

**Oponentský posudek disertační práce**  
**”M. Bačák: Point simpliciality in Choquet’s Theory”**

Práce je věnovna Choquetově teorii na prostoru funkcí. V první kapitole jsou charakterizovány extremální body množin  $K_p = \{f : (0,1) \rightarrow [0,\infty), f \text{ konkávní}, \|f\| \leq 1 \text{ v } L^p(0,1)\}$  pro  $1 \leq p \leq \infty$ . V případě  $p = 1$ ,  $p = \infty$  je pak pomocí Choquetovy věty určena integrální reprezentace funkcí z  $K_p$ . Dále je dokázáno, že  $K_1$  je simplex a  $K_\infty$  simplex není. Ve druhé kapitole jsou studovány vlastnosti množiny simpliciality. V kapitole 3 jsou studovány kužele funkcí na lokálně kompaktním prostoru se spočetnou bází. Je dokázáno, že simpliciální množina je typu  $G_\delta$ . Dále je podána charakteristika mér nesených simpliciální množinou. Čtvrtá kapitola řeší problém, formulovaný J. J. Fontem a M. Sanchisem. V kapitole 5 je zkonztruován velmi zajímavý a netriviální příklad, ukazující, že i v případě, že extreální množiny dvou množin jsou homeomorfní, ostatní vlastnosti prostoru affiních funkcí mohou být velmi rozdílné.

Práce je velmi přehledná a srozumitelně napsaná. Obsahuje řadu nových zajímavých tvrzení. Jako celek ji hodnotím velice pozitivně. Jako každá práce, má i tato své nedostatky:

§1.5. Representation of functions from  $K_\infty$ , str. 12, část 1b): První odstavec, ve kterém se definiuje  $\lambda$  a konstatuje se, že  $\lambda \in (0, 1)$ , neobsahuje žádnou chybu. Nicméně, dal by se vysvětlit srozumitelněji.

Example 2.3.4: Autor vysvětuje protipříklad, uvedený v [22]. Vysvětlení toho, že nejde o simplex, je poněkud nesrozumitelné a bylo by rozumnější uvést pouze odkaz.

str. 24, 7. řádek zdola: Je třeba vysvětlit, proč je  $\mathcal{K}^c(\mathcal{H}) - \mathcal{K}^c(\mathcal{H})$  hustá podmnožina  $\mathcal{C}(K)$ . (Stačí citace.)

str. 30, 20. řádek (definice  $W(T)$ ): Je třeba vysvětlit význam označení  $h_1 \wedge \dots \wedge h_n$ . (Toto označení se používá v mnoha významech - zde jde nejspíš o bodové minimum.)

str. 31, Lemma 3.3.1, i) implikuje ii): Jednoznačnost míry z  $\mathcal{M}_\mu^{min}(T)$  není na první pohled vidět. Bylo by vhodné dodat například: Nechť  $\lambda \in \mathcal{M}_\mu^{min}(T)$ . Potom podle Lemmatu 3.2.1 máme  $\lambda f = \nu f = P_\mu f$  pro každé  $f \in W(T)$ . Z jednoznačnosti plyne, že  $\lambda = \nu$ .

str. 32, Remark 3.3.5: Je třeba vysvětlit " $(f_n)_*(x) \rightarrow f_*(x)$ , whenever  $f_n, f \in W(T)$  and  $f_n \rightarrow f$ , uniformly on  $X$ ". (V této kapitole nepředpokládáme, že  $T$  obsahuje konstanty.)

Theorem 3.3.6: Poslední větu "Using a similar argument as above, we get that  $\mu$  is supported by  $Sim_T(X)$ " je třeba nahradit alespoň nástinem postupu.

str. 40, řádek 19: Pojem : "H-exposed point" není definován.

Lemma 5.3.3, Lemma 5.3.4: Bylo by vhodné vysvětlit, co je méněno pojmem "C-complemented subspace".

str. 41, poslední řádek:  $Q$  nemusí být projekce, protože skládání dvou projekcí obecně nemusí dát projekci. (To platí pouze pro komutativní operátory.) Uvedme protipříklad: Nechť  $X = R^2 = \{(x, y); x, y \in R\}$ ,  $Y = \{|x, 0]; x \in R\}$ ,  $T[x, y] = |x, 0]$ . Potom  $T$  je projekce  $X$  do  $Y$  s normou 1. Když položíme

$f_1[x, y] = x$ ,  $f_2[x, y] = y$ , tak  $B_{X^*} = \{\alpha f_1 + \beta f_2; \alpha^2 + \beta^2 \leq 1\}$ . Pro  $F \in \mathcal{C}(B_{X^*})$  definujeme

$$PF = \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} F\left(\frac{\sqrt{2}}{2} f_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} f_2\right), \frac{\sqrt{2}}{2} F\left(\frac{\sqrt{2}}{2} f_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} f_2\right) \right].$$

Potom  $P$  je omezené lineární zobrazení  $\mathcal{C}(B_{X^*})$  do  $X$ . Nyní ověříme, že  $P$  je projekce. Zvolme pevně  $F \in \mathcal{C}(B_{X^*})$ . Potom  $PF = [t, t]$  pro vhodné  $t \in R$ . Máme tedy

$$\begin{aligned} P^2F &= P[t, t] = \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} f_1[t, t] + \frac{\sqrt{2}}{2} f_2[t, t] \right), \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} f_1[t, t] + \frac{\sqrt{2}}{2} f_2[t, t] \right) \right] \\ &= \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} t + \frac{\sqrt{2}}{2} t \right), \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} t + \frac{\sqrt{2}}{2} t \right) \right] = [t, t] = PF. \end{aligned}$$

Nyní dokážeme, že  $Q$  není projekce. ( $Qf = TP(f\pi)$  pro  $f \in \mathcal{C}(B_{Y^*})$  a  $\pi : X^* \rightarrow Y^*$  je operátor zúžení.) Nechť  $f = [1, 0]$ . Potom  $(f\pi)(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha$ . Dále  $P(f\pi) = [1/2, 1/2]$  a tedy  $Qf = TP(f\pi) = [1/2, 0]$ . Dostáváme tedy  $Q^2f = [1/4, 0] \neq [1/2, 0] = Qf$ , což znamená, že  $Q$  není projekce.

Moje výhrady, až na tu poslední, jsou čistě formálního charakteru. Nezpochybňuj dosažené výsledky, pouze upozorňuji na formální nedostatky v jejich prezentaci. Tvrzení Lemmatu 5.3.3 není korektně ověřeno. Lemma 5.3.3 však vypadá věrohodně a pravděpodobně platí. (To podporuje i fakt, že tato část práce již prošla recenzním řízením a je přijata k publikaci.) Případná neplatnost Lemmatu 5.3.3 by ohrozila celou poslední část práce. (Lemma 5.3.3 se využívá v Lemmatu 5.3.4, části e) a to dále pak v hlavní větě páté kapitoly.) Kapitoly 1-4 jsou sami o sobě natolik zajímavé a přínosné, že je možno je akceptovat i bez kapitoly 5. Zdá se však, že část e) v Lemmatu 5.3.4 plyne přímo z [5, Theorem] a Lemma 5.3.3 není třeba. Konstatuji tedy, že kandidát prokázal schopnost samostatné vědecké práce. Doporučuji, aby práce byla uznána jako disertační práce pro obor m-3 Matematická analýza.

Dagmar Medková