.

Když jsou tyto podmínky zadány, je ještě třeba dodat podmínky okrajové pro a , α , aby se daly řešit rovnice (4.7) a (4.6) coby systém ODR pro čas $t = 0$.

Je tedy třeba zadat dvě hodnoty ($a(0, 0)$, $\alpha(0, 0)$) a dvě funkce ($\Phi(r, 0)$ a $\Pi(r, 0)$). Z rovnice (4.6) je patrné, že je potřeba zadat $a(0, 0) = 1$ kvůli členu $\frac{1-a^2}{r}$. Hodnotu $\alpha(0, 0)$ lze zadat libovolně - tento koeficient lze vždy přeskálovat, aby $a(0, 0) = \alpha(0, 0) = 1$. Funkce $\phi(r, 0)$ popisuje rozložení hmoty v prostoru v čase $t = 0$, je potřeba na ni klást specifické požadavky. Počáteční rozložení hmoty skalárního pole v prostoru - radiální hustota hmoty-energie $\frac{dm}{dr}$ [8], kde $m(r)$ je definována pomocí metrického koeficientu a [8] tak, aby $m(\infty)$ byla Schwarzschildovou hmotou

$$a^2 = \frac{1}{1 - \frac{2m(r)}{r}} \quad (4.9)$$

a $\frac{dm}{dr}$ závisí na polních proměnných vztahem [8]

$$\frac{dm}{dr} = 2\pi r^2 \left(\frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \right) \quad (4.10)$$

Z tohoto vztahu plyne, že $\phi(r, 0)$ je třeba zadat sféricky symetrickou, kdyby totiž závisela ještě dejme tomu na souřadnici x , rozložení hmoty by na ní také záviselo a úloha by se značně zesložila. Protože požadujeme extrém rozložení hmoty v počátku $r = 0$, musíme ϕ zadat sudou v r (ve smyslu Taylorova rozvoje – viz Zvolená počáteční a okrajová data, ϕ není sudá v pravém slova smyslu, protože r nabývá nezáporných hodnot). Dále chceme, aby ϕ ubývala v nekonečnu tak rychle, aby $m(\infty) < \infty$, to je dobře splněno, pokud $\phi(r, 0)$ má kompaktní nosič. Z definic $\Phi a \Pi$ vyplývá, že $\Phi(r, 0)$ je třeba zadat lichou a $\Pi(0, r)$ sudou v r .

4.4 Vlnová rovnice na křivém pozadí a rovnice kolabujícího prostoročasu

Vlnovou rovnici v jedné časové a jedné prostorové dimenzi lze přepsat na systém prvního řádu v nových proměnných závislých na časové a prostorové derivaci fce f . K tomuto účelu uvažujme metriku

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} (-\gamma^2 + \beta^2) & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

rovnici (5.6) můžeme v těchto souřadnicích napsat jako [7]:

$$0 = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left[\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu f \right] \quad (4.12)$$

$$= \frac{1}{\gamma} \partial_t (\gamma g^{tt} \partial_t f + \gamma g^{tx} \partial_x f) + \frac{1}{\gamma} \partial_x (\gamma g^{tx} \partial_t f + \gamma g^{xx} \partial_x f) \quad (4.13)$$

$$= \frac{1}{\gamma} \partial_t \left(-\frac{1}{\gamma} \partial_t f + \frac{\beta}{\gamma} \partial_x f \right) + \frac{1}{\gamma} \partial_x \left(\frac{\beta}{\gamma} \partial_t f + \left(1 - \frac{\beta^2}{\gamma^2} \right) \partial_x f \right) \quad (4.14)$$

Tuto rovnici převedeme na soustavu dvou rovnic prvního řádu s proměnnými $\psi = \partial_x f$ a $\chi = \frac{1}{\gamma} (\partial_t f - \beta \partial_x f)$ [7]:

$$\partial_t \chi = \partial_x (\gamma \psi + \beta \chi) \quad (4.15)$$

$$\partial_t \psi = \partial_x (\gamma \chi + \beta \psi) \quad (4.16)$$

To lze udělat, pokud f je dvakrát spojitě derivovatelná v obou proměnných a tedy lze zaměnit $\partial_t \psi = \partial_x (\partial_t f)$ (což je splněno, když f řeší vlnovou rovnici). V tomto zápisu při $\beta = 0$ a $\gamma = 1$ přejde první rovnice na vlnovou rovnici a druhá na rovnost druhých derivací jejího řešení.

Naproti tomu, když se v (4.3) omezíme na dvě dimenze, jednu časovou - t a jednu prostorovou - r , dostaneme

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

Je důležité si uvědomit rozdíl, mezi těmito dvěma případy - vlnovou rovnicí na křivém pozadí a rovnicí hmoty v dynamickém - kolabujícím prostoročase. Polní proměnná ϕ v rovnici hmoty je svázána se souřadnicovými funkcemi α a a prostřednictvím Einsteinových rovnic, a tak můžeme psát

$$\alpha = (\alpha[\phi])(r, t) \quad a = (a[\phi])(r, t) \quad (4.18)$$

Tedy geometrie prostoročasu reaguje na přítomnost hmoty, kdežto (4.16),(4.16) je jen přeřpsaná vlnová rovnice v křivých souřadnicích, které se sice můžou měnit v závislosti na (r, t) , ale nezávisí na polní proměnné (v tomto případě f). Avšak z matematického hlediska mají rovnice (4.5) spolu s (4.6),(4.7) stejný charakter jako soustava (4.16),(4.16) na daném pozadí (4.11).

Kapitola 5

Numerické metody

5.1 Metoda konečných diferencí

Úlohu nalezení řešení PDR zjednodušíme předpokladem: Definiční obory všech funkcí vystupujících v PDR uvažujeme jako množiny diskretních bodů (sítě) a funkce vyčíslujeme jen v omezených oblastech tj. v konečně mnoha bodech. Takovéto omezení způsobí diskretizační chyby, jejichž velikost se snažíme minimalizovat.

Předpokládejme konečný definiční obor s jednou časovou souřadnicí t a jednou prostorovou souřadnicí x . Uvažujeme diskretizaci prostoru $x_j = j\Delta x$, hranice definičního oboru reprezentují body x_0 a x_N a diskretizaci času $t^n = n\Delta t$, kde j, n jsou celá čísla, Δx resp. Δt je konstantní rozdíl mezi sousedními body v prostoru resp. v čase. Každá funkce s tímto definičním oborem je v něm určena konečně mnoha hodnotami $f_j^n = f(t^n, x_j)$.

Metoda konečných diferencí stojí na předpokladu, že řešení PDR (i další funkce vystupující v rovnici) lze v okolí každého bodu sítě dobře aproximovat k členy Taylorova rozvoje dané funkce, k je malé celé číslo.

Nejprve uvažujme $f(x) \equiv f(x, \tau)$, kde τ je konstantní. Známe-li hodnotu $f(x_j)$, získáme hodnoty v sousedních bodech jako [7]:

$$f(x_{j-1}) = f(x_j) - \Delta x f'(x_j) + \frac{\Delta x^2}{2} f''(x_j) - \frac{\Delta x^3}{6} f'''(x_j) + O(\Delta x^3) \quad (5.1)$$

$$f(x_{j+1}) = f(x_j) + \Delta x f'(x_j) + \frac{\Delta x^2}{2} f''(x_j) + \frac{\Delta x^3}{6} f'''(x_j) + O(\Delta x^3) \quad (5.2)$$

Pak lze pomocí těchto vyjádření sestavit tzv. centrovanou aproximaci pro derivace f , například odečtením (5.1) a (5.2) získáme aproximaci $\frac{\partial f}{\partial x} \equiv f'$ s chybou řádu dvě [7]:

$$f'(x_j) = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_{j-1}))}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (5.3)$$

Podobně lze získat aproximaci druhé derivace f výpočtem (5.1) + (5.2) – $2f(x_j)$ s chybou řádu dvě:

$$f''(x_j) = \frac{f(x_{j+1}) - 2f(x_j) + f(x_{j-1}))}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (5.4)$$

Na hranicích prostoru (v bodech x_0 a x_N) tato aproximace vyžaduje hodnotu v bodě, který už není v síti (definičním oboru), tyto hodnoty určíme pomocí požadovaných vlastností příslušných funkcí a tzv. Radiální podmínky (viz Zvolená počáteční a okrajová data).

Nyní budeme uvažovat diskretizaci definičního oboru jak v prostoru tak v čase $f_j^n = f(t^n, x_j)$ a vyjádříme tentokrát časovou derivaci $\frac{\partial f}{\partial t} \equiv \dot{f}$ pomocí konečných diferencí v čase [7]:

$$\dot{f}_j^n = \frac{f_j^{n+1} - f_j^{n-1}}{2\Delta t} + O(\Delta t^2) \quad (5.5)$$

a podobně i vyšší časové derivace.

Diskretizace vlnové rovnice a CFL faktor:

Vlnovou rovnici

$$\ddot{f} - f'' = 0 \quad (5.6)$$

diskretizujeme diferencemi 1.řádu

$$\frac{f_j^{n+1} - 2f_j^n + f_j^{n-1}}{\Delta t^2} = \frac{f_{j+1}^n - 2f_j^n + f_{j-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2, \Delta t^2) \quad (5.7)$$

a přepíšeme do tvaru

$$f_j^{n+1} - 2f_j^n + f_j^{n-1} = \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 (f_{j+1}^n - 2f_j^n + f_{j-1}^n) \quad (5.8)$$

U této rovnice lze studovat disperzní chování numerického řešení dosazením $f = f_0 e^{ik((\Delta x)j - (\omega \Delta t)n)}$ (v literatuře se to nazývá fourierova anlyza diferenčního schématu [1]). Rovnice (5.8) pak vypadá

$$(e^{-i\omega \Delta t} - 2 + e^{i\omega \Delta t}) f = \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 (e^{ik\Delta x} - 2 + e^{-ik\Delta x}) f \quad (5.9)$$

Toto se dá přepsat pomocí

$$(e^{-i\omega \Delta t} - 2 + e^{i\omega \Delta t}) = (e^{-i\omega \frac{\Delta t}{2}} - e^{i\omega \frac{\Delta t}{2}})^2 \quad (5.10)$$

$$= -4 \sin^2 \left(\omega \frac{\Delta t}{2} \right) \quad (5.11)$$

na vztah

$$\sin^2\left(\omega\frac{\Delta t}{2}\right) = \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2\left(k\frac{\Delta x}{2}\right), \quad (5.12)$$

který vypovídá o významu podílu $\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)$. Pokud platí $\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right) > 1$, tak musí aspoň jedno z čísel ω, k být obecně komplexní. Jinak řečeno rovnice (5.12) pro neznámou fci $\omega(k)$ má reálné řešení jen když $\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right) < 1$ [9]

Pokud by bylo ω komplexní, pak $f = f_0 e^{ik((\Delta x)j - (\omega\Delta t)n)}$ nebude (rovinná) vlna, objeví se rychle rostoucí exponenciála - chyba numerického řešení.

Podíl $\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)$ je proto důležité nastavit tak, aby numerické řešení neobsahovalo žádné exponenciálně rostoucí složky (optimální velikost závisí na použitém numerickém schématu). Tento podíl se nazývá CFL faktor (Courant - Friedrichs - Lewy faktor).

5.2 Metoda čar

Mějme opět konečný definiční obor s jednou časovou souřadnicí t a jednou prostorovou souřadnicí x . Také zde budeme definiční obor diskretizovat, ale na rozdíl od metody konečných diferencí, pouze v prostoru (obecněji: Soustavu evolučních PDR v $(n+1)$ dimenzích diskretizujeme v n dimenzích a zbývající dimenzi, která reprezentuje čas, necháme spojitou).

Tedy $x_j = j\Delta x$, hranice definičního oboru v prostoru reprezentují body x_0 a x_N . Ponecháním jedné spojitě proměnné vznikne soustava ODR, kterou lze řešit metodami pro řešení ODR [7].

Metoda čar je v podstatě kombinací Metody konečných diferencí a příslušné metody pro řešení ODR.

Příklad použití Metody čar na vlnovou rovnici:

$$\ddot{f} - f'' = 0 \quad (5.13)$$

přejde v ODR v čase:

$$\ddot{f}_j = \frac{f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}}{\Delta x^2} \quad (5.14)$$

Předpokladem Metody čar je zadání počátečních podmínek coby hodnot funkce f v čase $t = 0$ ve všech bodech prostorové sítě.

Pokud takto vzniklou ODR lze převést na systém ODR 1. řádu, lze pro tento systém s výhodou užít Runge-Kuttovy metody.

5.3 Konvergence

Užitím konečně členů Taylorova rozvoje vzniká aproximační chyba řešení. Tato chyba klesá s rostoucím rozlišením diskretizace $\Delta x \rightarrow 0$. Je potřeba

zjistit při jakém rozlišení (krokem diskretizace metody Δx resp. Δt) se rozdíl mezi přesným (analytickým, pokud existuje) a numerickým řešením iterováním zmenšuje (v rámci dané přesnosti). Zavedeme následující pojmy [7]:

Konzistence metody

Metoda je konzistentní, pokud při zmenšování kroku metody rozdíl mezi numerickým a přesným řešením klesá k 0.

Stabilita metody

Stabilita je mírou růstu hodnot numerického řešení při iteraci metody.

Metoda (příslušný iterační algoritmus) **konverguje**, pokud je konzistentní a stabilní.

V diskretizované verzi vlnové rovnice (5.8) je patrné, že o stabilitě rozhoduje CFL faktor: pokud by byl větší než 1, každou iterací by se amplituda vlnové funkce zvětšila, v limitě by pak rostla nade všechny meze.

Konvergenční test Cauchyova typu

Nejprve uvažujme, že známe přesné řešení f_0 , druhého řádu přesnosti, $E(x)$ je chyba tohoto řešení, pak vyjádříme hodnotu numerického řešení získaného s krokem metody $n\Delta x$ [7]:

$$f_n(x) = f_0(x) + E(x)n^2\Delta x^2 + O(n^3\Delta x^3) \quad (5.15)$$

z toho plyne

$$\frac{f_1 - f_0}{f_{\frac{1}{2}} - f_0} = \frac{\Delta x^2 + O(\Delta x^3)}{\frac{1}{4}\Delta x^2 + O(\Delta x^3)} = 4 + O(\Delta x^3) \quad (5.16)$$

Tedy, když je metoda řádu 2, pak splňuje (5.16).

Nyní se zaměříme na reálnější situaci, kdy neznáme přesné řešení. Využijeme hodnot $f_0, f_{\frac{1}{2}}, f_{\frac{1}{4}}$, abychom získali podobný podíl [7]:

$$\frac{f_1 - f_{\frac{1}{2}}}{f_{\frac{1}{2}} - f_{\frac{1}{4}}} = \frac{\Delta x^2 - \frac{1}{4}\Delta x^2 + O(\Delta x^3)}{\frac{1}{4}\Delta x^2 - \frac{1}{16}\Delta x^2 + O(\Delta x^3)} = 4 + O(\Delta x^3) \quad (5.17)$$

Opět, pokud je metoda řádu 2, potom platí (5.17). Obráceně to ale neplatí, nelze na základě zjištění, že daný podíl je zhruba 4, usoudit na řád a konvergenci metody.

Pokud podíl vyjde menší než 4, užitá metoda nemá očekávané vlastnosti.

Platnost vztahu (5.17) je informací typu "Nejspíše nejdeme úplně špatnou cestou."

Kapitola 6

Numerická realizace

6.1 Popis užití numerických metod

Hledáme řešení soustavy čtyř parciálních diferenciálních rovnic pro čtyři neznámé funkce $\Phi(t, r)$, $\Pi(t, r)$, $\alpha(t, r)$, $a(t, r)$

$$\dot{\Phi} = \left(\frac{\alpha}{a}\Pi\right)' \quad (6.1)$$

$$\dot{\Pi} = \frac{1}{r^2} \left(r^2 \frac{\alpha}{a} \Phi\right)' \quad (6.2)$$

$$\frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{a'}{a} + \frac{1-a^2}{r} = 0 \quad (6.3)$$

$$\frac{a'}{a} + \frac{a^2-1}{2r} = 2\pi r (\Pi^2 + \Phi^2) \quad (6.4)$$

Evoluční rovnice budeme řešit metodou čar, kdy ovšem v každém časovém kroku dopočítáme rovnice pro α , a , které v konstantním čase tvoří soustavu ODR pro funkce $\alpha(r)$, $a(r)$, metodou konečných diferencí.

Tedy diskretizujeme prostorovou souřadnici r a evoluční rovnice (6.1), (6.2) přejdou na tvar:

$$\dot{\Phi}_i = \frac{\left(\frac{\alpha_{i+1}}{a_{i+1}}\Pi_{i+1}(t)\right) - \left(\frac{\alpha_{i-1}}{a_{i-1}}\Pi_{i-1}(t)\right)}{2\Delta r} \quad (6.5)$$

$$\dot{\Pi}_i = \frac{\left((i+1)^2\Delta r^2\frac{\alpha_{i+1}}{a_{i+1}}\Phi_{i+1}(t)\right) - \left((i-1)^2\Delta r^2\frac{\alpha_{i-1}}{a_{i-1}}\Phi_{i-1}(t)\right)}{2i^2\Delta r^3} \quad (6.6)$$

$$(6.7)$$

Náš systém ODR prvního řádu se dá psát ve tvaru

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{U}) \quad (6.8)$$

kde $\mathbf{U} = (\Phi, \Pi)^T$

Tento systém pak řešíme Runge-Kutteovou metodou 4. řádu [3]:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{F}(t, \mathbf{U}) \quad (6.9)$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{F}\left(t + \frac{\Delta t}{2}, U + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{k}_1\right) \quad (6.10)$$

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{F}\left(t + \frac{3}{4}\Delta t, U + \frac{3}{4}\Delta t\mathbf{k}_2\right) \quad (6.11)$$

$$\mathbf{k}_4 = \mathbf{F}(t + \Delta t, U + \Delta t\mathbf{k}_3) \quad (6.12)$$

$$\mathbf{U}_{next} = \mathbf{U} + \Delta t\left(\frac{1}{3}\mathbf{k}_1 + \frac{1}{6}\mathbf{k}_2 + \frac{1}{6}\mathbf{k}_3 + \frac{1}{3}\mathbf{k}_4\right) \quad (6.13)$$

$$(6.14)$$

kde je ale potřeba v každém čase dopočítat $a(r), \alpha(r)$, což znamená vyřešit rovnice (6.15), (6.16).

Tyto rovnice řešíme metodou konečných diferencí - diskretizací druhého řádu v prostoru

$$a_i \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_{i-1}}{2\Delta r} - \alpha_i \frac{a_{i+1} - a_{i-1}}{2\Delta r} + \alpha_i a_i \frac{1 - a_i^2}{i\Delta r} = 0 \quad (6.15)$$

$$\frac{a_{i+1} - a_{i-1}}{2\Delta r} + a_i \frac{a_i^2 - 1}{2i\Delta r} - 2\pi a_i i \Delta r (\Pi_i^2 + \Phi_i^2) = 0 \quad (6.16)$$

Nejprve řešíme rovnici pro a a to tak, že postupujeme vždy o dva kroky ($2i$) a mezihodnotu získáme interpolací. Tento postup byl zvolen, protože z řešení evolučních rovnic dostaneme Φ, Π v bodech prostorové sítě a kdyby se postupovalo po jednom kroku, byly by k výpočtu hodnot a třeba hodnoty Φ, Π ještě mezi body prostorové sítě. Dejme tomu, že byly vypočtena hodnota a_{i+2} a známe hodnotu a_i a derivaci a'_i , z těchto hodnot obdržíme tři body, kterými vedeme interpolační polynom druhého řádu - parabolu:

$$a_{i+1} = \frac{1}{4}(3a_i + a_{i+2} + 2a'_i) \quad (6.17)$$

6.2 Zvolená počáteční a okrajová data

Diskretizace úlohy a použití konečné sítě bodů x_0, \dots, x_{N-1}, x_N , s sebou přináší nutnost k výpočtu a, α dle schématu (6.15, 6.16) zadat podmínky na Φ a Π na začátku a konci prostorové sítě. Těmito podmínkami můžeme specifikovat charakter polních proměnných a míru izolace fyzikálního systému. Např. v případě vlnové rovnice na křivém pozadí lze zadat několik druhů chování řešení na hranici prostorové sítě [7]:

- Periodicita, kdy nalepíme řešení na konci prostorové sítě na samo sebe na počátku sítě

- Zrcadlení, kdy se kdy se vlna na koncích prostorové sítě odráží - to implikuje uzavřenost oblasti
- Radiace (odchozí vlna), kdy se předpokládá izolace fyzikálního systému a na hranici se absorbuje část řešení (příchozí vlna)

Jelikož chceme izolovaný systém bez hranic s fyzikálním významem, požadujeme splnění *radiační podmínky*

$$\partial_t \Phi + \partial_r \Phi = 0 \quad (6.18)$$

$$\partial_t \Pi + \partial_r \Pi = 0 \quad (6.19)$$

Uvažujeme asymptotickou plochost, tedy ve velké vzdálenosti se rovnice (6.1),(6.2) chovají jako vlnová rovnice převedená na systém dvou rovnic prvního řádu (4.16),(4.16) pro $\gamma = 1, \beta = 0$ tj.: Φ a Π chovají jako $\partial_r \phi$ a $\partial_t \phi$, a proto bude mít řešení tvaru $f(r + ct) + g(r - ct)$ (odchozí a příchozí vlna), kde c je rychlost šíření, která odpovídá metrickému koeficientu α , který je téměř 1 pro velká r . Radiační podmínka plyne z požadavku eliminace příchozí vlny:

$$\partial_t \Phi = \partial_t \partial_r (f(r + t) + g(r - t)) = -f'' + g'' \quad (6.20)$$

$$\partial_r \Phi = \partial_t \partial_r (f(r + t) + g(r - t)) = f'' + g'' \quad (6.21)$$

$$\partial_t \Pi = \partial_t \partial_r (f(r + t) + g(r - t)) = -f'' + g'' \quad (6.22)$$

$$\partial_r \Pi = \partial_t \partial_r (f(r + t) + g(r - t)) = f'' + g'' \quad (6.23)$$

a tedy

$$\partial_t \Phi + \partial_r \Phi = 2g'' = 0 \quad (6.24)$$

$$\partial_t \Pi + \partial_r \Pi = 2g'' = 0 \quad (6.25)$$

kde $f' = \frac{df(\eta)}{d\eta}, \eta = r + t$.

Tato podmínka omezuje funkci g na $g(r + t) = K_1(r + t) + K_2$, kdy navíc ze sudosti ϕ plyne $K_1 = 0$, tudíž g přispívá k řešení pouze konstantou.

Okrajovou podmínkou na začátku prostorové sítě jsme schopni zadat paritu polních proměnných Φ a Π . Jak bylo řečeno za rovnicí (4.10), požadujeme sudost Π a lichost Φ v r , aby rozložení hmoty nabývalo extrému v $r = 0$. Ze stejného důvodu požadujeme sudost α a a v r . Tyto parity chápeme ve smyslu Taylorova rozvoje:

$$h_{suda}(i\Delta r) \approx h_{suda}(0) + \frac{h_{suda}(1) - 2h_{suda}(0) + h_{suda}(-1)}{\Delta r^2} \frac{(i\Delta r)^2}{2} \quad (6.26)$$

$$= h_{suda}(0) + \frac{h_{suda}(1) - h_{suda}(0)}{\Delta r^2} (i\Delta r)^2 \quad (6.27)$$

$$h_{licha}(i\Delta r) \approx \frac{h_{licha}(1) - h_{licha}(-1)}{2\Delta r} (i\Delta r) \quad (6.28)$$

$$= \frac{h_{licha}(1)}{\Delta r} (i\Delta r) \quad (6.29)$$

Dosadíme-li do rovnice (6.6) $i = 2$, dostaneme vyjádření

$$\Pi_2 = \frac{9\frac{\alpha_3}{a_3}\Phi_3 - \frac{\alpha_1}{a_1}\Phi_1}{8\Delta r} \quad (6.30)$$

kde Φ je lichá, tedy $\Phi_3 \approx 3\Phi_1$, $\frac{\alpha}{a}$ je sudá, ze vztahu (6.27) plyne $\frac{\alpha_3}{a_3} = -8\frac{\alpha_0}{a_0} + \frac{\alpha_1}{a_1}$. Dosadíme toto do rovnice (6.30) a dostaneme

$$\Pi_2 \approx -27\frac{\alpha_0}{a_0}\frac{\Phi_1}{\Delta r} + 30,25\frac{\alpha_1}{a_1}\frac{\Phi_1}{\Delta r} \quad (6.31)$$

Ještě uvážíme, že $\frac{\alpha_0}{a_0} \approx \frac{\alpha_1}{a_1}$ a $\Pi_2 \approx \Pi_0$:

$$\Pi_0 \approx 3\frac{\alpha_0}{a_0}\frac{\Phi_1}{\Delta r} \quad (6.32)$$

což je podmínka na Π v počátku prostorové sítě, která plyne z parity funkcí Φ, Π, α, a .

V řešení naší úlohy byla zadána tato data:

- $\Phi(0, r) = 0$
- $\Pi(0, r) = Npr^2 e^{-r^2}$
- $a(0, 0) = 1$
- $\alpha(0, 0) = 1$

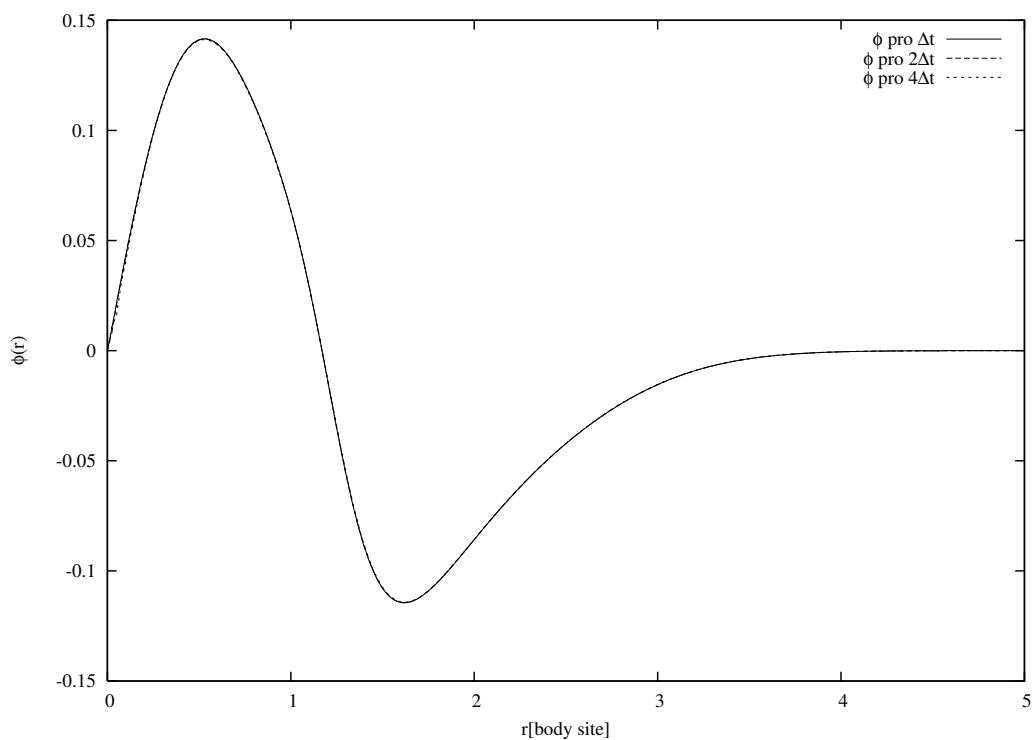
a podmínky na hranicích prostorové sítě:

- $\Phi_0 = 0$
- $\Pi_0 = 3\frac{\alpha_0}{a_0}\frac{\Phi_1}{\Delta r}$
- $\dot{\Phi}_N = -\frac{\Phi_N - \Phi_{N-1}}{\Delta r}$
- $\dot{\Pi}_N = -\frac{\Pi_N - \Pi_{N-1}}{\Delta r}$

kde N je normovací konstanta $N = \max_{r \geq 0} (r^2 e^{-r^2})$.

6.3 Ilustrace konvergence užitého numerického schématu

Konvergenci ověříme výpočtem závislosti $\Phi(r)$ pro několik různých hodnot Δt (v důsledku použití CFL faktoru také hodnot Δr), ověříme tak, že získané výsledky mají skutečný fyzikální význam a jejich tvar není závislý na volbě časoprostorové sítě.



Obrázek 6.1: Ilustrace konvergence numerického schématu - $\phi(r)$ ve stejném okamžiku pro různá Δt .

Kapitola 7

Výsledky numerické evoluce

Popsané numerické schéma bylo implementováno v jazyce C++ v prostředí Microsoft Visual C++ 2008 Express Edition. Zdrojový kód je v Příloze č.2. Program počítá ze zadaných počátečních a okrajových dat (uvedených za rovnicí (6.32)) hodnoty funkcí Φ, Π, α, a v bodech prostoročasové sítě, jejichž polohu určují iterační kroky $\Delta r, \Delta t$.

7.1 Několik úvah, nutných k interpretaci numerických výsledků

- *Jak poznáme, že vznikla černá díra?*
- *Jak určíme její hmotnost?*
- *Jak vypadá kolabující prostoročas?*

Zcela přesně odpovědět na první dvě otázky je nesmírně obtížné z důvodu komplikovaných a abstraktních definicí obou pojmů (hmotnosti černé díry a horizontu událostí).

Abychom na tyto otázky mohli dostat alespoň přibližnou odpověď, porovnáme metriku kolabujícího prostoročasu se Schwarzschildovou metrikou, konkrétním (analyticky řešitelným) příkladem:

$$ds^2 = -\alpha^2(r, t)dt^2 + a^2(r, t)dr^2 + r^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\varphi^2) \quad (7.1)$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}dr^2 + r^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\varphi^2) \quad (7.2)$$

Ve Schwarzschildově prostoročase je poloha horizontu daná chováním metrického koeficientu $g_{rr} \rightarrow \infty$, což v důsledku také určuje hodnotu M .

Analogicky budeme zkoumat chování koeficientu $a(r, t)$ v závislosti na r a hodnotu M určíme jako $M = \frac{r_g}{2}$, kde r_g bude poloha, v níž bude $a = \infty$.

Přibližná odpověď na třetí otázku: Očekáváme, že v důsledku platnosti Birkhoffova teorému bude po dostatečně dlouhé době (dostatečně velké hodnotě souřadnice t) geometrie prostoročasu Schwarzschildovská (případně plochá, pokud se hmota rozptýlí).

Numerické výsledky jsou vždy nepřesné, především kvůli diskretizačním chybám. Numerickým řešením nedostaneme skutečnou hodnotu r_g , protože reálně nelze počítat do ∞ , jen do určité největší hodnoty použitého datového typu, proto také nelze sledovat prostoročas až do okamžiku kolapsu. Přesto lze obdržet dobré odhady chování kolabujícího prostoročasu.

7.2 Pohled na kolabující prostoročas aneb vnoření

Protože je téměř nemožné si představit zakřivení čtyřdimenzionálního prostoru, je výhodné zkonstruovat tzv.: diagram vnoření. Pro sféricky symetrický zdroj gravitačního pole se zakřivení prostoročasu promítne jen do změn souřadnic (r, t) , což je vidět i ze vztahu (7.1), kde úhlová část metriky je stejná jako v Minkowského prostoročase ve sférických souřadnicích [2]. Tedy lze pozorovat vývoj prostoročasu s $\Theta = konst. = \frac{\pi}{2}$, aniž bychom se ochudili o nějaké podstatné informace. Pro $t = konst.$ dostaneme již pouze dvoudimenzionální prostor, který vnoříme do tří dimenzí. Tudíž platí $d\Theta = 0$ a $dt = 0$ a $\sin(\Theta) = 1$ a metrika má tvar

$$ds^2 = a^2 dr^2 + r^2 d\varphi^2 \quad (7.3)$$

Uvažujme nyní třídimenzionální prostor v axiálních souřadnicích

$$d\tilde{s}^2 = dR^2 + dz^2 + R^2 d\tilde{\varphi}^2, \quad (7.4)$$

což s přepsáním pomocí závislosti $z = z(R)$ vypadá

$$d\tilde{s}^2 = dR^2 + (z')^2 dR^2 + R^2 d\tilde{\varphi}^2. \quad (7.5)$$

Ztotožníme-li souřadnice $r = R$ a $\varphi = \tilde{\varphi}$ a $ds^2 = d\tilde{s}^2$, dostaneme

$$a^2 dr^2 + r^2 d\varphi^2 = (1 + (z')^2) dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad (7.6)$$

Z čehož plyne diferenciální rovnice pro neznámou funkci $z(r)$

$$z'(r) = \sqrt{a^2(r) - 1}, \quad (7.7)$$

kteřou když vyřešíme a vykreslíme funkci $z(r)$ do třídimenzionálního prostoru, tak obdržíme představitelné geometrické vyjádření prostoročasu, v němž lze dobře pozorovat jeho chování.

7.3 Grafické výstupy a jejich interpretace

Úloha byla řešena s daty:

- $\Phi(0, r) = 0$
- $\Pi(0, r) = Npr^2e^{-r^2}$
- $a(0, 0) = 1$
- $\alpha(0, 0) = 1$

a s podmínkami na hranicích prostorové sítě:

- $\Phi_0 = 0$
- $\Pi_0 = 3\frac{\alpha_0}{a_0} \frac{\Phi_1}{\Delta r}$
- $\dot{\Phi}_N = -\frac{\Phi_N - \Phi_{N-1}}{\Delta r}$
- $\dot{\Pi}_N = -\frac{\Pi_N - \Pi_{N-1}}{\Delta r}$

V grafech na obrázku č. (7.1) a č. (7.2) je zakreslena funkce $\phi(r, t = konst.)$ v různých fixovaných t , v prvním obrázku pro slabá počáteční data, v druhém pro data, která vedou ke zrodu černé díry. Je dobře patrné, že se Φ v prvním obrázku chová jako řešení vlnové rovnice, kdežto v druhém ne. V grafech na obrázku č. (7.3) a č. (7.4) je zakreslen metrický koeficient $a(r, t = konst.)$ v jednom grafu vždy pro několik hodnot p .

V obrázcích č. (7.5) až č. (7.9) jsou zobrazeny diagramy vnoření černoděrového i rozptýleného prostoročasu (v posledním výpočtovém čase) pro různá p . Zde je znát růst zakřivení prostoročasu v závislosti na parametru p na obrázcích č. (7.5) a č. (7.6), naopak pro malá p je prostoročas po rozptýlení hmoty téměř plochý, to je zvláště patrné na obrázku č. (7.8), obrázek č. (7.9) naznačuje, že $M(p)$ má opravdu skok. V obrázku č. (7.10) je vykreslena závislost $M(p)$. Teto graf potvrzuje Choptyukův výsledek $M \propto (p - p^*)^\gamma$.

7.4 Závěry

Pro slabá počáteční data (malé hodnoty paramteru p) se polní rovnice (6.1) a (6.2) chovají jako vlnová rovnice (4.16) a (4.16)(přepsaná na systém prvního řádu).

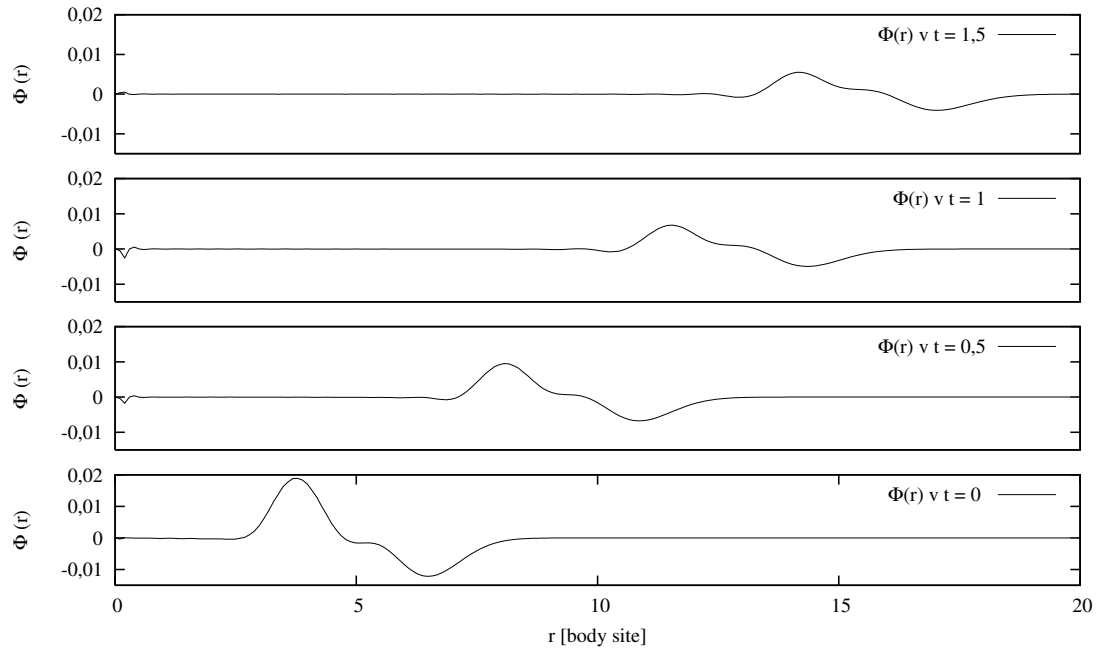
Potvrdilo se, že

- výsledek numerické evoluce závisí jen na hodnotě paramteru p . Pro dostatečně velká p vznikne černá díra, pro malá p se hmota rozptýlí.

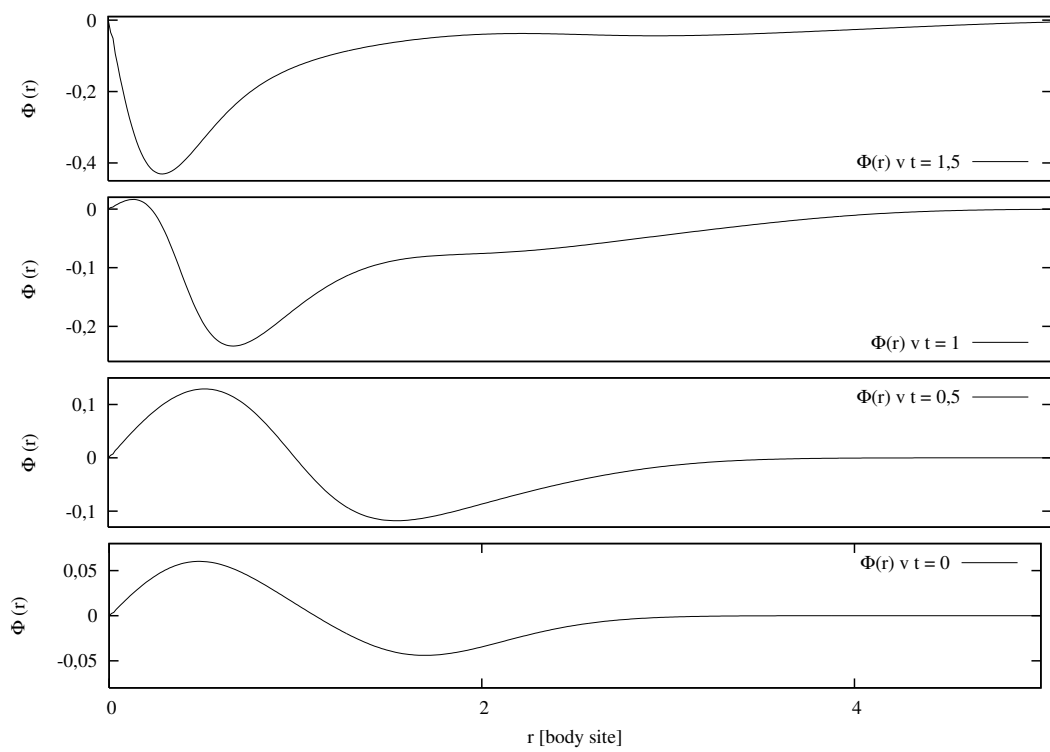
- existují p^* a γ tak, že

$$M \propto (p - p^*)^\gamma. \quad (7.8)$$

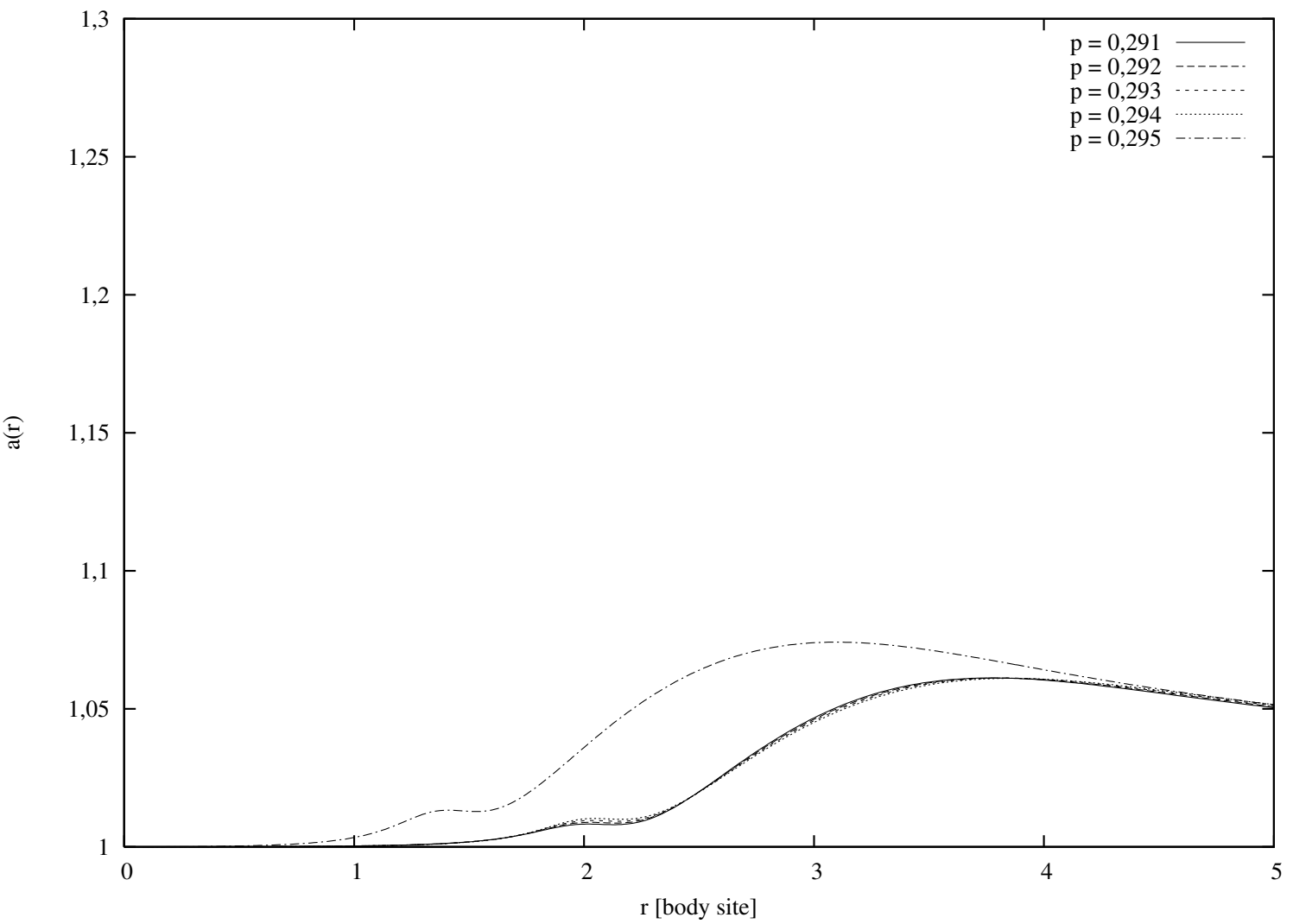
Navíc koeficient γ má neceločíselnou hodnotu.



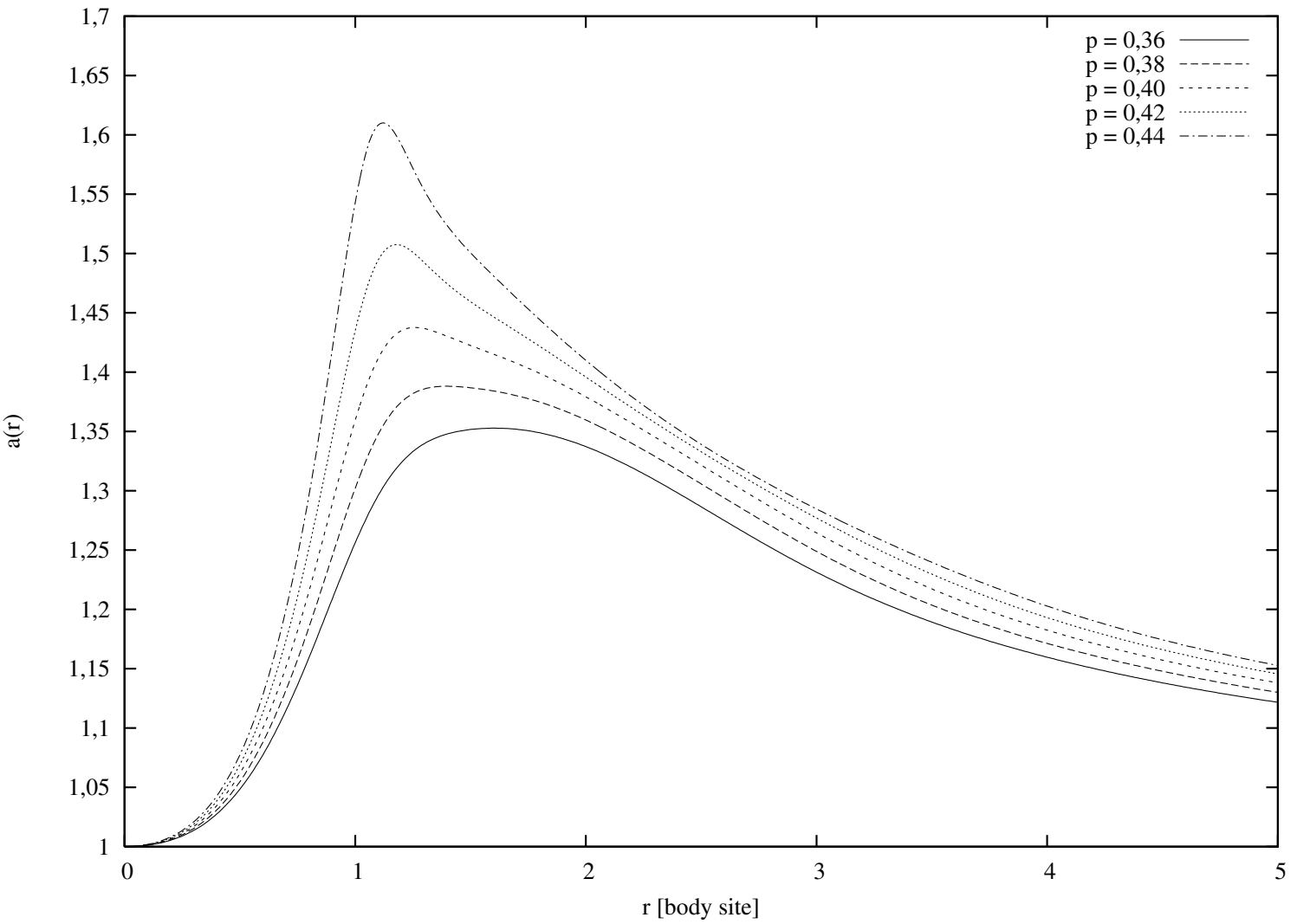
Obrázek 7.1: Ilustrace vlnového charakteru řešení pro malé p . ($p = 0, 15$)



Obrázek 7.2: Ilustrace charakteru řešení pro nadkritickou hodnotu p . ($p = 0,313$)

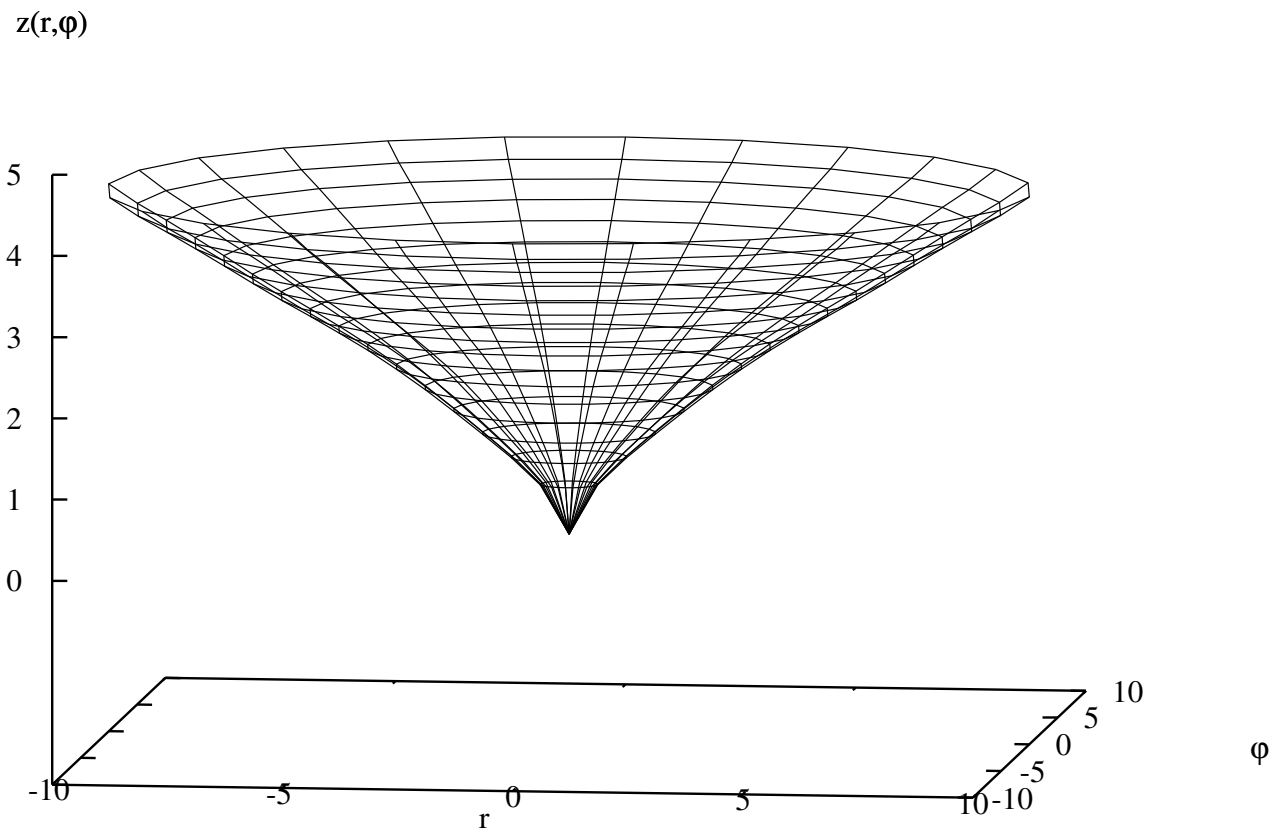


Obrázek 7.3: Funkce $a(r)$ pro podkritická počáteční data v čase $t = 1$. ($p = 0,291, 0,292, 0,293, 0,294, 0,295$)



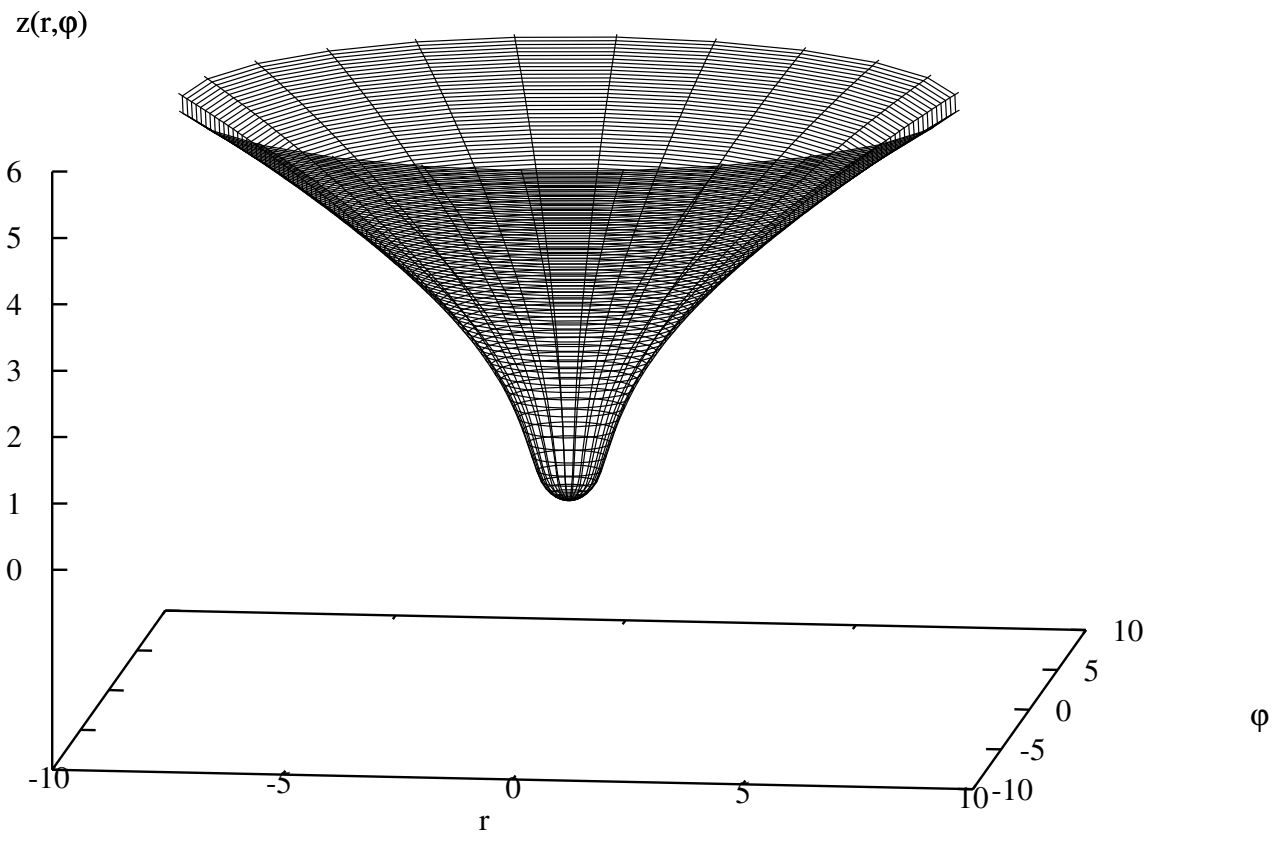
Obrázek 7.4: Funkce $a(r)$ pro silná počáteční data v čase $t = 1$. ($p = 0,36, 0,38, 0,40, 0,42, 0,44$)

$p = 0,314$ ———



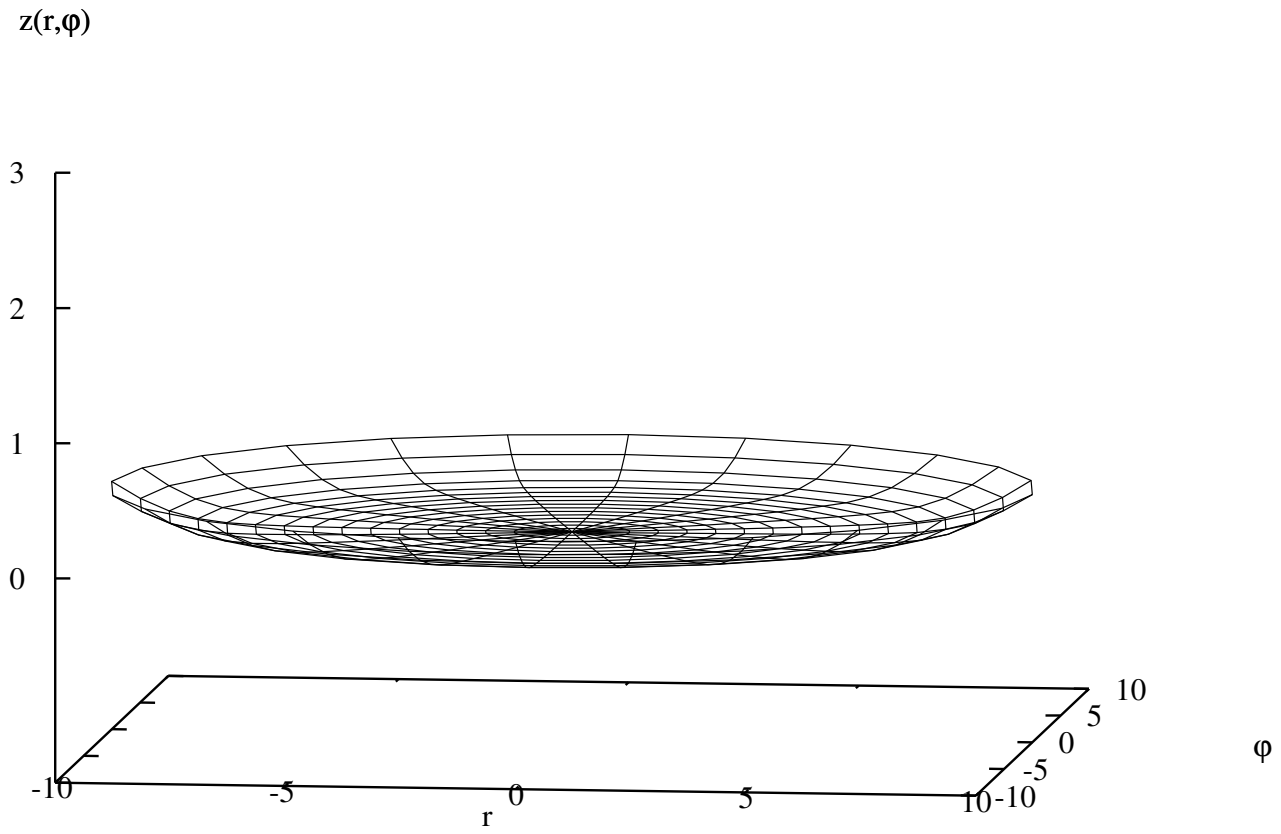
Obrázek 7.5: Diagram vnoření pro $p = 0,314$.

$p = 0,45$ ———



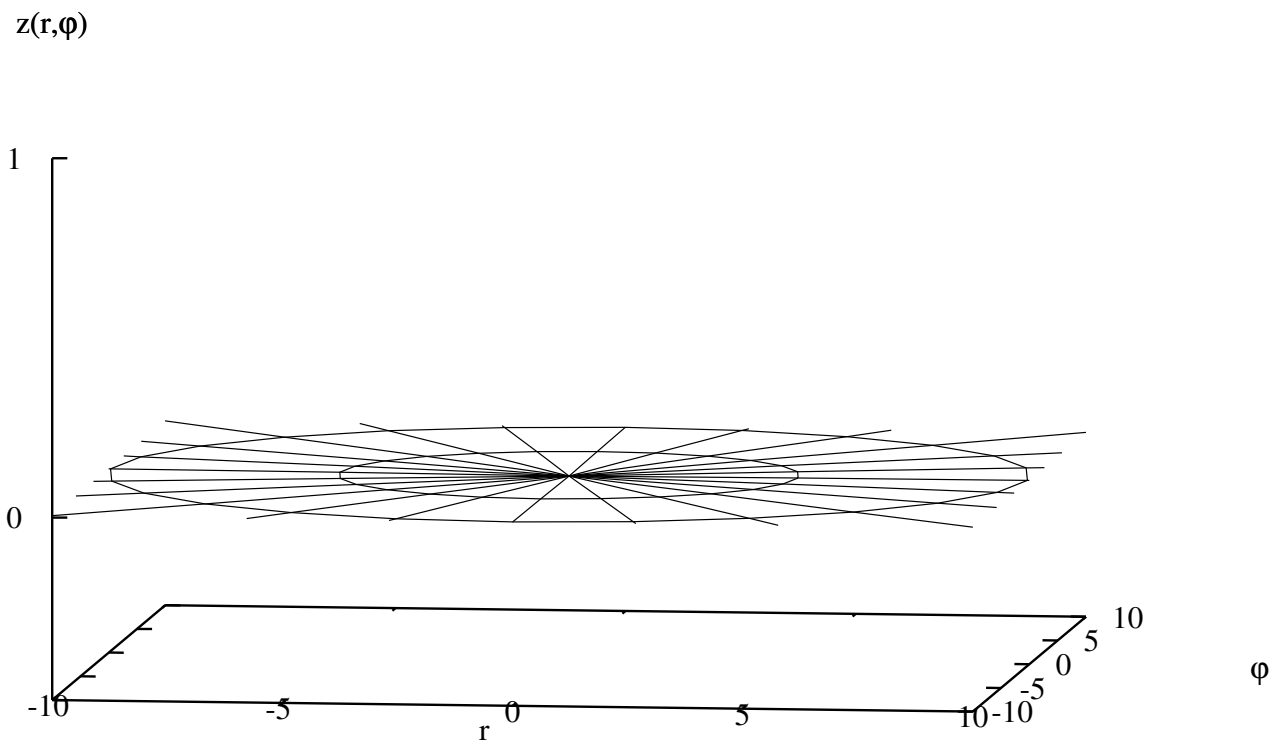
Obrázek 7.6: Diagram vnoření pro $p = 0,45$.

$p = 0,294$ ———

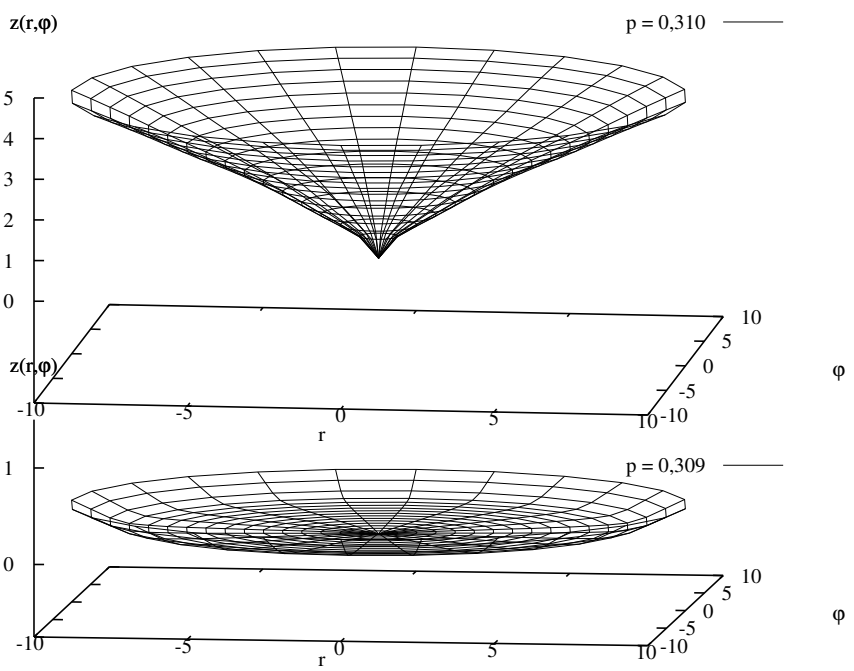


Obrázek 7.7: Diagram vnoření pro $p = 0,294$.

$p = 0,15$ ———

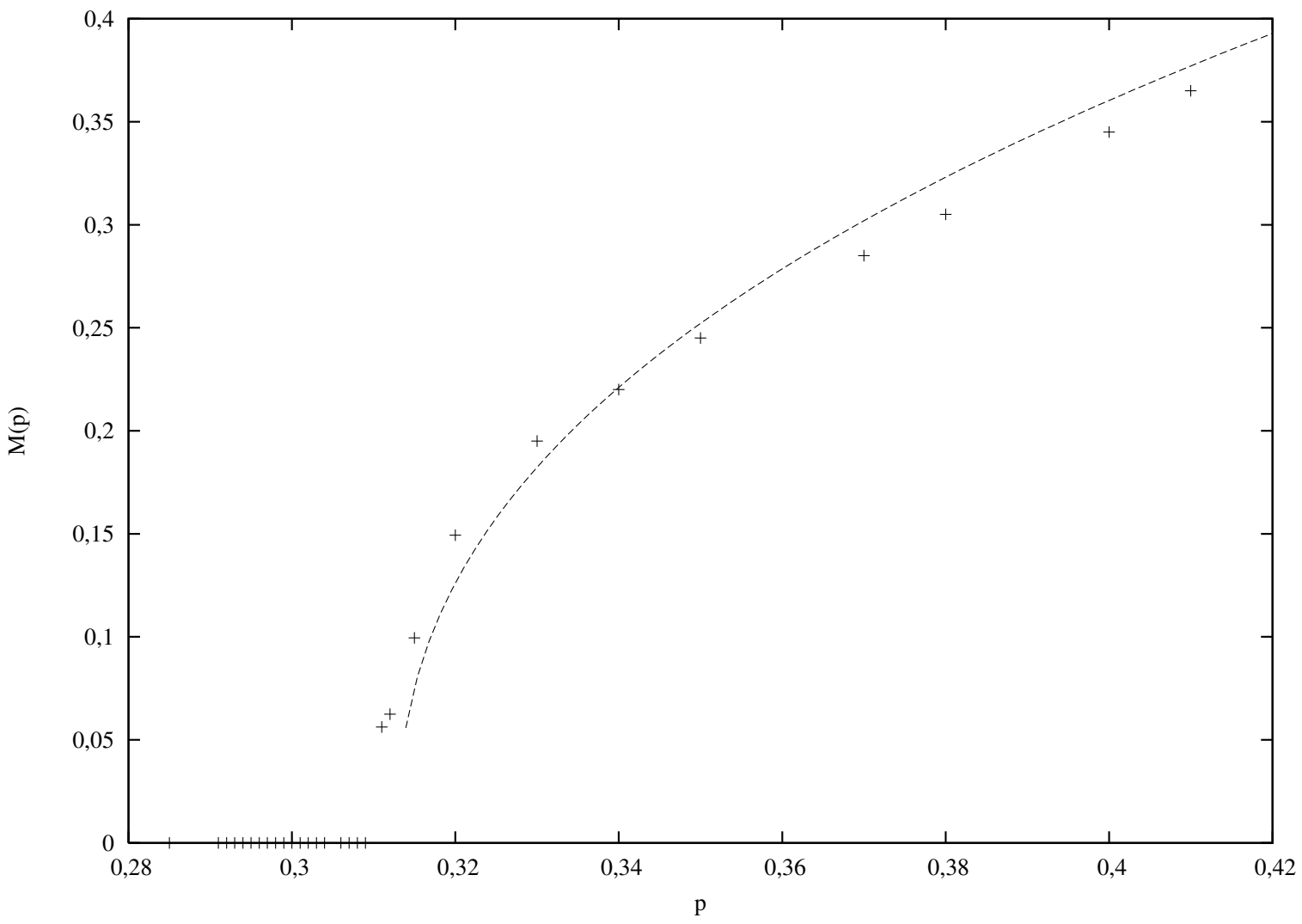


Obrázek 7.8: Diagram vnoření pro $p = 0,15$.



Obrázek 7.9: Diagram vnoření pro dvě velmi blízké hodnoty $p = 0,309$ a $p = 0,310$.

Obrázek 7.10: Závislost hmotnosti $M(p)$ vzniklé černé díry na parametru p .



Kapitola 8

Přílohy

8.1 Příloha č.1 - skript pro výpočet nenulových $G_{\mu\nu}$ v programu Maple

```
> with(tensor);

coord := [t, r, theta, phi]:

g_compts := array(symmetric,sparse, 1..4, 1..4,
[[-alpha(t,r)^2, 0 , 0 , 0 ],
[ 0 , a(t,r)^2 , 0 , 0 ],
[ 0 , 0 , r^2 , 0 ],
[ 0 , 0 , 0 , r^2*sin(theta)^2 ]]);

g := create( [-1,-1], eval(g_compts));

ginv := invert( g, 'detg' ):
D1g:=d1metric( g, coord ): D2g:=d2metric( D1g, coord ):
Cf1 := Christoffel1 ( D1g ):
RMN := Riemann( ginv, D2g, Cf1 ):
RICCI := Ricci( ginv, RMN ):
RS := Ricciscalar( ginv, RICCI ):

Gemyny := map(factor,Einstein( g, RICCI, RS )):
print("----- kovariantni slozky Einsteinova tensoru -----");
displayGR(Einstein,Gemyny);
print("----- stopa Einsteinova tensoru -----");
StopaG := get_compts(prod(Gemyny,ginv,[1,1],[2,2]));
```

8.2 Příloha č.2 - kód programu collapse3.cpp

```
#include "stdafx.h"
#include <stdio.h>
// #include <tchar.h>
#include <string.h>

#include <math.h>
#include <iostream>
#include <fstream>

using namespace std;

#include <float.h>
#include <new>

int _isnan(double x);

// Budeme resit rovnici Dt U = F(U)
//
// 1. Kolik cini dimenze U a jak se jednotlivé složky jmenuji

const int PointDim = 2;
const int Nmax = 401;
const double Rmax = 10.01;
const double dx = 1.0/Nmax*Rmax;

const double Timestep = 0.1*dx;
const double LastTime = 10;
const double pi=3.1415926535;
double ZbeforeColl[Nmax];

const char* VariableNames[PointDim+3] = {"Phi","Pi","a","alpha","z"};
typedef union {
    double Component[PointDim+3];
    struct { // anonymní struktura obsahující pojmenované položky pole
        double Phi;
        double Pi;
        double a;
        double alpha;
        double z;
    };
} tPointData;

// 2. Jak budeme diskretizovat proměnnou x
typedef struct
{
public:
    tPointData GridPoint[Nmax];
} tData1D;

// 3. Řešení metodou car
```



```

class CWave1D
{
public:
    void InitialData(double amplitude, double size);
    const void Get_dUdt(tData1D &dUdt, tData1D &U, double dX); // Pohybove rovnice pole,
(RK4 nestaci jen Current; proto parametr U)

    void RK4Step(double CFL_factor, double dX);
    void Print(const char* FileName);
    void Info() {cerr << Time <<"  \r";} //pise do stderr jak je daleko

    CWave1D(); // konstruktor + vynulovani
    ~CWave1D(); // destruktork
    const double Get_dt(double CFL_factor) {return CFL_factor*dX;}

    void Get_a_alpha(double dX, tData1D &U);

    void CWave1D::Computation(double p,const char* ch);
    void CWave1D::Run();
    void CWave1D::Get_Mass(double p, const char* stringP);
    void Get_Emb(const char* Embedding,double p);

    double Time;
    bool NanCheckFailed;
    tData1D *Current;
};

    CWave1D::CWave1D()
{
    NanCheckFailed = false;
    Current = new tData1D;
    Time = 0;

    for (int i=0; i<Nmax; i++) for (int j=0; j<PointDim; j++)
Current->GridPoint[i].Component[j] = 0.0;
}

    CWave1D::~CWave1D()
{
    delete Current;
}

void CWave1D::Get_Mass(double p, const char* stringP){

double maxA = -1.7e308,m,auxm,aux = -1.7e308;

for (int i = 0; i<Nmax; i++){
    for (int j = 0; j<Nmax; j++){

if (Current->GridPoint[i].Component[2]<Current->GridPoint[j].Component[2]){

aux = Current->GridPoint[j].Component[2];

```

```

auxm = j*dx/2;

} else {
    aux = Current->GridPoint[i].Component[2];
    auxm = i*dx/2;
}
}

if (aux>maxA){

maxA = aux;
if (NanCheckFailed)
    m = auxm;
    else m = 0;
}
}

char str[80];
strcpy_s (str,"c:/Users/Lada/Documents/Run/MassP");
strcat_s (str,stringP);
strcat_s (str,".txt");

ofstream file;

file.open(str,ios_base::app);

file << p << '\t' << m << '\t' << maxA <<'\t' << Time <<'\n';

file.close();

}

// Vystup do textoveho souboru
void CWave1D::Print(const char* FileName)
{
    static bool Header_Printed = false;
    ofstream file;
    int nancount = 0;

    if (!Header_Printed) {
        Header_Printed=true;
file.open(FileName);
        file << "#VARIABLES(r";
        for (int j=0; j<PointDim+3; j++) file << "," << VariableNames[j];
        file << ")\n";
        file.close();
    }

file.open(FileName,ios_base::app);
file << "#Time=" << Time << "\n";

for (int i=0; i<Nmax-1; i++) {

```

```

file /*<< 1/(i*dx + 1e-10) */ << "\t" << i*dx;
    if (_isnan(Current->GridPoint[i].Component[0])) nancount++;
    for (int j=0; j<PointDim+3; j++) file << "\t" << Current->GridPoint[i].Component[j];
    file << "\n";
}
file << "\n\n"; /

file.close();

NanCheckFailed = nancount>(Nmax/2);

if (!NanCheckFailed){
for (int k = 0; k < Nmax; k++)
ZbeforeColl[k] = Current->GridPoint[k].Component[4];
}
}

void CWave1D::Get_Emb(const char* Embedding,double p){

    ofstream file;

file.open(Embedding);
double fi,R;
const double dfi=pi/12;

for (int i=50;i<Nmax;i+=50)
{
R=i*dx;
fi=0;
while (fi<=2*pi+dfi/2)
{
file<<R*cos(fi)<<"\t"<<R*sin(fi)<<"\t"<<ZbeforeColl[i]<<"\n";
fi+=dfi;
}
file<<"\n\n";
}

fi=0;
while (fi<=2*pi)
{
for (int i=0;i<Nmax;i+=50)
{
R=i*dx;
file<<R*cos(fi)<<"\t"<<R*sin(fi)<<"\t"<<ZbeforeColl[i]<<"\n";
}
file<<"\n\n";
fi+=dfi;
}
file.close();

}

```

```

void CWave1D::RK4Step(double CFL_factor,double dX)
{
//      This is "RK 4th order" time integrator
//
//      U1 = U + dt*F(t,U)/2.0
//      U2 = U + dt*F(t+dt/2.0,U1)/2.0
//      U3 = U + dt*F(t+dt/2.0,U2)
//      dUdt = F(t+dt,U3)
//      U_next = 1/3*(-U+U1+2*U2+U3+dUdt*dt/2)

static tData1D dUdt,U1,U2,U3;

int i,j;
#define for_ij for (i=0; i<Nmax; i++) for (j=0; j<PointDim; j++)

double dt = Get_dt(CFL_factor);
double dt_2 = dt/2.0;

//      U1 = U + dt*F(t,U)/2.0
//      Get_dUdt(dUdt,*Current,dX);
//      for_ij U1.GridPoint[i].Component[j] = Current->GridPoint[i].Component[j] +
//      dUdt.GridPoint[i].Component[j]*dt_2;

//      Time += dt_2;

//      U2 = U + dt*F(t+dt/2.0,U1)/2.0
//      Get_dUdt(dUdt,U1,dX);
//      for_ij U2.GridPoint[i].Component[j] = Current->GridPoint[i].Component[j] +
//      dUdt.GridPoint[i].Component[j]*dt_2;

//      U3 = U + dt*F(t+dt/2.0,U2)
//      Get_dUdt(dUdt,U2,dX);
//      for_ij U3.GridPoint[i].Component[j] = Current->GridPoint[i].Component[j] +
//      dUdt.GridPoint[i].Component[j]*dt;

//      Time += dt_2;

//      dUdt = F(t+dt,U3)
//      Get_dUdt(dUdt,U3,dX);

//      Y := 1/3*(-Y+Y1+2*Y2+Y3+DY4/2)
//      for_ij Current->GridPoint[i].Component[j] = ( -Current->GridPoint[i].Component[j] +
//      U1.GridPoint[i].Component[j] +
//      2.0*U2.GridPoint[i].Component[j]+
//      U3.GridPoint[i].Component[j] +
//      dUdt.GridPoint[i].Component[j]*dt_2)*0.33333333333333333333;

#undef for_ij
}

double pow2(double x) {return (x)*(x);}
// Pohybove rovnice pole

```

```

const void CWave1D::Get_dUdt(tData1D &dUdt, tData1D &U, double dX)
{
    int i;

    Get_a_alpha(dX,U);

    // symetrie v pocatku: EVEN(alpha, a, Pi)  ODD(Phi) =>
    dUdt.GridPoint[0].Pi = 3*U.GridPoint[1].Phi*U.GridPoint[0].alpha/U.GridPoint[0].a/dX;
    dUdt.GridPoint[0].Phi = 0;

    // vnitřni body
    for (i=1; i<Nmax-1;i++) {

    dUdt.GridPoint[i].Pi =

    (pow2(dX*(i+1))*U.GridPoint[i+1].alpha/U.GridPoint[i+1].a*

    U.GridPoint[i+1].Phi-

    pow2(dX*(i-1))*U.GridPoint[i-1].alpha/U.GridPoint[i-1].a*

    U.GridPoint[i-1].Phi)/(2*dX)/pow2(dX*i);

    dUdt.GridPoint[i].Phi = (U.GridPoint[i+1].alpha/U.GridPoint[i+1].a*U.GridPoint[i+1].Pi-

    U.GridPoint[i-1].alpha/U.GridPoint[i-1].a*U.GridPoint[i-1].Pi)/(2*dX);

    }

    // Vypocet dU/dt na kraji z radiacni podminky
    i = Nmax-1;
    dUdt.GridPoint[i].Pi = -(U.GridPoint[i].Pi-U.GridPoint[i-1].Pi)/dX;
    dUdt.GridPoint[i].Phi = -(U.GridPoint[i].Phi-U.GridPoint[i-1].Phi)/dX;
}

void CWave1D::Get_a_alpha(double dX, tData1D &U)
{ double amid, alphamid, dadr, da1dr, dalphadr,dzdr;

#define F(u,r,v,w) (-((u)*((u)*(u)-1))/(2*(r)+1E-10) + 2*pi*(r)*(u)*((v)*(v)+(w)*(w)) )
#define G(u,r,dvdr,v) (((u)*(dvdr))/(v) - ((u)*(1-(v)*(v)))/(r)+1E-10)
#define H(u) sqrt(((u)*(u))-1)

    U.GridPoint[0].a = 1.0;
    U.GridPoint[0].alpha = 1.0;
    U.GridPoint[0].z = 0.0;

    for (int i=0; (i+2)<Nmax; i+=2){

    double Phi = U.GridPoint[i].Phi;
    double Pi = U.GridPoint[i].Pi;
    double a = U.GridPoint[i].a;
    double alpha = U.GridPoint[i].alpha;

```

```

dadr = F( a,i*dX,Phi,Pi);
amid = a+dX*dadr;

U.GridPoint[i+2].a = a + 2*dX*F(amid,(i+1)*dX,U.GridPoint[i+1].Phi,U.GridPoint[i+1].Pi);
U.GridPoint[i+1].a = (3*a + U.GridPoint[i+2].a + 2*dadr*dX)/4;

dalphadr =G( alpha, i*dX, dadr, a);
alphamid = alpha + dX*dalphadr;
da1dr = F( U.GridPoint[i+1].a,(i+1)*dX,U.GridPoint[i+1].Phi,U.GridPoint[i+1].Pi);

U.GridPoint[i+2].alpha = alpha + 2*dX*G( alphamid,(i+1)*dX, da1dr, U.GridPoint[i+1].a);
U.GridPoint[i+1].alpha = (3*alpha + U.GridPoint[i+2].alpha + 2*dalphadr*dX)/4;

        dzdr = H(U.GridPoint[i+1].a);
        U.GridPoint[i+2].z = U.GridPoint[i].z + 2*dX*dzdr;
        U.GridPoint[i+1].z = (3*U.GridPoint[i].z + U.GridPoint[i+2].z + 2*dzdr*dX)/4;

    }

#undef F
#undef G
#undef H

}

void CWave1D::InitialData(double amplitude, double size)
{
    Time = 0;

    for (int i=0; i<Nmax; i++) {
        double s = i*dx/size;
        // zde Phi je licha a Pi suda
        Current->GridPoint[i].Phi = 0.0;
        Current->GridPoint[i].Pi = amplitude * s*s*exp( - s*s ) / 0.3678794412;
        // max fce x^2*exp(-x^2) je 0.3678794412

    }
    Get_a_alpha(dx,*Current);
}

const bool PrintAllTimes=true;

void CWave1D::Computation(double p,const char* ch){

    NanCheckFailed = false;

    char str1[80], str2[80];
    strcpy_s (str1,"c:/Users/Lada/Documents/Run/OutputP");
    strcat_s (str1,ch);
    strcat_s (str1,".txt");
}

```

```

strcpy_s (str2,"c:/Users/Lada/Documents/Run/EmbP");
strcat_s (str2,ch);
strcat_s (str2,".txt");

const char * pFN = str1;
const char * pEm = str2;

InitialData(p,1);
Print(pFN);
double PrintTime = Time;

while ( (Time<LastTime) && (!( NanCheckFailed))) {
    RK4Step(0.1,dx);
    Info();

    if (PrintAllTimes || Time-PrintTime>Timestep-1E-7) {
        PrintTime = Time;
    }
    Print(pFN);
}

//Get_Emb(pEm,p);
Get_Mass(p,"test");
}

void CWave1D::Run(){

const char ch[6][30]= {"2dt0,401","2dt0,402","2dt0,403","2dt0,404","dt0,405","2dt0,406"};
double Pmax = 0.406;
double Pmin = 0.400;
double dp = 0.001;

for (int i = 0; Pmin+(i+1)*dp <= Pmax ; i++){

    CWave1D::Computation(Pmin +(i+1)*dp,ch[i]);

}
}

int main()
{
    CWave1D W;

    W.Computation(0.401,"4dt0,401");
    //W.Run();
    return EXIT_SUCCESS;
}

```

Literatura

- [1] Diener, P., and Guzmán, F.S., "The Wave Equation in 1+1", materiály k letní škole in *Sources of Gravitational Waves*, Trieste (2003), <http://www.soton.ac.uk/jt1c06/teach/aei/2003.trieste/>.
- [2] Dvořák, L., *OTR a moderní fyzikální obraz vesmíru*, SPN, Praha, 1984.
- [3] Feistauer, M., *Diskrétní metody řešení diferenciálních rovnic*, Skripta, SPN, Praha, 1981.
- [4] Gundlach, C., "Understanding critical collapse of the scalar field", *Liv. Rev. in Rel.* (1996)
- [5] Gundlach, C., and Martín-García, J.M., "Critical phenomena in gravitational collapse", *Phys. Rev. Lett.* (2007)
- [6] Gundlach, C., "Critical phenomena in gravitational collapse", *Phys. Rev. Lett.* (1999)
- [7] Guzmán, F.S., "Introduction to numerical relativity through examples", *Rev. Mex. De Física* (2006).
- [8] Choptuik, M.W., "Universality and Scaling in Gravitational Collapse of a Massless Scalar Field", *Phys. Rev. Lett.* **70**, 9 (1993).
- [9] Ledvinka, T., *Vybrané partie z OTR - poznámky k přednášce*, (2008).
- [10] Misner, Ch.W., and Thorne, K.S., and Wheeler J.A, *Gravitation*, W.H. Freeman and Company, San Francisco (1973)
- [11] Novaes, S.F., "Standard Model: An Introduction", *Part. and Field*, (2000).
- [12] Peebles, P.J.E., *The Principles of Physical Cosmology*, Princeton University Press, 1993.
- [13] Wald, R.M., "Weak Cosmic Censorship", *Symposia and Invited Papers*, The University of Chicago Press, (1992).
- [14] Wald, R.M., "Gravitational Collapse and Cosmic Censorship", Talk at ASP Meeting (1997), *gr - gc 9710068*.