Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Štěpán Kurka

Využití dynamické geometrie v konstrukčních úlohách

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jarmila Robová, CSc.

Studijní program: Matematika zaměřená na vzdělávání,
Matematika v kombinaci s informatikou

2008

Rád bych poděkoval RNDr. Jarmile Robové, CSc. za významnou pomoc při tvorbě této práce. Dále potom své rodině za podporu a svým přátelům a spolužákům za užitečné rady.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.
V Praze dne 18. května Štěpán Kurka

Obsah

Název práce: Využití dynamické geometrie v konstrukčních úlohách
Autor: Štěpán Kurka
Katedra (ústav): Katedra didaktiky matematiky
Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jarmila Robová, CSc.
e-mail vedoucího: robova@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Tato práce vznikla jako webové stránky pro výuku planimetrie. Je určena především studentům a učitelům středních škol. Stránky jsou rozděleny na dvě části. Nejprve shrnutí středoškolské planimetrie týkající se především trojúhelníků, poté příklady na některé konstrukce. Tyto řešené úlohy jsou doplněny o Java applety dynamické geometrie Cabri, které jsou interaktivně závislé na měnitelném zadání.
Klíčová slova: planimetrie, trojúhelník, konstrukční úlohy, Cabri geometrie

Title: Using dynamic geometry in construction exercises
Author: Štěpán Kurka
Department: Department of Didactics of Mathematics
Supervisor: RNDr. Jarmila Robová, CSc.
Supervisor's e-mail address: robova@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: This thesis was created as a web site for planimetry teaching. It’s adressed mainly to high school students and high school teachers. The web site is divided into two parts. At first it summarises grammar school planimetry, triangles mostly, and then it contains some construction excercises. Those excercises involve Java applets of Cabri geometry, which interactively depend on changeable measures of the excercise.
Keywords: planimetry, triangle, construction excercise, Cabri geometry

Úvod

Dynamická geometrie

Počítačový software se dnes používá ve vzdělávacích institucích stále častěji. Především v oblasti matematiky, protože podstatně zjednodušuje práci při aplikaci matematiky samotné, ale i například protože dokáže žádaný výsledek zobrazit přesně a hlavně rychle. To je výhodné především tehdy, když chceme názorně předvést a vysvětlit změny ve výsledcích i při malých změnách v původním zadání, ku příkladu v rovnicích s parametrem, počítání limit nebo v planimetrii a stereometrii. U posledních dvou témat je při výuce na středních školách často pravidlem nízká názornost a právě programy (pracující s tzv. dynamickou geometrií), schopné tento nedostatek napravit, jsou mezi prvními, o které střední školy projevují zájem.

Dynamická geometrie je tedy pojem představující kombinaci všech početních a zobrazovacích schopností počítače a klasické geometrie, především analytické, protože ta je pro počítač lépe reprezentovatelná. Jedná se o programy schopné vykreslovat geometrické objekty a s nimi i počítat. Výhodou toho je nejen interaktivita s uživatelem, ale i automatická reakce při změnách vlastností již vytvořených objektů. To má za následek rychlejší rýsování, a navíc i rozvoj představivosti uživatele. A jak již bylo řečeno, je to obzvlášť výhodné při samotné výuce geometrie, neboť usnadňuje práci učitele při vysvětlování jednotlivých jevů nebo rozvíjí prostorové vidění žáků, pokud se jedná o program schopný zobrazovat objekty v trojdimenzionálním prostoru. Planimetrie a stereometrie jsou přitom jedny z částí matematiky, jež najdou uplatnění i u těch absolventů středních škol, kteří se matematice dále nevěnují, což jenom posiluje význam dané látky.

Existující programy

Mezi nejznámější programy dynamické geometrie patří bezesporu Cabri Geometrie II, která splňuje naprostou většinu toho, co se při práci s geometrickými objekty v rovině očekává. Uživatelské prostředí se snadno ovládá a výsledky, které program ukazuje, jsou dostatečně názorné i pro používání v praxi. Rozšířením rovinné Cabri do prostoru je Cabri 3D, která je tedy schopna pracovat i s rovinami. Na internetu jsou zdarma ke stažení demoverze obou programů, v nichž jsou ale některé prvky omezeny, například se rysy nedají ukládat. To je možné až u plné verze, u které je vyžadována licence. Na trhu je k dnešnímu dni spousta dalších navzájem podobných aplikací, jako je Cabri. Jednou z nich je Cinderella, která má složitější nastavení a obtížněji se v ní pracuje, nebo Geonext, který je dokonce volně šiřitelný. Tyto zmíněné tři programy a určitě řada dalších podporují export do HTML stránek, takže poskytují náhled každému, kdo bude mít o rysy na internetu zájem. Využívají totiž světově rozšířený jazyk Java. Ten je sice potřeba instalovat, ale internetové prohlížeče tuto možnost samy nabízejí. Jinak jsou rysy pouze statickými obrázky.

Použité symboly

A, B, C	body A, B, C
p, q	přímky p, q
α, β, ρ	úhly, případně roviny α, β, ρ
$x \in \mathsf{M}$	x je prvkem množiny M
$x \notin \mathsf{M}$	x není prvkem množiny M
$\leftrightarrow AB$	přímka AB
$\mapsto AB$; $\mapsto pA$	polopřímka AB; polorovina pA
$p = q$	přímky p a q jsou totožné
$p \times q$	přímky p a q jsou různoběžné
$p \parallel q$	přímky p a q jsou rovnoběžné různé
$p \not\times q$	přímky p a q jsou mimoběžné
$\mathsf{M} \cap \mathsf{N}$	průnik množin M, N
$\measuredangle AVB$	(konvexní) úhel AVB
$\sphericalangle AVB$	nekonvexní úhel AVB

Značení v trojúhelníku

ΔABC	trojúhelník ABC
a, b, c	strany trojúhelníku
α, β, γ	vnitřní úhly trojúhelníku
S_a, S_b, S_c	středy stran trojúhelníku
t_a, t_b, t_c	těžnice trojúhelníku
T	těžiště trojúhelníku
P_a, P_b, P_c	paty výšek trojúhelníku
v_a, v_b, v_c	výšky trojúhelníku
O	ortocentrum trojúhelníku
o_a, o_b, o_c	osy stran trojúhelníku
k_o, S_o	kružnice opsaná, střed kružnice opsané
o_A, o_B, o_C	osy úhlů trojúhelníku
k_v, S_v	kružnice vepsaná, střed kružnice vepsané
T_a, T_b, T_c	body dotyku kružnice vepsané a stran trojúhelníku
α', β', γ	'vnější úhly trojúhelníku
k_{pa}, S_{pa}	kružnice připsaná straně a, střed kružnice připsané straně a

Základní pojmy

Syntetický přístup

Je dost obtížné popsat tak základní pojmy jako jsou bod, přímka nebo rovina. Přesto většina lidí tyto pojmy zná a intuitivně je chápe. Už na základních školách se vyučuje, co je to bod. Následně se přechází k úsečce jako nejkratší spojnici dvou bodů a pomocí ní se odvozuje přímka případně polopřímka. Na středních školách se potom žáci seznamují s dalšími pojmy stereometrie, tj. geometrie v prostoru. Objekty v prostoru jsou ale už obtížněji představitelné, doposud se totiž převážná většina geometrických objektů dala rovnou narýsovat. Rovinou, v níž se doposud pracovalo, byl list papíru v sešitě.

> Bod je to, co nemá délku, šířku, ani výšku. Přímka má jen délku. Rovina má jen délku a šířku.
>
> Eukleidés, Základy

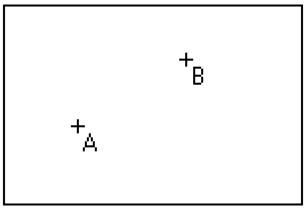
Analytický přístup

Na středních školách se analytická geometrie vyučuje až po stereometrii, i když zobecňuje všechny pojmy doposud v geometrii naučené. Reprezentuje geometrické objekty pomocí rovnic nebo soustav rovnic, což je zase látka, která se na středních školách vyučuje ještě před geometrií. Bod je interpretován jako uspořádaná n-tice reálných čísel, kde n je dimenze prostoru, v němž bod leží. Jinými slovy je zadán souřadnicemi. Od bodů se přechází k vektorům a od nich potom k přímkám. Pokud se studenti v rámci analytické geometrie dostanou ke geometrii v prostoru, setkají se potom i s reprezentací rovin, které se analogicky "přirovnají" k rovnicím přímek.

Základní útvary

Bod

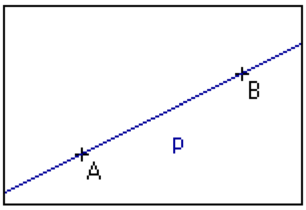
Bod je bezrozměrný geometrický útvar, pomocí kterého tvoříme další útvary, tzv. **množiny bodů**. Je základním pojmem v rámci kterékoli školské geometrie, ať už syntetické nebo analytické. V obou případech je zadán svojí polohou a nedá se rozdělit na menší části.



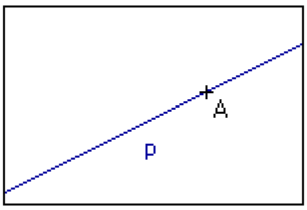
Přímka

Dvěma různými body prochází jediná přímka.

Přímka je obecně chápaná jako přímá spojnice dvou různých bodů, která je prodloužená do nekonečna, nemá počátek ani konec. Určuje se těmito dvěma body. Přímka je tedy přímá spojitá čára, množina tvořená nekonečně mnoha body. Přímku určenou body *A* a *B* značíme $\leftrightarrow AB$.

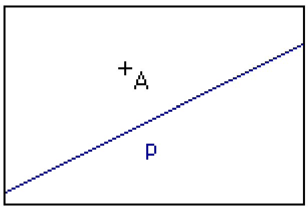


Vzájemná poloha bodu a přímky



Bod *A* leží na přímce *p*.

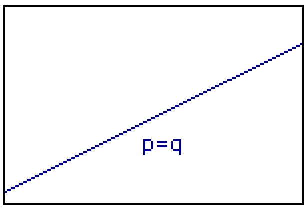
$A \in p$



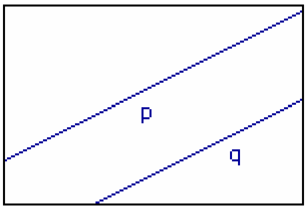
Bod *A* neleží na přímce *p*.

$A \notin p$

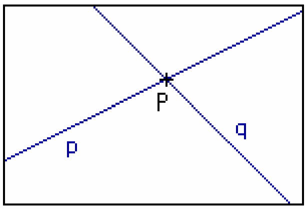
Vzájemná poloha dvou přímek



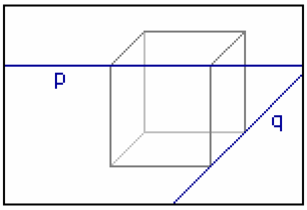
Přímky jsou **totožné**. (speciální případ rovnoběžnosti)
Mají všechny body společné.
$p = q$



Přímky jsou **rovnoběžné různé**.
Nemají společný bod.
$p \parallel q$



Přímky jsou **různoběžné**,
mají jeden společný bod P.
$p \times q$

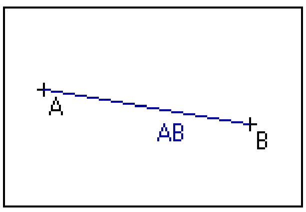


Přímky jsou **mimoběžné** (pouze v prostoru).
Nemají společný bod a neleží v jedné rovině.
p q

Úsečka

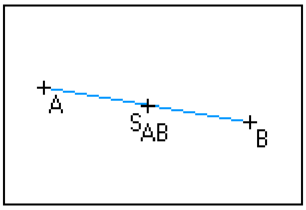
Přímá spojnice mezi dvěma různými body je **úsečka**. Dá se na ni nahlížet jako na část přímky. Má také jako přímka nekonečně mnoho bodů, ale protože má **krajní body**, můžeme měřit její délku. Úsečku s krajními body A, B značíme jednoduše AB a její velikost $|AB|$, stejně jako vzdálenost bodů A, B, měříme většinou v centimetrech. Při jednopísmenném označení úsečky, např. a, můžeme myslet jak úsečku samotnou, tak její délku.

Úsečka AB v rovině ρ chápaná jako množina bodů: $\{X \in \rho;\ |AX| + |XB| = |AB|\}$



Střed úsečky

Stejně jako může bod náležet přímce, může náležet i úsečce. Takové body, které úsečce náleží a nejsou krajními, nazýváme **vnitřní body úsečky**. Ten z nich, který má navíc od obou krajních bodů stejnou vzdálenost, je **střed úsečky**. Značíme S nebo s indexem např. S_{AB}.

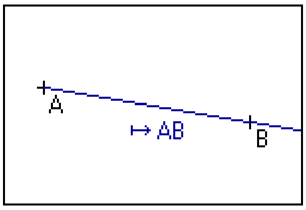


Polopřímka

Jeden bod ležící na přímce ji dělí na dvě části, navzájem opačné **polopřímky**. Ty se zadávají také pomocí dvou bodů, ale narozdíl od přímky a úsečky zde záleží na jejich pořadí. První z nich je krajní bod, tzv. **počátek**. Polopřímku s počátkem A a vnitřním bodem B značíme $\mapsto AB$.

Polopřímka $\mapsto$ AB v rovině ρ chápaná jako množina bodů:

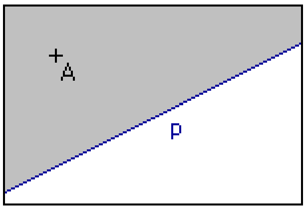
$$\{X \in \rho;\ |AX| + |XB| = |AB| \vee |AX| = |AB| + |BX|\}$$



Úsečku AB lze potom definovat jako průnik dvou polopřímek $\mapsto AB \cap \mapsto BA$.

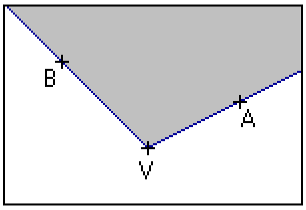
Polorovina

Analogicky jako bod dělí přímku na dvě opačné polopřímky, dělí přímka rovinu na dvě opačné **poloroviny**, jejichž je **hraniční přímkou**. Ta patří do obou vymezených polorovin. Body náležící do poloroviny, které neleží na hraniční přímce, jsou takzvané **vnitřní body poloroviny**. V případě následujícího obrázku se vyznačená polorovina zapisuje $\mapsto pA$, pokud je dělící přímka určena body X, Y, značí se polorovina $\mapsto XYA$.



Úhel

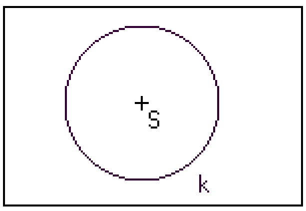
Úhel je definován jako část roviny ohraničená dvěma polopřímkami se stejným počátkem. U úhlů lze měřit jejich **velikost**. Jednotkami velikosti jsou **stupně** (°) nebo **radiány** (rad). **Přímý úhel**, který je tvořený dvěma opačnými polopřímkami má velikost 180° nebo také π (rad). Úhel na obrázku je vymezen polopřímkami $\mapsto VA$ a $\mapsto VB$, tzv. **rameny úhlu**, V je **vrchol úhlu**. Značíme $\sphericalangle AVB$ nebo řeckými písmeny např. α (tímto jednopísmenným zápisem můžeme myslet i velikost úhlu). Ramena úhlu AVB ale dělí rovinu na dva úhly, přičemž patří do obou. Jeden z nich je **konvexní** (tj. úsečka AB mu celá náleží, jeho velikost je menší nebo rovna 180°), ten druhý **nekonvexní**. Rozlišují se symbolikou $\sphericalangle AVB$, $\circlearrowleft\!\sphericalangle AVB$, implicitně se ale míní ten úhel, který je konvexní. Analogicky jako u poloroviny se u úhlů zavádí pojem **vnitřní bod úhlu**, to je takový bod, který náleží do úhlu, ale ani do jednoho z ramen.



Kružnice

Kružnice k určená **středem** S a **poloměrem** r je množina všech bodů v rovině, které mají od středu S vzdálenost rovnou poloměru.

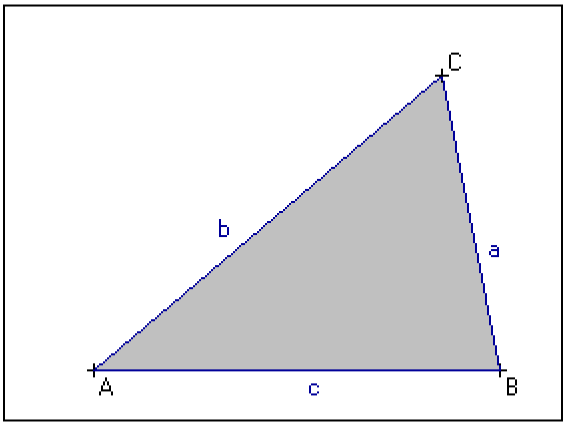
Kružnice $k(S,r)$ v rovině ρ jako množina bodů: $k = \{X \in \rho;\ \lvert SX \rvert = r\}$

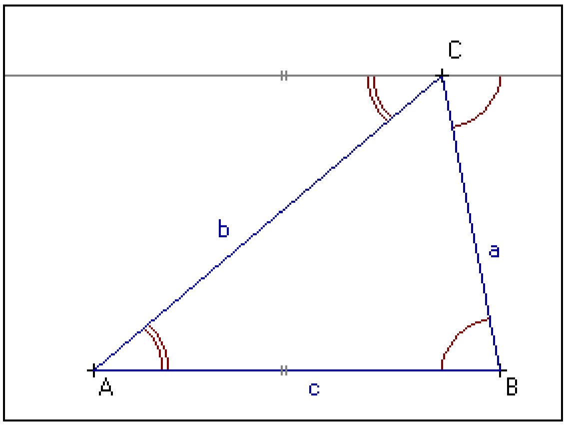


Trojúhelník

Vlastnosti trojúhelníku

Trojúhelník ΔABC s vrcholy A, B, C lze definovat jako průnik tří polorovin $\mapsto ABC$, $\mapsto BCA$ a $\mapsto CAB$. Pokud tyto body leží v jedné přímce, potom takový trojúhelník neexistuje. Jedná se tedy o rovinný útvar ohraničený třemi úsečkami AB, AC, BC, které se nazývají **strany trojúhelníku**. Součtem úhlů vymezených vrcholy trojúhelníku $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle CBA$, $\sphericalangle ACB$ nebo také **vnitřních úhlů trojúhelníku** je úhel přímý (180°).

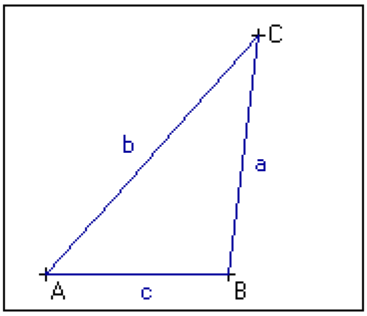




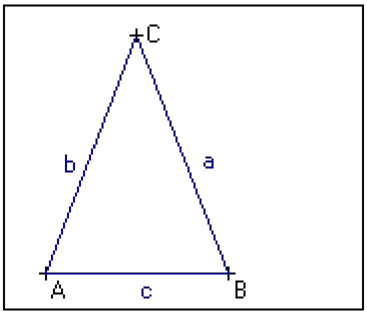
Aby trojúhelník o stranách a, b, c existoval, musí platit **trojúhelníková nerovnost**, tj. součet každých dvou délek stran musí být větší než délka strany třetí. Délky stran trojúhelníku značíme pro jednoduchost stejně jako strany samotné.

Trojúhelníková nerovnost:	$a < b + c,\ b < a + c,\ c < a + b$
Kratší zápis:	$\lvert b - c\rvert < a < b + c$

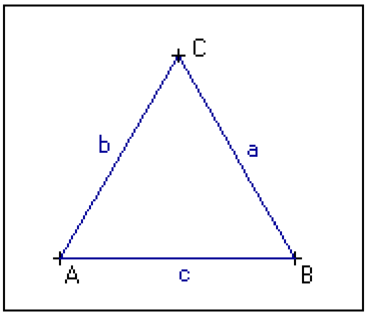
Rozdělení trojúhelníků podle délek stran



Trojúhelník **různostranný**.
$a \neq b \neq c \neq a$



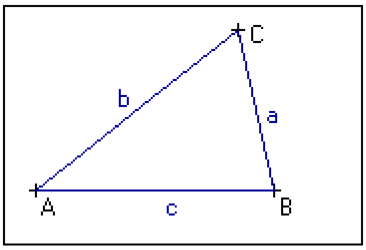
Trojúhelník **rovnoramenný**.
$a = b \neq c$



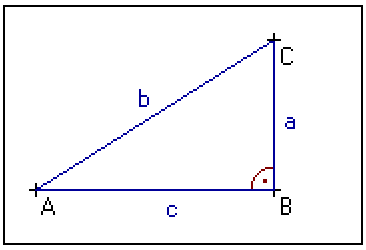
Trojúhelník **rovnostranný**.
$a = b = c$

U rovnoramenného trojúhelníku se stejně dlouhé strany nazývají **ramena**, strana třetí je potom **základna**.

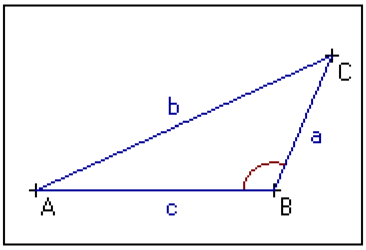
Rozdělení trojúhelníků podle velikosti vnitřních úhlů



Trojúhelník **ostroúhlý**,
velikosti vnitřních úhlů
jsou menší než 90°.



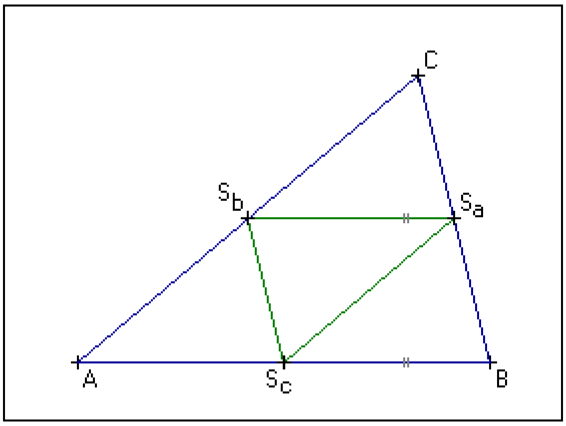
Trojúhelník **pravoúhlý**, velikost jednoho úhlu je rovna 90º.



Trojúhelník **tupoúhlý**, velikost jednoho úhlu je větší než 90º.

Střední příčky

Střední příčkou trojúhelníku rozumíme každou z úseček spojujících středy stran trojúhelníku. Konkrétně u ΔABC jsou to úsečky S_aS_b, S_aS_c, S_bS_c, kde např. S_a je střed strany a. Střední příčky dělí trojúhelník na čtyři navzájem shodné, s původním podobné trojúhelníky.

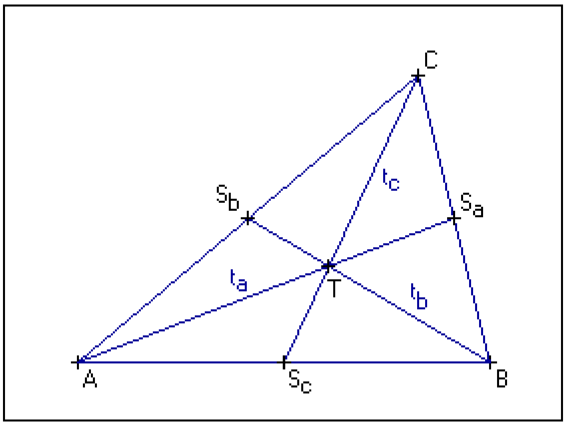


Střední příčka trojúhelníku je rovnoběžná se stranou trojúhelníku, jejímž středem neprochází. Navíc má poloviční délku této strany.

Důkaz tvrzení vyplývá ze stejnolehlosti se středem v protilehlém vrcholu nebo z podobnosti trojúhelníků.

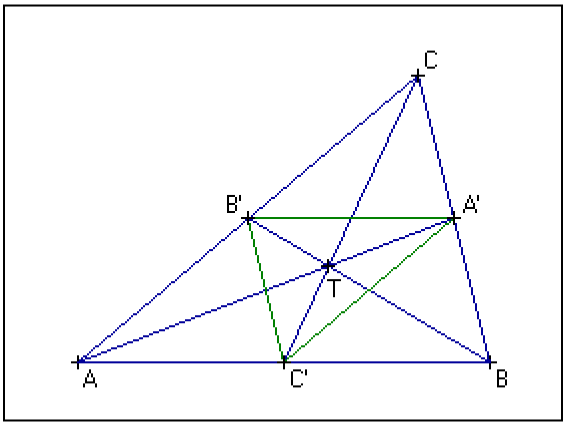
Těžnice

Těžnice je úsečka spojující vrchol trojúhelníku se středem jeho protější strany. Příkladem v ΔABC je težnice t_a, která je úsečkou AS_a. Obdobně tak existují těžnice ke stranám b, c. Každý trojúhelník má tedy tři těžnice.



Těžnice se protínají v jednom bodě, **těžišti** T trojúhelníku. Bod T navíc dělí každou z těžnic na úsečky, jejichž délky jsou v poměru 2:1.

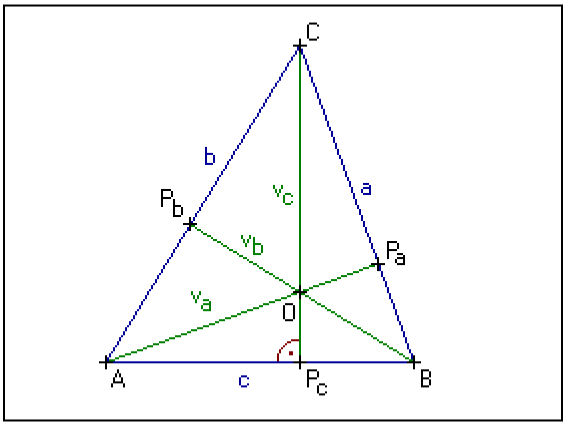
Jedním z možných důkazů tvrzení je důkaz pomocí stejnolehlosti se středem v T a koeficientem -½. Vrcholy se zobrazí na středy protějších stran a strany na střední příčky, které jsou dvakrát kratší než strany.

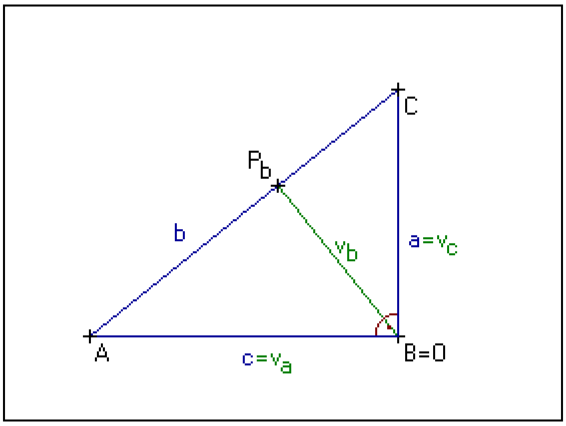


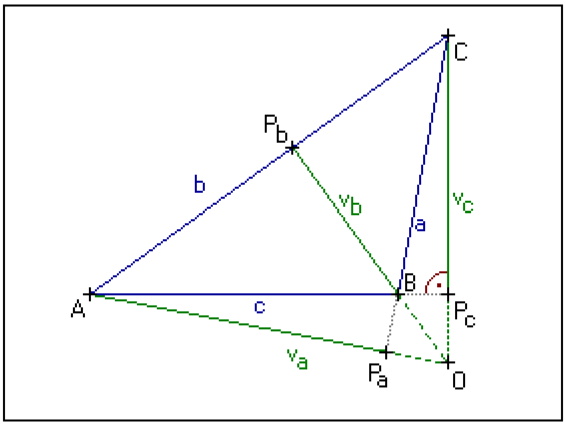
Výšky

Výšku v trojúhelníku chápeme jako úsečku spojující vrchol s patou kolmice na protější stranu, která daným vrcholem prochází. Lze tak ale i celou tuto kolmici. Například výška v_a na stranu a trojúhelníku ABC je úsečka spojující vrchol A s jeho kolmým průmětem P_a do přímky BC nebo přímka $\leftrightarrow AP_a$.

Tyto průměty nazýváme **paty výšek**. Je-li ΔABC ostroúhlý, jsou paty všech tří výšek vnitřními body stran trojúhelníku. V případě pravoúhlého trojúhelníku jsou paty dvou výšek shodné s jedním z vrcholů. Pokud je ΔABC tupoúhlý, nenáleží paty stranám samotným, ale přímkám, na nichž strany leží.







Všechny tři výšky se protínají v jednom bodě O, tzv. **ortocentru**.

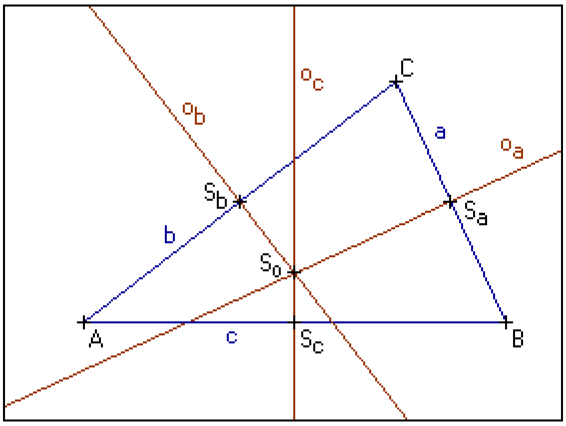
Důkaz tvrzení, stejně jako u těžnic, plyne ze stejnolehlosti se středem v těžišti a koeficientem -½, v němž se výšky zobrazí na osy stran, které se v jednom bodě protínají. Pokud je ΔABC ostroúhlý, je O vnitřním bodem trojúhelníku, jestliže je pravoúhlý, splývá ortocentrum s jedním z vrcholů, v případě tupoúhlého trojúhelníku leží O vně.

Osy stran

Osa úsečky je přímka na úsečku kolmá, která navíc prochází jejím středem. Osu strany trojúhelníka chápeme jako osu úsečky, kde stranu považujeme za úsečku. Například osa strany AB je kolmice na AB vedená středem S_{AB}. Je to přímka, pro jejíž body platí, že mají stejnou vzdálenost od A jako od B.

Osa strany AB v rovině ρ jako množina bodů:

$$\{X \in \rho;\ |AX| = |BX|\}$$

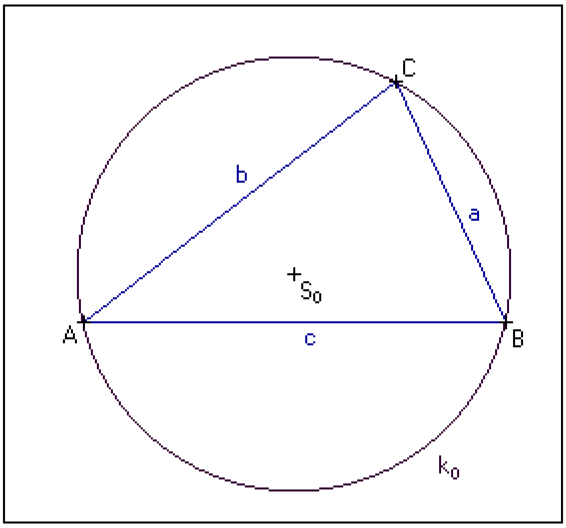


Osy stran trojúhelníku mají jeden společný bod S_o.

Pro dvě osy existuje jeden průsečík, pro který platí, že je stejně vzdálený od všech tří vrcholů, tedy jím musí procházet i osa třetí.

Kružnice opsaná

Protože je průsečík os stran stejně vzdálen od všech tří vrcholů trojúhelníku, můžeme zkonstruovat kružnici, která bude vrcholy procházet. Taková kružnice má střed S_o, poloměr $|S_oA|$ a nazývá se **opsaná**, značíme k_o.



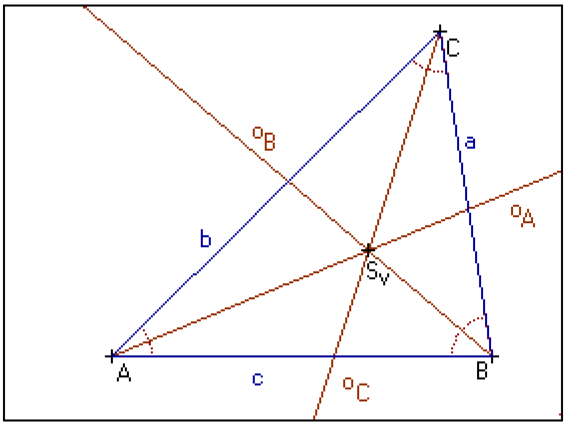
Osy úhlů

Osa úhlu *BAC* je polopřímka, která rozděluje ∢*BAC* na dva úhly stejné velikosti. Pro její body platí, že jejich vzdálenost od přímek (popř. stran) *AB* a *AC* je stejná.

Osa úhlu ∢*BAC* v rovině ρ jako množina bodů:

$$\{X \in \rho;\ \mathrm{d}(X, \leftrightarrow AB) = \mathrm{d}(X, \leftrightarrow AC)\},$$

kde zápisem $\mathrm{d}(X, \leftrightarrow AB)$ rozumíme vzdálenost bodu *X* od přímky ↔AB, tedy od paty kolmice procházející bodem *X* na přímku ↔*AB*.

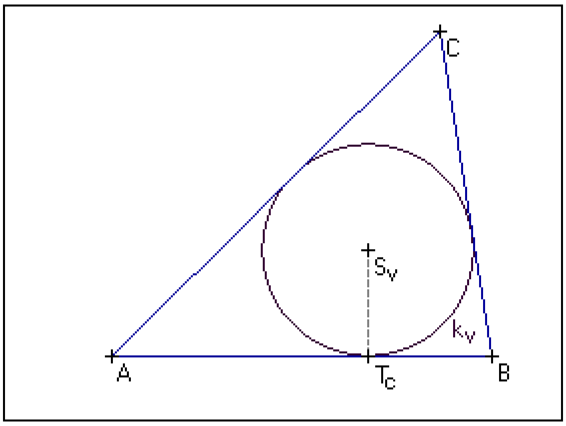


Osy úhlů trojúhelníku mají jeden společný bod S_v.

Pro dvě osy existuje jeden průsečík, pro který platí, že je stejně vzdálený od všech tří stran, tedy jím musí procházet i osa třetí.

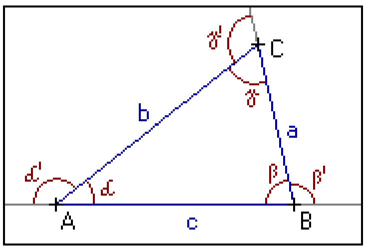
Kružnice vepsaná

Protože je průsečík os úhlů stejně vzdálen od všech tří stran trojúhelníka, můžeme zkonstruovat kružnici, pro niž budou strany trojúhelníku tečnami. Taková kružnice má střed S_v, poloměr d(S_v, $\leftrightarrow AB$) a nazývá se **vepsaná**, značíme k_v. Body dotyku vepsané kružnice s jednotlivými stranami značíme T_a, T_b, T_c.



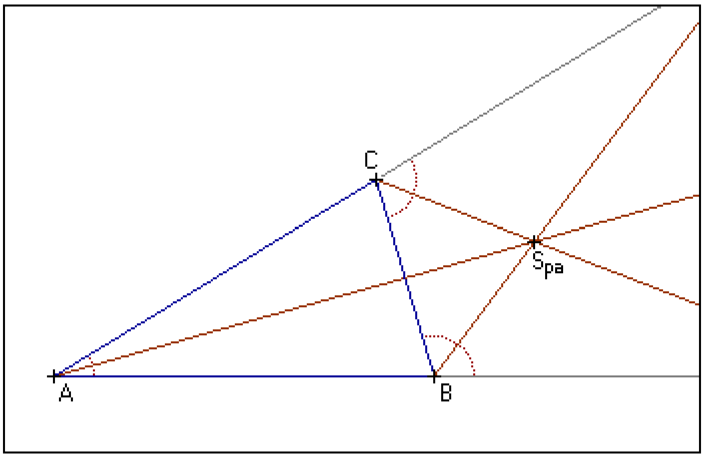
Vnější úhel

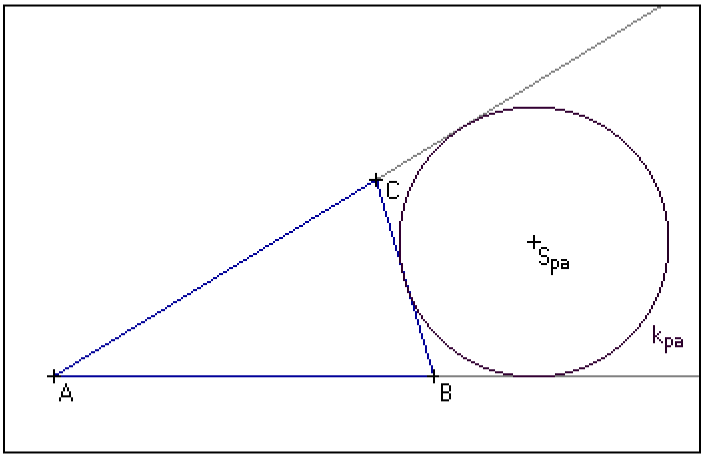
Úhel α' je **vedlejším úhlem** k úhlu α (α je konvexní), pokud mají jedno rameno společné a zbylá dvě jsou navzájem opačné polopřímky, takže $\alpha + \alpha' = \pi$. **Vnější úhly trojúhelníku** jsou vedlejší úhly k vnitřním. Vnější úhly dávají součtem dohromady úhel velikosti 360º.



Kružnice připsaná

Kromě kružnice vepsané existují ještě tři kružnice, které se dotýkají jedné strany trojúhelníku a přímek, na nichž leží zbylé dvě. Tyto kružnice nazýváme **připsané** a jejich střed je průsečíkem osy jednoho vnitřního úhlu a dvou os vnějších úhlů, jak je vidět na obrázku. Kružnici připsanou straně a značíme k_{pa}, její střed S_{pa}.





Osa jednoho vnitřního úhlu a osy dvou zbylých vnějších úhlů mají jeden společný bod.

Důkaz vychází z vlastností os úhlů stejně jako u kružnice vepsané.

Geometrické věty

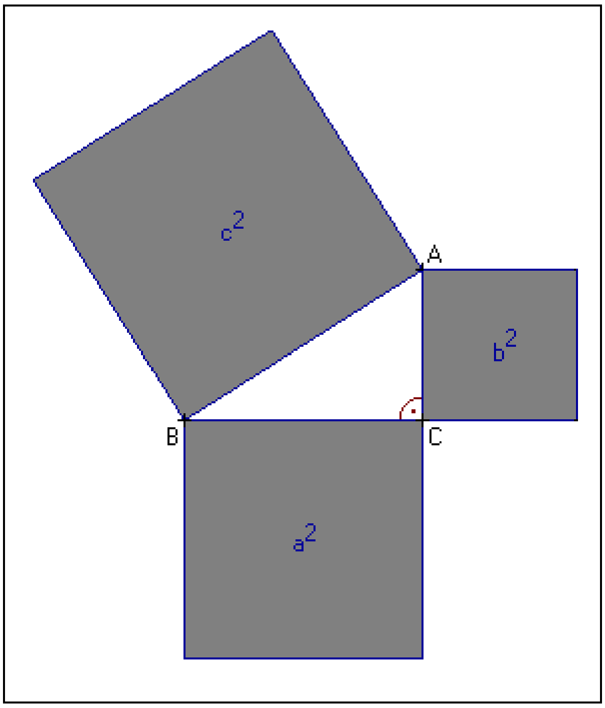
Pythagorova věta

V pravoúhlém trojúhelníku *ABC* s pravým úhlem při vrcholu *C* se stranami *a*, *b*, *c* (*a*, *b* jsou odvěsny, *c* je přepona) platí:

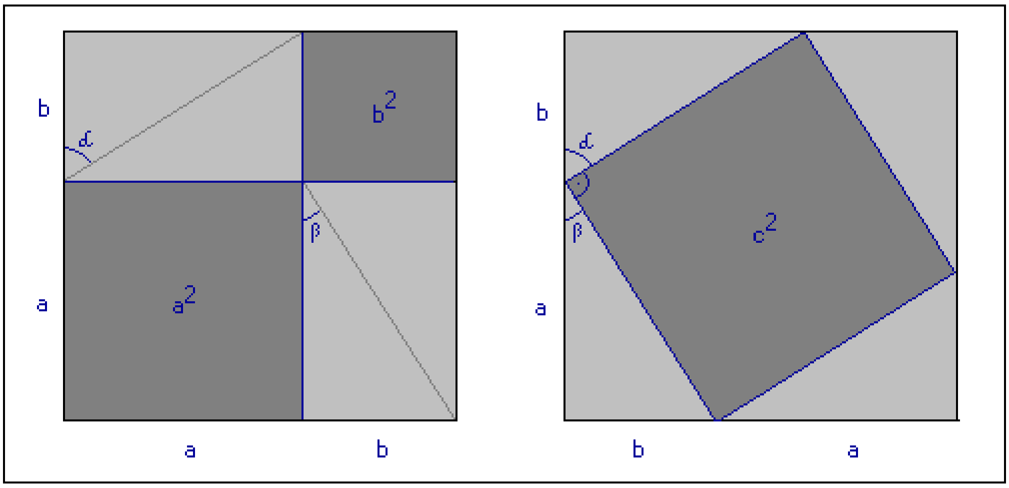
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Pythagorova věta platí pouze pro pravoúhlé trojúhelníky. Pravoúhlost trojúhelníku se tedy pomocí ní dá ověřit.

Obsah čtverce nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku se rovná součtu obsahů čtverců nad oběma odvěsnami.



Důkazů je několik, některé vycházejí např. z vět Euklidových, nejnázornější je důkaz pomocí obsahů. Vezměme dva čtverce se stranami délek (a+b), pokud je rozdělíme podle obrázku, dostaneme několik rovinných útvarů, u nichž můžeme porovnávat obsahy. Šedé trojúhelníky jsou navzájem shodné, proto jsou si obsahy zbylých částí nutně rovny.



Euklidova věta o výšce

V pravoúhlém trojúhelníku *ABC* s pravým úhlem při vrcholu *C* se stranami *a*, *b*, *c* (*a*, *b* jsou odvěsny, *c* je přepona) platí:

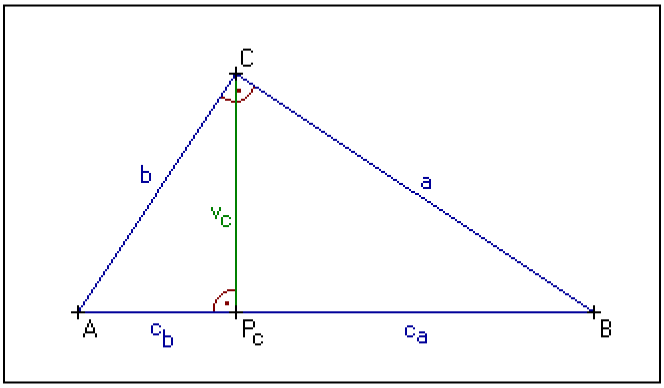
$$v_c^{\,2} = c_a \,.\, c_b,$$

kde c_a, c_b jsou délky úseků přepony rozdělené patou P_c výšky v_c na stranu *c*.

Euklidova věta o odvěsně

Ve stejně označeném trojúhelníku jako u věty o výšce pro odvěsny platí:

$$a^2 = c \,.\, c_a, \quad b^2 = c \,.\, c_b$$

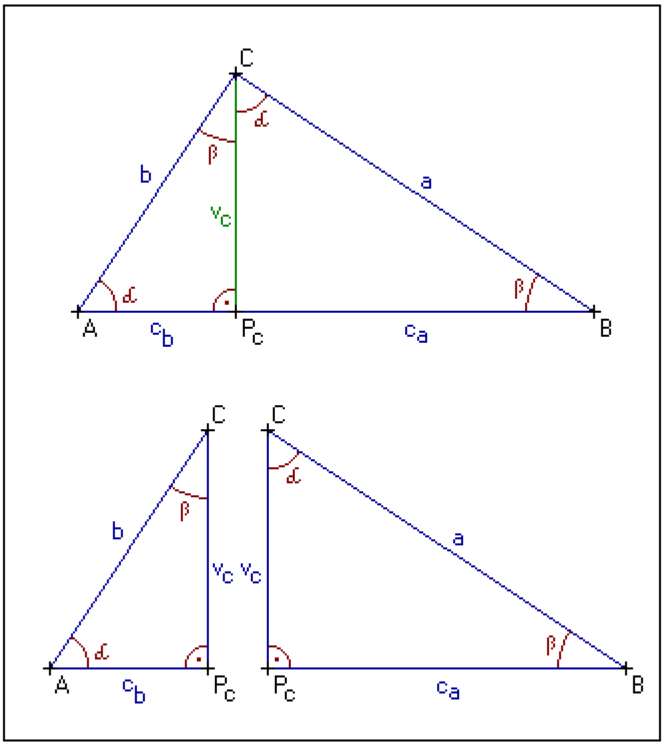


Stejně jako Pythagorova věta jsou věty Euklidovy ekvivalencemi. Pokud pro nějaký trojúhelník jedna z vět platí, potom je jistě pravoúhlý.

Důkaz: Výška v_c rozděluje ΔABC na dva trojúhelníky, jejichž vnitřní úhly mají stejnou velikost jako trojúhelník původní. A protože jsou také pravoúhlé, je možné z nich zjistit hodnoty goniometrických funkcí, které se budou rovnat. Dojdeme tedy k následujícím rovnostem:

$$\frac{c_a}{v_c} = \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v_c}{c_b}, \quad \frac{a}{c} = \cos\beta = \frac{c_a}{a}, \quad \frac{c_b}{b} = \cos\alpha = \frac{b}{c},$$

z nichž už odvodíme původní vzorce.



Sinová věta

Pro každý trojúhelník ABC se stranami a, b, c a vnitřními úhly α, β, γ platí:

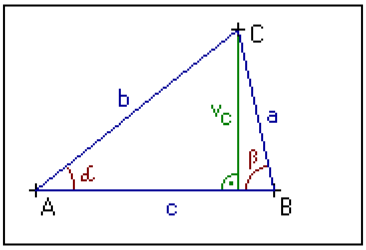
$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} = \frac{1}{2r}$$

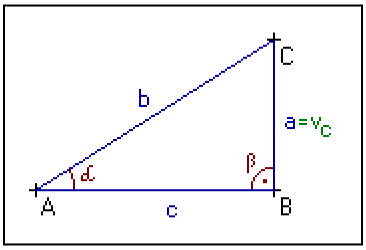
kde r je poloměr kružnice opsané.

Důkaz: První rovnost (z níž se dá cyklicky odvodit i ta druhá) dokážeme pomocí výšky v_c. V případech, že jsou oba úhly ostré nebo že jeden z nich (β) je pravý, bude platit rovnost:

$$a.\sin\beta = v_c = b.\sin\alpha,$$

z nenulovosti délek stran plyne dělením původní rovnost.

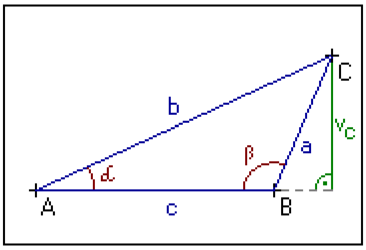




Pokud je jeden z úhlů (β) tupý, bude předchozí vzorec vypadat takto:

$$a.\sin(\pi-\beta) = v_c = b.\sin\alpha,$$

což ale z vlastností funkce sinus vede k předchozímu případu.

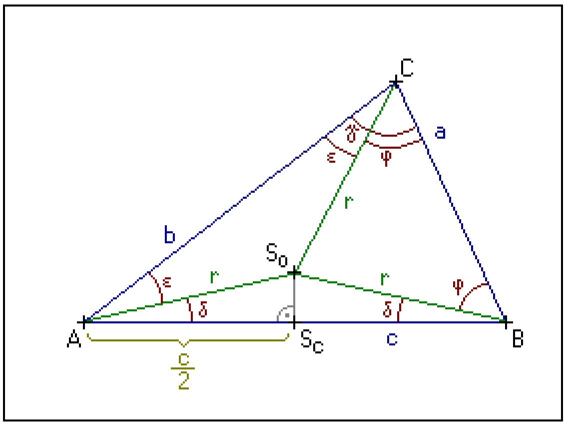


Pro poslední rovnost postupně označme δ, ε, φ vnitřní úhly trojúhelníků AS_oB, AS_oC, BS_oC při vrcholech původního trohúhelníku ABC. Z rovností

$$2(\delta + \varepsilon + \varphi) = \pi, \quad \varepsilon + \varphi = \gamma$$

plyne $\delta + \gamma = \pi/2$. Postupně se dostáváme k počáteční rovnosti:

$$c = 2r.\cos\delta = 2r.\cos(\pi/2 - \gamma) = 2r.\sin\gamma$$



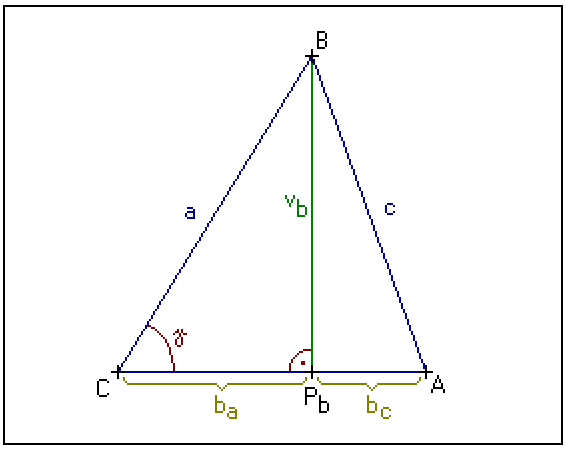
Kosinová věta

Pro každý trojúhelník ABC se stranami a, b, c a vnitřním úhlem γ při vrcholu C platí:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\gamma,$$

přičemž se dá věta cyklicky zaměnit i pro ostatní vnitřní úhly.

Důkaz: Pythagorova věta je speciálním případem kosinové věty pro úhel γ pravý. Je-li γ úhel ostrý, rozděluje pata P_b výšky v_b stranu b na dvě úsečky b_c, b_a.



Pomocí úhlu γ a strany a můžeme vyjádřit v_b, b_a, z nich potom b_c.

$$v_b = a.\sin\gamma$$

$$b_a = a.\cos\gamma$$

$$b_c = b - b_a = b - a.\cos\gamma$$

Pro c, b_c, v_b platí Pythagorova věta:

$$c^2 = b_c{}^2 + v_b{}^2 = (b - a.\cos\gamma)^2 + (a.\sin\gamma)^2 = b^2 - 2ab.\cos\gamma + a^2\cos^2\gamma + a^2\sin^2\gamma =$$

$$= a^2 + b^2 - 2ab.\cos\gamma$$

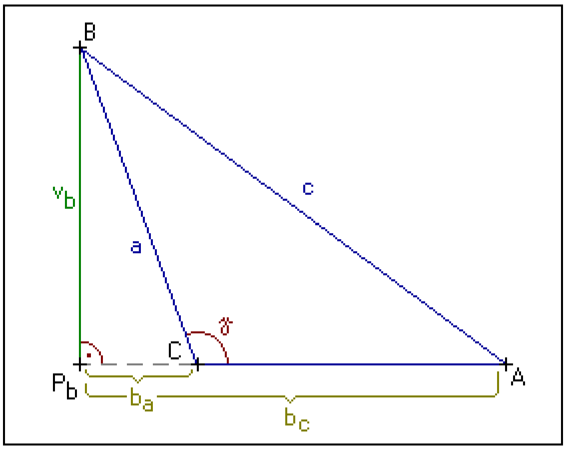
V případě, že je úhel γ tupý, neleží P_b na straně b. Potom

$$v_b = a.\sin(\pi - \gamma) = a.\sin\gamma,$$

$$b_a = a.\cos(\pi - \gamma) = -a.\cos\gamma,$$

$$b_c = b + b_a = b - a.\cos\gamma,$$

což odpovídá i vzorcům pro ostrý úhel γ.


B
v_b
a
c
C
ϑ
P_b
A
b_a
b_c

Konstrukční úlohy

Množiny bodů dané vlastnosti

Nedílnou součástí řešení konstrukčních úloh je využívání množin bodů dané vlastnosti. Jedná se o množiny bodů v rovině (lze případně i v prostoru). V této množině jsou všechny body, které mají danou vlastnost, a žádné jiné. Příkladem může být kružnice, což je množina všech bodů, které mají od jistého bodu (středu) danou vzdálenost (poloměr). Symbolicky zapisujeme $\mathsf{M} = \{X \in \rho;\ \varphi(X)\}$, kde φ je výrok.

Úvod do konstrukčních úloh

Konstrukční úloha je příklad, jehož řešením je geometrický útvar se zadanými vlastnostmi sestrojený pomocí pravítka, kružítka a případně i úhloměru. Při řešení těcto úloh se využívá jak množin bodů dané vlastnosti a množinových operací, tak geometrických vět. Obecně dělíme konstrukční úlohy na **polohové**, kde je sestrojovaný obrazec jednoznačně určen svou polohou, a **nepolohové**, u kterých lze daný obrazec sestrojit kdekoliv. Nepolohové úlohy se převádějí na polohové vhodným pevným zvolením určujících prvků.

Příkladem nepolohové úlohy je sestrojit trojúhelník o daných délkách stran. Ekvivalentní polohová úloha je například najít třetí vrchol trojúhelníku, známe-li dva vrcholy a délky stran. Zmíněnou nepolohovou úlohu na polohovou změníme, když v rovině pevně umístíme jednu ze stran trojúhelníku.

Správnými kroky řešení konstrukční úlohy jsou **rozbor**, **popis konstrukce**, **konstrukce** samotná a **závěr** společně s **diskuzí**. Rozborem se myslí nástin řešení, popis konstrukce je potom konkrétní zápis kroků, podle kterých se bude konstrukce provádět. Závěr a diskuze, popřípadě zkouška, nakonec ověří správnost konstrukce a v závislosti na zadání prověří počet řešení, přičemž uvažujeme všechna řešení v rovině.

Některé kroky při řešení konstrukčních úloh považujeme za základní a není nutné je tedy rozepisovat, např. vztyčení kolmice, sestrojení rovnoběžky nebo osy úhlu.

Práce s applety

Řešení následujících příkladů je doplněno o applety CabriJava, pomocí nichž lze měnit zadání a tedy i výsledné obrazce. S délkami stran nebo velikostmi úhlů lze interaktivně pracovat a výsledky se tedy v závislosti na zadání ihned přetvářejí. Případný postup konstrukce je možné sledovat dvojklikem na applet, kdy se objeví v dolní části okna posunovací lišta.

V appletech se místo indexů používá znak "_" (podtržítko). V příkladech na kostrukci délek místo odmocniny anglická zkratka **sqrt** (square root), místo mocniny znak "^" (stříška).

Příklady

Příklad 1

Sestrojte kružnici opsanou obecnému trojúhelníku *ABC*.

Řešení

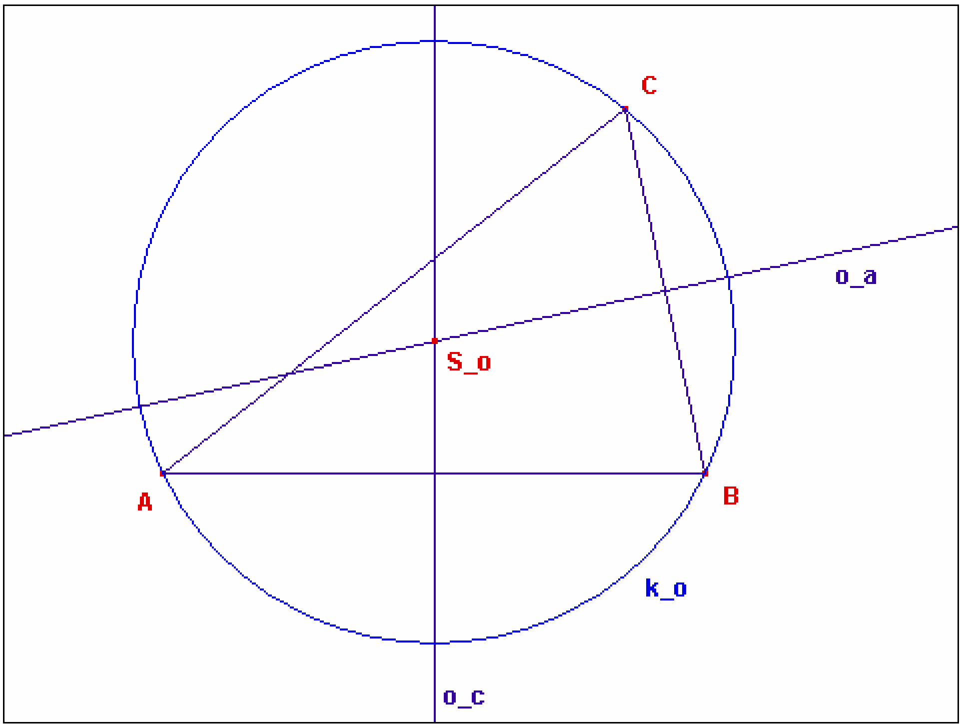
Sestrojíme obecný trojúhelník *ABC*, k němu potom hledáme střed a poloměr kružnice opsané.

Rozbor:

Střed kružnice opsané leží v průniku os stran. Všechny se protínají v jednom bodě, k jeho sestrojení stačí osy dvě.

Popis konstrukce:

1. ΔABC
2. o_c; o_c osa strany c
3. o_a; o_a osa strany a
4. S_o; $S_o \in (o_c \cap o_a)$
5. k_o; $k_o(S_o; |S_oA|)$



Diskuze:

Osy stran trojúhelníku nemohou být nikdy rovnoběžné, proto vždy existuje jejich průsečík. Každý trojúhelník má tedy právě jednu kružnici opsanou.

Příklad 2

Sestrojte kružnici vepsanou obecnému trojúhelníku *ABC*.

Řešení

Sestrojíme obecný trojúhelník *ABC*, k němu potom hledáme střed a poloměr kružnice vepsané.

Rozbor:

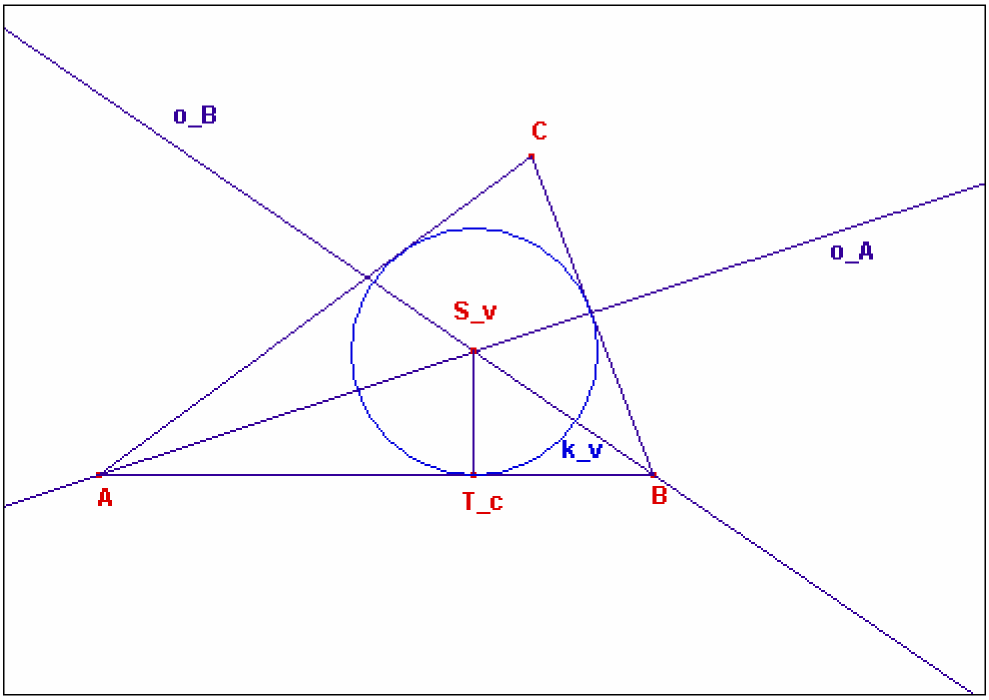
Střed kružnice vepsané leží v průniku os úhlů. Všechny se protínají v jednom bodě, k jeho sestrojení stačí osy dvě. Poloměr potom získáme pomocí kolmého průmětu středu do jedné ze stran.

Popis konstrukce:

1. ΔABC
2. o_A; o_A osa úhlu při vrcholu A
3. o_B; o_B osa úhlu při vrcholu B
4. S_v; $S_v \in (o_A \cap o_B)$
5. T_c; T_c kolmý průmět bodu S_v do strany c
6. k_v; $k_v(S_v; |S_vT_c|)$

Diskuze:

Osy úhlů trojúhelníku nemohou být nikdy rovnoběžné, proto vždy existuje jejich průsečík. Každý trojúhelník má tedy právě jednu kružnici vepsanou.



Příklad 3

Sestrojte kružnici připsanou jedné ze stran obecného trojúhelníku *ABC*.

Řešení

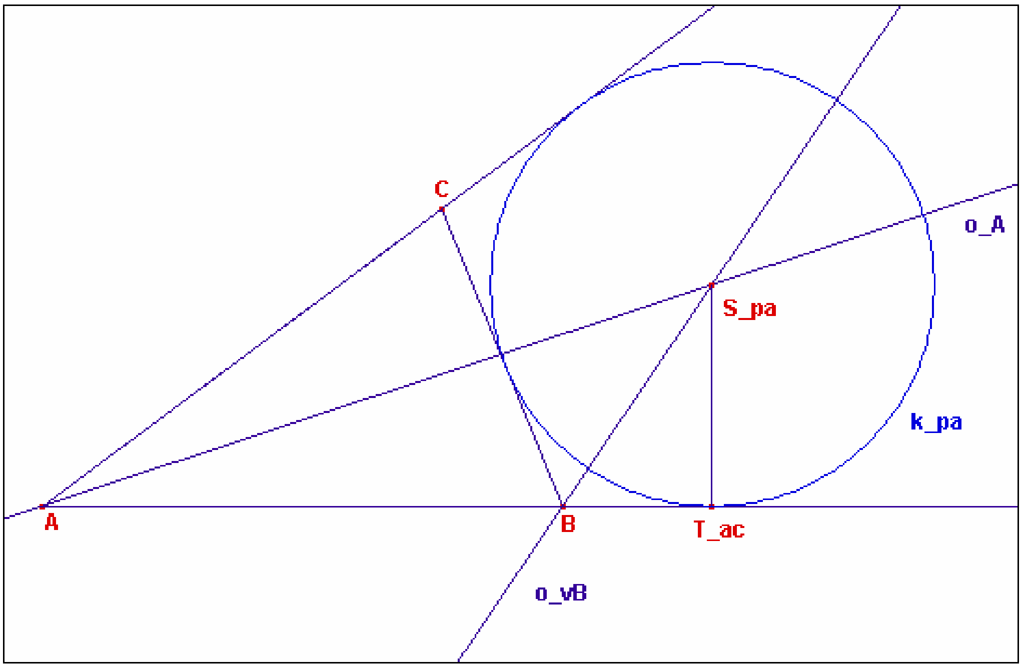
Sestrojíme obecný trojúhelník *ABC*, u něj potom hledáme střed a poloměr kružnice připsané jedné z jeho stran, např. straně *a*.

Rozbor:

Střed kružnice připsané straně *a* leží v průniku osy úhlu při vrcholu *A* a os vnějších úhlů při vrcholech *B*, *C*. Všechny se protínají v jednom bodě, k jeho sestrojení stačí dvě ze zmíněných os. Poloměr potom získáme pomocí kolmého průmětu středu do jedné z přímek, na nichž strany leží.

Popis konstrukce:

1. ΔABC
2. o_A; o_A osa úhlu při vrcholu A
3. o_{vB}; o_{vB} osa vnějšího úhlu při vrcholu B
4. S_{pa}; $S_{pa} \in (o_A \cap o_{vB})$
5. T_{ac}; T_{ac} kolmý průmět bodu S_{pa} do přímky $\leftrightarrow AB$
6. k_{pa}; $k_{pa}(S_{pa}; |S_{pa}T_{ac}|)$



Diskuze:

Osa vnitřního úhlu a osy zbylých dvou vedlejších úhlů trojúhelníku nemohou být nikdy rovnoběžné, proto vždy existuje jejich průsečík. Každý trojúhelník má tedy právě tři kružnice připsané, každá z nich přísluší jedné straně.

Příklad 4

Sestrojte ΔKLM, znáte-li délky jeho stran k, l, m.

Řešení

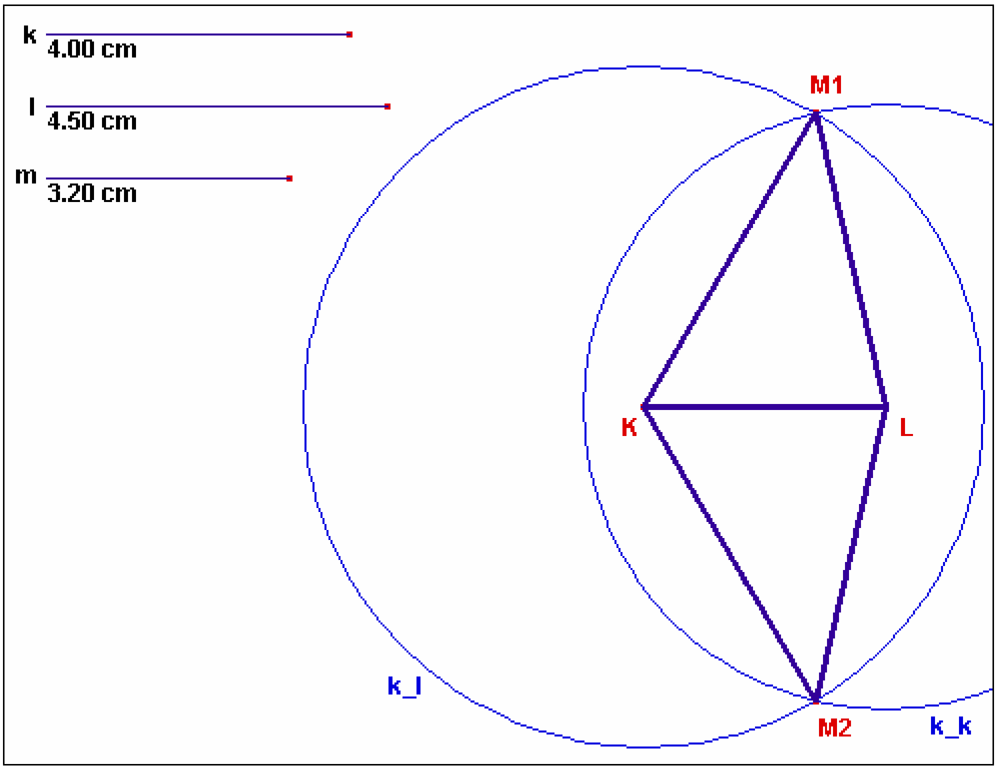
Libovolně zvolíme úsečku KL, $|KL| = m$, potom hledáme bod M.

Rozbor:

Bod M je od bodu K vzdálen o délku l a od bodu L vzdálen o délku k. Bude tedy ležet v průniku dvou kružnic.

Popis konstrukce:

1. KL; $|KL| = m$
2. k_l; $k_l(K; l)$
3. k_k; $k_k(L; k)$
4. M; $M \in (k_l \cap k_k)$
5. ΔKLM



Diskuze:

Počet řešení závisí na délkách všech tří stran, tedy na trojúhelníkové nerovnosti.

$\lvert l - m\rvert < k < l + m$	2 řešení, navzájem shodná
$\lvert l - m\rvert \geq k \quad \text{v} \quad k \geq l + m$	0 řešení

Příklad 5

Sestrojte ΔABC, znáte-li délky jeho stran a, c a velikost vnitřního úhlu α při vrcholu A.

Řešení

Libovolně zvolíme úsečku AB, $\lvert AB\rvert = c$, následně hledáme bod C.

Rozbor:

Bod C leží na polopřímce $\mapsto AX$ svírající s úsečkou AB daný úhel α a je od vrcholu B vzdálen o délku strany a.

Popis konstrukce:

1. AB; $\lvert AB\rvert = c$

2. $\mapsto AX$; $|\sphericalangle BAX| = \alpha$

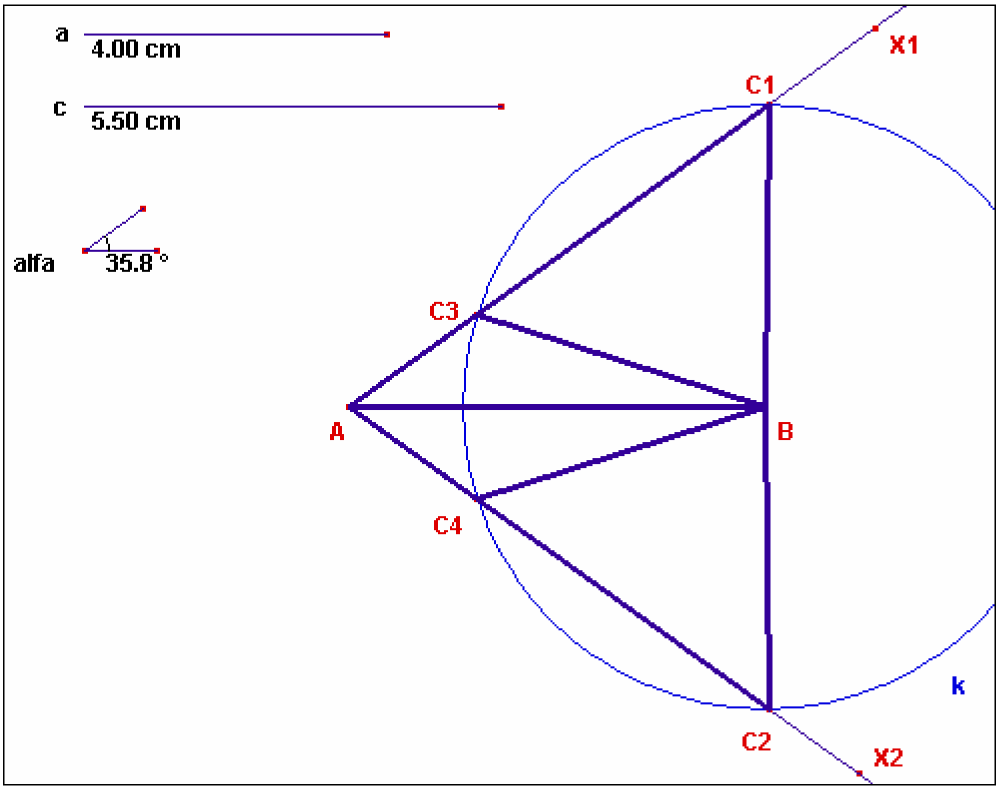
3. k; $k(B; a)$

4. C; $C \in (k \cap \mapsto AX)$

5. ΔABC

Diskuze:

Počet řešení závisí na počtu prvků průniku polopřímky $\mapsto AX$ s kružnicí k. Pokud je α úhel ostrý (tj. $0° < \alpha < 90°$), je bod B od polopřímky $\mapsto AX$ vzdálen $c.\sin\alpha$. Další mezní hodnotou je případ $a = c$, kde kružnice k prochází bodem A. V případě, že je α úhel pravý nebo tupý ($90° \leq \alpha < 180°$) rozhodují o počtu řešení pouze délky stran a, c.



$0° < \alpha < 90°$	$a < c.\sin\alpha$	0 řešení
	$a = c.\sin\alpha$	2 řešení, navzájem shodná
	$c.\sin\alpha < a < c$	4 řešení, dvě dvojice shodných
	$a \geq c$	2 řešení, navzájem shodná
$90° \leq \alpha < 180°$	$a \leq c$	0 řešení
	$a > c$	2 řešení, navzájem shodná

Příklad 6

Sestrojte ΔABC, znáte-li délku jeho strany c a velikosti vnitřních úhlů α, γ při vrcholech A, C.

Řešení

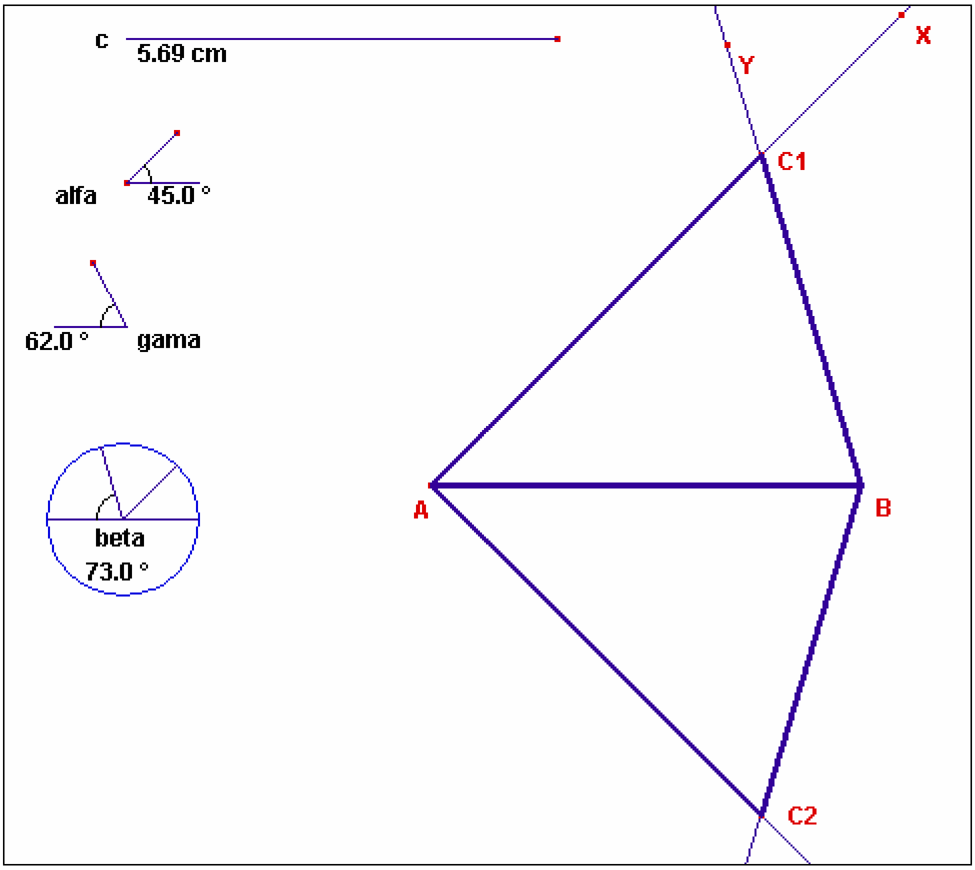
Libovolně zvolíme úsečku AB, $|AB| = c$, potom hledáme bod C.

Rozbor:

Bod C leží na polopřímce $\mapsto AX$ svírající s úsečkou AB daný úhel α a zároveň leží na oblouku představující množinu všech bodů Z takových, že $|\sphericalangle AZB| = \gamma$. Jednodušší, než sestrojovat oblouk, bude v tomto případě dopočítat úhel β při vrcholu B; $\beta = \pi - \alpha - \gamma$.

Popis konstrukce:

1. AB; $|AB| = c$
2. $\mapsto AX$; $|\sphericalangle BAX| = \alpha$
3. $\mapsto BY$; $|\sphericalangle ABY| = \pi - \alpha - \gamma$
4. C; $C \in (\mapsto AX \cap \mapsto BY)$
5. ΔABC



Diskuze:

Počet řešení nezávisí na délce strany c, ani na velikostech zadaných vnitřních úhlů (jejich součet samozřejmě nesmí být větší nebo roven 180º). Řešení jsou tedy při korektním zadání vždy dvě navzájem shodná.

Příklad 7

Sestrojte ΔDEF, znáte-li délku jeho strany f, velikost vnitřního úhlu δ při vrcholu D a délku výšky v_d na stranu d.

Řešení

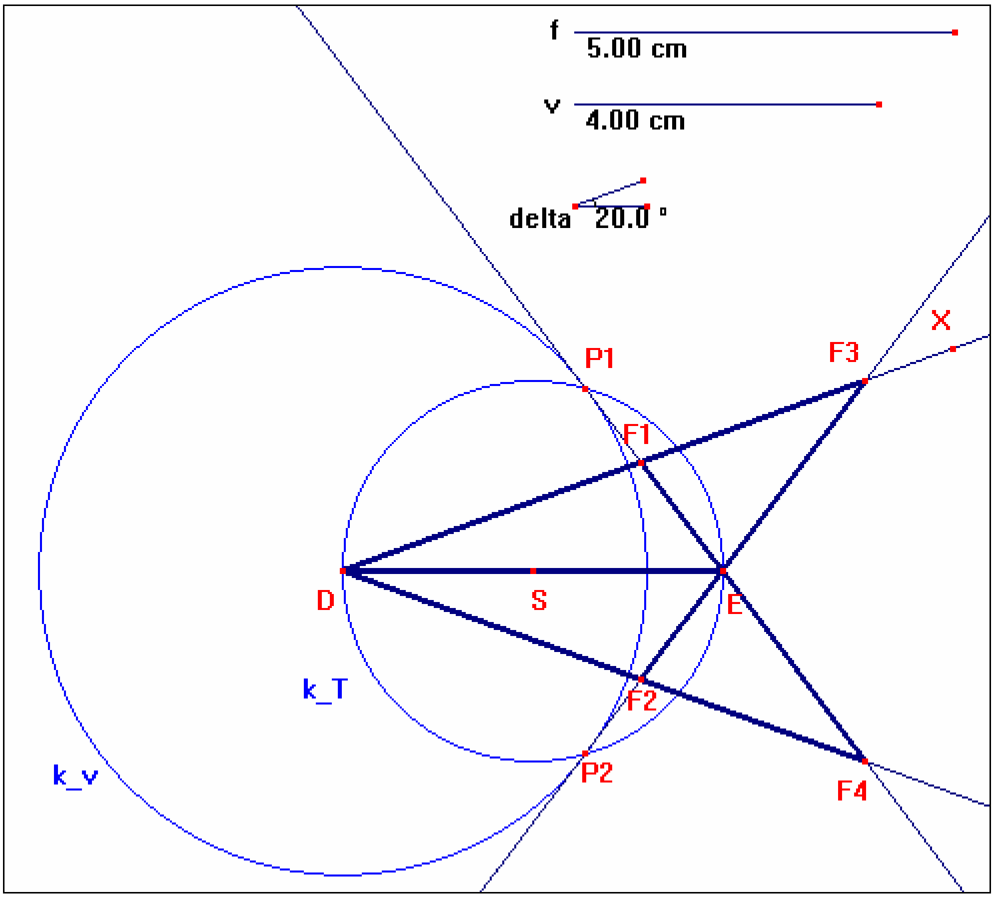
Libovolně zvolíme úsečku DE, $|DE| = f$, následně hledáme bod F.

Rozbor:

Bod F leží na polopřímce $\mapsto DX$ svírající s úsečkou DE daný úhel δ a zároveň na přímce $\leftrightarrow EP$, kde P je pata výšky na stranu d. Bod P je od bodu D vzdálen délkou v_d a náleží Thaletově kružnici nad úsečkou DE. Thaletova kružnice nad úsečkou AB je kružnice se středem S_{AB} a poloměrem $|AS_{AB}|$, je to množina bodů X takových, že $|\sphericalangle AXB| = 90°$. V případě, kdy $f = v_d$, je přímka $\leftrightarrow EP$ kolmá na stranu f a není nutné konstruovat Thaletovu kružnici.

Popis konstrukce pro případ $f \neq v_d$:

1. DE; $|DE| = f$
2. $\mapsto DX$; $|\sphericalangle EDX| = \delta$
3. S; S střed DE
4. k_T; $k_T(S, |DS|)$
5. k_v; $k_v(D, v_d)$
6. P; $P \in (k_T \cap k_v)$
7. $\leftrightarrow EP$
8. F; $F \in (\mapsto DX \cap \leftrightarrow EP)$
9. ΔDEF



Popis konstrukce pro případ $f = v_d$:

1. DE; $|DE| = f$

2. $\mapsto DX$; $|\sphericalangle EDX| = \delta$

3. $\mapsto EY$; $|\sphericalangle DEY| = 90°$

4. F; $F \in (\mapsto DX \cap \leftrightarrow EY)$

5. ΔDEF

Diskuze:

Počet řešení závisí na počtu prvků průniku přímky a polopřímky v bodě 8, resp. v bodě 4.

Pokud je výška větší než strana, řešení nebude žádné. V ostatních případech ovlivňuje počet řešení velikost úhlu δ.

$f < v_d$		0 řešení
$f = v_d$	$\delta \geq 90°$	0 řešení
	$0° < \delta < 90°$	2 řešení, navzájem shodná
$f > v_d$	$v_d < f.\sin\delta$	2 řešení
	$f.\sin\delta = v_d$, $0° < \delta < 90°$	2 řešení, navzájem shodná
	$f.\sin\delta < v_d$, $0° < \delta < 90°$	4 řešení, dvě dvojice shodných
	$f.\sin\delta \leq v_d$, $\delta \geq 90°$	0 řešení

Příklad 8

Sestrojte ΔKLM, znáte-li délku jeho strany m, velikost vnitřního úhlu κ při vrcholu K a délku těžnice t_k na stranu k.

Řešení

Libovolně zvolíme úsečku KL, $|KL| = m$, k ní potom hledáme bod M.

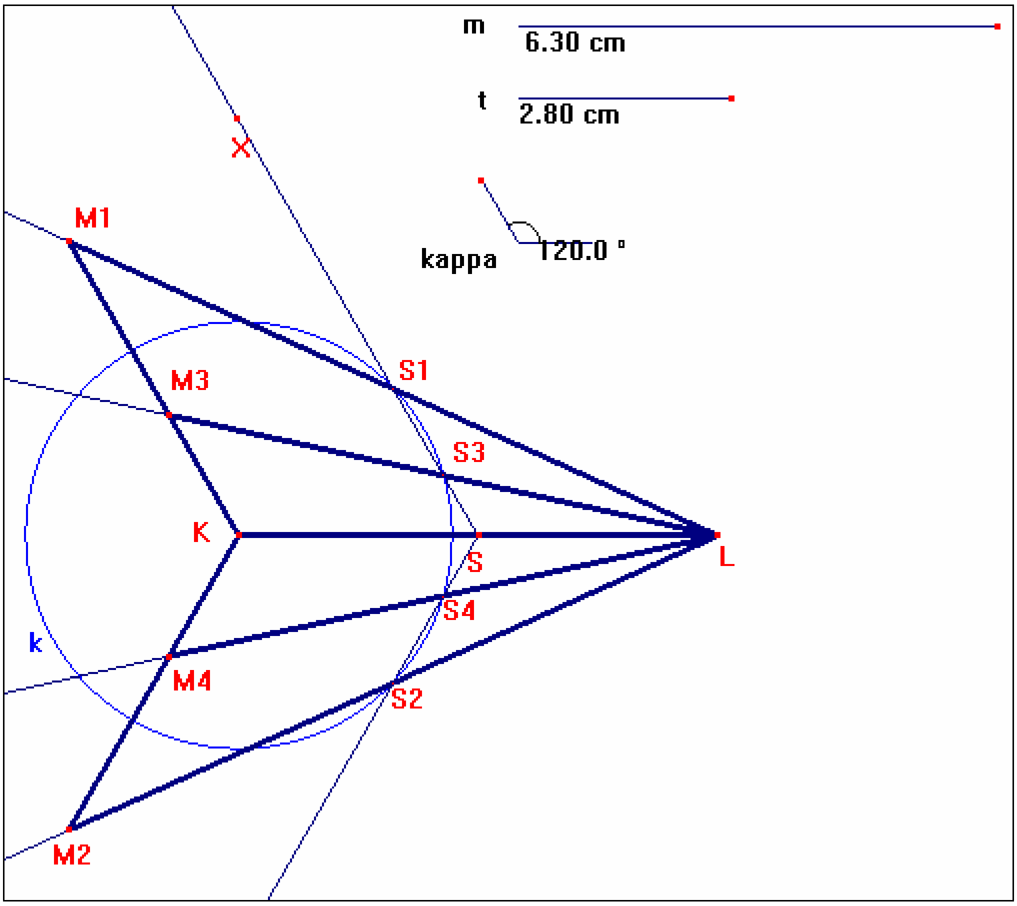
Rozbor:

Bod M leží na polopřímce $\mapsto LS_k$, kde S_k je střed strany LM. Bod S_k je od bodu K vzdálen délkou t_k a leží na polopřímce $\mapsto SX$, kde S je střed strany m a X je bod vyhovující podmínce $|\sphericalangle LSX| = \kappa$.

Popis konstrukce:

1. KL; $|KL| = m$
2. S; S střed KL
3. $\mapsto SX$; $|\sphericalangle LSX| = \kappa$
4. k; $k(K, t_k)$
5. S_k; $S_k \in (k \cap \mapsto SX)$
6. M; $M \in \mapsto LS_k$, $|MS_k| = |LS_k|$, $M \neq L$
7. ΔKLM

V appletu je z důvodu více řešení místo S_k pouze S následované číslem.



Diskuze:

Počet řešení závisí na počtu prvků průniku kružnice k s polopřímkou $\mapsto S_m X$. Pokud je polovina strany m delší než těžnice t_k, řešení budou vždy dvě. V opačném případě mohou nastat situace, že přímka kružnici protíná v jednom nebo ve dvou bodech, případně že jejich průnik je prázdný.

$0° < \kappa \leq 90°$	$m \geq 2t_k$	0 řešení
	$m < 2t_k$	2 řešení, navzájem shodná
$90° < \kappa < 180°$	$2t_k < m.\sin\alpha$	0 řešení
	$2t_k = m.\sin\alpha$	2 řešení, navzájem shodná
	$m.\sin\alpha < 2t_k < m$	4 řešení, dvě dvojice shodných
	$m \leq 2t_k$	2 řešení, navzájem shodná

Příklad 9

Sestrojte ΔABC, znáte-li délku jeho strany c a délky těžnic t_c a t_b.

Řešení

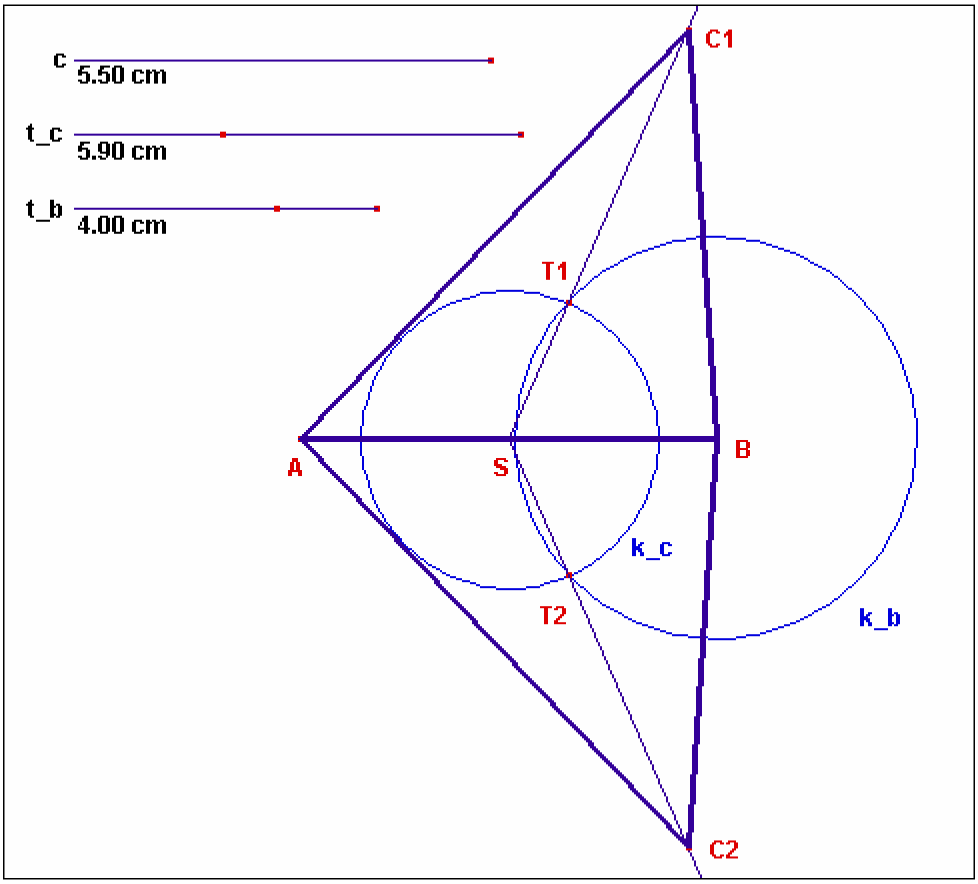
Libovolně zvolíme úsečku AB, $|AB| = c$, následně hledáme bod C.

Rozbor:

Nejprve sestrojíme těžiště T, které je od středu S_c vzdáleno $t_c/3$ a od vrcholu B vzdáleno $2t_b/3$. Bod C leží na polopřímce $\mapsto S_cT$ a $|S_cC| = t_c$.

Popis konstrukce:

1. AB; $|AB| = c$
2. S; S střed AB
3. k_c; $k_c(S, t/3)$
4. k_b; $k_b(B, 2t_b/3)$
5. T; $T \in (k_c \cap k_b)$
6. C; $C \in \mapsto ST$, $|SC| = t_c$
7. ΔABC



Diskuze:

Počet řešení je závislý na počtu prvků průniku dvou kružnic v bodě 5. Aby řešení existovala, musí pro $c/2$, $t_c/3$, $2t_b/3$ platit trojúhelníková nerovnost.

$\lvert t_c/3 - 2t_b/3\rvert < c/2 < t_c/3 + 2t_b/3$	2 řešení, navzájem shodná
$\lvert t_c/3 - 2t_b/3\rvert \geq c/2$ v $c/2 \geq t_c/3 + 2t_b/3$	0 řešení

Příklad 10

Sestrojte ΔABC, znáte-li délku strany c, těžnice t_c a výšky v_c.

Řešení

Libovolně zvolíme úsečku AB, $\lvert AB\rvert = c$, k ní potom hledáme bod C.

Rozbor:

Bod C je od středu úsečky AB vzdálen o délku t_c a od úsečky AB samotné o délku v_c. Bude tedy ležet v průniku dvou množin bodů, kružnice a přímky.

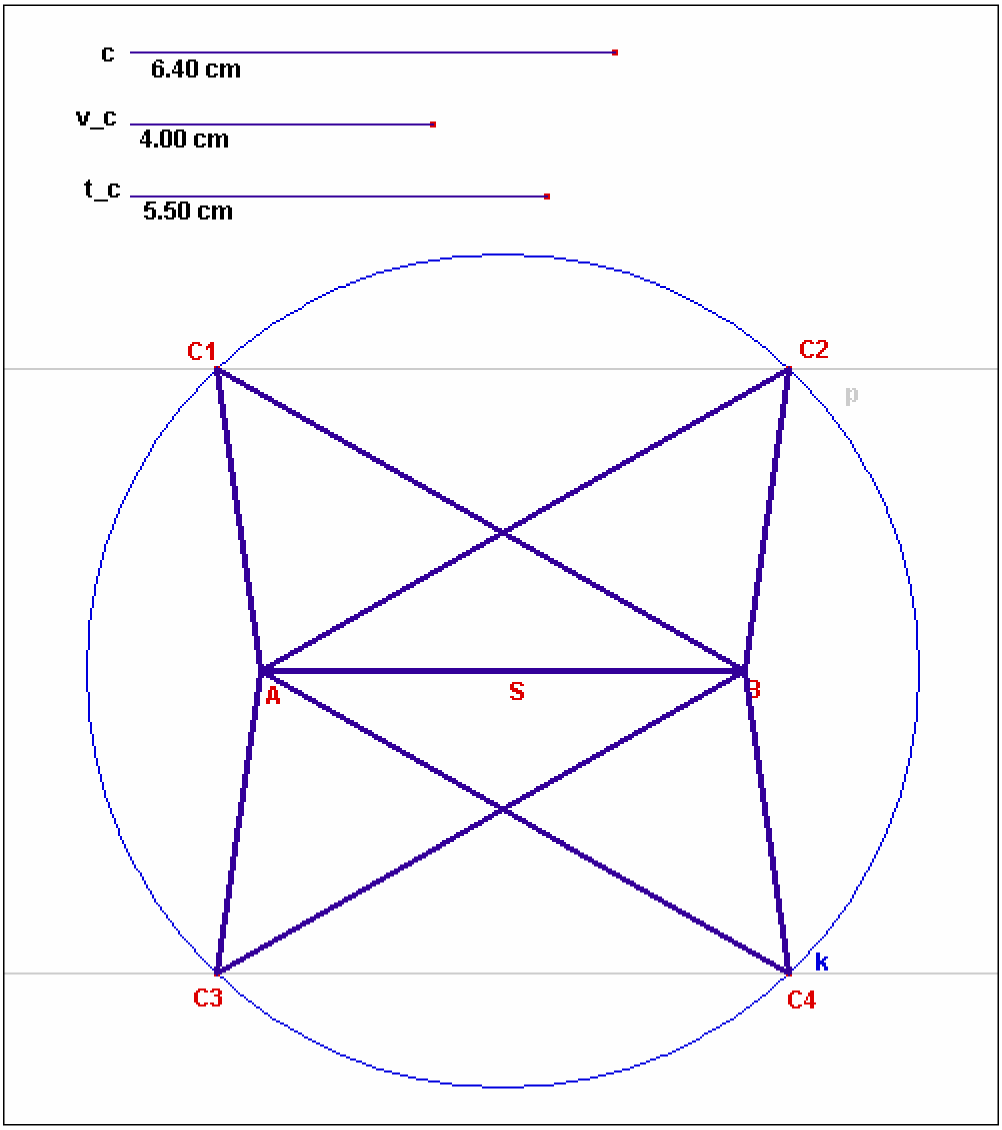
Popis konstrukce:

1. AB; $\lvert AB\rvert = c$
2. S; S střed AB
3. k; $k(S; t_c)$
4. p; $p \parallel AB$, $d(p; AB) = v_c$
5. C; $C \in (p \cap k)$
6. ΔABC

Diskuze:

Počet řešení závisí na počtu prvků průniku množin bodů při kroku 5. Ten záleží na délkách t_c, v_c.

$t_c > v_c$	4 řešení, všechna shodná
$t_c = v_c$	2 řešení, navzájem shodná
$t_c < v_c$	0 řešení



Příklad 11

Pomocí Pythagorovy věty sestrojte úsečku délky $\sqrt{a^2 + b^2}$, pokud znáte úsečky délek a, b.

Řešení

Výraz odpovídá délce přepony v pravoúhlém trojúhelníku o odvěsnách a, b.

Rozbor:

Sestrojíme úsečku délky a, v jednom jejím krajním bodě sestrojíme kolmou úsečku délky b.

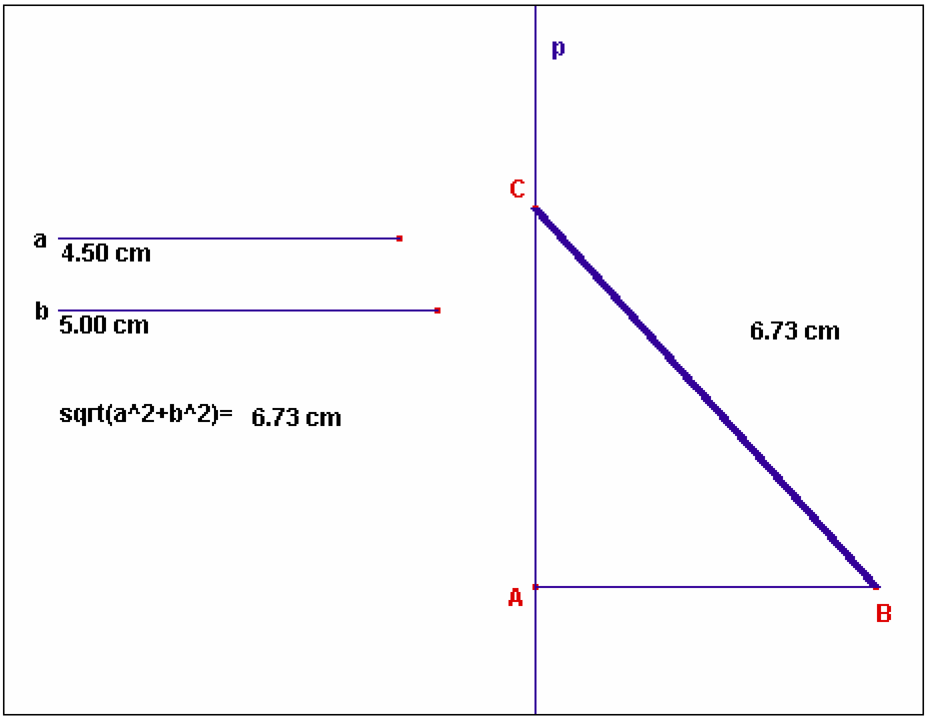
Popis konstrukce:

1. AB; $|AB| = a$

2. p; $A \in p$, p kolmá na AB

3. C; $C \in p$, $|AC| = b$

4. BC



Diskuze:

Podle Pythagorovy věty je délka úsečky BC rovna výrazu $\sqrt{a^2+b^2}$.

Příklad 12

Pomocí Pythagorovy věty sestrojte úsečku délky $\sqrt{a^2-b^2}$, pokud znáte úsečky délek a, b, $a > b$.

Řešení

Výraz odpovídá délce odvěsny v pravoúhlém trojúhelníku s přeponou a a odvěsnou b.

Rozbor:

Sestrojíme úsečku délky b a v jednom jejím krajním bodě sestrojíme kolmici, bod odpovídající výrazu najdeme pomocí kružnice o poloměru a se středem v druhém krajním bodě úsečky.

Popis konstrukce:

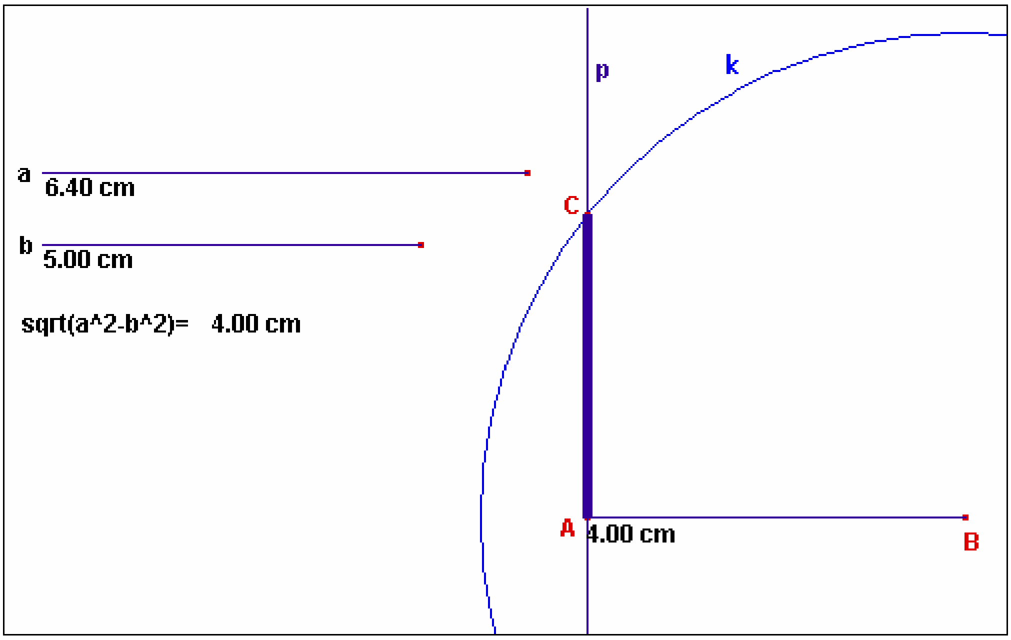
1. AB; $|AB| = b$

2. p; $A \in p$, p kolmá na AB

3. k; $k(B, a)$

4. C; $C \in (p \cap k)$

5. AC



Diskuze:

Výraz má smysl, pouze pokud $a \geq b$, což odpovídá i existenci řešení pomocí konstrukce. Podle Pythagorovy věty je délka úsečky AC rovna výrazu $\sqrt{a^2 - b^2}$.

Příklad 13

Pomocí Euklidovy věty o výšce sestrojte úsečku délky $\sqrt{ab}$, pokud znáte úsečky délek a, b.

Řešení

Výraz odpovídá délce výšky v pravoúhlém trojúhelníku, která přeponu rozděluje na úseky délek a, b.

Rozbor:

Sestrojíme úsečku délky a+b, nad ní Thaletovu kružnici. V bodě rozdělení úsečky na úseky délek a, b vztyčíme kolmici. V průniku kolmice a Thaletovy kružnice vznikne třetí vrchol pravoúhlého trojúhelníku.

Popis konstrukce:

1. AB; $|AB| = a+b$

2. S; S střed AB

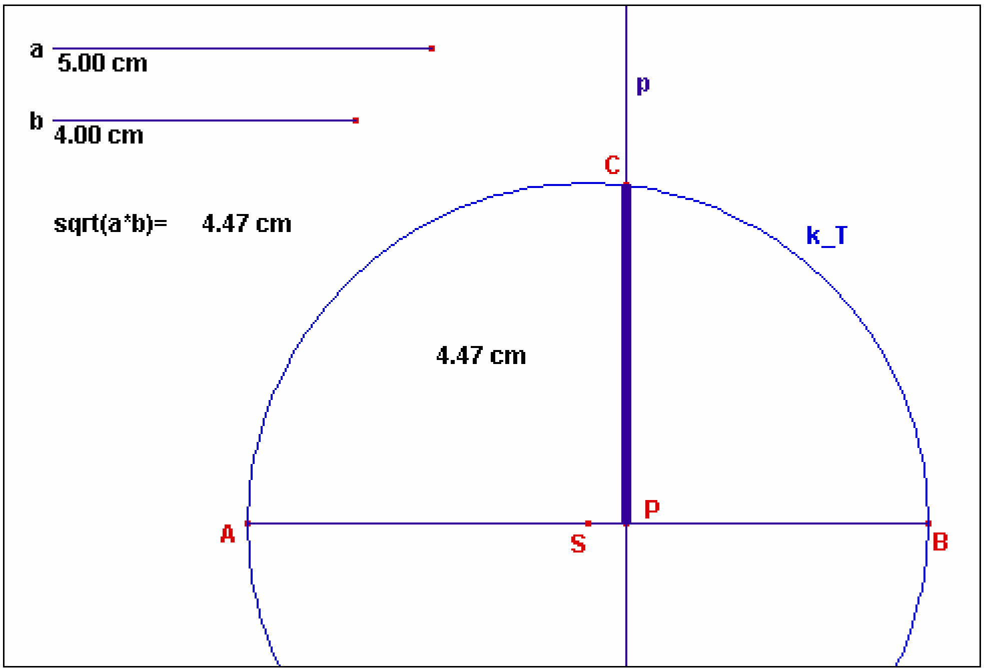
3. k_T; $k_T(S, |SA|)$

4. P; $P \in AB$, $|AP| = a$

5. p; $P \in p$, p kolmá na AB

6. C; $C \in (k_T \cap p)$

7. PC



Diskuze:

Podle Euklidovy věty o výšce je délka úsečky PC rovna výrazu $\sqrt{ab}$.

Příklad 14

Pomocí Euklidovy věty o odvěsně sestrojte úsečku délky $\sqrt{ab}$, pokud znáte úsečky délek a, b, $a > b$.

Řešení

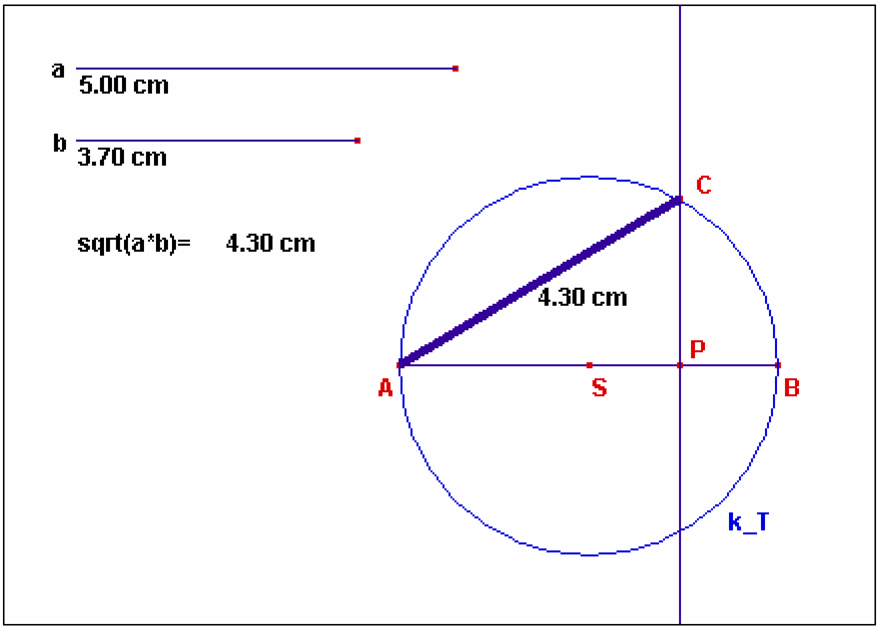
Výraz odpovídá délce odvěsny v pravoúhlém trojúhelníku s přeponou délky a, v němž výška rozděluje přeponu na úseky délek b, a-b.

Rozbor:

Sestrojíme úsečku délky a, nad ní Thaletovu kružnici. V bodě rozdělení úsečky na úseky délek b, a-b vztyčíme kolmici. V průniku kolmice a Thaletovy kružnice vznikne třetí vrchol pravoúhlého trojúhelníku.

Popis konstrukce:

1. AB; $|AB| = a$
2. S; S střed AB
3. k_T; $k_T(S, |SA|)$
4. P; $P \in AB$, $|AP| = b$
5. p; $P \in p$, p kolmá na AB
6. C; $C \in (k_T \cap p)$
7. AC



Diskuze:

Podle Euklidovy věty o odvěsně je délka úsečky AC rovna výrazu $\sqrt{ab}$.

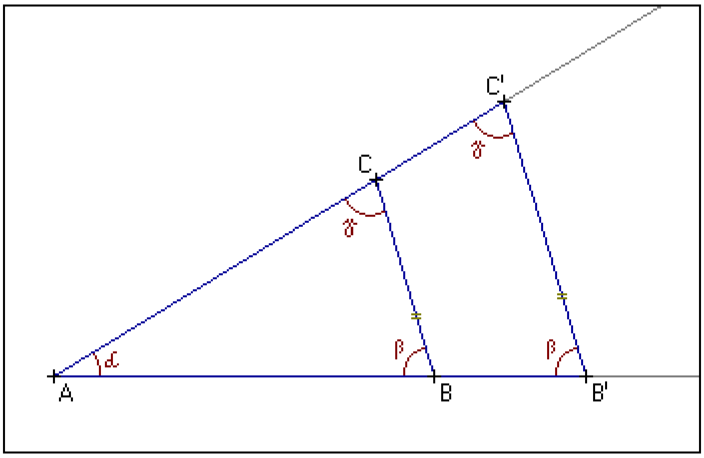
Výraz má smysl i v případě $b \geq a$, potom můžeme změnit značení tak, že delší úsečku označíme a, kratší úsečku b a aplikovat předchozí postup.

Příklad 15

Pomocí sinové věty sestrojte úsečku délky $\frac{ab}{c}$, pokud znáte úsečky délek a, b, c.

Řešení

Výraz odpovídá délce jedné ze stran dvou podobných trojúhelníků (tj. trojúhelníků s vnitřními úhly stejné velikosti) vzhledem k sinové větě.



$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{|AB'|}{|AC'|}$$

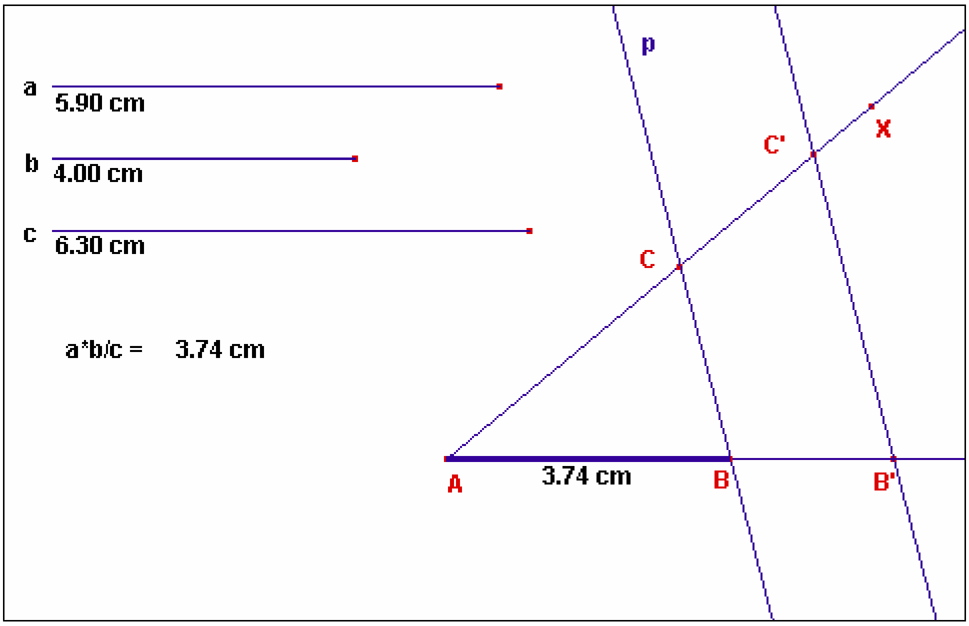
$$|AB| = \frac{|AB'|.|AC|}{|AC'|}$$

Rozbor:

Sestrojíme libovolný nenulový konvexní úhel, na jehož ramena poté naneseme délky jednotlivých úseček.

Popis konstrukce:

1. AB'; $|AB'| = a$
2. X; $0° < |\sphericalangle B'AX| < 180°$
3. C; $C \in \mapsto AX$, $|AC| = b$
4. C'; $C \in \mapsto AX$, $|AC'| = c$
5. $\leftrightarrow B'C'$
6. p, $C \in p$, $p \parallel \leftrightarrow B'C'$
7. B; $B \in (p \cap \mapsto AB')$
8. AB



Diskuze:

Podle věty sinové je délka úsečky *AB* rovna zadanému výrazu.

Závěr

Tato bakalářská práce vznikla v podobě webových stránek jako shrnutí základní středoškolské planimetrie. Jejím cílem je pomoci studentům, případně i učitelům si zopakovat nebo rozšířit znalosti týkající se trojúhelníků a konstrukčních úloh. Součástí práce jsou také řešené úlohy doplněné o applety CabriJava, které napomáhají názornosti předchozí látky.

Práce by měla být v budoucnu rozšířena o čtyřúhelníky a mnohoúhelníky, více příkladů na množiny bodů dané vlastnosti a další řešené úlohy.

Použitá literatura

[1] Sekanina, M. a kol.: Geometrie I a II. SPN, Praha, 1988.

[2] Pomykalová, E.: Matematika pro gymnázia: Planimetrie. Prometheus, Praha, 4. vyd., 2002.

[3] Herman, J. a kol.: Matematika: Úvodní opakování. Prometheus, Praha, 2. vyd., 1997.

[4] Stejskal, J.: Vytváříme WWW stránky pomocí HTML, CSS a JavaScriptu. Computer Press, Praha, 2004.

[5] Cabri Geometry II PLUS: Uživatelská příručka.