Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Viktória Rusnáková

Porovnání přesných a asymptotických testů

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecní matematika

2008

Na tomto mieste by som sa chcela poďakovať všetkým, ktorí mi pri vypracovaní mojej práce pomáhali. V prvom rade ďakujem vedúcemu mojej bakalárskej práce Doc. RNDr. Daniel Hlubinkovi, Ph.D., za cenné rady. Ďakujem mojim rodičom a priateľom za pomoc a podporu.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 18.5.2008 Viktória Rusnáková

Obsah

Název práce: Porovnání přesných a asymptotických testů
Autor: Viktória Rusnáková
Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D.
e-mail vedoucího: hlubinka@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Predložená práca sa zaoberá testami o parametroch binomického, Poissonovho a exponenciálneho rozdelenia. Cieľom práce je porovnať presné znáhodnené testy a testy asymptotické, založené na centrálnej limitnej vete a založené na metóde maximálnej vierohodnosti. V prvej, teoretickej časti sú uvedené potrebné vety a tvrdenia, na základe ktorých sú zostrojené príklady pre dané rozdelenia. Druhá, praktická časť je venovaná počítačovým simuláciám obojstranných testov na hladine významnosti 5 %. Výsledky simulácií sú uvedené na priloženom CD.

Klíčová slova: kritická funkcia, znáhodnený test, asymptotický test

Title: Comparison of exact and asymptotic tests
Author: Viktória Rusnáková
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: Doc. RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: hlubinka@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: The presented work deals with tests about parameters of binomial, Poisson and exponencial distribution. The aim of this work is to compare exact randomized tests and asymptotic tests based on central limit theorem and maximum likelihood method. In the first, theoretical part necessary theorems are stated. These theorems are afterwards used for composing examples for above mentioned distributions. Second, practical part is dedicated to computer simulations of two-sided tests on 5 % level of significance. The results of simulations are enclosed on CD.

Keywords: critical function, randomized test, asymptotic test

Kapitola 1

Úvod

Cieľom tejto práce je prakticky porovnať silu parametrických testov hypotéz, a to testov presných a testov asymptotických, jednak založených na centrálnej limitnej vete a jednak založených na metóde maximálnej vierohodnosti. Konkrétne sa práca zaoberá obojstrannými testami hypotéz o parametroch binomického, Poissonovho a exponenciálneho rozdelenia na hladine významnosti $\alpha = 5\%$. Kedže je práca zameraná na numerické výpočty a počítačové simulácie, potrebné tvrdenia a vety budú s ohľadom na rozsah práce uvedené bez dôkazov.

V prvej kapitole si pripomenieme niektoré základné pojmy a vety. Presnými testami hypotéz sa budeme zaoberať v druhej kapitole a asymptotickými testami v tretej kapitole. Vo štvrtej kapitole si potom uvedieme numerické príklady, popíšeme počítačové simulácie a na záver analyzujeme výsledky.

1.1 Základné pojmy

Predpokladajme náhodný výber $\mathrm{X}_1 \ldots \mathrm{X}_n$ z rozdelenia s distribučnou funkciou F, ktorá závisí na neznámom parametri $\theta \in \Theta$. Nech o parametri θ existuju dve protichodné hypotézy. Podľa nulovej hypotézy H_0 platí $\theta \in \Theta_0 \subset \Theta$ a podľa alternatívnej hypotézy H_1 platí $\theta \in \Theta \setminus \Theta_0$.

Testom hypotézy H_0 proti hypotéze H_1 nazývame rozhodovací postup založený na náhodnom výbere $\mathrm{X}_1 \ldots \mathrm{X}_n$, na základe ktorého zamietneme alebo nezamietneme platnosť hypotézy H_0. Ak hypotéza H_0 platí a zamietneme ju, dopustíme sa chyby 1. druhu. Ak platí hypotéza H_1 a nezamietneme H_0, dopustíme sa chyby 2. druhu. Za H_0 volíme tu hypotézu, u ktorej je chyba 1. druhu závažnejšia.

Test je určený kritickým oborom $\mathrm{W} \in \mathrm{R}^n$. Hypotézu H_0 zamietneme, ak $\mathbf{X} \in \mathrm{W}$. Kritický obor sa určí tak, aby pravdepodobnosť chyby 1. druhu bola menšia nanajvýš rovna α, tj.

$$\mathrm{P}_\theta(\mathbf{X} \in \mathrm{W}) \leq \alpha \quad \forall \theta \in \Theta_0.$$

Hodnota $\sup_{\theta \in \Theta_0} \mathrm{P}_\theta(\mathbf{X} \in \mathrm{W})$ je hladina testu. Hladinu testu volíme α. Zároveň požadujeme, aby pravdepodobnosť chyby 2. druhu medzi testami na hladine α bola čo najmenšia.

Označme $\beta(\theta) = 1 - \mathrm{P}_\theta(\mathbf{X} \notin \mathrm{W})$, kde $\mathrm{P}_\theta(\mathbf{X} \notin \mathrm{W})$ je pravdepodobnosť chyby 2. druhu. $\beta(\theta)$ sa nazýva sila testu a vyjadruje schopnosť testu odhaliť neplatnosť nulovej hypotézy. Ak je alternatívna hypotéza zložená, tj. skladá sa z viacerých jednoduchých hypotéz, pričom každej z týchto elementárnych hypotéz prislúcha iná hodnota β, hovoríme o silofukncii testu.

Chceme teda testovať nejakú hypotézu. Obvykle sa použije testovacia štatistika T(X) založená na náhodnom výbere $\mathrm{X}_1 \ldots \mathrm{X}_n$. Test hypotézy spočíva v porovnaní hodnoty testovacej štatistiky s určenou kritickou hodnotou testu. V príkladoch, ktorými sa ďaľej budeme zaoberať, sa takto kritický obor zjednoduší na interval, prípadne zjednotenie dvoch intervalov. Je však potrebné poznať rozdelenie testovacej štatistiky. V nasledujúcej kapitole budeme uvažovať aj znáhodnené testy, teda testy s rozhodovacou funkciou $h(T(X)) : \mathrm{R} \to [0, 1]$, kde h vyjadruje s akou pravdepodobnosťou nulovú hypotézu zamietneme.

1.2 Centrálne limitné vety

Presný výpočet kritického oboru W alebo rozdelenia testovacej štatistiky T(X) može byť niekedy náročný. Preto sa pri testovaní hypotéz zvykne používať centrálna limitná veta.

Veta 1 (Ljapunovova centrálna limitná veta)

Nech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je postupnosť nezávislých náhodných veličín a nech platí*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(E\sum_{i=1}^{n}|X_i - EX_i|^3\right)^{1/3}}{\left(E\sum_{i=1}^{n}|X_i - EX_i|^2\right)^{1/2}} = 0,$$

potom platí $\forall x \in R$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - EX_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{var}X_i}} \leq x\right) = \Phi(x),$$

kde $\Phi(x)$ *je distribučná funkcia normálneho rozdelenia N(0,1).*

Veta 2 (CLV pre rovnako rozdelené nezávislé náhodné veličiny)

Nech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je postupnosť nezávislých rovnako rozdelených náhodných veličín s kladným a konečným rozptylom, potom platí* $\forall x \in R$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i - nEX_1}{\sqrt{n\mathrm{var}X_1}} \leq x\right) = \Phi(x),$$

kde $\Phi(x)$ *je distribučná funkcia normálneho rozdelenia N(0,1).*

Hladina testov založených na centrálnej limitnej vete je však rovna α len asymptoticky, teda je potrebné mať dostatočne veľký počet pozorovaní.

Kapitola 2

Testy parametrických hypotéz

2.1 Jednoduchá hypotéza a jednoduchá alternatíva

Oba požiadavky, tj. minimalizovať chybu druhého druhu testu na hladine α možno splniť v prípade jednoduchej hypotézy proti jednoduchej alternatíve, tj. ak množina $\Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$ a testujeme hypotézu $\mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0$ proti $\mathrm{H}_1 : \theta = \theta_1$. Nech obe pravdepodobnostné miery P_{θ_0} a P_{θ_1} sú absolútne spojité vzhľadom k nejakej σ-konečnej miere μ. Označme $\mathrm{p}_k(\mathbf{x})$ hustotu miery P_{θ_k} vzhľadom k $\mu, k = 1, 2$.

Lemma 3 (Neymanovo-Pearsonovo)

Nech k danému $\alpha \in (0, 1)$ *existuje kladné číslo c také, že pre množinu* $W_0 = \{\mathbf{x} \in R^n; p_1(\mathbf{x}) \geq c p_0(\mathbf{x})\}$ *platí*

$$\int_{W_0} p_0(\mathbf{x})\, d\mu(\mathbf{x}) = \alpha.$$

Potom pre ľubovoľnú množinu $W \in B^n$ *splňujúcu podmienku*

$$\int_{W} p_0(\mathbf{x})\, d\mu(\mathbf{x}) \leq \alpha,$$

platí

$$\int_{W_0} p_1(\mathbf{x})\, d\mu(\mathbf{x}) \leq \int_{W} p_1(\mathbf{x})\, d\mu(\mathbf{x}).$$

Teda test s kritický oborom W_0 je najsilnejší, tj. má najmenšiu pravdepodobnosť chyby druhého druhu medzi testami na hladine α.

Zamerajme sa na testy hypotéz o parametroch binomického, Poissonovho a exponenciálneho rozdelenia.

Príklad 1 (binomické rozdelenie)

Nech $\mathrm{X}_1 \ldots \mathrm{X}_m$ je výber z binomického rozdelenia $\mathrm{Bi}(n, p)$. Zostavme test na hladine α pre hypotézu $\mathrm{H}_0 : p = p_0$ proti $\mathrm{H}_1 : p = p_1$ za predpokladu, že $p_1 > p_0$ sú známe konštanty.

Nerovnosť $p_1(\mathbf{x}) \geq cp_0(\mathbf{x})$ v definícii W_0 znie

$$\prod_{i=1}^{m} \binom{n}{x_i} p_1^{x_i}(1-p_1)^{n-x_i} \geq \prod_{i=1}^{m} \binom{n}{x_i} p_0^{x_i}(1-p_0)^{n-x_i}$$

teda

$$p_1^{\sum_{i=1}^m x_i}(1-p_1)^{\mathrm{mn}-\sum_{i=1}^m x_i} \geq cp_0^{\sum_{i=1}^m x_i}(1-p_0)^{\mathrm{mn}-\sum_{i=1}^m x_i}.$$

Po úprave

$$\left(\frac{p_1}{p_0} \quad \frac{(1-p_0)}{(1-p_1)}\right)^{\sum_{i=1}^m x_i} \geq c\left(\frac{1-p_0}{1-p_1}\right)^{\mathrm{mn}} := c_1$$

konečne dostávame $\sum_{i=1}^m x_i \geq c_2$, kde $c_2 \in N$. $T = \sum_{i=1}^m x_i$ má binomické rozdelenie $\mathrm{Bi}(nm, p)$. Konštantu c_2 určíme numericky, tak aby hladina testu bola α, tj.

$$\sum_{k=c_2}^{nm} \binom{mn}{k} p_0^k(1-p_0)^{nm-k} \leq \alpha \quad \text{a} \quad \sum_{k=c_2-1}^{nm} \binom{mn}{k} p_0^k(1-p_0)^{nm-k} > \alpha$$

resp.

$$\sum_{k=0}^{c_2-1} \binom{mn}{k} p_0^k(1-p_0)^{nm-k} \geq 1-\alpha \quad \text{a} \quad \sum_{k=0}^{c_2-2} \binom{mn}{k} p_0^k(1-p_0)^{nm-k} < 1-\alpha.$$

Nulovú hypotézu zamietneme ak $T \geq c_2$.

Sila tohoto testu, tj. $1-\beta$, kde β je pravdepodobnosť, že nezamietneme nulovú hypotézu ak skutočná hodnota parametra je p_1, je

$$1 - \sum_{k=0}^{c_2-1} \binom{mn}{k} p_1^k(1-p_1)^{nm-k} = \sum_{k=c_2}^{mn} \binom{mn}{k} p_1^k(1-p_1)^{nm-k}.$$

Hladina tohto testu je však *menšia alebo rovná* α, čo je pre test založený na Neyman-Pearsonovom lemma v prípade diskrétneho rozdelenia bežné.

Príklad 2 (Poissonovo rozdelenie)

Nech $X_1 \dots X_m$ je výber z Poissonovho rozdelenia Po(λ). Zostavme Neyman-Pearsonov test na hladine α pre hypotézu $H_0 : \lambda = \lambda_0$ proti $H_1 : \lambda = \lambda_1$ ak $\lambda_1 > \lambda_0$ sú dané konštanty.

Podmienka $p_1(\mathbf{x}) \geq c p_0(\mathbf{x})$ je tvaru

$$\prod_{i=1}^{m} \frac{\lambda_1^{x_i}}{x_i!} \exp\{-\lambda_1\} \geq c \prod_{i=1}^{m} \frac{\lambda_0^{x_i}}{x_i!} \exp\{-\lambda_0\}$$

po úprave

$$\exp\{-m\lambda_1\}\lambda_1^{\sum_{i=1}^m x_i} \geq c \exp\{-m\lambda_0\}\lambda_0^{\sum_{i=1}^m x_i}$$

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{\sum_{i=1}^m x_i} \geq c \exp\{m(\lambda_1 - \lambda_0)\} := c_1$$

teda $\sum_{i=1}^m x_i \geq c_2$. $T = \sum_{i=1}^m x_i$ má Poissonovo rozdelenie s parametrom $m\lambda$. Konštantu c_2 vypočítame z podmienky $P_{H_0}(\sum_{i=1}^m x_i \geq c_2) = \alpha$, tj.

$$\sum_{k=c_2}^{\infty} \frac{(m\lambda_0)^k}{k!} \exp\{-m\lambda_0\} \leq \alpha \quad \text{a} \quad \sum_{k=c_2-1}^{\infty} \frac{(m\lambda_0)^k}{k!} \exp\{-m\lambda_0\} > \alpha.$$

V prípade, že $T \geq c_2$ zamietneme H_0. Test má silu

$$1 - \sum_{k=0}^{c_2-1} \frac{(m\lambda_1)^k}{k!} \exp\{-m\lambda_1\} = \sum_{k=c_2}^{\infty} \frac{(m\lambda_1)^k}{k!} \exp\{-m\lambda_1\}.$$

Príklad 3 (exponenciálne rozdelenie)

Majme $X_1 \dots X_m$ výber z exponenciálneho rozdelenia s parametrom $\lambda > 0$. Pre dané $\lambda_0 > \lambda_1$ zostavíme Neyman-Pearsonov test na hladine α pre hypotézu $H_0 : \lambda = \lambda_0$ proti $H_1 : \lambda = \lambda_1$.

Nerovnosť $p_1(\mathbf{x}) \geq c p_0(\mathbf{x})$ je tvaru

$$\prod_{i=1}^{m} \lambda_1 \exp\{-\lambda_1 x_i\} \geq c \prod_{i=1}^{m} \lambda_0 \exp\{-\lambda_0 x_i\}$$

tj.

$$\lambda_1^m \exp\Big\{-\lambda_1\sum_{i=1}^m x_i\Big\} \geq c\lambda_0^m \exp\Big\{-\lambda_0\sum_{i=1}^m x_i\Big\}.$$

Zlogaritmovaním dostaneme

$$(\lambda_0-\lambda_1)\sum_{i=1}^m x_i \geq \ln c + m\ln\frac{\lambda_0}{\lambda_1} := c_1$$

teda $\sum_{i=1}^m x_i \geq c_2$. Vieme, že $T = \sum_{i=1}^m x_i$ má gama rozdelenie $\mathrm{Ga}(\lambda, m)$. Potom za platnosti nulovej hypotézy má $U = 2\lambda_0\sum_{i=1}^m x_i$ χ^2-rozdelenie o $2m$ stupňoch volnosti. Chceme testovať na hladine α, teda

$$\alpha = \mathrm{P}_{H_0}(\sum_{i=1}^m x_i \geq c_2) = \mathrm{P}_{H_0}(2\lambda_0\sum_{i=1}^m x_i \geq 2\lambda_0 c_2).$$

Potom

$$1-\alpha = \mathrm{P}_{H_0}(2\lambda_0\sum_{i=1}^m x_i < 2\lambda_0 c_2)$$

a

$$c_2 = \frac{\chi^2_{(1-\alpha),2m}}{2\lambda_0},$$

kde $\chi^2_{(1-\alpha),2m}$ je kvantil χ^2 rozdelenia o $2m$ stupňoch volnosti. H_0 zamietneme ak $T \geq c_2$.

Určme silu tohoto testu. Pravdepodobnosť chyby druhého druhu je

$$\mathrm{P}_{H_1}\left(\sum_{i=1}^m x_i < \frac{\chi^2_{(1-\alpha),2m}}{2\lambda_0}\right).$$

Teda sila testu je

$$1-\mathrm{P}\left(2\lambda_1\sum_{i=1}^m x_i < \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\chi^2_{(1-\alpha),2m}\right) = 1-\mathrm{G}_{2m}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\chi^2_{(1-\alpha),2m}\right),$$

kde G_{2m} je distribučná funkcia χ^2_{2m}.

2.2 Znáhodnené testy

Nech $h(x)$ je merateľná funckia na R^n, ktorá splňuje $0 \leq h(x) \leq 1$. Nazýva sa kritická funkcia. Nech sa realizoval náhodný vektor $X = x$. Znáhodnený test spočíva v tom, že H_0 zamietneme s pravdepodobnosťou $h(x)$ a nezamietneme s pravdepodobnosťou $1 - h(x)$. Náhodný test je teda charakterizovaný kritickou funkciou. Ak $h(x)$ nadobúda len hodnôt 0 a 1, dostaneme nenáhodný test s kritickým oborom $\{\mathbf{x} \in R^n : h(\mathbf{x}) = 1\}$.

Lemma 4 (Neymanovo-Pearsonovo pre znáhodnené testy)

Nech je dané číslo $\alpha \in (0, 1)$. Nech h a h^* sú kritické funkcie na R^n, pre ktoré platí $\int hp_0 d\mu = \alpha, \int h^* p_0 d\mu = \alpha$ a nech h splňuje podmienku

$$h(x) = \begin{cases} 1 & ak \quad p_1(\mathbf{x}) > cp_0(\mathbf{x}), \\ 0 & ak \quad p_1(\mathbf{x}) < cp_0(\mathbf{x}), \end{cases} \tag{2.1}$$

kde c je nejaká konštanta. Potom platí $\int hp_1 d\mu \geq \int h^* p_1 d\mu$.

Teda ak existuje kritická funkcia $h(x)$ splňujúca podmienku $\int hp_0 \mathrm{d}\mu = \alpha$ a podmienku (2.1), potom je kritickou funkciou najsilnejšieho znáhodneného testu na hladine α. Je zrejmé, že takýto najsilnejší znáhodnený test odpovedá testu podľa Lemma 3 až na množinu $\{\mathbf{x} : p_1(\mathbf{x}) = cp_0(\mathbf{x})\}$.

Ďalej budeme potrebovať pojem jednoparametrická hustota exponenciálneho typu tj. hustota tvaru $p_\theta(x) = C(\theta)\exp\{Q(\theta)T(x)\}u(x)$ kde $\theta \in \Theta$ je jednorozmerný parameter a Θ je borelovská podmnožina priamky.

2.3 Jednoduchá hypotéza a zložená alternatíva

Nech Θ má aspoň tri rôzne body. Chceme testovať jednoduchú hypotézu $H_0 : \theta = \theta_0$ proti zloženej alternatíve $H_1 : \theta \in \Theta \setminus \theta_0$. Mohli by sme použiť Neyman-Pearsonovo lemma na každý jednotlivý test $H_0 : \theta = \theta_0$ proti $H_1^* : \theta = \theta_1 \in \Theta \setminus \theta_0$. Všeobecne ale každý takýto jednotlivý test može mať iný kritický obor resp. inú kritickú funkciu. Ak je kritický obor resp. kritická funkcia rovnaká pre každý jednotlivý test, možeme na tom založiť test jednoduchej hypotézy proti zloženej alternatíve. Takýto test sa nazýva rovnomerne najsilnejší.

Vo viacerých prípadoch rovnomerne najsilnejší test neexistuje. Medzi testami na hladine α sa preto sa obmedzíme na nestranné testy, tj. testy, ktoré pre ľubovoľné $\theta \in \Theta \setminus \theta_0$ zamietajú H_0 s pravdepodobnosťou najmenej α. Nestranné testy sú teda testy, pre ktoré silofunkcia $\beta(\theta)$ splňuje:

$$\beta(\theta) \leq \alpha \quad \text{pre} \quad \theta = \theta_0,$$
$$\beta(\theta) \geq \alpha \quad \text{pre} \quad \theta \in \Theta \setminus \theta_0.$$

Veta 5

Nech $p_\theta(\mathbf{x})$ je jednoparametrická hustota exponenciálneho typu a nech $\alpha \in (0,1)$ je dané číslo. Potom existuje rovnomerne najsilnejší nestranný test hypotézy $H_0 : \theta = \theta_0$ proti $H_1 : \theta \neq \theta_0$ na hladine α s kritickou funkciou

$$h(x) = \begin{cases} 1 & pre \quad T(x) < C_1 \quad alebo \quad T(x) > C_2, \\ \gamma_i & pre \quad T(x) = C_i, \quad i = 1, 2, \\ 0 & pre \quad C_1 < T(x) < C_2, \end{cases} \tag{2.2}$$

kde C_i a γ_i sú určené podmienkami

$$\mathrm{E}_{\theta_0} h(\mathbf{X}) = \alpha \tag{2.3}$$

$$\mathrm{E}_{\theta_0} T(x) h(\mathbf{X}) = \mathrm{E}_{\theta_0} T(x) \alpha. \tag{2.4}$$

Zamerajme sa na testy hypotéz o parametroch binomického, Poissonovho a exponenciálneho rozdelenia. Budeme hľadať rovnomerne najsilnejší nestranný test hypotézy $H_0 : \theta = \theta_0$ proti $H_1 : \theta \neq \theta_0$.

Príklad 4 (binomické rozdelenie)

Nech $\mathrm{X}_1 \ldots \mathrm{X}_m$ je výber z binomického rozdelenia $\mathrm{Bi}(n, p)$. Vektor $\mathbf{X}$ má jednoparametrickú hustotu exponenciálneho typu tvaru

$$p(x) = \binom{n}{x_1} \cdots \binom{n}{x_m} (1-p)^{mn} \exp\left\{ \sum_{i=1}^{m} x_i \ln \frac{p}{1-p} \right\}.$$

Teda $T(x) = \sum_{i=1}^m x_i$ a $T(x)$ má binomické rozdelenie $\mathrm{Bi}(mn, p)$. Hľadaný test je daný kritickou funkciou (2.2).

Podmienka $\mathrm{E}_{\theta_0} h(\mathbf{X}) = \alpha$ má tvar

$$\sum_{k=C_1+1}^{C_2-1} \binom{mn}{k} p_0^k (1-p_0)^{mn-k} + \sum_{j=1}^{2} (1-\gamma_j) \binom{mn}{C_j} p_0^{C_j} (1-p_0)^{mn-C_j} = (1-\alpha) \quad (2.5)$$

a podmienka $\mathrm{E}_{\theta_0} T(x) h(\mathbf{X}) = \mathrm{E}_{\theta_0} T(x) \alpha$ má tvar

$$\sum_{k=C_1+1}^{C_2-1} k \binom{mn}{k} p_0^k (1-p_0)^{mn-k} + \sum_{j=1}^{2} (1-\gamma_j) C_j \binom{mn}{C_j} p_0^{C_j} (1-p_0)^{mn-C_j} = (1-\alpha) mnp_0$$

.

Po úprave dostaneme

$$\sum_{k=C_1}^{C_2-2} \binom{mn-1}{k} p_0^k (1-p_0)^{mn-k-1} + \sum_{j=1}^{2} (1-\gamma_j) \binom{mn-1}{C_j-1} p_0^{C_j-1} (1-p_0)^{mn-C_j} = (1-\alpha). \quad (2.6)$$

Vhodné konštanty C_i a γ_i sa nájdu numericky pomocou binomických tabuliek.

Príklad 5 (Poissonovo rozdelenie)

Nech $X_1 \dots X_m$ je výber z Poissonovho rozdelenia $\mathrm{Po}(\lambda)$. Vektor $\mathbf{X}$ má jednoparametrickú hustotu exponenciálneho typu tvaru

$$p(x) = \exp\{-m\lambda\} \frac{1}{x_1! \dots x_m!} \exp\{ \sum_{i=1}^m x_i \ln \lambda \}.$$

Teda znovu $T(x) = \sum_{i=1}^m x_i$ a $T(x)$ má Poissonovo rozdelenie s parametrom $m\lambda$. Hľadaný test je daný kritickou funkciou (2.2).

Podmienka $\mathrm{E}_{\theta_0} h(\mathbf{X}) = \alpha$ je tvaru

$$\left(\sum_{k=C_1+1}^{C_2-1} \frac{(m\lambda_0)^k}{k!} + \sum_{j=1}^{2}(1-\gamma_j)\frac{(m\lambda_0)^{C_j}}{C_j!}\right)\exp\{-m\lambda_0\} = (1-\alpha) \tag{2.7}$$

a podmienka $\mathrm{E}_{\theta_0} T(x) h(\mathbf{X}) = \mathrm{E}_{\theta_0} T(x)\alpha$ je tvaru

$$\left(\sum_{k=C_1}^{C_2-2} \frac{(m\lambda_0)^k}{k!} + \sum_{j=1}^{2}(1-\gamma_j)\frac{(m\lambda_0)^{(C_j-1)}}{(C_j-1)!}\right)\exp\{-m\lambda_0\} = (1-\alpha). \tag{2.8}$$

Konštanty C_i a γ_i sa opäť nájdu numericky pomocou pravdepodobnostných tabuliek.

Príklad 6 (exponenciálne rozdelenie)

Nech $\mathrm{X}_1 \dots \mathrm{X}_m$ je výber z exponenciálneho rozdelenia s parametrom λ. Vektor $\mathbf{X}$ má jednoparametrickú hustotu exponenciálneho typu tvaru

$$p(x) = \lambda^m \exp\{\lambda \sum_{i=1}^{m} x_i\}.$$

Znovu $T(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i$ a $T(x)$ má gamma rozdelenie $\mathrm{Ga}(\lambda, m)$s hustotou f. Hľadaný test je znovu daný kritickou funkciou (2.2).

Podmienka $\mathrm{E}_{\theta_0} h(\mathbf{X}) = \alpha$ je tvaru

$$\int_{C_1}^{C_2} f(y)\mathrm{d}y = \frac{\lambda^m}{\Gamma(m)}\int_{C_1}^{C_2} y^{m-1}\exp\{-\lambda y\}\mathrm{d}y = (1-\alpha) \tag{2.9}$$

a podmienka $\mathrm{E}_{\theta_0} T(x) h(\mathbf{X}) = \mathrm{E}_{\theta_0} T(x)\alpha$ je tvaru

$$\int_{C_1}^{C_2} y f(y)\mathrm{d}y = \frac{m}{\lambda}(1-\alpha). \tag{2.10}$$

Kedže exponenciálne rozdelenie je spojité, kritická funkcia tohto testu nezávisí na γ_1, γ_2. Konštanty C_1, C_2 sú však v tomto prípade reálne, kvôli čomu je nájdenie vhodnej kritickej funkcie veľmi obtiažne.

2.4 Zložená hypotéza a zložená alternatíva

Chceme testovať $\mathrm{H}_0 : \theta \in \Theta_0 \subset \Theta$ proti $\mathrm{H}_1 : \theta \in \Theta \setminus \Theta_0$, kde obe hypotézy sú zložené. Ak pre každé $\theta \in \Theta \setminus \Theta_0$ máme test H_0 proti $\mathrm{H}_1^* : \theta = \theta_1$ s hladinou α, ktorý maximalizuje hodnotu funkcie $\beta(\theta_1)$ a má kritickú fuknciu nezávislú na θ_1, potom ho nazývame rovnomerne najsilnejší.

Veta 6

Nech $p_\theta(\mathbf{x})$ je jednoparametrická hustota exponenciálneho typu so striktne monotónnou funkciou Q. Nech $\alpha \in (0,1)$ je dané číslo. Potom existuje rovnomerne najsilnejší test hypotézy $H_0 : \theta \le \theta_0$ proti $H_1 : \theta > \theta_0$ na hladine α s kritickou funkciou

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre} \quad T(x) > C, \\ \gamma & \text{pre} \quad T(x) = C, \\ 0 & \text{pre} \quad T(x) < C, \end{cases} \tag{2.11}$$

pre Q rastúcu

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre} \quad T(x) < C, \\ \gamma & \text{pre} \quad T(x) = C, \\ 0 & \text{pre} \quad T(x) > C, \end{cases} \tag{2.12}$$

pre Q klesajúcu,
kde C a γ sú určené podmienkou $E_{\theta_0} h(\mathbf{X}) = \alpha$.

Veta 7

Nech $p_\theta(\mathbf{x})$ je jednoparametrická hustota exponenciálneho typu a nech $\alpha \in (0,1)$ je dané číslo. Potom existuje rovnomerne najsilnejší test hypotézy $H_0 : \theta \le \theta_1$ alebo $\theta \ge \theta_2$ $(\theta_1 < \theta_2)$ proti $H_1 : \theta_1 < \theta < \theta_2$ na hladine α s kritickou funkciou

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre} \quad C_1 < T(x) < C_2 \quad (C_1 < C_2), \\ \gamma_i & \text{pre} \quad T(x) = C_i, \quad i = 1, 2, \\ 0 & \text{pre} \quad T(x) < C_1 \quad \text{alebo} \quad T(x) > C_2, \end{cases} \tag{2.13}$$

kde C_i a γ_i sú určené podmienkou $E_{\theta_1} h(\mathbf{X}) = E_{\theta_2} h(\mathbf{X}) = \alpha$.

Tento test minimalizuje $E_\theta h(\mathbf{X})$ za podmienky (2.13) pre všetky $\theta < \theta_1$ a $\theta > \theta_2$.
Ak funkcia $T(x)$ nie je identicky rovná nejakej konštante skoro všade vzhľadom k μ, potom silofunkcia tohto testu má maximum v bode $\theta_0 \in (\theta_1, \theta_2)$ a striktne klesá s rastúcou vzdialenosťou od θ_0.

Rovnako ako v prípade jednoduchej hypotézy a zloženej alternatívy sa môže stať, že rovnomerne najsilnejší test neexistuje, ale existuje rovnomerne najsilnejší nestranný test.

Veta 8

Nech $p_\theta(\mathbf{x})$ *je jednoparametrická hustota exponenciálneho typu a nech* $\alpha \in (0,1)$ *je dané číslo. Potom existuje rovnomerne najsilnejší nestranný test hypotézy* $H_0 : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ $(\theta_1 < \theta_2)$ *proti* $H_1 : \theta < \theta_1$ *alebo* $\theta > \theta_2$ *na hladine* α *s kritickou funkciou*

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \textit{pre} \quad T(x) < C_1 \quad \textit{alebo} \quad T(x) > C_2, \\ \gamma_i & \textit{pre} \quad T(x) = C_i, \quad i = 1, 2, \\ 0 & \textit{pre} \quad C_1 < T(x) < C_2, \end{cases} \tag{2.14}$$

kde C_i *a* γ_i *sú určené podmienkou* $E_{\theta_1} h(\mathbf{X}) = E_{\theta_2} h(\mathbf{X}) = \alpha.$

Praktické použitie týchto testov pre testovanie hypotéz o parametroch binomického, Poissonovho a exponenciálneho rozdelenia je rovnaké ako v príkladoch 4 až 6.

Dôkazy viet uvedených v tejto kapitole je možné nájsť v [1] Lehmann,E.L.: *Testing Statistical Hypotheses.*

Kapitola 3

Asymptotické testy

3.1 Asymptotické testy založené na CLV

V druhej kapitole sme videli, že testy hypotéz o parametroch binomického, Poissonovho a exponenciálneho rozdelenia sú založené na súčte nezávislých rovnako rozdelených náhodných veličín. Teda je možné použiť $\sum_{i=1}^{m} x_i$ s určitými úpravami ako testovaciu štatistiku a pomocou centrálnej limitnej vety získať asymptotické testy.

Príklad 7 (binomické rozdelenie)

Nech $\mathrm{X}_1 \ldots \mathrm{X}_m$ je výber z binomického rozdelenia s parametrami n a p. Zostrojme asymptotický test hypotézy $\mathrm{H}_0 : p = p_0$ proti obojstrannej alternatíve.

X_1 má strednú hodnotu np a rozptyl $np(1-p)$. Priamym použitím CLV pre rovnako rozdelené nezávislé náhodné veličiny dostaneme, že

$$T = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i - mnp_0}{\sqrt{mnp_0(1-p_0)}} \tag{3.1}$$

má za platnosti nulovej hypotézy asymptoticky rozdelenie N(0,1).

Hypotézu H_0 zamietneme ak $|T| \geq \mathrm{u}(\alpha/2)$, kde u je kritická hodnota normálneho rozdelenia, pretože potom má test hladinu α. Teda nulovú hypotézu zamietneme, ak je hodnota testovacej štatistiky príliš veľká alebo príliš malá.

Pri testovaní proti jednostrannej alternatíve $\mathrm{H}_1 : p > p_0$ nulovú hypotézu zamietneme ak $T \geq \mathrm{u}(\alpha)$ a pri testovaní proti jednostrannej alternatíve $\mathrm{H}_1 : p < p_0$ zamietneme H_0 ak $T \leq -\mathrm{u}(\alpha)$.

Príklad 8 (Poissonovo rozdelenie)

Nech $X_1 \dots X_m$ je výber z Poissonovho rozdelenia s parametrom $\lambda > 0$, so strednou hodnotou λ a rozptylom λ. Zostrojme asymptotický test hypotézy $H_0 : \lambda = \lambda_0$ proti obojstrannej alternatíve.

Ak platí H_0, dostaneme z CLV, že

$$U = \frac{\sum_{i=1}^m x_i - m\lambda_0}{\sqrt{m\lambda_0}} \tag{3.2}$$

má asymptoticky rozdelenie N(0,1). Testy proti obojstrannej resp. jednostrannej alternatíve sú založené na porovnaní U s kritickými hodnotami normálneho rozdelenia u(α) resp. u($\alpha/2$).

Príklad 9 (exponenciálne rozdelenie)

Nech $X_1 \dots X_m$ je výber z exponenciálneho rozdelenia s parametrom $\lambda > 0$, so strednou hodnotou $1/\lambda$ a rozptylom $1/\lambda^2$. Pre test hypotézy $H_0 : \lambda = \lambda_0$ možno použiť štatistiku

$$V = \frac{\sum_{i=1}^m x_i - m/\lambda_0}{\sqrt{m/{\lambda_0}^2}}, \tag{3.3}$$

ktorá má podľa CLV asymptoticky rozdelenie N(0,1). Porovnaním V s kritickými hodnotami normálneho rozdelenia u(α) resp. u($\alpha/2$) dostaneme asymptotické testy proti obojstrannej resp. jednostranným hypotézam.

3.2 Asymptotické testy založené na maximálne vierohodnom odhade

Nech náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1 \dots X_m)'$ má hustotu $f(\mathbf{x}, \theta)$ vzhľadom k nejakej σ-konečnej miere μ, kde θ je neznámy parameter. Pri pevnej hodnote $\mathbf{x}$ sa funkcia $f(\mathbf{x}, \theta)$ ako funkcia premennej θ nazýva vierohodnostná funkcia a funkcia $L(\mathbf{x}, \theta) = \ln f(\mathbf{x}, \theta)$ sa nazýva logaritmická vierohodnostná funkcia.

Hodnota $\hat{\theta}$ parametra θ, ktorá maximalizuje vierohodnostnú funkciu pre dané $\mathbf{X} = \mathbf{x}$, sa nazýva maximálne vierohodný odhad parametra θ. Budeme sa zaoberať prípadom, keď θ je jednorozmerný parameter.

Ďaľej budeme pracovať s pojmami regulárny systém hustôt a Fisherova miera informácie. Systém hustôt $\{f(x,\theta), \theta \in \Omega\}$ je regulárny, ak sú splnené nasledujúce podmienky:

1. Množina Ω je neprázdna a otvorená.
2. Množina $M = \{x : f(x,\theta) > 0\}$ nezávisí na θ.
3. Pre skoro všetky $x \in M$ existuje konečná parciálna derivácia
$$f'(x,\theta) = \frac{\partial f(x,\theta)}{\partial \theta}.$$
4. Pre všetky $\theta \in \Omega$ platí $\int_M f'(x,\theta) \mathrm{d}\mu(x) = 0$.
5. Integrál
$$J_m(\theta) = \int_M \left(\frac{f'(x,\theta)}{f(x,\theta)}\right)^2 f(x,\theta) \mathrm{d}\mu(x)$$
je konečný a kladný.

Integrál $J_m(\theta)$ sa nazýva Fisherova miera informácie o parametri θ obsiahnutá v náhodnom vektore $\mathbf{X}$.

Veta 9 (Výpočet Fisherovej informácie)

Nech systém $\{f(x,\theta), \theta \in \Omega\}$ je regulárny. Nech existuje $f'' = \frac{\partial^2 f(x,\theta)}{\partial \theta^2}$ pre všetky $\theta \in \Omega$ a skoro všetky x a nech $\int_M f'' d\mu = 0$. Potom
$$J_m(\theta) = -E \frac{\partial^2 \ln f(X,\theta)}{\partial \theta^2}.$$

Kedže sa budeme zaoberať náhodnými výbermi z binomického, Poissonovho a exponencálneho rozdelenia overíme, či sa jedná o regulárne systémy hustôt.

Výber o rozsahu m z binomického rozdelenia s parametrami n a p má združenú hustotu

$$f(x) = \prod_{i=1}^{m} \binom{n}{x_i} p^{x_i} (1-p)^{n-x_i}, \tag{3.4}$$

výber z Poissonovho rozdelenia s parametrom λ má hustotu

$$f(x) = \prod_{i=1}^{m} \exp\{-\lambda\} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}, \tag{3.5}$$

a výber z exponenciálneho rozdelenia s parametrom λ má hustotu

$$f(x) = \prod_{i=1}^{m} \lambda \exp\{-\lambda x_i\}. \tag{3.6}$$

Pre odhadované parametre u týchto rozdelení platí $p \in (0,1)$ a $\lambda \in (0,\infty)$, teda Ω je neprázdna, otvorená množina. Množina M v žiadnom prípade nezávisí na týchto parametroch. Overme ešte podmienky 3 a 4 z definície regulárneho systému hustôt pre jednotlivé rozdelenia.

Pre binomické rozdelenie je

$$f'(x) = f(x)\Big[m\overline{\mathrm{X}}\frac{1}{p} - (mn - m\overline{\mathrm{X}})\frac{1}{(1-p)}\Big],$$

potom

$$\int_M f'(x)\mathrm{d}x = \int_M \frac{f'(x)}{f(x)} f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{E}\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{mnp}{p} - \frac{mn(1-p)}{(1-p)} = 0.$$

V prípade Poissonovho rozdelenia platí

$$f'(x) = f(x)\Big[m\overline{\mathrm{X}}\frac{1}{\lambda} - m\Big],$$

teda

$$\int_M f'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{E}\frac{f'(x)}{f(x)} = 0.$$

A nakoniec pre hustotu v prípade exponenciálneho rozdelenia máme

$$f'(x) = f(x)\Big[\frac{m}{\lambda} - m\overline{\mathrm{X}}\Big],$$

rovnako

$$\int_M f'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{E}\frac{f'(x)}{f(x)} = 0.$$

Fisherovu informáciu vypočítame neskôr v jednotlivých príkladoch, uvidíme však, že je splnená aj piata podmienka z definície. Teda v prípade našich troch rozdelení budeme pracovať s regulárnymi systémami hustôt.

Nech sú ďaľej splnené nasledujúce predpoklady:

- P1: Nech Ω je parametrický priestor, ktorý obsahuje taký neprázdny otvorený interval ω, že skutočná hodnota parametru θ patrí do ω.
- P2: Nech $\theta_1, \theta_2 \in \Omega$. Potom $f(x, \theta_1) = f(x, \theta_2)$ platí, práve keď $\theta_1 = \theta_2$.

Veta 10

Nech $\{f(x,\theta), \theta \in \Omega\}$ je regulárny systém hustôt s Fisherovou mierou informácie $J(\theta)$. Nech $\theta_0 \in \omega$ je skutočná hodnota parametru a nech sú splnené nasledujúce predpoklady.

1. *Pre všetky $\theta \in \omega$ a skoro všetky $x \in M$ existuje derivácia*

$$f'''(x,\theta) = \frac{\partial^3 f(x,\theta)}{\partial \theta^3}.$$

2. *Pre všetky $\theta \in \omega$ platí*

$$\int_M f''(x,\theta)\, d\mu(x) = 0.$$

3. *Existuje taká nezáporná merateľná funkcia $H(x)$, že $E_{\theta_0} H(x) < \infty$ a pritom pre skoro všetky $x \in M$ a pre všetky θ také, že $|\theta - \theta_0| < \varepsilon$ pre nejaké dostatočne malé $\varepsilon > 0$ platí*

$$\left| \frac{\partial^3 \ln f(x,\theta)}{\partial \theta^3} \right| \leq H(x).$$

Potom platí nasledujúce tvrdenie.

- *Pre $m \to \infty$*

$$\frac{1}{\sqrt{m}} L'(\theta_0) \xrightarrow{d} N[0, J(\theta_0)].$$

- *Ak existuje pre každé dostatočne veľké m a pre každé* $\mathbf{X}$ *taký koreň* $\hat{\theta}_m$ *vierohodnostnej rovnice, že* $\hat{\theta}_m$ *je konzistentný odhad parametra* θ*, potom*

$$\sqrt{m}(\hat{\theta}_m - \theta_0) \xrightarrow{d} N\left[0, \frac{1}{J(\theta_0)}\right].$$

Veta 11

Nech sú splnené predpoklady predchádzajúcej vety.Označme

$$LM(\theta_0) = \frac{[L^{'}(\theta_0)]^2}{mJ(\theta_0)} \qquad U_{LM} = \frac{L^{'}(\theta_0)}{\sqrt{mJ(\theta_0)}},$$

$$W(\theta_0) = m(\hat{\theta}_m - \theta_0)^2 J(\hat{\theta}_m) \quad U_W = \sqrt{mJ(\hat{\theta}_m)}(\hat{\theta}_m - \theta_0),$$

$$LR(\theta_0) = 2[L(\hat{\theta}_m) - L(\theta_0)].$$

Potom U_{LM} *má asymptoticky rozdelenie N(0,1) a* $LM(\theta_0)$ *má asymptoticky rozdelenie* χ_1^2*. Ak je funckia* $J(\theta)$ *naviac spojitá v* θ_0*, potom* U_W *má asymptoticky rozdelenie N(0,1) a* $LR(\theta_0)$ *a* $W(\theta_0)$ *majú asymptoticky rozdelenie* χ_1^2*.*

Testujme hypotézu $\mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0$ proti alternatíve $\mathrm{H}_0 : \theta \neq \theta_0$.
Skórový test zamieta hypotézu H_0 ak $LM(\theta_0) \geq \chi_1^2(\alpha)$.
Waldov test zamieta hypotézu H_0 ak $W(\theta_0) \geq \chi_1^2(\alpha)$.
Test založený na vierohodnostnom pomere zamieta H_0 ak $LR(\theta_0) \geq \chi_1^2(\alpha)$.
Kde $\chi^2(\alpha)$ je kritická hodnota χ^2-rozdelenia.
Veličiny U_{LM} a U_W sa používajú na testovanie nulovej hypotézy proti jednostrannej alternatíve.

Dôkazy viet uvedených v tejto kapitole je možné nájsť v [2] Anděl,J.: *Základy matematické statistiky.*

Príklad 10 (binomické rozdelenie)

Nech $\mathrm{X}_1 \ldots \mathrm{X}_m$ je výber z binomického rozdelenia s parametrami n a p. Zostrojme maximálne vierohodný odhad parametra p.

Logaritmická vierohodnostná funkcia je tvaru

$$L(p) = \ln f(x) = \sum_{i=1}^{m} \ln \left[\binom{n}{x_i} p^{x_i} (1-p)^{n-x_i} \right] =$$
$$= m\overline{\mathrm{X}} \ln p + (mn - m\overline{\mathrm{X}}) \ln(1-p) + \ln \left[\binom{n}{x_1} \cdots \binom{n}{x_m} \right].$$

Teda

$$L'(p) = \frac{m\overline{\mathrm{X}}}{p} - \frac{(mn - m\overline{\mathrm{X}})}{(1-p)} = 0 \quad a \quad \hat{p} = \frac{\overline{\mathrm{X}}}{n},$$

kde $\hat{p}$ je maximálne vierohodný odhad parametra p. S použitím vety 9 vypočítame Fisherovu informáciu

$$L''(p) = -\frac{m\overline{\mathrm{X}}}{p^2} - \frac{(mn - m\overline{\mathrm{X}})}{(1-p)^2} \quad a \quad J_m(p) = -\mathrm{E}L''(p) = \frac{mn}{p(1-p)}.$$

Pre test hypotézy $\mathrm{H}_0 : p = p_0$ proti $\mathrm{H}_1 : p \neq p_0$ dostávame testové štatistiky

$$LM(p_0) = \frac{m(\overline{\mathrm{X}} - np_0)^2}{np_0(1-p_0)} \tag{3.7}$$

$$W(p_0) = \frac{mn(\overline{\mathrm{X}} - np_0)^2}{\overline{\mathrm{X}}(n - \overline{\mathrm{X}})} \tag{3.8}$$

$$LR(p_0) = 2m \left[\overline{\mathrm{X}} \left(\ln \frac{(1-p_0)}{p_0} + \ln \frac{\overline{\mathrm{X}}/n}{(1 - \overline{\mathrm{X}}/n)} \right) + n \Big(\ln(1 - \overline{\mathrm{X}}/n) - \ln(1-p_0) \Big) \right]. \tag{3.9}$$

Vidíme, že štatistika LM nám dáva rovnaký výsledok ako použitie centrálnej limitnej vety. Teda skórový test sa v prípade binomického rozdelenia zhoduje s testom založeným na CLV.

Príklad 11 (Poissonovo rozdelenie)

Nech $\mathrm{X}_1 \dots \mathrm{X}_m$ je výber z Poissonovho rozdelenia s parametrom $\lambda > 0$. Zostrojme maximálne vierohodný odhad parametra λ.

Logaritmická vierohodnostná funkcia je tvaru

$$L(\lambda) = -m\lambda - \ln(X_1! \dots X_m!) + m\overline{\mathrm{X}} \ln \lambda.$$

Potom

$$L'(\lambda) = -m + \frac{m\overline{\mathrm{X}}}{\lambda} = 0 \quad a \quad \hat{\lambda} = \overline{\mathrm{X}},$$

kde $\hat{\lambda}$ je maximálne vierohodný odhad λ. Vypočítame ešte Fisherovu informáciu

$$L''(\lambda) = -\frac{m\overline{\mathrm{X}}}{\lambda^2} \quad a \quad J_m(\lambda) = \frac{m}{\lambda}.$$

Pre test hypotézy $\mathrm{H}_0 : \lambda = \lambda_0$ proti $\mathrm{H}_1 : \lambda \neq \lambda_0$ dostávame testové štatistiky

$$LM(\lambda_0) = \frac{m(\overline{\mathrm{X}} - \lambda_0)^2}{\lambda_0} \tag{3.10}$$

$$W(\lambda_0) = \frac{m(\overline{\mathrm{X}} - \lambda_0)^2}{\overline{\mathrm{X}}} \tag{3.11}$$

$$LR(\lambda_0) = 2m[\overline{\mathrm{X}}(\ln \overline{\mathrm{X}} - \ln \lambda_0) - (\overline{\mathrm{X}} - \lambda_0)]. \tag{3.12}$$

Aj v prípade Poissonovho rozdelenia vidíme, že výsledky skórového testu a testu s použítím CLV sú rovnaké.

Príklad 12 (exponenciálne rozdelenie)

Nech $\mathrm{X}_1 \dots \mathrm{X}_m$ je výber z exponenciálneho rozdelenia s parametrom $\lambda > 0$. Zostrojme maximálne vierohodný odhad parametra λ.

Logaritmická vierohodnostná funkcia je tvaru

$$L(\lambda) = m \ln \lambda - \lambda m\overline{\mathrm{X}}.$$

Teda

$$L'(\lambda) = \frac{m}{\lambda} - m\overline{\mathrm{X}} = 0 \quad a \quad \hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{\mathrm{X}}},$$

kde $\hat{\lambda}$ je maximálne vierohodný odhad λ. Znovu zistíme Fisherovu mieru informácie

$$L''(\lambda) = -\frac{m}{\lambda^2} \quad a \quad J_m(\lambda) = \frac{m}{\lambda^2}.$$

Pre test hypotézy $\mathrm{H}_0 : \lambda = \lambda_0$ proti $\mathrm{H}_1 : \lambda \neq \lambda_0$ dostávame testové štatistiky

$$LM(\lambda_0) = m(1 - \lambda_0 \overline{\mathrm{X}})^2 \tag{3.13}$$

$$W(\lambda_0) = m(1 - \lambda_0 \overline{\mathrm{X}})^2 \tag{3.14}$$

$$LR(\lambda_0) = 2m \left[\overline{\mathrm{X}} \lambda_0 - 1 - (\ln \lambda_0 + \ln \overline{\mathrm{X}}) \right]. \tag{3.15}$$

Rovnako ako v predchádzujúcich dvoch príkladoch sa skórový test a test založený na CLV zhodujú. V prípade exponenciálneho rozdelenia dáva rovnaký výsledok ešte aj Waldov test.

Kapitola 4

Počítačové simulácie

4.1 Príklad testovania hypotéz

Zostrojme presný test a asymptotické testy pre náhodný výber z Poissonovho rozdelenia o rozsahu $m = 50$. V programe R pomocou funkcie *rpois()* vygenerujeme 50 dát s Poissonovým rozdelením s parametrom λ napríklad rovným jednej.

$$\begin{array}{c} 1\ 3\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 2\ 1\ 1\ 3\ 2\ 2\ 0\ 0\ 2\ 0 \\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 2\ 1\ 1\ 2\ 1\ 0\ 1\ 0\ 2\ 1\ 2\ 2\ 0\ 0\ 0\ 2\ 0\ 1\ 1\ 1 \end{array}$$

Kedže v praxi skutočnú hodnotu parametru zvyčajne nepoznáme, chceme otestovať napríklad hypotézu, že $\lambda = 2$ oproti alternatíve $\lambda \neq 2$. Zostrojme najprv presný test. Kritická funkcia takéhoto testu je tvaru (2.2) s konštantami $C_1 = 81$, $C_2 = 120$ a $\gamma_1 = 0,519$, $\gamma_2 = 0,243$. Hodnota testovacej štatistiky $\sum_{i=1}^{50} x_i = 48$ je ostro menšia než C_1, čo znamená, že hypotézu zamietame s pravdepodobnosťou 1.

Pri zostrojení asymptotických testov použijeme vzorce pre testovacie štatistiky z tretej kapitoly. Štatistika U zo vzorca (3.2) má pre dané dáta a pre $m = 50$ a $\lambda_0 = 2$ hodnotu -5,2. Porovnaním s kritickou hodnotou normálneho rozdelenia $u(0,025) = 1,96$ zistíme, že nulovú hypotézu zamietame.

Rovnako dopadne aj Waldov test a test založený na vierohodnostnom pomere. Hodnota testovacej štatistiky W zo vzorca (3.11) je rovná 56,333 a testovacia štatistika LR zo vzorca (3.12) má hodnotu 33,539, čo je viac ako kritická hodnota χ^2-rozdelenia s jedným stupňom voľnosti 3,84. Teda všetky štyri testy zamietli nulovú hypotézu.

4.2 Počítačové simulácie

Zaoberala som sa obojstrannými presnými a asymptotickými testami o parametroch binomického, Poissonovho a exponenciálneho rozdelenia s hladinou 5%. Na výpočty a počítačové simulácie som použila program R. Pri každom type rozdelenia som zvolila skutočné hodnoty parametrov a testovaciu hodnotu parametru, tj. predpokladanú hodnotu, ktorú chceme otestovať.

Pri binomickom rozdelení som uvažovala dva výbery, jeden so skutočnými hodnotami parametrov $n = 10$ a $p = 0,1$ a druhý pre $n = 10$ a $p = 0,35$. Za nulovú hypotézu som potom postupne brala testovacie hodnoty 0,05 0,1 0,15 0,2 0,25 v prvom prípade a 0,2 0,25 0,3 0,35 0,4 0,45 0,5 v druhom prípade.

Pri Poissonovom rozdelení som testovala výbery so skutočnou hodnotou λ rovnou 1 a 2 a v oboch prípadoch som otestovala hodnoty parametra 0,5 1 1,5 2 2,5 a 3. U exponenciálneho rozdelenia som použila skutočné hodnoty λ 0,75 a 1,25 a testovacie hodnoty 0,25 0,5 0,75 1 1,25 1,5 1,75 a 2.

4.2.1 Kritická funkcia presného testu

Znáhodnené testy pre obojstrannú alternatívu pre jednotlivé rozdelenia boli uvedené v príkladoch 4 až 6 v druhej kapitole. Pri praktickom zostrojení týchto testov bolo potrebné najprv nájsť vhodnú kritickú funkciu tvaru (2.2) s konštantami $C_1, C_2, \gamma_1, \gamma_2$ spĺňajúcimi podmienky (2.3) a (2.4), teda určiť tieto konštanty pre jednotlivé testovacie hodnoty parametrov a rozsahy výberov.

V prípade binomického rozdelenia má podmienka (2.3) tvar (2.5) a podmienka (2.4) má tvar (2.6). Aby podmienka (2.5) bola splnená musí pre X s binomickým rozdelením Bi(mn, p_0) platiť

$$\mathrm{P}[C_1 + 1 \leq X \leq C_2 - 1] < (1 - \alpha)$$
$$\mathrm{P}[C_1 \leq X \leq C_2] \geq (1 - \alpha).$$

Najprv som teda našla také konštanty C_1, C_2, ktoré by vyhovovali podmienkam

$$P[X \leq C_1 + 1] \geq \frac{\alpha}{2} \qquad P[X \geq C_2 - 1] \geq \frac{\alpha}{2}$$

$$P[X \leq C_1] \leq \frac{\alpha}{2} \qquad P[X \geq C_2] \leq \frac{\alpha}{2}.$$

S týmito konštantami som nezískala rovnomerne najsilnejší test, ale použila som ich ako počiatočnú hodnotu a C_1, C_2 splňujúce obe podmienky (2.5) a (2.6) som hľadala na ich blízkom okolí nasledovne.

Predpokladajme, že máme dané hodnoty C_1, C_2. Ak označíme

$$A = \sum_{k=C_1+1}^{C_2-1} \binom{mn}{k} p_0^k (1-p_0)^{mn-k} = P[C_1 + 1 \leq X \leq C_2 - 1]$$

$$B = \binom{mn}{C_1} p_0^{C_1} (1-p_0)^{mn-C_1} = P[X = C_1]$$

$$C = \binom{mn}{C_2} p_0^{C_2} (1-p_0)^{mn-C_2} = P[X = C_2]$$

pre X s rozdelením $\text{Bi}(mn, p_0)$ a

$$E = \sum_{k=C_1}^{C_2-2} \binom{mn-1}{k} p_0^k (1-p_0)^{mn-k-1} = P[C_1 \leq Y \leq C_2 - 2]$$

$$F = \binom{mn-1}{C_1-1} p_0^{C_1-1} (1-p_0)^{mn-C_1} = P[Y = C_1 - 1]$$

$$G = \binom{mn-1}{C_2-1} p_0^{C_2-1} (1-p_0)^{mn-C_2} = P[Y = C_2 - 1]$$

pre Y s rozdelením $\text{Bi}(mn-1, p_0)$.

Potom podmienky (2.5) a (2.6) tvoria sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych γ_1, γ_2 tvaru

$$A + (1 - \gamma_1)B + (1 - \gamma_2)C = (1 - \alpha)$$
$$E + (1 - \gamma_1)F + (1 - \gamma_2)G = (1 - \alpha).$$

Ak riešenie tejto sústavy konštanty γ_1, γ_2 sú z intervalu [0,1], potom dané C_1, C_2 určujú kritickú funkciu znáhodneného testu hypotézy $H_0 : p = p_0$ proti obojstrannej alternatíve pre daný rozsah výberu m. Na výpočet jedntolivých pravdepodobností A až G ako aj na výpočet riešenia sústavy pre dané honoty C_1, C_2 pre jednotlivé hodnoty m, n, p_0 som použila program R. Zdrojový kód výpočtu je možné násť na priloženom CD. Vyhovujúce konštanty C_1, C_2 som našla na blízkom okolí počiatočných hodnôt, vo väčšine prípadov stačilo počiatočnú hodnotu C_1 zväčšiť o jedna a ponechať počiatočnú hodnotu C_2 a riešenia sústavy boli z intervalu [0,1]. Rovnako som postupovala aj pri hľadaní kritickej funkcie v prípade Poissonovho rozdelenia. Výsledné hodnoty konštánt sú uvedené v tabuľkách v prílohe tejto práce.

4.2.2 Testovanie hypotéz

Najprv som zadala zvolené skutočné hodnoty parametrov, požadovanú hladinu a rozsah dátového súboru m. Začala som s rozsahom $m = 10$. Potom som postupne pre jednotlivé vybrané nulové hypotézy zostavila presný znáhodnený test podľa príkladu 4 až 6 v druhej kapitole a asymptotické testy pomocou testovacích štatistík z tretej kapitoly, pričom som posupovala nasledovne.

Pomocou funkcií *rbinom()*, *rpois()* a *rexp()* som pre dané rozdelenie vygenerovala dátový súbor so zadaným rozsahom a zadanými skutočnými hodnotami parametrov. Pre presný test som našla odpovedajúcu kritickú funkciu a spočítala som hodnotu testovacej štatistiky $\sum_{i=1}^{m} x_i$. Ak táto hodnota bola medzi konštantami C_1, C_2 danú nulovú hypotézu som nezamietla. Ak bola táto hodnota ostro väčšia ako C_2 alebo ostro menšia ako C_1, hypotézu som zamietla. A ak bola táto hodnota rovná C_1 resp. C_2, vygenerovala som reálne číslo z intervalu [0,1] a porovnala ho s γ_1 resp. s γ_2. Podľa toho som danú hypotézu zamietla alebo nezamietla. Potom som spočítala hodnoty asymptotických testovacích štatistík podľa odvodených vzorcov a porovnaním s ich kritickými hodnotami rozhodla o zamietnutí alebo nezamietnutí hypotézy. V prípade exponenciálneho rozdelenia je nájdenie vhodnej kritickej funkcie príliš komplikované, takže sa mi nepodarilo zostrojiť presný test a použila som len testovacie štatistiky asymptotických testov.

Takto som na rôznych dátach 500-krát otestovala danú hypotézu rôznymi testovacími štatistikami a spočítala koľkokrát pre jednotlivé štatistiky bola nulová hypotéza zamietnutá a koľkokrát nebola zamietnutá. Po otestovaní všetkých vybraných nulových hypotéz som zvýšila rozsah a pokračovala rovnako ďaľej. Výsledky sú uvedené v tabuľkách v prílohe tejto práce. Zdrojový kód výpočtu je možné násť na priloženom CD.

4.3 Výsledky simulácií

U nasimulovaných testov som si všímala jednak hladinu jednotlivých testov, tj. koľkokrát bola zamietnutá platná nulová hypotéza a jednak silu jednotlivých testov, tj. koľkokrát nebola zamietnutá neplatná hypotéza.

4.3.1 Odklon od 5% hladiny

Nielen pre malé hodnoty rozsahu m, ale aj pre väčšie hodnoty ako $m = 110$, $m = 150$ sa stávalo, že platná nulová hypotéza bola zamietnutá vo viac ako 5% pokusov.

V prípade binomického rozdelenia so skutočnou hodnotou parametra $p = 0,1$ sa prejavili väčšie odklony od požadovanej hladiny pri malom rozsahu m (najvýraznejšie pre $m = 20, 40, 60$). Pri rozsahu 70 pozorovaní a väčšom už hladina bola dodržaná vždy alebo len s nepatrným odklonom. Pre skutočnú hodnotu parametra $p = 0,35$ boli veľmi výrazné odklony (zamietnutie platnej hypotézy v 6,2 až 8,4 % pokusov) pri $m = 30, 60, 110, 140, 150$, teda aj pri nízkych aj pri vysokých hodnotách.

U Poissonovho rozdelenia so skutočnou hodnotou parametra $\lambda = 1$ vo väčšine prípadov požadovaná hladina dodržaná nebola ani pre malé ani pre veľké hodnoty m, pričom odklon od hladiny bol menej výrazný (zamietnutie platnej hypotézy maximálne v 6 % z 500 pokusov) pre $m = 60, 90, 100$ a výraznejší (zamietnutie platnej hypotézy v 6,8 až 9 % z 500 pokusov) pre $m = 30, 70, 110$. Pre skutočnú hodnotu parametra $\lambda = 2$ nastal výraznejší odklon iba pri rozsahu $m = 10$ a $m = 60$, inak z 13 hodnôt m bola u všetkých štatistík hladina dodržaná takmer vždy. V prípade exponenciálneho rozdelenia bola hladina významnosti väčšinou dodržaná, prípadne porušená s malým odklonom.

Môžu teda nastať rôzne prípady odklonu od požadovanej hladiny. Buď je hladina dodržaná takmer vždy alebo je dodržaná len pre vyššie hodnoty rozsahu dátového súboru. No môže sa stať, že vo väčšine prípadov hladina dodržaná nie je. Platí to ako pre asymptotické testy, tak aj pre presné testy. Najväčší problém s dodržiavaním požadovanej hladiny mala štatistika Waldovho testu, ktorá túto hladinu porušovala najčastejšie zo všetkých štatistík, a to pre malé aj veľké hodnoty m. Najčastejšie dodržoval hladinu presný test. Jednotlivé štatistiky dávali pre daný rozsah m približne rovnaký počet neprávom zamietnutých platných hypotéz. Dosť často nastal prípad, že ak pre daný rozsah m jedna zo štyroch štatistík nedodržala požadovanú hladinu ostatné štatistiky túto hladinu taktiež nedodržali s približne rovnakými odchylkami. Celkovo sa počet zamietnutých platných nulových hypotéz z 500 pokusov pohyboval v rozmedzí 2,6 až 9 %, väčšinou to však bolo v rozmedzí 3,6 až 7,6 %.

4.3.2 Sila testov

Pre testovacie hodnoty θ_0 vzdialenejšie od skutočnej hodnoty parametra θ testy správne zamietli neplatnú hypotézu už pri malých rozsahoch m. Čím bližšie bola testovacia hodnota ku skutočnej hodnote parametra, tým väčší počet pozorovaní bol potrebný na odhalenie neplatnosti H_0. Ďalej z tabuliek s výsledkami simulácií je tiež vidieť, že testy lepšie odhalia neplatnú hypotézu ak $\theta_0 < \theta$. Na odhalenie neplatnosti hypotézy, pre ktorú $\theta_0 > \theta$, bol potrebný väčší počet pozorovaní.

Napríklad pre binomické rozdelenie so skutočným parametrom $p = 0,1$ bola u všetkých štatistík z 500 pokusov neplatná hypotéza vždy odhalená pri

$$m = 20 \qquad \text{pre} \quad |p_0 - p| = 0,15$$
$$m = 30 \qquad \text{pre} \quad |p_0 - p| = 0,1.$$

Na odhalenie hypotézy, pre ktorú $|p_0 - p| = 0,05$ už bol potrebný väčší počet pozorovaní. Pre $p_0 = 0,05 < p$ neodhalenie neplatnej hypotézy v menej ako 1% pokusov nastalo pri $m = 60$, pre $p_0 = 0,15 > p$ až pri $m = 80$.

Rovnako v prípade Poissonovho rozdelenia so skutočnou hodnotou $\lambda = 1$ bola neplatná hypotéza vždy odhalená pri

$$m = 20 \qquad \text{pre} \quad |\lambda_0 - \lambda| = 1,5$$
$$m = 40 \qquad \text{pre} \quad |\lambda_0 - \lambda| = 1.$$

Pre $\lambda_0 = 0,5 < \lambda$ nebola nesprávna hypotéza zamietnutá v menej ako 1% pokusov pri $m = 60$ a pre $\lambda_0 = 1,5 > \lambda$ pri $m = 80$.

V prípade exponenciálneho rozdelenia boli testovacie hodnoty zvolené dosť blízko pri sebe, takže bol potrebný väčší počet pozorovaní, aby bolo možné urobiť podobné závery. Pre skutočnú hodnotu $\lambda = 0,75$ bola neplatná hypotéza vždy odhalená pri

$$m = 40 \qquad \text{pre} \quad |\lambda_0 - \lambda| = 1$$
$$m = 30 \qquad \text{pre} \quad |\lambda_0 - \lambda| = 0,5 \quad \text{a} \quad \lambda_0 = 0,25$$
$$m = 100 \qquad \text{pre} \quad |\lambda_0 - \lambda| = 0,5 \quad \text{a} \quad \lambda_0 = 1,25.$$

Pre $\lambda_0 = 0,5 < \lambda$ nebola nesprávna hypotéza zamietnutá v menej ako 5% pokusov pri $m = 90$ a pre $\lambda_0 = 1 > \lambda$ až pri $m = 150$. Je zrejmé, že u tohto typu rozdelennia je rozdiel medzi odhalením hypotézy typu $\theta_0 < \theta$ a typu $\theta_0 > \theta$ veľmi výrazný (60 až 70 pozorovaní).

Čím väčšia bola skutočná hodnota parametra, tým pomalšia bola konvergencia k odhaleniu neplatnej hypotézy, teda bolo potrebné pracovať s väčším počtom pozorovaní m. Napríklad v prípade binomického rozdelenia som pre $p = 0,1$ použila najväčšiu hodnotu $m = 100$, pri ktorej už všetky neplatné testované hypotézy boli odhalené vo viac ako 99 % z 500 pokusov. Pre $p = 0,35$ sa tak nestalo ani pri použití $m = 150$, toto bol však maximálny rozsah, pre ktorý som konštruovala testy. Podobne to bolo v prípade Poissonovho rozdelenia, kde som pracovala s maximálnym rozsahom $m = 130$. U exponenciálne ho rozdelenia som použila maximálnu hodnotu $m = 150$. Pri zvyšovaní skutočnej hodnoty parametra sa tiež zmenšoval rozdiel medzi odhalením neplatnosti pre $\theta_0 < \theta$ a $\theta_0 > \theta$ pre testovacie hodnoty blízke skutočnej hodnote parametra.

Napríklad pre binomické rozdelenie so skutočným parametrom $p = 0,35$ bola u všetkých štatistík z 500 pokusov neplatná hypotéza vždy odhalená pri

$$m = 20 \qquad \text{pre} \quad |p_0 - p| = 0,15$$
$$m = 50 \qquad \text{pre} \quad |p_0 - p| = 0,1.$$

Na odhalenie hypotézy, pre ktorú $|p_0 - p| = 0,05$ už bol opäť potrebný väčší počet pozorovaní. Pre $p_0 = 0,3 < p$ neodhalenie neplatnej hypotézy v menej ako 2% pokusov nastalo pri $m = 140$, pre $p_0 = 0,4 > p$ až pri $m = 150$.

Rovnako v prípade Poissonovho rozdelenia so skutočnou hodnotou $\lambda = 2$ bola neplatná hypotéza vždy odhalená pri

$$m = 20 \qquad \text{pre} \quad |\lambda_0 - \lambda| = 1,5$$

$$m = 40 \qquad \text{pre} \quad |\lambda_0 - \lambda| = 1 \quad \text{a} \quad \lambda_0 < \lambda$$
$$m = 70 \qquad \text{pre} \quad |\lambda_0 - \lambda| = 1 \quad \text{a} \quad \lambda_0 > \lambda.$$

Pre $\lambda_0 = 1,5 < \lambda$ nebola nesprávna hypotéza zamietnutá v menej ako 3% pokusov pri $m = 120$ a pre $\lambda_0 = 2,5 > \lambda$ pri $m = 130$.

U exponenciálneho rozdelenia so skutočnou hodnotou $\lambda = 1,25$ nebola neplatná hypotéza odhalená v menej ako 3% pokusov pri

$$m = 60 \qquad \text{pre} \quad |\lambda_0 - \lambda| = 0,5 \quad \text{a} \quad \lambda_0 < \lambda$$
$$m = 130 \qquad \text{pre} \quad |\lambda_0 - \lambda| = 0,5 \quad \text{a} \quad \lambda_0 > \lambda.$$

Pre $|\lambda_0 - \lambda| = 0,25$ je už konvergencia k odhaleniu neplatnej hypotézy u tohto rozdelenia dosť pomalá. Pri maximálnej použitej hodnote $m = 150$ je počet nezamietnutých neplatných hypotéz okolo 170 pre $\lambda_0 < \lambda$ aj pre $\lambda_0 > \lambda$.

4.4 Záver

Všetky závery o sile testov diskutované v tejto kapitole, sú ilustrované grafmi, ktoré znázorňujú počet nezamietnutých hypotéz z 500 pokusov pre jednotlivé testovacie štatistiky v závislosti na rozsahu pozorovaní m. Tieto grafy sú súčasťou prílohy tejto práce. Z tabuliek s výsledkami simulácií a grafov tiež vidieť, že u binomického a Poissonovho rozdelenia štatistika Waldovho testu W dáva pre $\theta_0 < \theta$ najvyšší počet nezamietnutých hypotéz zo všetkých štatistík a pre $\theta_0 > \theta$ najnižší počet nezamietnutých hypotéz. Tento rozdiel je tým výraznejší, čím menší je počet pozorovaní, a čím menšia je skutočná hodnota testovaného parametra.

Simulácie ukázali, že nahradenie presného znáhodneného testu výpočetne jednoduchšími asymptotickými testami je z hľadiska sily testov opodstatnené. Test založený na centrálnej limitnej vete a test založený na vierohodnostnom pomere dobre aproximujú presný test aj pre nižší počet pozorovaní.

V prípade exponenciálneho rozdelenia sme mali možnosť porovnať test založený na centrálnej limitnej vete a test založený na vierohodnostnom pomere. Waldov test sa zhoduje s testom založeným na CLV a presný test sa nepodarilo zostrojiť. Výsledky ukázali, že testovacia štatistika CLV dáva väčší počet nezamietnutých neplatných hypotéz ako testovacia štatistika LR pre $\lambda_0 < \lambda$. A naopak menší počet nezamietnutých neplatných hypotéz ako štatistika LR pre $\lambda_0 > \lambda$.

Literatura

[1] Lehmann,E.L.: *Testing Statistical Hypotheses*, 2.vydanie, 1997.

[2] Anděl,J.: *Základy matematické statistiky*, Matfyzpress, Praha, 2005.

[3] Dupač, V.; Hušková, M.: *Pravděpodobnost a matematická statistika*, Univerzita Karlova, Praha, 2003.