

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Hana Marková

B-spline křivky

Katedra numerické matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Karel Najzar, CSc.

Studijní program: Obecná matematika

2007

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 1.8.2007

Hana Marková

Obsah

1	Bázové funkce B-spline křivek	6
1.1	Základní pojmy a značení	6
1.2	Vlastnosti bázových funkcí	9
1.2.1	Vliv vícenásobných uzlů	10
2	B-spline křivky	11
2.1	Definice B-spline křivky	11
2.2	Základní typy B-spline křivek	12
2.3	Vlastnosti plovoucích křivek	12
2.4	Srovnání B-spline a Bézierových křivek	15
2.5	Výpočet koeficientů B-spline křivek	15
2.6	Posouvání řídicích bodů	17
2.7	Důsledky silné vlastnosti konvexního obalu	18
2.8	Změna uzlů	19
2.9	Derivace B-spline křivek	19
2.10	Příklad na závěr	20
3	Důležité algoritmy	22
3.1	Vložení uzlu	22
3.1.1	Vložení jednoduchého uzlu	22
3.1.2	Vložení uzlu do existujícího jednoduchého uzlu	23
3.1.3	Vložení uzlu do existujícího vícenásobného uzlu	24
3.1.4	Vícenásobné vložení uzlu	24
3.2	De Boorův algoritmus	26
3.3	Rozdělení B-spline křivky	28
3.3.1	Výběr řídicích bodů	28

4	Křivky v počítačové grafice	31
4.1	Křivky	31
4.2	Interpolační křivky	32
4.2.1	Fergusonovy kubiky	32
4.3	Aproximační křivky	33
4.3.1	Bézierovy kubiky	33
4.3.2	Coonsovy kubiky	33
4.3.3	Spline křivky	33
4.3.4	Uniformní neracionální kubické B-spline křivky . . .	33
4.3.5	NURBS	34
	Literatura	35

Název práce: B-spline křivky

Autor: Hana Marková

Katedra (ústav): Katedra numerické matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Karel Najzar, CSc.

e-mail vedoucího: knaj@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme speciální parametrické křivky, jejichž tvar je určen především lomenou čarou, krajní body této lomené čáry splývají s krajními body křivky. V úvodní části se zabýváme bázovými funkcemi a jejich vlastnostmi, na základě těchto funkcí se křivky definují. Práce se dále zaměřuje na plovoucí křivky a popisuje jejich základní vlastnosti a nejdůležitější algoritmy - vkládání jednoduchých i vícenásobných uzlů, výpočet bodu na křivce a rozdělení křivky na části. V poslední části je uveden stručný seznam aproximačních i interpolačních křivek využívaných v počítačové grafice, jejich výhody i nevýhody.

Klíčová slova: bázové funkce B-splinu, B-spline křivka, de Boorův algoritmus

Title: B-spline curves

Author: Hana Marková

Department: Department of Numerical Mathematics

Supervisor: Doc. RNDr. Karel Najzar, CSc.

Supervisor's e-mail address: knaj@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we study special parametric curves, whose shape is mainly defined by a polyline. The polyline and the curve have common end points and end tangents. First we study basis functions and their properties, these functions help us to define curves. Next the work describes floating curves, their basic properties and the most important algorithms - simple and multiple knot insertion, how to find a point on a curve and subdivide a curve. At the end we show brief list of approximation and interpolation curves, which are used in computer graphic, their advantages and disadvantages.

Keywords: B-spline basis functions, B-spline curve, de Boor's algorithm

Kapitola 1

Bázové funkce B-spline křivek

1.1 Základní pojmy a značení

Mějme množinu $U = \{u_0, u_1, \dots, u_m\}$, kde $u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_m$. Těchto $m + 1$ neklesajících členů posloupnosti nazveme **uzly**, samotné U **vektor uzlů**. Pro $i = 0, \dots, m - 1$ dostáváme **uzlové úseky** $[u_i, u_{i+1})$. Pokud $u_i = u_{i+1} = \dots = u_{i+k-1}$, kde $k > 1$, u_i nazveme **k-násobný uzel**, jinak **jednoduchý uzel**. Je-li výraz $u_{i+1} - u_i$ konstantní pro $i = 0, \dots, m - 1$, řekneme, že jsou uzly **ekvidistantní** a jejich uzlový vektor **uniformní**.

I-tou bázovou funkci B-spline křivky stupně p (ozn. $N_i^p(u)$) definujeme pomocí **Cox-de Boor rekurzivní formule**:

$$N_i^0(u) = \begin{cases} 1 & u \in [u_i, u_{i+1}) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

a

$$N_i^p(u) = \alpha_i^{p-1} N_i^{p-1}(u) + (1 - \alpha_{i+1}^{p-1}) N_{i+1}^{p-1}(u),$$

kde

$$\alpha_i^{p-1} = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i}.$$

Pracujeme-li s vícenásobnými uzly, použijeme stejný vzorec, pouze doplníme

$$N_i^{r-1}(u) = \frac{N_i^{r-1}}{u_{i+r} - u_i} = 0,$$

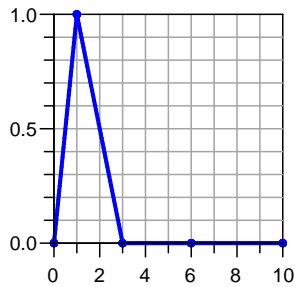
pokud

$$u_i = u_{i+r}.$$

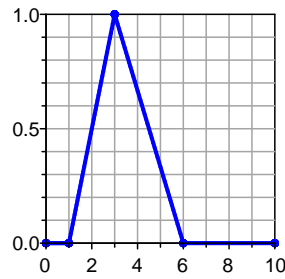
Bázové funkce B-spline křivek jsou používány jako váhy.

Příklad 1: Sestrojíme bázové funkce pro $U = \{0, 1, 3, 6, 10\}$.

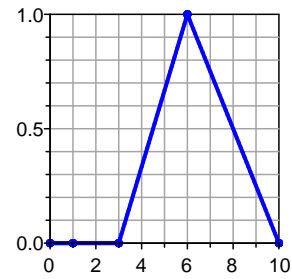
$N_i^0(u)$, $i = 0, \dots, 3$ jsou charakteristické funkce na $[u_i, u_{i+1})$, bázové funkce vyššího řádu jsou znázorněny grafy.



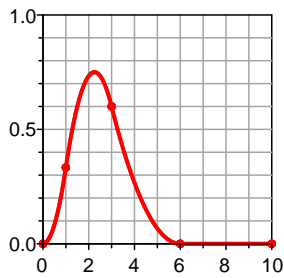
Obr. 1.1: $N_0^1(u)$



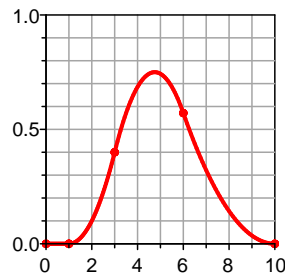
Obr. 1.2: $N_1^1(u)$



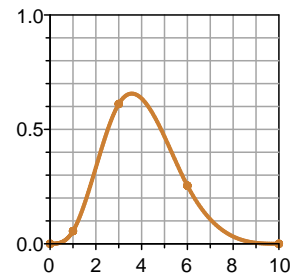
Obr. 1.3: $N_2^1(u)$



Obr. 1.4: $N_0^2(u)$

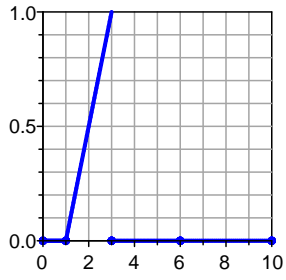


Obr. 1.5: $N_1^2(u)$

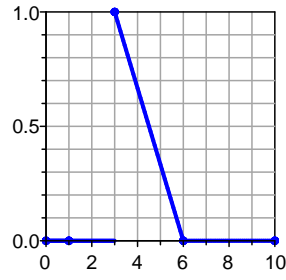


Obr. 1.6: $N_0^3(u)$

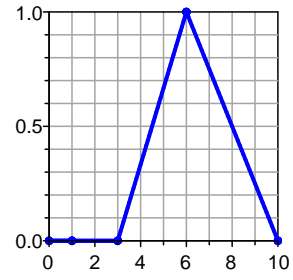
Příklad 2: $U = \{0, 1, 1, 3, 6, 10\}$; $N_2^0(u) = 0$ na $[0, 10]$, $N_0^0(u)$, $N_1^0(u)$ a $N_0^1(u)$ jsou stejné jako v př. 1, $N_3^0(u) = 1$ na $[3, 6)$, $N_4^0(u) = 1$ na $[6, 10)$.



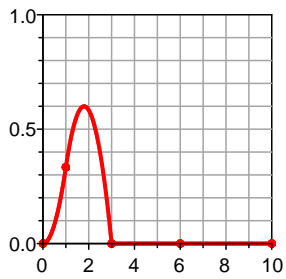
Obr. 1.7: $N_1^1(u)$



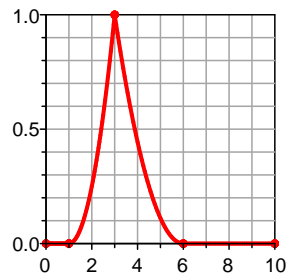
Obr. 1.8: $N_2^1(u)$



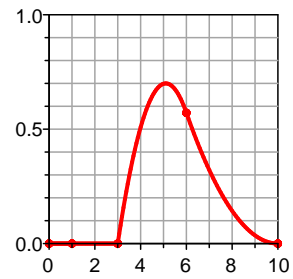
Obr. 1.9: $N_3^1(u)$



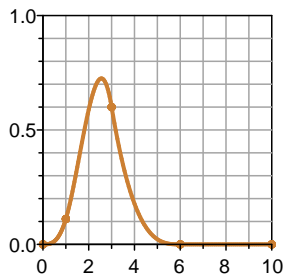
Obr. 1.10: $N_0^2(u)$



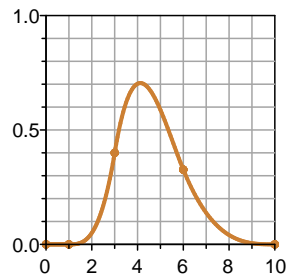
Obr. 1.11: $N_1^2(u)$



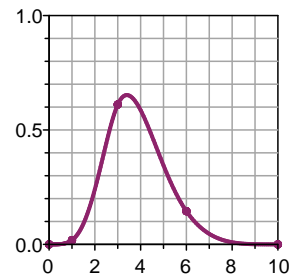
Obr. 1.12: $N_2^2(u)$



Obr. 1.13: $N_0^3(u)$



Obr. 1.14: $N_1^3(u)$



Obr. 1.15: $N_0^4(u)$

1.2 Vlastnosti bázových funkcí

Z rekurzivního vzorce a příkladů lze odvodit několik základních vlastností:

- $N_i^p(u)$ je **nezáporná zprava spojitá po částech polynomiální** funkce stupně p .
- Bázové funkce stupně p jsou **lineárně nezávislé** na dílčích intervalech vektoru uzlů, pokud na nich nedávají nulu.
- $N_i^p(u)$ je nenulová na $[u_i, u_{i+p+1})$, ekvivalentně $N_i^p(u)$ je nenulová na $p + 1$ uzlových úsecích $[u_i, u_{i+1})$, $[u_{i+1}, u_{i+2})$, \dots , $[u_{i+p}, u_{i+p+1})$.

Důkaz. K výpočtu $N_i^1(u)$ potřebujeme $N_i^0(u)$ a $N_{i+1}^0(u)$, které jsou nenulové na uzlových úsecích $[u_i, u_{i+1})$ a $[u_{i+1}, u_{i+2})$, $N_i^1(u)$ je tedy nenulová na $[u_i, u_{i+2})$. Podobně $N_i^2(u)$ závisí na $N_i^1(u)$ a $N_{i+1}^1(u)$, a protože jsou tyto bázové funkce nenulové na $[u_i, u_{i+2})$, resp. $[u_{i+1}, u_{i+3})$, $N_i^2(u)$ je nenulová na $[u_i, u_{i+3})$. Takto pokračujeme dále. \square

- Na libovolném uzlovém úseku $[u_i, u_{i+1})$ je nejvýše $p + 1$ nenulových bázových funkcí stupně p , a to: $N_{i-p}^p(u)$, $N_{i-p+1}^p(u)$, $N_{i-p+2}^p(u)$, \dots , $N_{i-1}^p(u)$ a $N_i^p(u)$.
- Součet všech nenulových bázových funkcí stupně p na úseku $[u_i, u_{i+1})$ je roven 1.
- Pokud $m + 1$ je počet uzlů, p stupeň bázových funkcí a $n + 1$ počet bázových funkcí stupně p , potom $m = n + p + 1$.

Důkaz. Nechť $N_n^p(u)$ je poslední bázová funkce stupně p . Víme, že $N_n^p(u)$ je nenulová na $[u_n, u_{n+p+1})$, a protože je poslední, $u_{n+p+1} = u_m$ a tedy $m = n + p + 1$. \square

- $N_i^p(u)$ má v k -násobném uzlu spojitost třídy C^{p-k} .

Poznámka: Pokud $u_1 = \dots = u_p = 0$, $u_{p+1} = \dots = u_{2p} = 1$ a $u \in [0, 1)$, potom se rekurzivní vzorec pro $N_i^p(u)$ shoduje se vzorcem pro Bernsteinovy polynomy, tzn. $N_i^p(u) = B_i^p(u)$ pro $i = 0, \dots, n$.

1.2.1 Vliv vícenásobných uzlů

Vícenásobné uzly mají vliv na výpočet bázových funkcí a některé vlastnosti.

- Každý k -násobný kořen zmenšuje nejvýše $k - 1$ bázových funkcím interval, na kterém jsou nenulové.

Důkaz. Vezměme si $N_i^p(u)$ a $N_{i+1}^p(u)$. První funkce je nenulová na $[u_i, u_{i+p+1})$, druhá na $[u_{i+1}, u_{i+p+2})$. Přesuneme u_{i+p+2} do u_{i+p+1} , aby vznikl dvojnásobný kořen. Potom $N_i^p(u)$ má stále $p + 1$ nenulových úseků uzlů, ale počet těchto úseků pro funkci $N_{i+1}^p(u)$ se zmenší o 1, protože úsek $[u_{i+p+1}, u_{i+p+2})$ zanikl. \square

Toto pozorování lze velmi snadno zobecnit: Vytvoření k -násobného uzlu ovlivní $k - 1$ bázových funkcí, přičemž jedné se počet nenulových úseků uzlů zmenší o 1, druhé o 2, atd.

- V každém vnitřním k -násobném uzlu je počet nenulových bázových funkcí alespoň $p - k + 1$.

Důkaz. Jelikož přesunutí uzlu u_{i-1} do u_i protáhne bázovou funkci, jejíž nenulovost končí v u_{i-1} , do u_i , zmenší se počet nenulových bázových funkcí v u_i o 1. Zvýšíme-li tedy násobnost u_i o 1, zmenší se počet nenulových bázových funkcí o 1. Jelikož nejvýše $p + 1$ bázových funkcí může být nenulových v u_i , počet nenulových bázových funkcí v uzlu násobnosti k je nejvýše $(p + 1) - k = p - k + 1$. \square

Kapitola 2

B-spline křivky

2.1 Definice B-spline křivky

Mějme vektor uzlů $U = \{u_0, u_1, \dots, u_m\}$ a dále P_i , $i = 0, \dots, n$ množinu $n + 1$ navzájem různých bodů z prostoru E_2 nebo E_3 , které budeme nazývat **řídícími body**.

B-spline křivka stupně p příslušná $n + 1$ bodům P_0, P_1, \dots, P_n a vektoru uzlů $U = \{u_0, u_1, \dots, u_m\}$ je parametrická křivka $C(u)$ definována předpisem

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_i^p(u) P_i,$$

kde $N_i^p(u)$ jsou bázové funkce stupně p .

K jednoznačnému určení B-spline křivky potřebujeme znát více údajů než u Bézierových křivek, a to množinu $n + 1$ řídících bodů, uzlový vektor s $m + 1$ uzly a stupeň křivky p . Parametry n , m a p opět musí splňovat rovnici

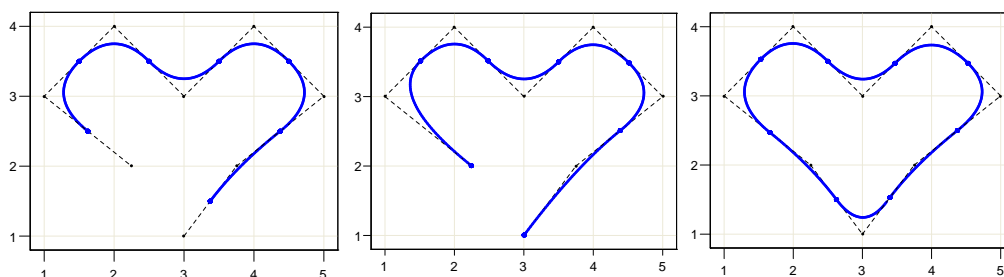
$$m = n + p + 1.$$

Hodnoty $C(u_i)$, které odpovídají uzlu u_i , $i = 0, \dots, m$, se nazývají **uzlové body křivky**, přičemž $C(u_0)$ je **počáteční** a $C(u_n)$ **koncový bod**. Uzlové body dělí B-spline křivku na segmenty, každá z nich je definovaná na příslušném uzlovém úseku. Graf po částech lineární funkce spojující body $\{P_i\}_{i=0}^n$ se nazývá **řídící polygon** křivky C .

2.2 Základní typy B-spline křivek

Existuje několik základních druhů B-spline křivek:

- **Otevřené:** Pokud vektor uzlů nemá žádnou specifickou strukturu, vytvořená křivka nedosáhne k prvnímu a poslednímu úseku řídicího polygonu.
- **Plovoucí:** Zvýšíme-li násobnost prvního uzlu na $p + 1$, bude se křivka dotýkat prvního úseku v prvním řídicím bodě. Provedeme-li to samé i v posledním uzlu, získáme plovoucí křivku.
- **Uzavřená:** Spojíme počátek a konec křivky, opakujeme některé uzly a řídicí body.



Obr. 2.1: Otevřená

Obr. 2.2: Plovoucí

Obr. 2.3: Uzavřená

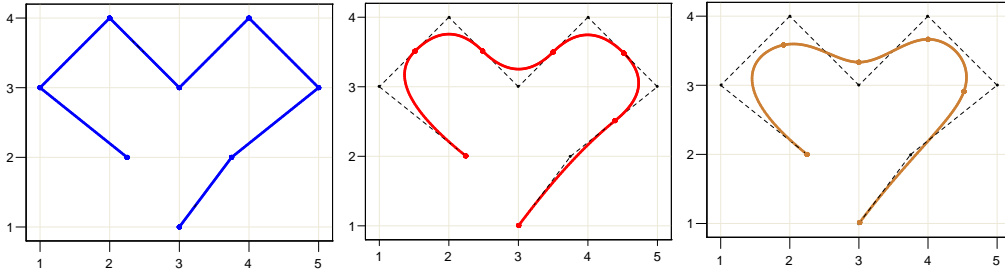
Dále se zaměříme na plovoucí křivky.

2.3 Vlastnosti plovoucích křivek

B-spline křivky odstraňují nedostatky Bézierových křivek a zachovávají jejich přednosti.

Uvažujme opět B-spline křivku $C(u)$ stupně p popsanou $n + 1$ řídicími body, vektorem uzlů $U = \{u_0, u_1, \dots, u_m\}$, kde první a poslední uzel má násobnost $p + 1$, tzn. $u_0 = \dots = u_p$ a $u_{m-p} = \dots = u_m$. Potom $C(u)$ má následující vlastnosti:

- $C(u)$ lze rozdělit na jednotlivé části, každá má stupeň p . Čím nižší je stupeň, tím více se křivka přibližuje ke svému řídicímu polygonu.



Obr. 2.4: $p = 1$

Obr. 2.5: $p = 2$

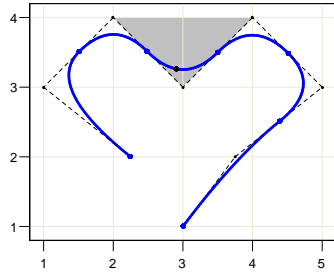
Obr. 2.6: $p = 3$

- $C(u)$ prochází oběma koncovými řídicími body P_0 a P_n .

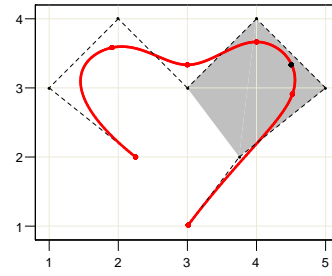
Důkaz. Bázová funkce $N_0^p(u)$ je koeficientem řídicího bodu P_0 a je nenulová na $[u_0, u_{p+1})$. Jelikož $u_0 = \dots = u_p = 0$, $N_0^0(u)$, $N_1^0(u)$, \dots , $N_{p-1}^0(u)$ jsou nulové a pouze N_p^0 je nenulová. Tedy pokud $u = 0$, potom $N_0^p = 1$ a $C(0) = P_0$. Analogicky $C(1) = P_n$. \square

- **Silná vlastnost konvexního obalu:** B-spline křivka je obsažena v konvexním obalu svého řídicího polygonu, spec. pokud $u \in [u_i, u_{i+1})$, potom $C(u)$ leží v konvexním obalu řídicích bodů $P_{i-p}, P_{i-p+1}, \dots, P_i$.

Důkaz. Necht' $u \in [u_i, u_{i+1})$. Připomeňme, že na tomto úseku je nejvýše $p+1$ nenulových bázových funkcí, a to: $N_{i-p}^p(u)$, $N_{i-p+1}^p(u)$, $N_{i-p+2}^p(u)$, \dots , $N_{i-1}^p(u)$ a $N_i^p(u)$. Jelikož $N_k^p(u)$ je koeficientem řídicího bodu P_k , pouze $p+1$ řídicích bodů $P_i, P_{i-1}, \dots, P_{i-p}$ má nenulové koeficienty. Protože jsou bázové funkce na tomto uzlovém úseku nenulové a jejich součet je roven 1, jejich vážený průměr, $C(u)$, musí ležet v konvexním obalu určeném řídicími body $P_i, P_{i-1}, \dots, P_{i-p}$. Tento konvexní obal lze dokonce ještě zmenšit. \square



Obr. 2.7: $p = 2, u = 0.6$

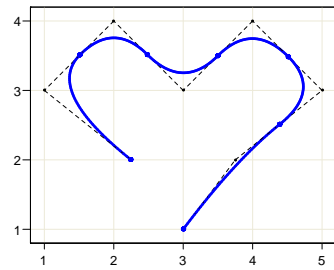


Obr. 2.8: $p = 3, u = 0.3$

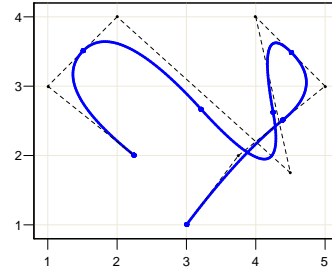
- Změna pozice řídicího bodu P_i ovlivní křivku $C(u)$ pouze na intervalu $[u_i, u_{i+p+1})$.

Důkaz. Pokud $u \notin [u_i, u_{i+p+1})$, $N_i^p(u)P_i$ neovlivní výpočet $C(u)$, protože $N_i^p(u) = 0$. V opačném případě $N_i^p(u)$ je na $[u_i, u_{i+p+1})$ nenulová a změna P_i ovlivní $N_i^p(u)P_i$, a tudíž i $C(u)$. \square

Tato vlastnost je velmi důležitá při konstrukci křivky, jelikož lze provádět lokální změny (dokonce vkládat i další uzly a tedy i řídicí body), které neovlivní její tvar v globálním smyslu. Tomuto tématu se ještě budeme věnovat.



Obr. 2.9: Původní křivka



Obr. 2.10: Změna P_4

- $C(u)$ je třídy C^{p-k} v k -násobném uzlu.

Důkaz. Pokud u není uzlem, $C(u)$ leží uprostřed části křivky stupně p a tedy je nekonečně diferencovatelná. Je-li u uzlem na nenulovém úseku domény N_i^p , která je třídy C^{p-k} , je i samotná křivka $C(u)$ třídy C^{p-k} . \square

- Leží-li křivka v rovině (resp. prostoru), není možné, aby ji nějaká přímka (resp. rovina) protínala vícekrát než její řídicí polygon.
- Bézierovy křivky jsou speciálním případem B-spline křivek.

Pokud $n = p$, $m = 2(p + 1) = 2(n + 1)$ a první a poslední uzel má násobnost $p + 1$, B-spline křivka se zredukuje na Bézierovu křivku.

- Obraz B-spline křivky při afinním zobrazení lze zkonstruovat z obrazů jejích řídicích bodů. Tedy není nutné transformovat celou křivku, stačí pouze její řídicí body.

Připomeňme, že afinní zobrazení je geometrická transformace představující složené zobrazení sestávající z posunutí, otáčení, změny měřítka, zkošení nebo operace vzniklé jejich skládáním.

2.4 Srovnání B-spline a Bézierových křivek

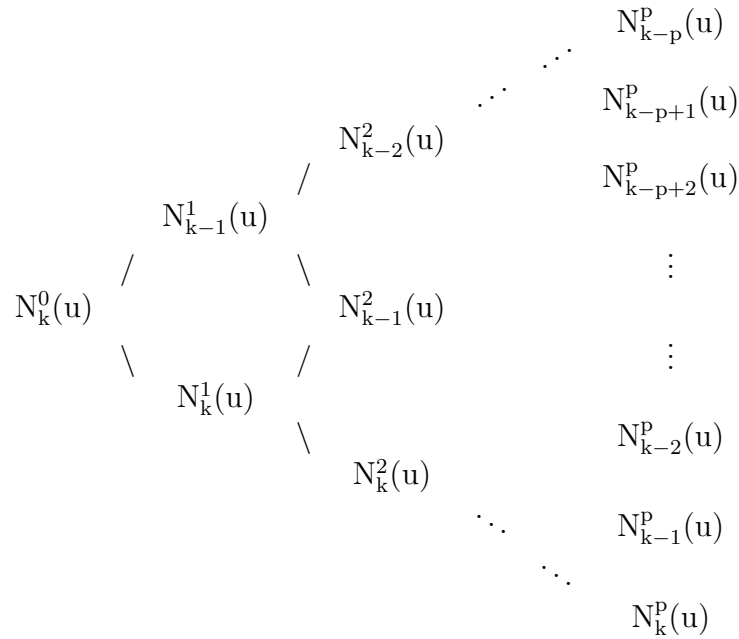
- K zadání B-spline křivky potřebujeme více údajů (stupeň a vektor uzlů).
- Bézierova křivka je speciálním případem B-spline křivky.
- B-spline křivka splňuje všechny důležité vlastnosti Bézierovy křivky.
- B-spline křivky lze snadněji upravovat (změna řídicího bodu se projeví jen lokálně apod.).

2.5 Výpočet koeficientů B-spline křivek

Pro výpočet bodu na B-spline křivce odpovídající zadanému u se obvykle používá de Boorův algoritmus, často ovšem potřebujeme vypočítat koeficienty. Ukážeme si jednoduchý způsob, jak to udělat.

Mějme plovoucí B-spline křivku stupně p definovanou pomocí $n + 1$ řídicích bodů P_0, P_1, \dots, P_n a $m + 1$ uzlů $u_0 = u_1 = \dots = u_p = 0, u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_{m-p-1}, u_{m-p} = u_{m-p+1} = \dots = u_m = 1$, chceme vypočítat koeficienty $N_0^p(u), N_1^p(u), \dots, N_n^p(u)$ pro libovolné u z $[0, 1]$.

Předpokládejme, že u leží v uzlovém úseku $[u_k, u_{k+1})$. Víme, že nejvýše $p + 1$ bázových funkcí stupně p je zde nenulových, jmenovitě: $N_{k-p}^p(u), N_{k-p+1}^p(u), \dots, N_k^p(u)$. Jediná nenulová bázová funkce stupně 0 na $[u_k, u_{k+1})$ je $N_k^0(u)$ a tedy koeficienty lze vypočítat z ní. Pro přehlednost si dále vytvoříme trojúhelníkové schéma.



Jelikož $N_k^0(u) = 1$ na uzlovém úseku $[u_k, u_{k+1})$ a ostatní bázové funkce stupně 0 jsou zde nulové, můžeme začít od $N_k^0(u)$ a vypočítat bázové funkce stupně 1 $N_{k-1}^1(u)$ a $N_k^1(u)$. Z těchto dvou hodnot dostaneme bázové funkce stupně 2 $N_{k-2}^2(u), N_{k-1}^2(u)$ a $N_k^2(u)$. Tento postup opakujeme tak dlouho, dokud nevypočítáme všech $p + 1$ nenulových koeficientů.

2.6 Posouvání řídicích bodů

Posouváním řídicích bodů dochází ke změně tvaru B-spline křivky. Víme, že změna pozice bodu P_i křivku $C(u)$ ovlivní pouze na intervalu $[u_i, u_{i+p+1})$, kde p je stupeň B-spline křivky. Pokud řídicí bod P_i je posunut v nějakém směru do nové pozice Q_i , potom bod $C(u)$, kde $u \in [u_i, u_{i+p+1})$, bude posunut ve stejném směru od P_i ke Q_i . Nicméně vzdálenosti jsou různé od bodu.

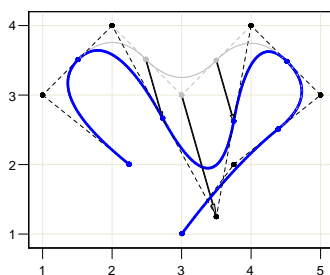
Předpokládejme, že $C(u)$ je daná B-spline křivka stupně p definovaná předpisem

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_i^p(u) P_i.$$

Nechť je řídicí bod P_i posunut do pozice $P_i + v$. Potom nová B-spline křivka $D(u)$ stupně p je popsána

$$\begin{aligned} D(u) &= \sum_{k=0}^{i-1} N_k^p(u) P_k + N_i^p(u) (P_i + v) + \sum_{k=i+1}^n N_k^p(u) P_k = \\ &= \sum_{k=0}^n N_k^p(u) P_k + N_i^p(u) v = C(u) + N_i^p(u) v. \end{aligned}$$

Tedy, nová křivka $D(u)$ je součtem původní křivky $C(u)$ a translačního vektoru $N_i^p(u)v$. Jelikož $N_i^p(u)$ je nenulová na intervalu $[u_i, u_{i+p+1})$, pokud u není v tomto intervalu, translační člen je nulový.



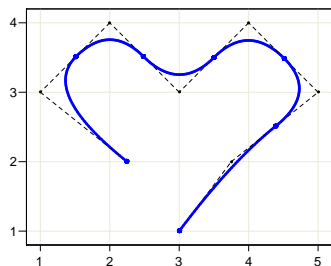
Obr. 2.11: Změna P_4

2.7 Důsledky silné vlastnosti konvexního obalu

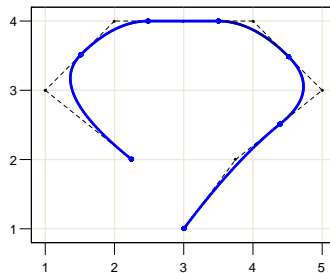
Připomeňme, že pokud $u \in [u_i, u_{i+1})$, potom $C(u)$ leží v konvexním obalu řídicích bodů $P_i, P_{i-1}, \dots, P_{i-p}$. Jelikož to platí pro všechna u v uzlovém úseku, příslušná část křivky leží pouze v tomto konvexním obalu.

- **Cíl: Změna části křivky na přímku**

Pokud všech $p + 1$ řídicích bodů leží na přímce, konvexní obal se zredukuje na část přímky a to samé se stane s částí křivky.



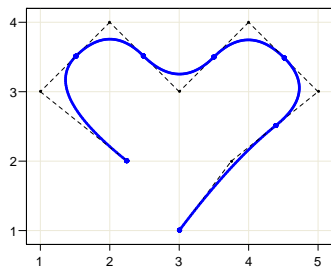
Obr. 2.12: Původní řídicí body



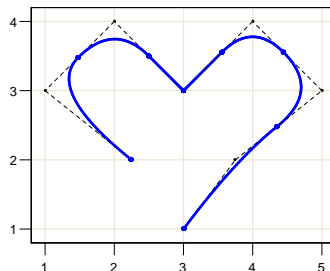
Obr. 2.13: P_3, P_4 a P_5 kolineární

- **Cíl: B-spline křivka prochází určitým řídicím bodem**

Je-li $P_i = P_{i-1} = \dots = P_{i-p+1}$, tzn. prvních p řídicích bodů je identických), konvexní obal se zredukuje na část přímky $P_{i-p}P_i$ a tedy křivka musí procházet P_i .



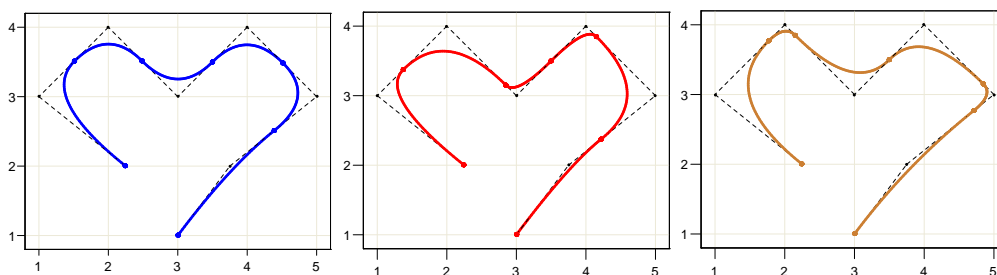
Obr. 2.14: Původní řídicí body



Obr. 2.15: $P_4 = P_5$

2.8 Změna uzlů

Jelikož B-spline křivka je složena z jednotlivých částí, z nichž každá je definována na uzlových úsecích, úpravou pozice jednoho či více uzlů dojde ke změně propojení mezi segmenty křivky a uzlovými úseky a tedy tvaru křivky. Ukázalo se, že změna pozice uzlu není ani předvídatelná, ani vyhovující. Jelikož není jasné, jak se změní tvar křivky při změně vektoru uzlů, je těžké dosáhnout požadovaného výsledku.



Obrázek 2.16: Křivky se liší pouze v hodnotách uzlů u_4 a u_6

2.9 Derivace B-spline křivek

Přestože jsou B-spline křivky více komplikované než Bézierovy křivky, jejich derivace mají podobný tvar. Předpokládejme, že B-spline křivka je definována jako

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_i^p(u) P_i.$$

Derivace každé bázové funkce lze vypočítat následovně:

$$\frac{d}{du} N_i^p(u) = \frac{p}{u_{i+p} - u_i} N_i^{p-1}(u) - \frac{p}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1}^{p-1}(u)$$

Dosazením do první rovnice dostáváme

$$\frac{d}{du} C(u) = \sum_{i=0}^{n-1} N_{i+1}^{p-1}(u) Q_i,$$

kde

$$Q_i = \frac{p}{u_{i+p+1} - u_{i+1}}(P_{i+1} - P_i).$$

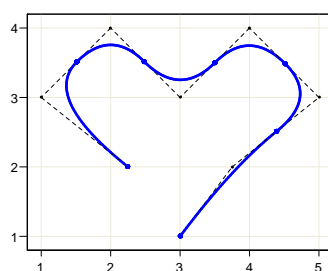
Tedy derivace B-spline křivky je další B-spline křivka stupně $p-1$ s původním vektorem uzlů, ale novou množinou n řídicích bodů Q_0, Q_1, \dots, Q_{n-1} .

2.10 Příklad na závěr

Na základě předešlých kapitol se pokusíme vykreslit křivku ve tvaru srdce. Využijeme vzorovou křivku, kterou jsme používali ve většině předešlých příkladů.

$$P_0, \dots, P_7 = [3, 1], [3.75, 2], [5, 3], [4, 4], [3, 3], [2, 4], [1, 3], [2.25, 2]$$

$$U = \{0, 0, 0, 0.17, 0.33, 0.5, 0.67, 0.83, 1, 1, 1\}$$



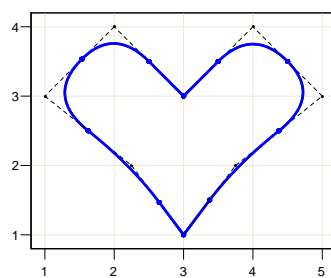
Obr. 2.17: Vzorová křivka

Tato křivka je plovoucí a její stupeň je dvě ($p = 2$). My bychom rádi získali uzavřenou křivku stejného stupně, která by procházela body $[3, 1]$ a $[3, 3]$. Tyto body proto vezmeme dvakrát (tzn. dle p) a dále přidáme na konec ještě jednu první dva. Pro větší přehlednost bude nyní prvním bodem seznamu $[5, 3]$:

$$P_0, \dots, P_{11} = [5, 3], [4, 4], [3, 3], [3, 3], [2, 4], [1, 3], [2.25, 2], [3, 1], [3, 1], [3.75, 2], [5, 3], [4, 4]$$

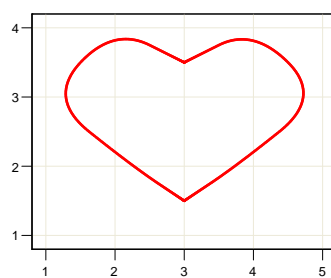
Tedy $n = 12$, a jelikož musí platit, že $m = n + p + 1$, budeme potřebovat 15 uzlů. Vektor uzlů zvolíme následujícím způsobem:

$$U = \{0, 0.07, 0.14, 0.21, 0.28, 0.35, 0.42, 0.5, 0.58, 0.65, 0.72, 0.79, 0.86, 0.93, 1\}.$$



Obr. 2.18: Uzavřená křivka

Na závěr ještě křivku "zakulatíme" posunutím $[3, 1]$ do $[3, 1.5]$ a $[3, 3]$ do $[3, 3.5]$.



Obr. 2.19: Výsledná křivka

Kapitola 3

Důležité algoritmy

3.1 Vložení uzlu

Naším cílem nyní bude, abychom vložili nový uzel do již existujícího vektoru uzlů tak, aby se nezměnil tvar křivky. Jelikož platí, že $m = n + p + 1$, přidáme-li nový uzel, hodnota m se zvýší o 1, tudíž buď počet uzlů, nebo stupeň křivky musí být zvýšen o 1. Změna stupně křivky následkem zvýšení počtu uzlů změní tvar křivky v globálním smyslu, tímto případem se nebudeme zabývat. Tedy, vložení nového uzlu způsobí, že musíme přidat i nový řídicí bod. Jak dále uvidíme, některé existující řídicí body budou odstraněny a nahrazeny novými "odříznutím" rohů.

Přestože vložení uzlu nevypadá moc zajímavě, je to jeden z nejdůležitějších algoritmů pro B-spline křivky. Jak dále uvidíme, je na něm založen de Boorův algoritmus.

3.1.1 Vložení jednoduchého uzlu

Mějme $n+1$ řídicích bodů P_0, \dots, P_n , vektor uzlů $U = \{u_0, \dots, u_m\}$ a stupeň p . Chceme vložit nový uzel t do vektoru uzlů, aniž bychom změnili tvar B-spline křivky $C(u)$.

Předpokládejme, že nový uzel t leží v uzlovém úseku $[u_k, u_{k+1})$. Již víme, že $C(t)$ leží v konvexním obalu definovaném řídicími body $P_k, P_{k-1}, \dots, P_{k-p}$ a bázové funkce všech ostatních řídicích bodů jsou nulové. Tudíž, výpočet

vložení uzlu může být restringován na řídicí body $P_k, P_{k-1}, \dots, P_{k-p}$. Cestou k vložení t je nalezení p nových řídicích bodů: Q_k na rameni $P_{k-1}P_k$, Q_{k-1} na rameni $P_{k-2}P_{k-1}, \dots, Q_{k-p+1}$ na rameni $P_{k-p}P_{k-p+1}$ tak, že stará lomená čára mezi P_{k-p} a P_k je nahrazena lomenou čarou $P_{k-p}Q_{k-p+1} \dots Q_kP_k$, rohy v $P_{k-p+1}, \dots, P_{k-1}$ "odřízneme". Ostatní řídicí body zůstanou nezměněny. Vidíme, že $p-1$ řídicích bodů původní lomené čáry je vyjmuta a nahrazeno p novými řídicími body.

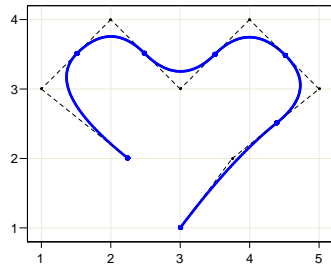
Pozice nových řídicích bodů Q_i (Q_i leží na rameni $P_{i-1}P_i$) lze vypočítat velmi jednoduše:

$$Q_i = (1 - a_i) P_{i-1} + a_i P_i,$$

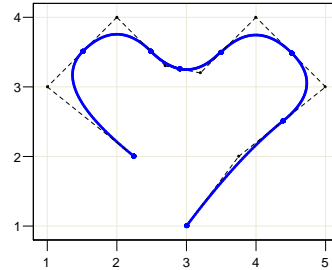
kde

$$a_i = \frac{t - u_i}{u_{i+p} - u_i}, k - p + 1 \leq i \leq k.$$

Stručně, abychom vložili nový uzel t , nejdříve najdeme uzlový úsek $[u_k, u_{k+1})$, který obsahuje t . Tím zjistíme k , p nových řídicích bodů Q_{k-p+1}, \dots, Q_k vypočítáme z předešlého vzorce. Nakonec původní lomenou čáru mezi P_{k-p} a P_k nahradíme novou lomenou čarou $P_{k-p}Q_{k-p+1}Q_{k-p+2} \dots Q_{k-1}Q_kP_k$.



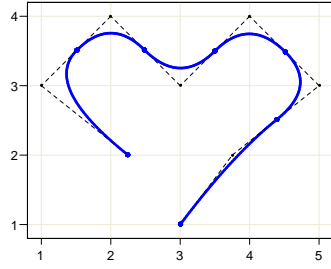
Obr. 3.1: Původní křivka



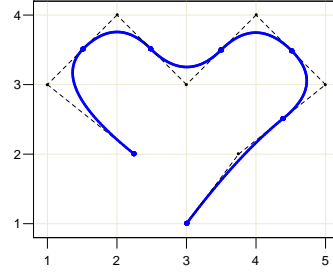
Obr. 3.2: Nový uzel $t = 0.6$

3.1.2 Vložení uzlu do existujícího jednoduchého uzlu

Pokud je nový vkládaný uzel t roven již existujícímu uzlu u_k , potom Q_k , poslední nový řídicí bod, je roven P_{k-1} .



Obr. 3.3: Původní křivka



Obr. 3.4: Dvojnásobný uzel $t = 0.5$

3.1.3 Vložení uzlu do existujícího vícenásobného uzlu

Pokud je nový vkládaný uzel t roven již existujícímu uzlu u_k , který má násobnost s , potom je s posledních nových řídicích bodů $Q_k, Q_{k-1}, \dots, Q_{k-s+1}$ rovno původním řídicím bodům $P_{k-1}, P_{k-2}, \dots, P_{k-s}$.

3.1.4 Vícenásobné vložení uzlu

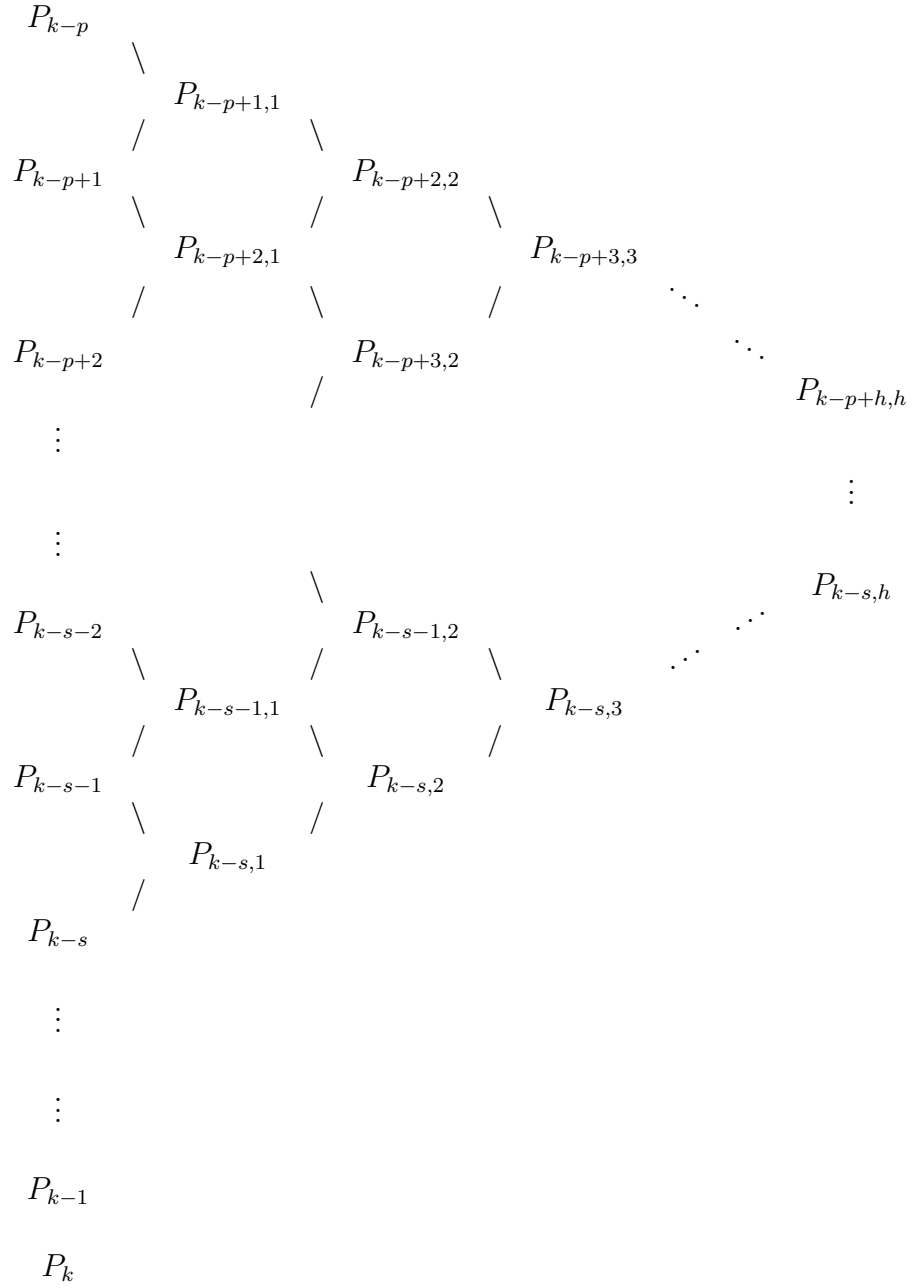
V mnoha aplikacích potřebujeme vložit uzel vícekrát. Využití metody z předchozího odstavce by bylo zdlouhavé, ukážeme si proto jednodušší postup.

Pozorování 1: Pokud je nový uzel t vložen do uzlového úseku $[u_k, u_{k+1})$ h -krát, koeficienty $a_{i,h}$ (tak budeme značit koeficienty h -tého vložení) se dají vypočítat pomocí následujícího vzorce:

$$a_{i,h} = \frac{t - u_i}{u_{i+p-(h-1)} - u_i}.$$

Pozorování 2: Pokud t je vloženo do již existujícího uzlu u_k s násobností s , potom řídicí body $P_{k-s}, P_{k-s+1}, \dots, P_{k-1}, P_k$ nejsou ovlivněny, pouze $P_{k-p}, P_{k-p+1}, \dots, P_{k-s}$. Po prvním kroku tedy dostaneme řídicí body $P_{k-p}, P_{k-p+1,1}, P_{k-p+2,1}, \dots, P_{k-s-1,1}, P_{k-s,1}, P_{k-s}, \dots, P_{k-1}, P_k$. V h -tém kroku (po h -tém vložení) máme řídicí body $P_{k-p}, P_{k-p+1,1}, P_{k-p+2,2}, P_{k-p+3,3}, \dots, P_{k-p+h,h}, P_{k-s,1}, P_{k-s}, \dots, P_{k-1}, P_k$. Pro lepší představu si vytvoříme následující schéma, v 1. sloupci jsou původní řídicí body, výsledné řídicí

bodů po h -tém vložení nalezneme tak, že v každém řádku vezmeme bod nejvíce vpravo.



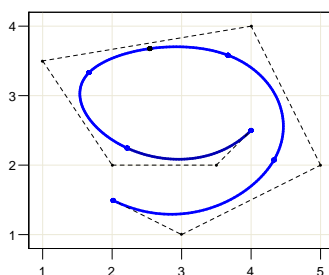
Z těchto dvou pozorování lze odvodit jednoduchý algoritmus.

3.2 De Boorův algoritmus

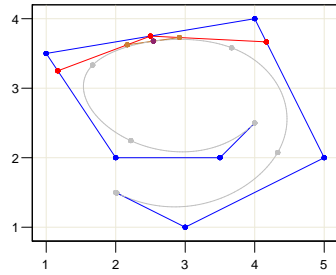
K výpočtu určitého bodu na B-spline křivce, který odpovídá zadanému u z domény, se obvykle používá De Boorův algoritmus, který je zobecněním de Casteljau algoritmu.

Připomeňme, že zvyšování násobnosti vnitřního uzlu snižuje počet nenulových bázových funkcí v tomto uzlu. Je-li stupeň tohoto uzlu k , je v něm nejvýše $p - k + 1$ nenulových bázových funkcí. Tudíž v uzlu násobnosti p bude pouze jedna nenulová bázová funkce, jejíž hodnota v něm je jedna (víme z dříve uvedených vlastností). Nechť je tento uzel u_i . Jelikož $N_i^p(u)$ je nenulová na $[u_i, u_{i+1})$, je pro $u = u_i$ bod na křivce $C(u)$ ovlivněn přesně jedním řídicím bodem P_i . Přesněji, $C(u) = N_i^p(u)P_i = P_i$!

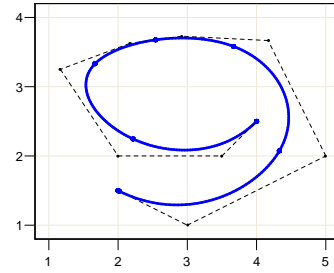
Pokud je uzel u opakovaně vkládán, takže je jeho násobnost p , poslední vytvořený nový řídicí bod je bodem na křivce, který odpovídá u . (Vložíme-li u tolikrát, aby jeho násobnost byla p , trojúhelníkové výpočetní schéma nám dá jeden bod. Jelikož daná B-spline křivka musí procházet tímto novým bodem, je to bod na křivce odpovídající u .) Toto pozorování nám poskytne techniku pro nalezení $C(u)$ na křivce - budeme vkládat u do té doby, dokud jeho násobnost nebude p , a poslední bod je $C(u)$! Pokud u je uzel s násobností s , vložíme ho $p - s$ krát.



Obr. 3.5: $u = 0.5$

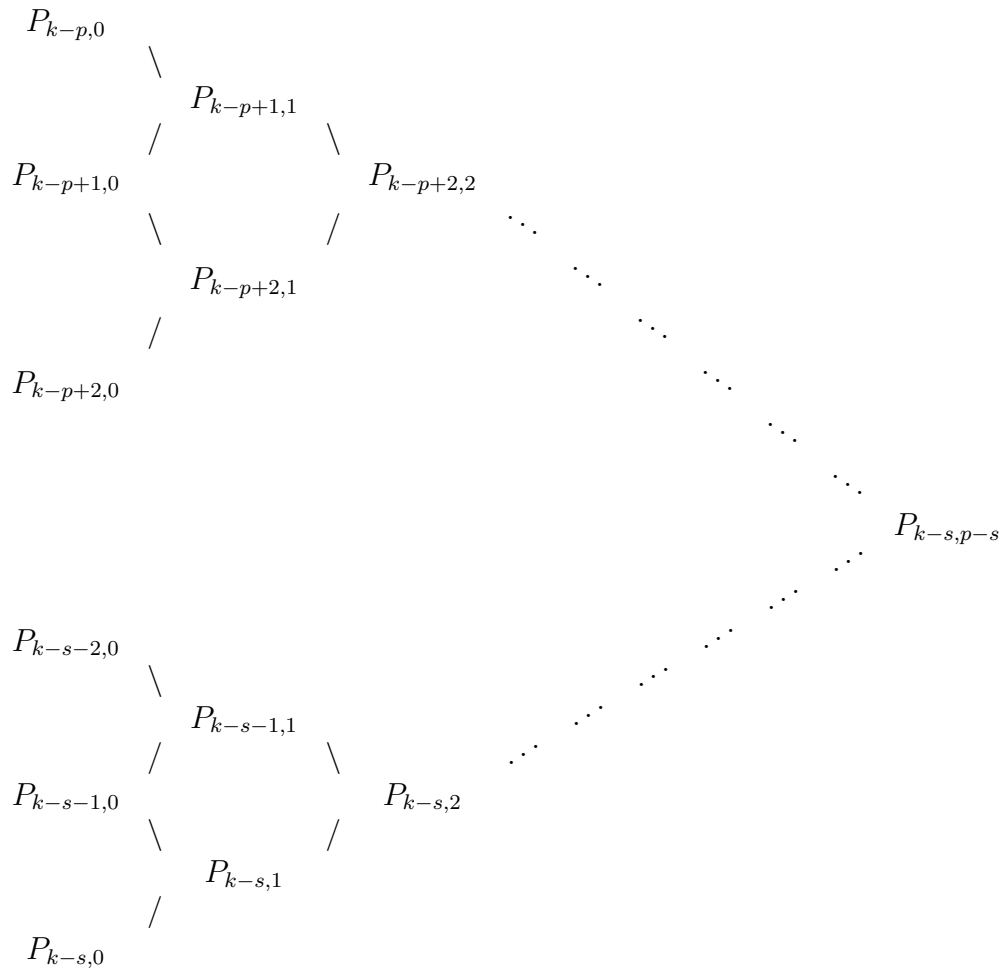


Obr. 3.6: Výpočet nových bodů



Obr. 3.7: Nová křivka

Pro lepší názornost ještě vytvoříme diagram.



V prvním sloupci máme řídicí body $P_{i,0}$, z nich a koeficientů $a_{i,1}$ vypočítáme $P_{i,1}$ atd. Jelikož máme $(k-s) - (k-p) + 1 = p-s+1$ bodů v 0-tém sloupci a každý sloupec má prvků o jeden méně než předcházející, potřebujeme $p-s$ sloupců, abychom dostali poslední bod $P_{k-s,p-s}$.

Přestože tento proces vypadá jako ten získaný z de Casteljau algoritmu, jsou velmi rozdílné, je tomu tak především proto, že při výpočtech v de Boorově algoritmu se využívá pouze $p+1$ řídicích bodů (de Casteljau - všechny).

3.3 Rozdělení B-spline křivky

Rozdělení B-spline křivky je stejné jako dělení Bézierovy křivky. Nicméně použijeme opět de Boorův algoritmus.

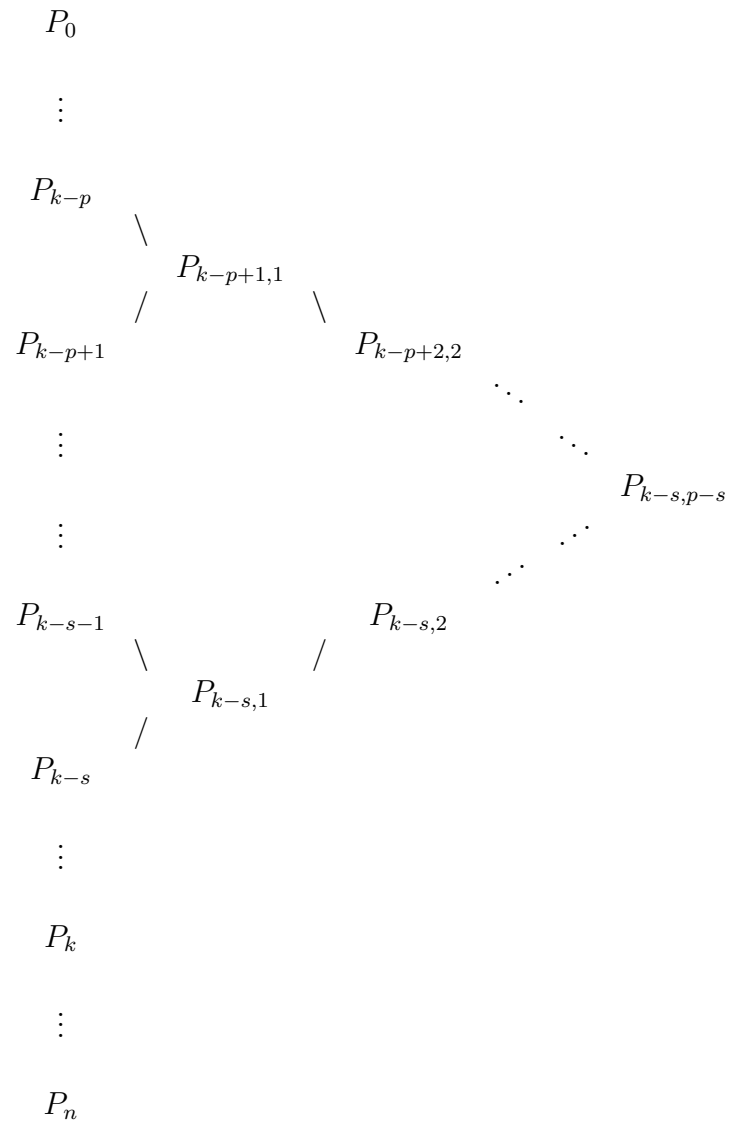
3.3.1 Výběr řídicích bodů

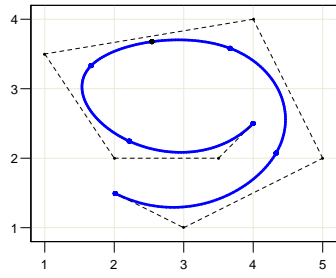
Předpokládejme, že chceme rozdělit B-spline křivku v u na dvě B-spline křivky, jednu na $[0, u]$, druhou na $[u, 1]$. Nejdříve aplikujeme de Boorův algoritmus na u . Všimneme si, že pokud u leží v $[u_k, u_{k+1})$, potom nejvýše $p+1$ řídicích bodů bude využito ve výpočtu, jmenovitě: $P_k, P_{k-1}, \dots, P_{k-p}$. Abychom našli řídicí body B-spline křivky na $[0, u]$, začneme s P_0 a budeme pokračovat po řídicím polygonu. Pokud dojdeme do řídicího bodu nebo bodu vypočítaném v de Boorově algoritmu, zapamatujeme si ho a pokračujeme dále. Tento proces pokračuje, dokud nedojdeme do $C(u)$, který je také označen jako řídicí bod. Tyto body, v pořadí, v jakém jsme je navštívili, definují B-spline křivku na $[0, u]$. Pro B-spline křivku definovanou na $[u, 1]$ začneme v $C(u)$ a použijeme stejný postup. Označíme si každý dosažený bod a pokračujeme, dokud nedojdeme do P_n . Pořadí bodů je důležité!

Řídicí body křivky na $[0, u]$ zahrnují původní neovlivněné řídicí body a první bod každé lomené čáry v de Boorově mřížce. Analogicky na $[u, 1]$. Jelikož první a poslední bod lomené čáry v de Boorově mřížce jsou prvním a posledním bodem ve stejném sloupci, mohou být vyjmuty hned jakmile je celý sloupec vypočítán.

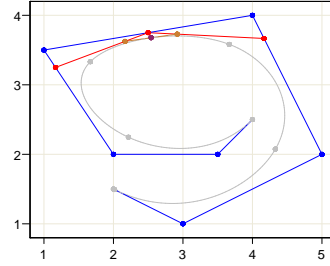
Následující schéma ukazuje, že hned můžeme vyjmout P_{k-p} (na křivce $[0, u]$) a P_{k-s} (na $[u, 1]$). Jakmile je vypočítán první sloupec, můžeme vyjmout

$P_{k-p+1,1}$ a $P_{k-s,1}$. Takto pokračujeme, dokud nedostaneme $P_{k-s,p-s} = C(u)$, který je společný pro obě křivky.

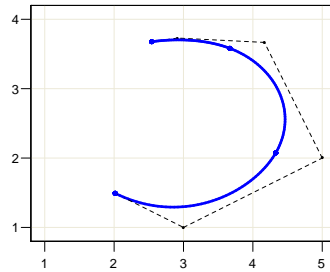
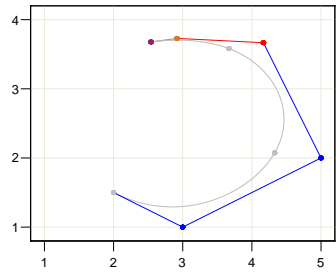




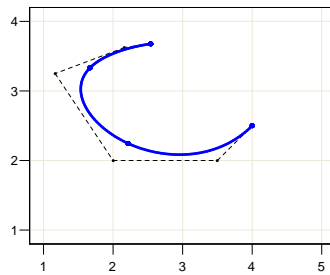
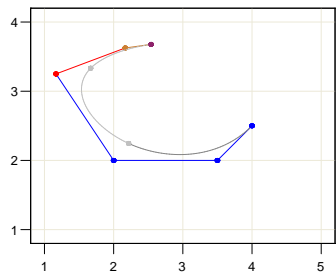
Obr. 3.8: $u = 0.5$



Obr. 3.9: Výpočet nových bodů



Obrázek 3.10: První část $[0, u]$



Obrázek 3.11: Druhá část $[u, 1]$

Kapitola 4

Křivky v počítačové grafice

4.1 Křivky

Křivky se používají v počítačové grafice na různých místech. Setkáváme se s nimi na při modelování ve 2D i 3D, definici fontů, určování dráhy pohybujících se objektů v počítačové animaci, definici objektů pro šablonování aj. Různé aplikace mají různé požadavky. My se zaměříme na popis nejčastěji používaných křivek pro modelování ve 2D.

Základním druhem křivek jsou křivky polynomiální.

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

Můžeme je velice rychle vypočítávat a jsou snadno diferencovatelné. Z polynomiálních křivek lze skládat křivky **po částech polynomiální**. Nejčastěji používané jsou **kubiky** (křivky třetího stupně), které poskytují dostatečně širokou škálu tvarů, jejich výpočet bývá nenáročný, lze s nimi snadno manipulovat a je u nich možné zaručit spojitost C^2 , někdy požadovanou při modelování v CAD systémech. Křivky vyššího stupně mohou způsobovat nežádoucí vlnění a jsou náročnější na výpočet.

Modelování probíhá obvykle tak, že je definováno několik řídicích bodů a z jejich polohy se určí průběh křivky. Některé metody umožňují zadávání též pomocí tečných vektorů, je možno klást podmínky na hladkost navázání aj.

Existují dva základní způsoby interpretace řídicích bodů a to interpolace

a aproximace. Při interpolaci generovaná křivka probíhá danými body, při aproximaci je řídicími body tvar křivky určen, ta jimi ale nemusí procházet.

Často požadované vlastnosti křivek:

- Invariance k lineárním transformacím a projekcím (otočení řídicího polygonu a následné generování křivky dá stejný výsledek jako otočení každého bodu z vygenerované křivky apod.)
- Vlastnosti konvexního obalu:
 - silná podmínka - celá křivka leží v konvexním obalu všech svých řídicích bodů
 - slabá podmínka - část křivky leží v konvexním obalu některých řídicích bodů
- Lokalita změn - změnou polohy řídicího bodu se mějí jen část křivky, ne křivka celá.
- Křivka prochází krajními body svého řídicího polygonu.

Dále křivky dělíme na racionální a neracionální. Racionální křivky jsou vyjádřeny v homogenních souřadnicích a mají nenulové váhy řídicích bodů. Neracionální křivky jsou jejich zvláštním případem, kde jsou všechny váhy rovny jedné. Tyto křivky nejsou invariantní k perspektivnímu promítání, zatímco racionální křivky ano.

4.2 Interpolační křivky

4.2.1 Fergusonovy kubiky

Fergusonovy křivky jsou určeny dvěma řídicími body a dvěma tečnými vektory v nich. Body určují polohu křivky, směr a velikost tečných vektorů míru jejího vyklenutí. Předností Fergusonových kubik je snadná realizace hladkého navazování. Nevýhodou je nesnadná editace tečného vektoru ve 3D.

4.3 Aproximační křivky

4.3.1 Bézierovy kubiky

Nejpoužívanějšími křivkami pro malování ve 2D i definici 3D objektů pomocí šablonování jsou Bézierovy křivky. Často se používají i při definici fontů. Jejich nevýhodou je, že při změně polohy řídicího bodu dojde ke změně tvaru celé křivky. Proto se tyto křivky dělí na segmenty, které se postupně navazují. Nejčastěji používanými křivkami jsou Bézierovy kubiky.

4.3.2 Coonsovy kubiky

Coonsovy kubiky mají význam především v teorii spline křivek. Na rozdíl od Bézierových křivek obecně neprochází krajními body svého řídicího polygonu. Velký význam u Coonsových kubik má násobnost bodů řídicího polygonu.

4.3.3 Spline křivky

Spline křivka stupně n je po částech polynomiální křivka třídy C^n . Termín spline pochází od křivítka, které tyto křivky modeluje.

Přirozený kubický spline je interpolační křivka skládající se z polynomiálních oblouků stupně tři, která je ve svých uzlech C^2 spojitá. Jeho nevýhodou je, že změnou polohy definujícího bodu se změní tvar celé křivky. V počítačové grafice se nejčastěji používají B-spline kubiky, které ovšem nejsou přirozenými spline křivkami, protože se jedná o křivky aproximační.

4.3.4 Uniformní neracionální kubické B-spline křivky

Uniformní neracionální kubický B-spline se také nazývá Coonsův kubický B-spline. Vznikne navázáním Coonsových kubik následovně: segment Q_i je určen body P_{i-3} , P_{i-2} , P_{i-1} a P_i . Následující segment Q_{i+1} body P_{i-2} , P_{i-1} , P_i a P_{i+1} . . . Zatímco Coonsova křivka je určena právě čtyřmi body, Coonsův B-spline je určen $n \geq 4$ body a skládá se z $n - 3$ segmentů a je v uzlech C^2 spojitý.

Posloupností $P_0, P_0, P_0, P_1, \dots, P_{n-1}, P_n, P_n, P_n$ zajistíme, že výsledný kubický spline bude procházet krajními body svého řídicího polygonu.

Uzavřenou křivku získáme opakováním tří bodů řídicího polygonu na jeho konci ($P_0, P_1, \dots, P_n, P_0, P_1, P_2$).

Coonsův kubický B-spline generovaný $n + 1$ řídicími body P_0, P_1, \dots, P_n je složen z $n - 2$ segmentů Q_3, Q_4, \dots, Q_n . Parametr u probíhá intervalem $[0, n + 1]$ a hodnoty u v uzlech definují vektor uzlů (mají konstantní vzdálenost).

Mezi důležité vlastnosti B-spline křivek patří invariantnost vůči otáčení, posunutí a změně měřítka, celá křivka leží ve svém konvexním obalu a její segmenty leží v konvexních obalech svých řídicích polygonů. Změníme-li polohu některého z řídicích bodů, změní se tvar pouze části křivky.

4.3.5 NURBS

Neuniformní racionální B-spline křivky jsou dvojnásobným zobecněním B-spline křivek. Vzdálenost uzlů nemusí být konstantní a body jsou reprezentovány svými homogenními souřadnicemi. Jejich výhodou je, že nám umožňují přesné vyjádření kuželoseček.

Literatura

- [1] Prautzsch H., Boehm W., Paluszny M.: *Bézier and B-Spline Techniques*, Springer, 2002.
- [2] Shene C.-K.: *Introduction to Computing with Geometry Notes - Web-Based Tutorial*, Michigan Technological University, 1997-2003
- [3] Žára J., Beneš B., Felkel P.: *Moderní počítačová grafika*, Computer Press, 1998.
- [4] Najzar K.: *Základy teorie splinů*, Karolinum, 2006.