UNIVEZITA KARLOVA V PRAZE
Pedagogická fakulta
Katedra pedagogické a školní psychologie

Porozumění slovním úlohám o pohybu

Vedoucí práce: PhDr. Miroslav Rendl Csc.

Autor: Miroslava Schöffelová

Bydliště: Novoveská 79/1290, 46601, Jablonec n.N.

Obor: Psychologie – speciální pedagogika

Typ studia: Prezenční

Praha 2008

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a informačních zdrojů.

V Jablonci nad Nisou

Dne 11.4.2008 ....

Miroslava Schöffelová Schöffelová ....

PODĚKOVÁNÍ

Velice děkuji vedoucímu diplomové práce panu PhDr. Miroslavu Rendlovi, Csc. za velmi pečlivé a odborné vedení a za pomoc a ochotu při řešení problémů.

Poděkování patří také paní učitelce Müllerové za velmi ochotnou spolupráci a všem studentům podílejícím se na výzkumu.

Děkuji také své rodině a přátelům za trpělivost a podporu v době psaní diplomové práce.

Miroslava Schöffelová

Jablonec nad Nisou, 2008

OBSAH

Úvod

Tématem diplomové práce je porozumění dětí slovním úlohám o pohybu. Bylo zvoleno především na základě dlouhodobějšího zájmu autorky o tématiku v průběhu studia. Práce tak navazuje na předchozí výzkumy, které se zaměřovaly na slovní úlohy, a využívá poznatků, v nich získaných.

Oblast slovních úloh o pohybu byla zvolena jako zástupce typických úloh, které jsou dětem předkládány ve školách a děti tak mají více či méně naučený specifický postup pro jejich řešení (jak bylo zjištěno v jedné z předchozích prací). Jsou tak protikladem ke slovním úlohám o věku, které byly zkoumány v postupové práci a byly ukázkou spíše netradičních úloh. Úlohy o pohybu tak nabízejí možnost srovnání řešení jejich typových podob a komplikovaných variant a schopnost žáků uplatnit naučené postupy při komplikaci zadání. To je také jedním z cílů práce.

Práce si dále klade za cíl sledovat specifika tohoto typu úloh a s tím spojená specifika řešení včetně specifických chyb, kterých se studenti často v tomto typu úloh dopouštějí.

Dalším cílem je podrobně sledovat a analyzovat různorodé postupy studentů z kvalitativního hlediska a snaha popsat jejich reprezentace úloh a myšlenkové postupy při řešení.

1 Vymezení slovních úloh

Při vymezení pojmu slovní úloha se můžeme setkat například s následujícími definicemi:

„Slovními úlohami rozumíme ve školské matematice takové úlohy, v jejichž zadání se vyskytují objekty, jevy a situace (se svými rozmanitými vlastnostmi a vztahy) z nejrůznějších mimomatematických oblastí." (Odvárko 1995 in Novotná 2000, s. 10).

„Slovní úloha je taková úloha, kde je obvykle popsána určitá reálná situace (např. s ekonomickou, přírodní, fyzikální společenskou či jinou tematikou) a úkolem řešitele je určit odpovědi na položené otázky." (Kuřina 1989, s. 61). V těchto definicích vidíme, že za hlavní znak slovní úlohy autoři považují odkaz na reálnou (mimomatematickou) oblast.

Vymezení je velmi podobné i v zahraniční literatuře, kde je pro pojem slovní úloha nejvíce zakotven termín „word problem", ale můžeme se setkat i s jiným označením, například „verbal problem", „story problem" apod. Např. Semadeni (1995), stejně jako čeští autoři, popisuje slovní úlohy jako něco, co by se mělo vztahovat k reálnému kontextu a staví je do opozice k „čistě matematickým problémům" („purely mathematical problem").

Kromě odkazu na reálnou oblast je jedním z nejdůležitějších kritérií pro odlišení slovních úloh od jiných (jak ostatně vyplývá z názvu) slovní formulace daného problému. V tomto místě vzniká určitá nejasnost, vyplývající z toho, že neexistuje žádná přesně vymezená hranice mezi tím, co ještě lze považovat za slovní úlohu a co už nikoliv. Např. úloha: *Honza má 8 jablek a Jana má 5 jablek, kolik jablek mají dohromady?* je zcela jistě slovní úloha. Úloha: *8 + 5 = ?* zcela jistě není. Existuje ale řada úloh, o kterých by se dalo diskutovat. Například úloha: *Kolik je dohromady 5 a 8?* (Semadeni 1995). Nejčastější základní kritéria slovních úloh (která budou dodržována v této práci) vymezuje například Hejný (2003) a korespondují s vymezením pojmu slovní úloha ve výše zmíněných definicích. Prvním kritériem je textové ukotvení a druhým je propojení na mimomatematickou zkušenost žáka.

Odvárko, Calda a kol. (1990) rozdělují slovní úlohy ještě dále a lépe tak definují úlohy, které stojí na pomezí mezi matematickou a slovní úlohou, neboť se jedná o úlohy zadávané slovně, ale není zde vazba na mimomatematickou oblast. Takové úlohy nazývají slovní matematické úlohy, které se od matematických úloh liší tím, že nejsou vyjádřeny v příslušném matematickém jazyce kalkulu. Hovoří už sice o číslech, rovnicích atd., ale řešitel musí zvolit jejich označení při transformaci úlohy (překladu do symbolického jazyka algebry). Řešení takové úlohy pak ukazují na schématu: Slovní matematická úloha → překlad

→ matematická úloha → výsledek matematické úlohy → výsledek slovní matematické úlohy. Takovou úlohou může být například: *Najděte takové číslo, že po odečtení jeho třetiny a čtvrtiny zbude 8.* (Odvárko; Calda a kol. 1990, s. 208). Za odlišné považuje slovní úlohy s nematematickým obsahem. Na rozdíl od předchozích se jedná o úlohy s textem, ve kterém se zjevně vyskytuje alespoň jeden termín nepatřící do jazyka žádné matematické teorie (to jsou zřejmě slovní úlohy, které mají na mysli výše zmínění autoři). Tedy slovní matematická úloha se nachází v rámci matematiky a transformuje se na jinou matematickou úlohu, přitom se překonává jen „jazyková bariéra“ uvnitř matematiky. Slovní úloha s nematematickým obsahem už stojí mimo oblast matematiky. Při jejím převodu na matematickou úlohu už nejde o transformaci, ale o konstrukci matematické úlohy (nebo také matematizaci slovní úlohy), která vystihuje něco ze slovní úlohy, ale není již vždy přesným obtiskem. Schéma řešení takové úlohy vypadá oproti slovním matematickým úlohám takto: Slovní úloha → matematizace → matematická úloha → výsledek matematické úlohy → interpretace → výsledek slovní úlohy. Matematická úloha je vyjádřena pomocí matematických pojmů, tudíž z plné reality slovní úlohy vystihuje pouze to, co matematické pojmy vůbec vystihují z reálného světa (kvantitativní vztahy, polohové vztahy, operace atd.). Proto dochází k tomu, že jedna a táž slovní úloha může být matematizována různými způsoby a vést tedy k různým matematickým úlohám.

Při řešení slovních úloh mohou řešitelé procházet různými fázemi tohoto řešení. Jednotliví autoři se více či méně v rozdělení fází liší. Například u Tiché (1982) nalezneme následující rozdělení:

- Přečtení textu
- Vlastní formulace podmínek úlohy a stanovení cíle
- Volba metody řešení
- Užití metody
- Dosažení výsledku
- Hodnocení metody

Toto rozdělení je zaměřeno na celý proces, s větším důrazem na samotné řešení matematického problému.

2 Uchopování slovní úlohy

K tématu porozumění slovním úlohám je velmi zajímavá počáteční fáze uchopování, kterou více rozpracovávají autoři Hejný (2003) a Novotná (2004). V této fázi se jedná o proces, který probíhá ve vědomí řešitele při vnímání textu úlohy. Oba autoři uvádějí jakési subfáze tohoto bohatého procesu.

Hejný popisuje tyto vrstvy čtyři:

- **Vrstva příběhu či situace**

  Týká se rámcových představ o úloze. Tato vrstva se podle Hejného skládá z expozice a výzvy. Expozice představí příběh či situaci a řešitel si o tom tvoří představu. Výzva rozběhne a orientuje řešitelský proces. Hejný zkoumal tuto vrstvu slovní úlohy tak, že vybízel žáky, aby mu řekli zadání slovní úlohy vlastními slovy.

- **Vrstva objektů se týká toho, co tvoří „podmět" textu úlohy**

  Za objekty úlohy Hejný považuje všechny osoby, předměty, události, stavy..., o kterých úloha hovoří. Mimoto rozlišuje objekty, které se v úloze vyskytují přímo a objekty, které se vyskytují nepřímo.

  Vezmeme-li například slovní úlohu:

  Dnes jsou Barboře 3 roky. Za několik let jí bude přesně tolik roků, kolik je Anně dnes. Za tu samou dobu už bude Anně 19 let. Kolik roků je Anně dnes?

  Objekty úlohy, které jsou zastoupeny přímo, jsou například Barbora, Anna, věk Barbory dnes, věk Anny dnes...Za objekty přítomné nepřímo lze považovat například věkový rozdíl Anny a Barbory.

  Kromě tohoto rozdělení se objekty dají také rozdělit na číselné (poukazující přímo na číslo - v této úloze věk Barbory dnes), parametrické (poukazující na číslo nepřímo pomocí písmene - např. Barbora je o *n* let starší) a zamlčené (dle Hejného se jedná o objekty, které mají být zjištěny – v této úloze věk Anny dnes a věk Barbory v budoucnu).

- **Vrstva vztahů se týká vazeb mezi objekty úlohy**

  Obsahuje všechny významné vazby mezi objekty. Jedná se o každou sémantickou informaci o objektech úlohy. Mohou být vyjádřeny přímo nebo nepřímo. Například výrok: „Evě a Pavlovi se před třemi lety narodila dcera Ida" je nepřímé vyjádření vztahu o objektu Idě - „Idě jsou 3 roky".

- **Vrstva matematického modelu**

Prezentuje přepis textu úlohy do formalizovaného matematického jazyka. Matematickým jazykem se rozumí nejčastěji rovnice či soustava rovnic, ale může jím být např. také tabulka, slovní zápis aj. Matematický model bývá někdy již součástí početního procesu řešení (fáze 2).

Novotná rozlišuje ve fázi uchopování tyto dílčí procesy:

- Identifikace objektů
- Identifikace vztahů mezi objekty
- Identifikace otázky
- Nalezení sjednocujícího pohledu
- Získání vhledu do struktury slovní úlohy
- Vytvoření matematického modelu

Oba autoři upozorňují, že jednotlivé kroky nemusí probíhat v pevné posloupnosti. Jedná se spíše o možné kroky, které mohou nebo nemusí proběhnout, nebo některé mohou probíhat opakovaně.

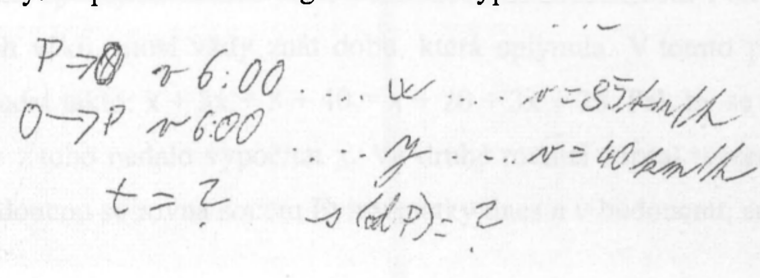
Celá fáze uchopování je tedy dle Novotné (2004) jakousi etapou zpracování informací ze zadání úlohy (která zahrnuje dílčí kroky), jejímž vyústěním je vytvoření matematického modelu pro řešenou slovní úlohu. Autorka dále popisuje, že první model zadání slovní úlohy si žák konstruuje „v hlavě“ a tento model nazývá *mentálním modelem* (viz dále). Ten může následně žák z nejrůznějších důvodů „zveřejnit“ písemnou nebo ústní formou. Překlad mentálního modelu do znakového systému, referenčního jazyka, označuje jako *kódování*. (Myslí tím to, co se v kognitivní psychologii označuje jako externí reprezentace, resp. spíše exteriorizovaná forma mentální reprezentace?)

U termínu kódování informace v literatuře narážíme na problém, co může být kódováním myšleno. Záleží mimo jiné na tom, co je míněno termínem informace, která je kódována. Lze rozlišit minimálně dvojí pojetí toho, co je kódováno: buď se referuje o vstupní senzorické informaci ve smyslu dat a nebo vedle toho o psychickém obsahu, nazývaném v daném kontextu také informací (Teichman 2006). Tedy vztáhneme-li toto dvojí pojetí informace na problematiku kódování slovní úlohy, můžeme ho chápat takto: V prvním případě jde informace (senzorické) z vnějšku a kódování pak znamená převedení této informace do podoby mentální reprezentace. V druhém případě jde o kódování ve smyslu exteriorizace již vytvořené mentální reprezentace na určitou formu reprezentace externí (obrázek, zápis, vysvětlení…). V pojetí Novotné jde spíše o druhý význam kódování. Novotná hovoří o převedení mentálního modelu do znakového systému, tudíž v jejím pojetí kódování jde spíše o zakódování informace ve smyslu psychického obsahu (mentálního modelu). Výsledný písemný záznam pak nazývá *legendou.* U legendy rozlišuje tyto typy:

- Slovní - zkrácený záznam zadání, tvořený slovy, která řešitel považuje za významná pro převedení zadané úlohy na úlohu čistě matematickou. Slovní legenda může obsahovat ještě další doplňující symboly (řady teček, šipky...).
- Tabulková - uspořádání informací ze zadání do tabulky. Jedná se v podstatě o zvláštní formu legendy slovní.
- Obrázková - informace uvedené v zadání zachycené do schématu nebo obrázků, které s různou mírou věrnosti odpovídají kontextu úlohy. Tyto obrázky a schémata mohou být vybaveny slovními poznámkami.
- Algebraická - legenda, v níž jsou vztahy mezi objekty vyjádřeny formou rovnic.

Podobně celý proces popisuje i Strnadová (2003). Rovněž hovoří o tom, že představa situace slovní úlohy může probíhat pouze v představě řešitele (pak to dle mého názoru zřejmě odpovídá mentálnímu modelu u Novotné). Tvrdí, že častěji je zapotřebí jejího znázornění, které může mít několik podob - graf, tabulka práce s modely…to pravděpodobně odpovídá legendě. Strnadová ale připouští kromě legendy – tedy nějak zapsané (zakreslené) podoby i jiné způsoby vyjádření mentální reprezentace situace navenek. *„Získání představy o situaci úlohy může usnadnit její VIZUALIZACE (nákres, model, schéma, model, který je možné vnímat zrakem), VERBALIZACE – popis představ o dané situaci pomocí přirozeného jazyka – slovně nebo písemně nebo SYMBOLIZACE – ke znázornění situace je užito symbolů, se kterými je možné dále operovat."* (Strnadová 2003, s. 16). Podle mého názoru bude symbolizace a vizualizace v tomto pojetí zřejmě vždy korespondovat s určitým typem legend, které popisuje Novotná, ovšem zde je připuštěna i verbalizace. Tedy to, že žák neznázornil mentální model na papír, ještě neznamená, že si ho neexternalizoval jiným způsobem (nezrekapituloval polohlasem nebo dokonce nahlas či v myšlenkách – pomocí slov).

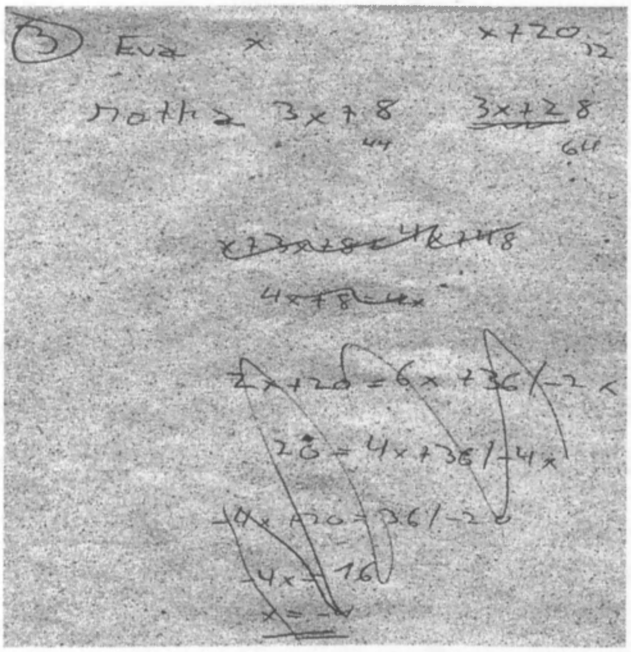
Pokud pracujeme pouze s písemnými záznamy studentů, je pochopitelné, že se můžeme opřít pouze o písemně zaznamenané legendy. Mezi jednotlivými typy jsou ale značné rozdíly. Například slovní legenda může vypadat takto:



Vidíme, že zde pravděpodobně došlo k prvním třem fázím uchopení úlohy (myšleno fázování Novotné). Nemuselo ovšem nutně dojít k nalezení sjednocujícího pohledu a získání vhledu do struktury slovní úlohy. Podle mého názoru je tomu stejně tak i u tabulkové či obrázkové legendy. Vždy pravděpodobně dochází k identifikaci objektů a možná i vztahů mezi nimi, ovšem to ještě neznamená, že dojde ke skutečnému nalezení sjednocujícího pohledu a získání vhledu do struktury úlohy (tedy vytvoření jakési mentální reprezentace zadání neznamená ještě skutečné pochopení). Podívejme se na následující příklad z předchozího výzkumu (Schöffelová 2005):

Je dána úloha: *Evina maminka je o 8 let starší, než je trojnásobek věku Evy. Za 20 let bude Eva dvakrát mladší než její maminka. Kolik let je nyní Evě a kolik její mamince?*

Řešitel provedl následující výpočet:



Správně zapsal podmínky úlohy - pochopil tedy vztahy a zcela správně sestavil legendu. Poté ale sestavuje zcela nelogickou soustavu rovnic. V první rovnici sčítá věk Evy a matky v současnosti, což by se podle jeho zápisu mělo rovnat součtu věku Evy a matky v budoucnosti. Pokud dva lidé zestárnou, musí být součet jejich věku vždy větší o dobu, která uplynula, než byl jejich součet věku v minulosti či současnosti. Pokud by tedy chtěl sčítat součet jejich věku, musí vždy znát dobu, která uplynula. V tomto případě by pak rovnice musela vypadat takto: $x + 3x + 8 + 40 = x + 20 + 3x + 28$. Pak by se obě strany rovnaly, ale stejně by se z toho nedalo vypočítat $\underline{x}$. Ve druhé rovnici zapsal tvrzení, že součet věku Evy dnes a v budoucnu se rovná součtu Eviny matky dnes a v budoucnu, což samozřejmě nemůže být pravda.

Z toho jasně vyplývá, že kódování a legenda nepřinášejí nutně nalezení sjednocujícího pohledu úlohy a tak nemůže být vytvoření matematického modelu ve smyslu legendy završením celého procesu uchopování úlohy. Ve skutečnosti se zdá, že Novotná považuje za *matematický model* nejen legendu, která je pouze první fází, ale též vytvoření základu pro výpočet matematického problému, který už po mechanickém matematickém výpočtu vede k řešení (tedy většinou sestavení rovnice, popř. modelu „v hlavě", který vede k počítání a výsledku. Na to už je potřeba, aby proběhly i poslední 2 fáze uchopení). Vyplývá to i z popisu nevýhod šipkové legendy u autorky:

„Příliš složitá forma legendy (hlavně při větším počtu částí), z níž řešitel není schopen nabýt celkový vhled do struktury úlohy." (Novotná 2000, s. 32). Zde je vidět, že i sama autorka nepovažuje samotnou legendu za matematický model jako vrchol celého uchopení úlohy, ale za něco, co matematickému modelu předchází, nebo za dílčí část.

Novotná hovoří o specifickém typu obrázkové legendy – úsečkové legendě (v souvislosti s úlohami o dělení celku na nestejné části). Tento typ je pro práci důležitý vzhledem k tomu, že je dosti typický i pro slovní úlohy o pohybu. Jedná se o legendu, jejíž referenční jazyk obsahuje úsečky, pomocné znaky a další symboly vyznačující např. již známé hodnoty nebo další odhalené vztahy. Kvantitativní vztahy jsou zde většinou znázorňovány nepřesně, formou přibližných náčrtů. U tohoto typu legendy Novotná uvádí důležitý typický rys – sériové vytváření a vhled do struktury úlohy po vyznačení vztahů mezi úsečkami. Tato legenda má tedy napomáhat pochopení slovní úlohy a vytvoření odpovídajícího matematického modelu.

U algebraické legendy je situace jiná, zde dochází v podstatě k vytvoření matematického problému už v legendě.

Legenda (ať už kterýkoliv typ) může být velice zajímavým aspektem procesu řešení slovní úlohy. Z tohoto hlediska se nabízí několik otázek:

K čemu legenda žákům slouží? Proč ji tvoří? Potřebují ji? Potřebují ji právě pro vytvoření matematického modelu, potažmo pro nalezení sjednocujícího pohledu a získání vhledu do struktury úlohy? Je tedy legenda „zveřejněným" mentálním modelem úlohy (exteriorizací mentální reprezentace)?

Novotná uvádí určité důvody tvoření legendy, resp. „uveřejnění" mentálního modelu (za výstižnější než Novotné termín „uveřejnění" považuji termín exteriorizace). Může se jednat o vnitřní potřebu žáka: *„Vytvořený mentální model je příliš složitý pro další mentální manipulace s ním, žák si potřebuje uvolnit okamžitou paměť pro další činnost; uveřejnění modelu mu pomůže rozhodnout o dalších manipulacích s odhalenými relacemi mezi objekty."*

(Novotná 2004, s. 370). Kromě toho se může jednat o vnější okolnosti, což může být například vyžadování exteriorizace mentální reprezentace osobou, která s řešitelem pracuje.

K legendě se ale kromě důvodu jejího použití mohou vztahovat ještě další otázky. Pokud je legenda oním „zveřejněním" mentálního modelu, co je tímto mentálním modelem myšleno? Znamená mentální model přesnou představu situace (popř. přímo reálné situace z mimomatematického prostředí – tedy založená na principu *imaginativního kódování*)? Je možné legendu vytvořit i bez této představy? Jak souvisí podoba legendy s mentálním modelem úlohy? Je nutné si tento mentální model vytvořit pro úspěšné vyřešení slovní úlohy? Je nutné si ho vytvořit pro skutečné pochopení? Je právě tento mentální model (ve smyslu představy reálné situace – tedy imaginativní reprezentace) oním skutečným pochopením slovní úlohy? Kde se kódování, potažmo legenda (nebo snad i mentální model), v procesu řešení slovní úlohy nachází? Je to skutečně na začátku? Znamená to tedy, že pochopení (ve smyslu mentálního modelu) předchází kódování (ve smyslu, který uvádí Novotná)? Nemůže také kódování předcházet a napomáhat pochopení?

Objasněme nejdříve kognitivně psychologické pojmy *mentální model* a *mentální reprezentace*.

2.1 Mentální reprezentace a mentální modely

Mentální reprezentace je v oblasti kognitivní psychologie velmi diskutovaným tématem, které procházelo složitým vývojem a snad ještě více než u ostatních prvků pojmoslovného aparátu kognitivní psychologie je její definice velmi obtížná. Pro mé účely se zdá nejvýstižnější toto vymezení mentální reprezentace: *„Mentální reprezentace je finální výsledek kódování informací, který je buď uložen v paměti (v případě dispoziční mentální reprezentace), nebo je součástí proudu uvědomovaných informací (v případě aktuální reprezentace) - jedná se tedy jak o proces, tak o výsledek."* (Sedláková 1992 in Sedláková 2004, s. 50) V definici můžeme vidět použití podobných termínů, jaké lze vidět u Novotné v popisu práce se slovní úlohou. Lze přesně zaznamenat rozdíl v pojetí kódování, který popisuji výše. Zatímco Novotná označuje jako kódování převádění mentálního modelu (tedy informace z psychiky) do vnějšího světa (pomocí legendy či slovního popisu), zde je kódování použito ve smyslu opačném – tedy jako zpracování informace z vnějšího světa do podoby mentálního modelu (či reprezentace).

U mentálních reprezentací se v psychologii diskutuje několik otázek, zejména:

- Vlastnosti (emergenční charakter, rekurzivní charakter, mapování a dimenzionalita).

- Formy: jednoduché formy (zejména imaginativní a propoziční kód) versus složitější formy (schémata, scénáře, rámce a mentální modely).
- Druhy: aktuální (aktuálně uvědomovaný proud vědomí) versus dispoziční (totožná s pamětí, jež může být tedy dále členěna dle členění paměťových procesů).
- Mody: explicitní a implicitní.
- Úrovně: co je předmětem mentální reprezentace. (Sedláková 2004)

Na rozebírání všech diskutovaných bodů není v této práci prostor, ovšem zřejmě by se všechny popsané aspekty daly na řešení slovních úloh aplikovat (a může to být předmětem příštího zkoumání). Nyní se zaměřme na problematiku forem mentálních reprezentací, které lze aplikovat právě na fázi uchopování slovní úlohy, kódování (v Novotné terminologii) a tvoření legend. Otázka forem je také tou nejvíce diskutovanou mezi jednotlivými autory.

Ještě než přejdeme k samotným mentálním reprezentacím, je nutné zmínit reprezentace jako takové. Ty mohou mít v zásadě dvě podoby – externí a interní (mentální). Sedláková rozděluje externí reprezentaci na reprezentaci, která je zprostředkována řečí, tedy verbální, a na reprezentaci, která je zprostředkována analogovým médiem, tedy zobrazením, kresbou, malováním apod. Sternberg (2002) v prvním případě hovoří namísto verbální o symbolické reprezentaci, která je zprostředkována slovy nebo abstraktními výroky (propozice).

Sedláková (2004) uvádí několik hlavních rozdílů mezi jazykem a zobrazením – tedy mezi oběma druhy externí reprezentace:

- Jazyková je utvářena z diskrétních symbolů, slova mohou být rozčleněna do písmen, což jsou nejmenší jednotky, jichž je možné při rozboru užít. Naproti tomu u obrazové reprezentace takto postupovat nelze, ta nemůže být rozčleněna do takových jednotek.
- Jazyková reprezentace užívá explicitních symbolů, které zastupují věci, jež jsou reprezentovány. Ve srovnání s tím obrazová reprezentace neobsahuje distinktivní symboly pro reprezentaci věcí.
- Symboly při jazykové reprezentaci jsou organizovány podle pravidel, při jejichž porušení je narušen smysl. Ve srovnání s tím obrazová reprezentace taková pravidla nenese.
- Jazyková reprezentace je abstraktní, amodální, může pocházet z jakékoliv formy percepce a nenese přímý vztah k dané modalitě. Obrazová reprezentace je naopak asociovaná pouze s vizuální modalitou informace.

Sternberg (2002) vidí hlavní rozdíl ve vztahu reprezentace a reprezentované informace – v případě zobrazení (obrazové reprezentace) se jedná o vztah analogický, zatímco u symbolické reprezentace se jedná o vztah arbitrární.

Důležitou otázkou jsou ale reprezentace mentální (tedy interní). Názory na formy mentální reprezentace nejsou dosud jednotné. Sedláková (2004) hovoří o nástrojích mentální reprezentace, jimiž jsou dva druhy kódu – imagenový a propoziční (a pochopitelně smíšené, mezi které patří mentální modely). Jedná se o rozlišení připomínající Paiviovu hypotézu dvojího kódování, která hovoří o tom, že *„...mentální představy jsou analogové kódy, (tj. formy reprezentace znalostí, které uchovávají základní percepční znaky čehokoliv, co je reprezentováno)...“* (to lze přirovnat k imagenovému kódu), *a „...mentální reprezentace slov jsou reprezentovány v symbolickém kódu (forma reprezentace znalostí arbitrárně – náhodným, ale dohodnutým způsobem - volená coby zástupce něčeho jiného, tato forma se percepčně nepodobá tomu, co je reprezentováno)“.* (Sternberg 2002, s. 248) Verbální informace je tedy zpracována a reprezentována odlišným způsobem než informace plynoucí z představ. Tedy pro mentální reprezentaci vědění užíváme dva odlišné kódy – analogový (založený na představivosti) a symbolický (slovní).

Bruner (1966 in Sedláková 2004) na rozdíl od toho předpokládá tři formy reprezentace – enaktivní, která má podobu gest, výrazů tváře, pohybů majících význam; ikonickou, založenou na uchování stop po percepci předmětů – je vyšším stupněm reprezentace; symbolickou, která je nejvyšším stupněm a je závislá na osvojení jazyka. Podobně Pylyshyn (1973 in Sedláková 2004) koncipuje vedle verbálního a nonverbálního kódu ještě třetí, který by umožňoval interakci obou kódů, případně převedení obsahu jednoho kódu do druhého.

Další pojetí mentálních reprezentací, které uvádí Sternberg (2002) nabízí zcela jiný pohled: Naše mentální reprezentace se podobají abstraktní formě propozic (výroků). Představy jsou pouze epifenomeny – druhotné jevy, které jsou výsledkem jiných kognitivních procesů. V podstatě tedy hovoří pouze o propozičním kódu, který má ale v tomto pojetí jiný význam, než v pojetí Paivia. Propoziční kód je zde vysvětlován takto: *„Výroková (propoziční) forma mentální reprezentace není ani ve slovech, ani v obrazech - spíše je v abstraktní podobě reprezentující významy, které jsou podkladem znalostí. Výrok reprezentující větu si tudíž neponechává ani akustické ani vizuální vlastnosti slov, výrok týkající se obrázku si neponechává exaktní percepční podobu tohoto obrázku. Podle tohoto výrokového neboli propozičního pohledu na věc jsou jak obrázky, tak slovní formulace mentálně reprezentovány v pojmech jejich hloubkového významu - tj. jako výroky, ne jako specifické obrázky nebo tvrzení.“* (Clark; Chas 1972 in Sternberg 2002, s. 250).

Z výzkumů, které uvádí Sedláková (2004), vyplývá tedy, že všeobecně vzato se hovoří o dvou typech mentální reprezentace, resp. kódu – imaginativní (či imagenový, analogový) a propoziční (či symbolický), který má různý výklad – viz výše.

Kromě toho je důležité ještě rozdělení na mentální reprezentace dispoziční, tedy reprezentace uložené v paměti, a aktuálně se prezentující reprezentace v mysli, na její vědomé úrovni. Souvisí to s pojetím vnímání textu (například zadání slovních úloh), jak ho uvádí Čáp (2001, s. 479,480): *„Klíčovým okamžikem percipování textu je porozumění. Obecně je charakterizováno jako proces, při němž jedinec mentálně konstruuje význam a smysl toho, co o tom ví a co vnímá.“ „S pročítáním textu čtenář dekóduje obsah přečteného; pročítaná slova u něj vstupují do okamžité paměti. Současně jsou z dlouhodobé paměti vědomě aktivovány dosavadní znalosti, které by mohly souviset s právě vnímanými informacemi.“* (tedy dispoziční reprezentace). Reprezentace jsou v dlouhodobé paměti uloženy v různých formách. Zásadní je především rozdíl v ukládání poznatku, jehož obsahem je určitý fakt, znalost či vědomost, a osvojením určité mentální operace, dovednosti, procedury (Sedláková 2004). Rumelthart (1979 in Sedláková 2004) a Winograd (1975 in Sedláková 2004) rozlišují reprezentace na deklarativní a procedurální (což se v psychologii používá také pro rozlišení dvou druhů paměti jako takové). Deklarativní reprezentace zpracovávají a ukládají fakta, data, vědomosti. Na rozdíl od toho procedurální tvoří postupy, jak uplatnit interiorizovaná pravidla k vytvoření nového obsahu. Kromě výkonů typu „jak si zavázat boty“ může jít také o dovednosti pro výkon na symbolické úrovni. Mezi oba bloky paměti je navíc vřazena ještě tzv. operační paměť, která zprostředkovává jejich interakci. Deklarativní postupuje do operační fakta a data, procedurální návody k vykonání příslušných procedur (Sedláková 2004).

Dispoziční reprezentace se zdá být obzvláště důležitou v samotném procesu řešení slovní úlohy, kdy žáci používají už naučené (tedy určitým způsobem dříve reprezentované) postupy řešení, tedy nehledají pro každou novou úlohu nové, originální řešení (alespoň většinou ne). Dle popisu typů dispozičních reprezentací se zdá, že vstupují do hry oba. Studenti jednak využívají naučené postupy (procedurální reprezentace), které jsou do operační paměti postoupeny na základě identifikace podobnosti s již dříve řešenou úlohou, jednak mohou být využívány čistě faktické dispoziční reprezentace (například vzorec $s = v.t$, pokud je zapamatován mechanicky). To už částečně předbíháme k další fázi řešení úlohy (viz dále).

Namístě je ještě objasnit termín *mentální model*, který je dle Sedlákové (2004) smíšenou formou mentálních reprezentací. Přesné definování uvádí např. Sternberg (2002, s.603), jedná se o *„vnitřní reprezentace informace, která určitým způsobem souvisí* *(odpovídá, koresponduje) na základě analogie s tím, co je reprezentováno. Může obsahovat analogické i symbolické či propoziční formy."*

Důležitou otázku klade Sternberg (2002, s. 246): *„Odpovídají mentální reprezentace zmíněným externím podobám? Jsme nositeli mentálních scénářů (obrázků) a mentálních vyprávění (slov)?"* Na tomto místě je důležité odlišit externí reprezentace jako standardní způsoby znázornění či jiného vyjádření, používané v oboru (společenství, kultuře), tzn. reprezentace svou povahou univerzálně kulturně sdílené, a externí reprezentace ve smyslu exteriorizace individuálních mentálních reprezentací, platných v aktuálně používaném kontextu. V textu bude dále pro toto pojetí používáno označení exteriorizace mentálních reprezentací.

Pro zaměření práce se nabízejí ještě další otázky. Zda, jak tvrdí Novotná (2004), si žáci skutečně první model zadání konstruují „v hlavě", tedy dochází k vytvoření mentální reprezentace (či mentálního modelu) slovní úlohy. Jak žáci reprezentují zadání takové úlohy, kterou vidí poprvé? Dochází v průběhu řešení k používání již dříve vzniklých reprezentací v jiných úlohách tohoto typu? Jak žáci reprezentují známé schéma (ať už matematické nebo sémantické) úloh o pohybu jako takových? Jak reprezentují představená typová řešení? Jak je využívají ve svém řešení? Jak reprezentují v těchto úlohách používané vzorečky? Jak používané modely či reprezentace vypadají? Který kód pravděpodobně používají a jak souvisí způsob zadání slovní úlohy s použitým kódem? Do jaké míry souvisí exteriorizovaná forma mentální reprezentace (zpravidla v legendě) s podobou mentální reprezentace a použitým kódem? Hledání odpovědí na tyto otázky bude jedním z cílů výzkumné části práce.

2.2 Hledání způsobu řešení

Postoupíme-li dál od první fáze řešení úlohy - tedy jejího uchopení, studenti musí následně přijít na to, jak úlohu řešit. Tichá (1982), na rozdíl od Hejného (2003) a Novotné (2004) se ve svém fázování procesu více zaměřuje právě na samotné řešení. Volbu metody řešení popisuje jako samostatnou fázi, pod kterou se může skrývat bohatý psychický proces. Tuto fázi považuji za důležitou z hlediska záměru práce. Slovní úlohy o pohybu jsou totiž u žáků obvykle spojeny se zcela specifickou (pro jiný typ úloh nepoužitelnou) metodou řešení, kterou mají tendenci použít, a může se zde projevit styl výuky učitele při zadání komplikovaných úloh.

O psychickém procesu, který se skrývá za volbou metody řešení, hovoří Hejný (1995) v jiné souvislosti. Popisuje tuto fázi jako hledání *skriptu*. Tento pojem je známý spíše z kognitivní psychologie (R.C. Schank, R.P. Abelson, 1977 in Hejný, 1995). Jedná se o paměťovou strukturu, která operacionalizuje podnět do stereotypního řetězce kroků. Jedná se o mechanismus podnět – skript - stereotypní konání. V psychologii se o skriptu mluví v souvislosti se situacemi, jako je návštěva restaurace apod. Souvisí to do velké míry s výše zmíněným procesem postupování obsahů procedurální a deklarativní paměti do paměti operační, které se děje na základě spuštění identifikace podobné situace (Hejný 1995). Hejný (1995) hovoří o skriptech v řešitelských procesech v matematice. Žáci mají obvykle nějaký obecný skript na řešení slovních úloh obecně. Tyto skripty jsou ale ještě rozčleněny na specifické skripty (podle mého názoru se jedná o to, co běžně označujeme jako algoritmy), které jsou naučené pro určitý typ slovní úlohy. Když žák začne číst slovní úlohu, zpravidla se v jejím zadání objeví určité místo, které spustí příslušný skript pro tento typ slovní úlohy. Takové místo Hejný nazývá *příkazový idiom*, nebo také *signál*. Tento signál se může skládat například jen z jediného znaku či slova. Schéma řešení takové slovní úlohy, kde žák zná příslušný skript, pak vypadá takto:

Příkazový idiom (signál) → úlohové schéma (skript) → stereotypní řešení.

K tomuto procesu dochází převážně tehdy, je-li žákům zadána tradiční školní slovní úloha, jakými mohou být například slovní úlohy o pohybu, které jsou centrálním tématem práce a pro jejichž řešení existuje skript zcela specifický, který ale, jak uvidíme později, nemusí žáci vůbec použít. V takových slovních úlohách mají žáci skutečně většinou naučené schéma jejich řešení, které může být naučené až do té míry, že nedochází ke skutečnému pochopení. Velice často se projeví už v okamžiku matematizace úlohy (tedy vytvoření matematické úlohy – algebraizace), která může být pro tyto úlohy též dosti specifická (viz dále), nebo v legendě, která bývá také u různých žáků podobná (viz dále). Žák je pak podle Hejného „ztracen“, když mu úlohu, na kterou má naučený skript, nějakým způsobem zkomplikujeme a úloha tak nezapadá již zcela přesně do schématu (Hejný 1995). [1]

Proto jsou právě slovní úlohy o pohybu dobrým materiálem pro zjišťování jejich skutečného pochopení. V práci s dětmi proto budou použity úlohy jednak zcela typicky školní bez jakýchkoliv komplikací, v nichž pravděpodobně žáci budou používat specifický skript pro daný typ úlohy (jak uvidíme později, úlohy o pohybu jsou mnoha typů a každý má skript

---

[1] K celému tomuto procesu dochází dle zastánců didaktického konstruktivismu, ke kterým se hlásí Hejný, Kuřina aj., v případě, že *„děti mají naučený přesný postup podle návodu učitele, pouhé dosazení do vzorců bez aktivního zapojení vlastního rozumu. To vede k deformaci zvané formalismus, což je jakási nemoc kognitivní oblasti světa dítěte.“* (Strnadová 2003).

trochu jiný) a následně úlohy nejrůznějším způsobem zkomplikované, kde použití naučeného skriptu nebude automatické.

Hejný a Kuřina (2001) hovoří o tzv. signálu ještě v jiné souvislosti. Kromě toho, že žáci mají často spojena určitá slova nebo spojení (signály, spouštěcí idiomy) s přesným postupem pro výpočet (tedy přímo algoritmus řešení, který se spustí po identifikaci typu úlohy, což se stane právě na základě signálu), existují také signály, které spouští nikoliv přesný postup řešení, ale jen určitou operaci, pro dané slovo typickou. Dle Hejného a Kuřiny jsou tyto signály dětem vštěpovány učiteli v hodinách matematiky[2], protože skutečně existují slova, která se většinou pojí s určitou operací (ale nemusí tomu tak být vždy – viz dále termín *antisignál*). Autoři vytvoření signálů popisují na situaci slovní úlohy: *V tramvaji jelo 31 lidí. Na zastávce 4 osoby vystoupily a 13 přistoupilo. Kolik lidí jelo dále?* (Hejný; Kuřina 2001, s. 24). Žákům je u této úlohy učitelkou vysvětlována nutnost dvou kroků operace – nejdříve odčítání, poté přičítání. Ovšem k těmto operacím nejsou děti vedeny na základě představy (či demonstrace) reálné situace, ale na základě zdůrazňování předpon vy- a při- ve smyslu vy- znamená odečítat, při- znamená přičítat. Tato slova jsou skutečně většinou spojena s těmito operacemi. Pokud to ovšem není zafixováno na základě představy situace úlohy, ale na základě pouhého slovního signálu, může dojít v nestandardní situaci k chybě[3]. V některých takových situacích se totiž vyskytují tyto signály, obvykle spojené s určitou operací, ve spojení s operací opačnou. Například v úloze *Do tramvaje přistoupilo 5 lidí, takže teď jich tam je 21. Kolik lidí jelo v tramvaji předtím?* (Hejný; Kuřina 2001, s. 27) je sice použito slovo přistoupilo, a tak by děti na základě naučeného signálu měly začít odčítat, ovšem zde je nutné naopak přičítat. Později uvidíme možný výskyt těchto signálů ve slovních úlohách o pohybu.

[2] Což je dle zastánců didaktického konstruktivismu typickým příkladem transmisivního přístupu.
[3] To je dle autorů jeden z nástrojů diagnostiky formalismu.

3 Strategie řešení slovních úloh

3.1 Vymezení

Jedním z bodů mé práce je zjišťování používaných strategií při řešení. Je tedy třeba si ujasnit, co je strategií řešení myšleno. Tímto tématem se ve své práci zabývá Tichá (1982), která vymezuje pojem strategie několika způsoby.

„Strategie je vyčerpávající plně rozpracovaný plán vyjadřující jeden z možných způsobů řešení, který člověk formuluje nebo vybírá z těch, které zná, aby s jeho pomocí úlohu vyřešil." (Tichá 1982, s. 41)

Toto vymezení se mi zdá ve vztahu ke zkoumanému problému v mé práci poněkud zavádějící. U žáků 9. tříd (resp. odpovídajících tříd víceletých gymnázií) málokdy jde o plně rozpracovaný plán (alespoň pokud do strategií zařazujeme i např. strategii náhodně zvolené operace, kterou žáci používají). Málokdy jde také o volbu jedné možnosti z několika, protože žáci zřídkakdy dokáží řešit úlohu více způsoby. Zpravidla spíše volí jedinou, kterou dokáží v daném příkladu uplatnit.

Ve shodě s autorkou se mi mnohem výstižnější zdá vymezení, které autorka dále používá. Strategií řešení úlohy nazývá *„rozhodnutí konkrétního řešitele užít při řešení posloupnost metod, o níž se domnívá, že by mohla vést k nalezení výsledku řešení dané úlohy."* (Tichá 1982, s. 43)

Tichá dále upřesňuje tento pojem vymezením několika charakteristických znaků volby určité strategie:

- Při řešení konkrétní úlohy se řešitel snaží zjistit, do které třídy úloh tato úloha patří tzn. zobecňuje. Např. žáci zařazují určitou slovní úlohu do skupiny slovních úloh o společné práci, na kterou většinou mají naučený přesný postup řešení (to dle mého názoru koresponduje s Hejného teorií o spuštění skriptu). Pokud poté dostanou nějakou z méně známých úloh (kterými jsou podle mě např. slovní úlohy o věku), či netradiční neznámou úlohu, bývají žáci někdy zmateni, protože neznají postup pro vyřešení této úlohy, nebo se snaží uplatnit postup ze skupiny úloh, které znají (pak většinou používají postup z úloh nejvíce těmto úlohám podobných).
- Pro jednu třídu úloh je zpravidla možné volit různé strategie; existuje více možností, jak dojít k výsledku. Největší rozrůznění řešení jednotlivých žáků je patrné právě v úlohách, které žáci příliš neznají a neznají tudíž ani „ideální" řešení.
- Volba strategie řešení konkrétní úlohy do jisté míry závisí na znalostech teorie a předchozích zkušenostech řešitele (toto bylo možné vidět v mém předchozím výzkumu

při porovnání žáků deváté třídy se žáky osmé třídy, kteří ještě neprošli kompletním výkladem teorie řešení slovních úloh, např. neznají metodu řešení pomocí soustavy rovnic).

- Řešitel volí strategii nejen tehdy, když má odpovědět na otázku „Jak začít?“, ale i v průběhu řešení, když odpovídá na otázku „Jak pokračovat z daného stavu?“. (Toto lze pozorovat např. v úlohách, kde otázek je více a řešitel volí různé strategie pro získání odpovědí.)
- Při uplatňování zvolené strategie řešitel svá rozhodnutí:
  - Modifikuje (např. zjistí, že zvolená metoda není vhodná).
  - Konfrontuje vždy, když je možné, s cílem.
  - Hodnotí (posuzuje ekonomičnost, nápaditost, eleganci... zvolené strategie).

Pro srovnání uvedu ještě pojetí strategií řešení dle Novotné (2000). Novotná se zabývá především analýzou strategií u žáků, při kterých je třeba vždy zohlednit několik faktorů:

- Zda bylo řešení nalezeno náhodně nebo po získání vhledu do struktury úlohy.
- Zda je řešení založeno na identifikaci slov nebo slovních spojení v zadání, která jsou pro řešitele signálem pro použití vzorce, postupu (myslím, že můžeme použít také Hejného výraz nalezení skriptu pro danou úlohu), nebo naopak na porozumění struktuře úlohy (v podstatě to koresponduje s prvním bodem u Tiché).
- Zda řešitel použil aritmetický nebo algebraický aparát.

3.2 Typy strategií

Novotná rozlišuje 2 základní skupiny strategií:

3.2.1 Aritmetické strategie

Jedná se o strategie, při kterých řešitel nepoužívá pro výpočet výsledku úlohy rovnice. Takovými strategiemi jsou jednak strategie založené na úvaze, jednak zvláštní typ strategií nazývaný pokus - omyl.

Při úvahových strategiích zpravidla tato úvaha probíhá pouze v hlavě žáka (případně je žák schopen tuto úvahu více či méně interpretovat, ale většinou až po vyřešení úlohy) a zapisuje pouze doprovázející výpočty, nebo čísla, která mu při úvahách vycházejí. Novotná tento typ strategií nazývá netradiční nebo neškolské. Jedná se o strategie, při kterých žáci vytvářejí vlastní postupy, které nejsou typicky školské.

Strategie pokus - omyl je velmi zvláštní strategií, která je ale poměrně často používaná, obzvláště v úlohách neškolského charakteru. Dle Novotné žák volí tuto strategii zpravidla v případě, že má problém se čtením s porozuměním, při získávání vhledu do celkové struktury vzájemných vztahů v zadání, nebo mu chybí potřebné matematické zázemí pro vyřešení problému. Strategie pokus - omyl ale není vždy pouhým pokusem o uhodnutí výsledku. I při této strategii si žák může ve větší či menší míře uvědomovat vztahy dané zadáním. Určité uvědomění vztahů v úloze může této metodě předcházet (což ovšem není až tak časté), nebo může docházet k postupnému pronikání do struktury vztahů a upřesňování úvah při opakování této strategie v průběhu řešení. V obojím případě už se ale nejedná o pouhé náhodné volení čísel, ale o jev, který Novotná nazývá *systematickým pokusem*.

Mezi tyto typy strategií, které jsou ve větší či menší míře založené na náhodě, bych ještě ráda zařadila jednu, kterou Novotná ve své publikaci neuvádí, ale zmiňuje se o ní například Hejný (1995). Jedná se o strategii nazvanou *strategie náhodně volené operace*. Jedná se v podstatě spíše o únikovou strategii, kdy student má k dispozici nějaká čísla ze zadání a provede s nimi určitou operaci zcela bez úvahy o tom, proč právě tuto operaci provádí. Tato strategie je typická spíše pro jednoduché typy úloh, ale domnívám se, že ji lze použít i zde například při utváření rovnic (nebo náhodném sestavení vzorce s = v.t v chybném tvaru).

Strategie pokus omyl může mít různý průběh.

a. Jednou z možností je, že žák své první řešení označí za výsledek řešení, neprovede ani kontrolu výsledku. Při analýze písemné práce pak není možné bez následného rozhovoru se žákem zjistit, zda žák pronikl do struktury úlohy a napsal pouze výsledek, nebo zda použil strategii pokus - omyl a měl štěstí, že se do správného výsledku trefil na první pokus. (To se děje především v případě, že se jedná o úlohu, kde je výsledek odhadnutelný - např. úloha na počet lidí ve třídě, kde se počet bude pohybovat pravděpodobně kolem 30.)
b. Další možností je, že řešitel provádí kontrolu správnosti výsledku a zjistí, že výsledek je správný. Další řešení většinou nehledá. Může se ale také pokusit najít ještě jiný způsob řešení, což je s již získaným správným výsledkem snadnější než na počátku řešení úlohy, protože žák mohl v průběhu řešení získat již určitý vhled.
c. Řešitel může také při kontrole správnosti výsledku zjistit, že výsledek správný není. Poté má několik možností, jak postupovat dál. Jednou z možností je, že se dále po nezdařilém pokusu už nepokouší dobrat ke správnému výsledku a na řešení úlohy rezignuje. Jinou možností je, že pokračuje ve strategii pokus - omyl, až dojde ke správnému výsledku. V případě, že touto strategií postupně

proniká do struktury úlohy, může se snažit cíleně najít jinou cestu k nalezení řešení - přechází k jiné strategii.

3.2.2 Algebraické strategie

Takto nazýváme strategie, při kterých je použita jedna nebo více rovnic. Algebraické řešení se vyskytuje především v klasických školských úlohách typu o směsích, o společné práci a také o pohybu, kde jsou žáci k tomuto typu řešení ve většině případů didakticky vedeni. Na tento způsob řešení je ale nutné znát algoritmus řešení rovnic a jejich soustav, proto je používají hlavně žáci, kteří ho již zvládli.

4 Komplikace úloh

Všechny typy úloh lze určitým způsobem měnit – komplikovat. V obvyklých školních úlohách zpravidla existují jejich základní modelové typy, které děti znají, a zpravidla znají i způsob, jak je vyřešit. Takové modelové úlohy lze ale nejrůznějším způsobem vzdalovat od jejich modelové podoby až na takovou úroveň, že se jedná zadáním i potřebným způsobem řešení o zcela jiné úlohy. Podobně lze komplikovat pochopitelně každý typ slovních úloh včetně netradičních, které děti neznají ze školy, ale nanejvýš z matematických soutěží a olympiád. Komplikace úloh se mohou týkat různých oblastí slovní úlohy. Dle Semadeniho (1995) může ke gradování obtížnosti docházet ve čtyřech různých složkách úlohy – formátu, kontextu, sémantice a matematické struktuře. Podobně hovoří také Rendl (http://userweb.pedf.cuni.cz/kpsp/etnografie/vyzkum/6/rendl.pdf), který uvádí dvě základní roviny matematické slovní úlohy, které obě utvářejí kontext paralelně a obě se na složitosti zadání nějak podílejí (a tudíž v obou rovinách může docházet ke komplikování). Jednou rovinou je rovina matematických údajů obsažených v zadání a jejich vzájemných vztahů (matematická struktura). Druhou rovinou je sémantika textového zadání, nesená jednotlivými jazykovými prostředky výstavby textu - slovotvornými, lexikografickými i syntaktickými. Semadeni (1995) tedy kromě těchto dvou rovin zdůrazňuje také formu sdělení slovní úlohy, narůstání složitosti v této rovině nazývá postupné vzrůstání složitosti v oblasti „formátu" (např. úlohy ukazované na obrázcích či dramatizované mohou být pro děti snadněji uchopitelné než úlohy pouze čtené učitelem apod.).

Druhou možností je postupné narůstání složitosti v kontextu – tedy v prostředí, ve kterém se úloha odehrává, které může být více či méně vzdálené reálnému kontextu. Pro děti bude jistě lépe uchopitelný kontext, který znají, a tudíž si ho dovedou představit, než kontext vzdálenější. Tedy pro děti mladšího školního věku jsou nejčastěji tvořeny úlohy s pohádkovou tématikou, či úlohy o bonbónech, čokoládách atp. Slovní úlohy o pohybu tvoří pro děti prostředí, které částečně znají. I přes to jim ale kontext může být dosti vzdálený, neboť ve věku osmé či deváté třídy podobné problémy v realitě neřeší. Jistě také může být rozdíl, zadáme-li dětem úlohu, kde jedou dva objekty z bodu A do bodu B, nebo zadáme-li jim, úlohu, kde cyklista jede z Horní Lhoty do Dolní a za ním jede auto… I když se může jednat o totožnou úlohu, vyžadující totožné operace pro vyřešení, jistě je úloha s konkrétními objekty v úloze lépe uchopitelná.

Tyto změny v kontextu do určité míry souvisí také se sémantikou úlohy (Rendl oblast neobvyklosti kontextu už řadí mezi komplikace sémantiky), tedy s proměnami slovního zadání a volení slovních prostředků. Jak se ukázalo v předchozím výzkumu (Schöffelová 2006), mohou být některé způsoby zadání jednodušší či těžší. Tento aspekt byl zkoumán na slovních úlohách o věku, kde byly prováděny změny ve třech rovinách. První z nich by mohla být použitelná i v jiných slovních úlohách, tedy i o pohybu. Rendl (http://userweb.pedf.cuni.cz/kpsp/etnografie/vyzkum/6/rendl.pdf) hovoří v této souvislosti o délce textu, která může způsobovat čtenářské problémy. V mé práci (2006) se jednalo o zadávání textu spíše ve více kratších větách než v jednom dlouhém souvětí. Předpokládala jsem, že první varianta bude jednodušší. U studentů se ukázalo, že je pro ně mnohem přijatelnější číst a zapisovat jednotlivé věty ukončené tečkou, než tímto způsobem postupně zapisovat jednotlivé věty souvětí oddělené čárkou. Umožňuje jim to snadnější *fragmentaci textu* (Hejný 2003), která se ukázala jako proces zjednodušující proniknutí do vztahů v úloze a zápis podmínek úlohy. Druhým typem změn je použití různého způsobu vyjádření počtu od přímých číselných vyjádření počtu, k nepřímým nebo až skrytým (Rendl http://userweb.pedf.cuni.cz/kpsp/etnografie/vyzkum/6/rendl.pdf), které jsou nesamozřejmé a nemusí být chápány jako údaj o množství (jedná se o sémantickou ekvivalenci různých slovních spojení, např. týden = 7 dní). V případě úloh o pohybu to může být například vyjádření: „průměrná rychlost je 15 km/h" a ne zcela samozřejmé vyjádření téhož: „za hodinu ujde v průměru 15km" nebo ještě více nesamozřejmé „za dvě hodiny ujde 30 km". Může se také jednat o zcela přetvořenou formulaci, která zdánlivě vytváří zcela novou úlohu. Např. následující úloha: *Města A,B,C leží v tomto pořadí na jedné silnici. Vzdálenost měst A a B je 30 km. Z města A do C vyjede osobní auto (průměrnou rychlostí 60 km/h) a zároveň z města B do C nákladní auto (40 km/h) Za jak dlouho dojede osobní auto nákladní?* (Czudek; Havlicová; Hozová a kol. 1998, s. 93) je ve své podstatě jen jiným vyjádřením tohoto: *Z města B do C vyjelo nákladní auto rychlostí 40 km/h. Ve chvíli, kdy ujelo 30 km, vyjelo za ním osobní auto rychlostí 60 km/h...* Jedná se pouze o jinak zformulovaný základní typ úlohy o pohybu týmž směrem po neuzavřené dráze s náskokem vyjádřeným v km. Je ale dost pravděpodobné, že tato formulace může děti (obzvláště ty, které dosáhly jen formálního poznání) značně zmást. Třetí oblast sémantické komplikace se týkala specificky pouze slovních úloh o věku. Rendl (http://userweb.pedf.cuni.cz/kpsp/etnografie/vyzkum/6/rendl.pdf) jako další oblast pro komplikace v oblasti sémantiky uvádí ještě užití více sémantických ekvivalentů pro tentýž údaj a použití některých méně obvyklých prostředků, vyjadřujících vazby participantů. Patří k nim například:

- Je-li posloupnost uspořádání informací v textu jiná, než je chronologie příběhu. (V neděli přišlo 86 diváků, to bylo o 5 více než v sobotu. Kolik jich bylo za oba dny?)

- Jsou-li některé vazby vyjádřeny implicitně, zamlčeně. (V sobotu přišlo 86 diváků, o 5 více než v neděli. Kolik jich bylo za oba dny?)

Poslední oblastí možného komplikování úlohy je matematická struktura. Rendl navrhuje několik možností komplikací v této rovině, přičemž vychází ze základní matematické struktury slovní úlohy, kterou je triáda číselných údajů, z nichž dva jsou známy ze zadání a třetí je třeba zjistit Ve slovních úlohách o pohybu to přesně vystihuje triáda rychlost – dráha – čas. Komplikace pak mohou být následující:

a) *„Nejjednodušší je zmnožení členů aditivního kontextu, odpovídající součtu více sčítanců. Takový případ pro zjednodušení stále považujeme za jedinou triádu, avšak vícečetnou.*

b) *Totéž lze udělat pro odčítání, avšak jen hypoteticky. Prakticky je většina úloh, v nichž se vyžaduje odečtení několika množství od téhož menšence, řešena ve dvou krocích: součtem menšenců a jeho následným odečtením. To pro nás představuje už úlohu složenou, se dvěma triádami.*

c) *Předchozí bod vlastně už ukazuje, jak lze strukturu rozvíjet hierarchicky, způsobem, v němž se jednoduché kontexty stávají součástí kontextů nadřazených, jsou v nich vnořeny: výsledný, hledaný člen jedné triády se stává členem triády vyšší, předpokladem pro nalezení v ní hledaného členu, který ovšem může být použit také jen jako člen v další triádě, která teprve dává výsledek.*

d) *Strukturu triád lze také pouze větvit - jako když pro každého sčítance konečné mnohočetné triády zavedeme nutnost jeho speciálního výpočtu. (Takže maminku necháme nakupovat nejen 6 rohlíků po 1,50 Kč, ale ještě 4 jogurty po 7,60 Kč, 3 kg cukru po 19,40 Kč....).*

e) *Konečně jsou zřejmě struktury, kde spíše než o hierarchické vnořování kontextů (jako v bodě c) jde o jejich řetězení. Např. v úlohách s úměrou není celek, z něhož je počítáno jednotkové množství, nijak podřazen druhému celku, který se pak prostřednictví této „jednotky" strukturuje."* (Rendl http://userweb.pedf.cuni.cz/kpsp/etnografie/vyzkum/6/rendl.pdf, s. 2)

Doposud se pracovalo víceméně se slovními úlohami jako takovými. V následující kapitole budou představeny aspekty, specifické už pouze pro slovní úlohy o pohybu.

5 Slovní úlohy o pohybu

5.1 Vymezení

Ve školním vyučování se slovní úlohy vyskytují poměrně často a právě slovní úlohy o pohybu jsou nedílnou součástí školní látky v oblasti slovních úloh. Tvoří společně s některými dalšími typy (např. úlohy o společné práci a o směsích) klasiku školního vyučování matematice v osmé a deváté třídě základní školy a mnohdy jsou právě tyto slovní úlohy součástí přijímacích zkoušek na střední školy či jejich složitější podoby součástí matematických soutěží.

Jedná se o úlohy mající zcela specifické zadání a mnohdy vyžadující specifické zpracování a řešení. *„Jejich text navozuje určité dopravní prostředí a formuluje problém související s pohybem, zpravidla rovnoměrným, jednoho, dvou, výjimečně více objektů. K jejich řešení se zpravidla používá vzorec vztahu mezi velikostí dráhy, rychlosti a času (s = v.t) a pracuje se s fyzikálními jednotkami m, s, m/s a jejich díly či násobky.“* (Trávníček 2004/2005, s. 449)

Novotná (2000, s. 18) definuje podobným způsobem: *„Za úlohu o pohybu považujeme slovní úlohu, ve které se vyskytují informace o dráze, době pohybu a rychlosti nějakého objektu ve vzájemné kombinaci, to znamená, že ke správnému vyřešení takové úlohy lze smysluplně použít vzorec s = v.t.“*

Rychlost daného pohybu je obvykle stálá (konstantní). Dráha daného rovnoměrného pohybu je přímo úměrná času, po který se pohyb děje. Známe-li rychlost určitého rovnoměrného přímočarého pohybu i proběhnutou dráhu, vypočítáme čas, po který se těleso pohybovalo podle vztahu t = s/v. V praxi se setkáváme častěji s pohyby, jejichž rychlost se mění. U těchto pohybů je důležitý údaj *průměrné rychlosti* (která se v zadání užívá častěji). Průměrná rychlost nerovnoměrného pohybu je rovna rychlosti, při které by těleso proběhlo rovnoměrným pohybem touž dráhu za tentýž čas (Kafková 2004).

5.2 Specifika

5.2.1 Specifický algoritmus řešení

Jak uvidíme později, není v řešení těchto úloh příslušný vzorec vždy nutné znát, ale děti jsou zpravidla k jeho používání ve výuce vedeny. Z hlediska průběhu řešení tohoto typu slovních úloh se jedná o typické úlohy, kde ve fázi uchopování slovní úlohy (Hejný 2003) je asociován určitý postup. Řešení takové úlohy (obzvláště modelového typu) pak může vypadat takto: Při čtení zadání v textu nalezneme určitá slova či slovní spojení, která nám asociují určitý postup (jedná se o části textu, které Hejný označuje termínem „příkazový idiom“, což dle autorky není zcela výstižný termín). (Vycházím z předchozích výzkumů a z vlastní introspekce, ale jak uvidíme později, potvrzuje se to i v této práci). Nejdříve dojde velmi záhy ke zjištění, že se jedná o slovní úlohu o pohybu (zpravidla hned na počátku čtení zadání). Na základě toho obvykle dojde k hledání základního způsobu řešení (zpravidla si žák vzpomene, že se použije vzorec $s = v.t$, tedy dojde k nalezení základního skriptu). K identifikaci typu slovní úlohy o pohybu dojde většinou prostřednictvím slov nebo slovních spojení *„proti sobě“* nebo *„za sebou“*, což jsou nejčastěji používané typy úloh o pohybu (tento idiom může být skryt i v jiných slovech, například *ze stejného místa, o nějaký čas později za ním…*). Popřípadě se může jednat o jiný idiom v závislosti na konkrétním typu (pokud ho ovšem děti znají), např. *„kruhová dráha“*, *„po proudu a proti proudu“* atd., což jsou signály pro spuštění už zcela konkrétního postupu, pokud je znám. Následuje použití daného postupu, který byl vybaven. Pokud se jedná o nekomplikovanou úlohu, na které je znám celý postup, může dojít k vyřešení úlohy pouze na základě aplikace daného postupu bez jejího pochopení. Příklad takového postupu:

Je dána následující úloha: *Za chodcem jdoucím průměrnou rychlostí 5 km/h vyjel z téhož místa o 3 hodiny později cyklista průměrnou rychlostí 20 km/h. Za jak dlouho dohoní cyklista chodce?* (Czudek; Havlicová; Hozová a kol. 1998, s. 89)

K odhalení, že se jedná o slovní úlohu o pohybu dojde zřejmě na místě, kde se hovoří o průměrné rychlosti, možná ještě dříve. Následuje rozpoznání, že se jedná o slovní úlohu o pohybu týmž směrem po neuzavřené dráze (pochopitelně děti tuto terminologii neznají, spíše budou hovořit – pokud budou vyzvány - o slovní úloze o pohybu za sebou, dohánění atp.). Pokud mají děti naučený určitý způsob řešení[4], spustí se základní vzorec $s = v.t$ a k tomu možná též pravidlo o rovnosti drah, případně rovnice času, kdy čas druhého je stejný jako čas prvního bez jeho náskoku, tedy $t_1 - t_2$ = náskok. Pak záleží, který způsob řešení zvolí (to bude nejspíše dáno postupem procvičovaným v hodině). Například může dojít zcela mechanicky k zápisu podmínek:

$v_1 = 5$ km/h	$t_1 = x$	$s_1 = y$	
$v_2 = 20$ km/h	$t_2 = x - 3$	$s_2 = y$	$(s_1 = s_2)$

Dále může být zafixovaný postup sestavení rovnice z rovnosti $s_1 = s_2$, který se pouze mechanicky doplní ze základního vzorce $s = v.t$:

$v_1.t_1 = v_2.t_2$

[4]Stoupenci didaktického konstruktivismu by to zřejmě považovali za známku transmisivní výuky.

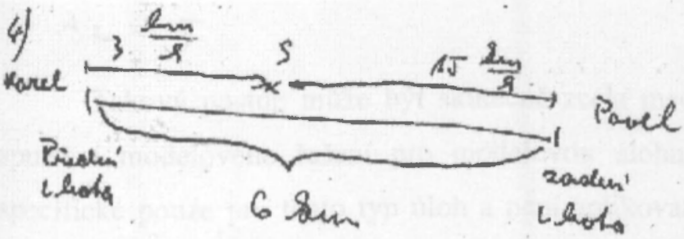
5.x = 20. (x-3)

5x = 20x – 60

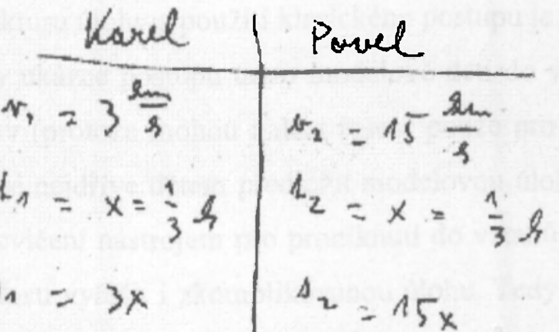
x = 4 → čas chodce je 4 hodiny, čas cyklisty je 1 hodina. Cyklista ho tedy dojede hodinu poté, co vyjede. Dráha se pak dopočítá ze vzorce.

Podobný postup byl sledován v jedné třídě víceletého gymnázia (Schöffelová 2005) na této úloze: *Karel jede na prázdniny k Pavlovi do Zadní Lhoty. Z Přední Lhoty, kam dojel autobusem, musí jít 6 km pěšky. Volá telefonem, že vyráží na cestu. Pavel okamžitě vyjíždí na kole Karlovi naproti. Karel jde rychlostí 3 km/h, Pavel jede rychlostí 15 km/h. Kolik km se bude Karel s kufrem vláčet sám? Kolik km ujede k místu setkání Pavel?*

Ve zkoumané třídě byly postupy až nápadně podobné. Prvním krokem byla většinou obrázková legenda:



Kromě obrázkové legendy ale téměř všichni studenti používají ještě další typ legendy, pro kterou se dle dostupné terminologie (Novotná 2000) nejvíce hodí označení tabulková legenda. Údaje nejsou zapsány přímo v tabulce, ale jsou v podstatě tabulkově uspořádány.



Obě tyto legendy jsou do určité míry specifické pouze pro tento typ úlohy, protože, jak se ukázalo v této třídě u jiných typů úloh, obvykle děti používají spíše legendu slovní.

Další postup směřuje k dosazení hodnot nejdříve do vzorce $s = s_1 + s_2$, ze kterého vypočítají čas. Z této hodnoty poté dostanou dráhy, obvykle dosazením do vzorce $s = v.t$

$A_1 + A_2 = A$

$3x + 15x = 6$

$18x = 6$

$x = \frac{1}{3} = 20$ min

$A_1 = 3 \cdot \frac{1}{3}$

$A_1 = 1$

Karel se potká s Pavlem 1 km

Pavel z místa setkání ujede 5 km

$A_2 = 15 \cdot \frac{1}{3}$

$A_2 = 5$

Takový postup může být skutečně zcela mechanický, aplikovaný pouze na základě spuštění modelového řešení pro modelovou úlohu (což, jak vidíme, je řešení skutečně specifické pouze pro tento typ úloh a není aplikovatelné na jiný typ). Pokud ale děti tímto způsobem postupují v modelových situacích, ještě to nemusí nutně znamenat, že se jedná o aplikaci naučeného postupu bez pochopení.[5] Zcela totožný postup může být prováděn stejně tak s proniknutím do vztahů v úloze a s jejím pochopením. Děti mohou tento postup (který je jim skutečně předkládán) používat pouze proto, že ho mají zafixovaný a chápou díky němu strukturu úlohy a použití klasického postupu je pro ně pohodlné. Stejně tak je možné, že právě díky ukázce postupu takto modelově děti do vztahů proniknou lépe, než když řešení hledají samy (protože mohou nalézt řešení pouze pro jednu konkrétní úlohu). Otázkou je, zda není nutné nejdříve dětem předložit modelovou úlohu a modelové řešení, které je po dostatečném procvičení nástrojem pro proniknutí do vztahů v úloze a znamená schopnost na základě jeho znalosti vyřešit i zkomplikovanou úlohu. Tedy to, že děti automaticky použijí rovnici $s_1 = s_2$ ještě neznamená mechanizaci a formální poznání. Děti stejně tak mohou tento vzorec použít, protože vědí, proč jsou dráhy stejné, a při komplikaci (například právě tím, že dráhy stejné nebudou) dokážou úlohu bez problému vyřešit. Právě to by se mělo projevit ve zkoumané třídě při srovnání řešení modelových a komplikovaných úloh.

---

[5] Jak by zřejmě prosazovali autoři propagující konstruktivistický typ výuky.

Úlohy lze pochopitelně řešit i jinými způsoby.[6] Podívejme se na některá jiná možná řešení, která mohou být aplikována bez znalosti vzorce $s = v.t$ (Opět vycházím z předchozích výzkumů a vlastní introspekce):

Řešení úvahou

Karel ujde za hodinu 3 km → 1 km mu trvá 20 minut

Pavel ujede za hodinu 15 km → 1 km mu trvá 4 minuty

Z tohoto zápisu je vidět, že Zatímco Karel ujde 1 km, ujede Pavel pětkrát tolik (20 : 4), což je v součtu požadovaná vzdálenost 6 km. Je to tedy správný výsledek.

Řešení metodou pokus - omyl

Začneme např. časem 1 h (kdyby oba šli hodinu):

Pavel....... 15 km

Karel........3 km

15 + 3 = 18 → to je moc

snížíme čas na 10 min, protože se to bude dobře dělit:

Pavel..... 15 : 6 = 2,5

Karel..... 3 : 6 = 0,5

2,5 + 0,5 = 3→ zde již vidíme, že je to polovina vzdálenosti, kterou chceme získat, vynásobíme tedy dvěma a dostaneme čas 20 minut:

Pavel............2,5 . 2 = 5

Karel............0,5 . 2 = 1

Řešení jednou rovnicí o jedné neznámé:

Dráha, kterou ujde Karel..............................x km

Dráha, kterou ujede Pavel..............................6 - x km

Dráha celkem..6 km

Čas do setkání..x / 3 h

Čas do setkání..6 - x / 15 h

x / 3 = 6 - x / 15

5x = 6 - x

6x = 6

x = 1 → Karel ujde 1 km, Pavel ujede 5 km.

Otázkou ovšem je, zda tyto způsoby řešení mohou být děti schopné aplikovat i v případě komplikovanější úlohy. Jak se ukázalo v předchozím výzkumu (Schöffelová 2005),

[6] Dle konstruktivistického přístupu měly být dětem též předloženy (nebo by na ně měly přijít samy).

kde byla dětem předkládána právě tato úloha, děti mají potřebu vidět do logiky pohybu ve slovní úloze a potřebují po celou dobu sledovat děj a postupné změny. V úlohách, kde by studenti byli schopni vidět do logiky vztahů v úloze, mohli by ji řešit úvahou či jiným způsobem bez použití základního vzorce. Řada úloh je ale tak složitých, že jsou studenti schopni jen dílčích vhledů (viz fragmentace textu úlohy) a algebraická strategie (a její specifická podoba pro slovní úlohy o pohybu) tak může být jediná možnost. Záleží pak velmi na stylu výuky. Nejsou-li děti do algebry nuceny, mohou jistě vyřešit lépe jednoduché úlohy, kde je možné celou úlohu úvahově zvládnout, neboť lze najednou pojmout všechny vztahy v ní. Problém pak ale nastane v úlohách, o kterých je řeč výše – tedy v těch, kde už jsou děti schopny jen dílčích vhledů. Děti, které nejsou dostatečně vybaveny algebrou, která je zde takřka jedinou možností, pak mají jen malou šanci takovou úlohu vyřešit.

5.2.2 Více „druhů" časů

Problematika dvojího druhu času pohybujících se objektů bude dobře popsatelná na následující úloze, která byla jednou z úloh zařazených do výzkumu:

Osobní automobil Mercedes vyjede v čase T=0 z Prahy k hraničnímu přechodu Rozvadov. V čase T=40 minut vyjede z Rozvadova Audi A8. Mercedes se pohybuje průměrnou rychlostí 160 km/h a Audi 145 km/h. Mercedes musí třikrát zastavit policejní kontrole. Tato kontrola trvá poprvé 4 minuty, podruhé 3 minuty, potřetí 5 minut. Audi jede po celou dobu bez zastávky. Setkají se auta v Plzni?

Tato úloha je zástupcem klasického typu slovní úlohy dle terminologie Trávníčka (2004/2005) o pohybu protisměrném po uzavřené dráze. Je ovšem zkomplikována zpožděním jednoho a přestávkami v průběhu cesty druhého objektu. Při zápisu podmínek úlohy tak mohou vznikat (a jak uvidíme ve výzkumné části také vznikají) dvě různé veličiny času pro jeden pohybující se objekt. Jedním časem objektu je čistý čas jízdy, tedy doba, po kterou objekt reálně vykonává pohyb po dráze. Tento čas je důležitý pro další použití ve vzorci $s = v.t$, protože zde se musí rychlost násobit právě tímto časem. Druhým časem, který zde vstupuje do hry (a v tomto příkladu je to obzvláště patrné), je čas jako doba, kterou je objekt na cestě i se zastávkami či zdržením na začátku (což je v důsledku totéž, ale zastávky až v průběhu cesty více svádějí k jejich přičtení k veličině t).

Tento aspekt je svou podstatou přirovnatelný k aspektu, který se vyskytl ve slovních úlohách o věku (Schoffelová 2005). Tam se jednalo o specifikum „zdvojování" či „ztrojování" objektů v důsledku zobrazovaní osob v úloze ve více časových rovinách.

Např. *Matka je třikrát starší než její syn. Za 16 let bude syn dvakrát mladší, než jeho matka. Kolik let je matce a kolik synovi?*

Zde jsou literárně objekty matka a syn (tedy dva objekty, nebo spíše subjekty), ovšem matematicky jsou objekty jejich věky (tedy 4 objekty, neboť roli hrají jejich věky v současnosti a jejich věky za 16 let).

Podobně je tomu u slovních úloh o pohybu, ve kterých dochází k zastávkám či zpožděním objektů, jako je úloha výše zmíněná. Podobně máme dva objekty literárně – Mercedes a Audi. Matematickými objekty jsou ale jejich časy, rychlosti a dráhy, což samo o sobě „ztrojuje" každý z objektů (subjektů). K tomu ale vzniká ještě „zdvojení" jednoho z matematických objektů – času – na čas celkový a čas pohybu.

Toto specifikum s sebou může nést problémy v procesu řešení. Jednak se v předchozím výzkumu (Schöffelová 2005) ukázalo, že dvojí označení v podstatě téhož objektu činí studentům problémy, protože to v řešení jiných úloh není obvyklé. V úlohách o věku se tak stávalo, že ponechávali pro jednoho aktéra v různých časových rovinách (a tedy pro různé matematické objekty), stejné označení, což vedlo zcela logicky k pozdějším záměnám. Pokud se řešitel rozhodne pro označení dvou různých časů pro jeden objekt, může dojít stejně tak k prosté záměně těchto veličin v dalším procesu řešení (zejm. pokud používá číselné indexy, ve školní praxi běžné). Důsledkem takové chyby může být pouze špatná odpověď na otázku úlohy (se správným postupem). Kromě toho může vzniknout chyba mnohem závažnější, a sice násobení chybným časem v základním vzorci $s = v.t$. Zde může být jeden z klíčových okamžiků, kde lze ověřit, jak děti rozumějí základnímu vzorci – zda vědí, co se čím násobí a hlavně proč. Pokud řešitel zná vzorec a jeho použití, ale nepředstaví si pod tím reálný pohyb, nemusí ho napadnout, že násobení rychlosti časem vyplývá vlastně z toho, že rychlost udává, kolik aktér ujede právě za jednu hodinu pohybu, tudíž je třeba toto číslo násobit počtem ujetých hodin (ale musí jít o reálný pohyb). Může pak chybně ve vzorci násobit celkovým časem objektu na cestě, což pochopitelně povede k chybnému výsledku.

5.2.3 Plynutí pohybu

Opět se jedná o specifický aspekt úloh o pohybu, který lze ale opět přirovnat k jinému, který byl podrobněji sledován u slovních úloh o věku (Schöffelová 2005). V nich se jedná o zákonitost plynutí času, na základě které je potřeba respektovat, že s plynutím času stárnou oba aktéři úlohy a navíc oba stejně rychle. Tudíž „dožene-li" dcera matčin současný věk za 20 let, matka jí mezi tím ale o 20 let „uteče". Už v sémantice, která se v běžné řeči v souvislosti s věkem používá (dožene, uteče), vidíme ekvivalent s úlohami o pohybu (nebo s pohybem jako takovým). V úlohách o věku se jedná o pohyb v čase, zatímco v úlohách o pohybu se jedná o pohyb po dráze, tedy pohyb v užším slova smyslu. I zde ovšem platí (a zvlášť pro úlohy o pohybu týmž směrem po neuzavřené dráze), že dohání-li jeden objekt druhý, ten, který je doháněn mu neustále „utíká“ v průběhu celé doby, kdy je doháněn. V úlohách o pohybu navíc ještě ujíždí jinou rychlostí než dohánějící, zatímco v úlohách o věku je „pohyb“ stejně rychlý pro oba objekty. Základní princip je ale tentýž, a sice, že nestačí mechanicky spočítat, za jak dlouho jeden objekt „dožene“ své „zpoždění“ (ať už věkové nebo časové), ale je třeba vždy počítat s tím, že druhý objekt je v průběhu tohoto dohánění stále v pohybu (ať časem, nebo faktickém).

Slovní úlohy o pohybu bývají pro děti složité a neoblíbené. Tato složitost není ani tak dána jejich matematickou složitostí (neboť jejich řešení je vesměs stejné či velmi podobné), ale spíše uměle zkonstruovanou složitostí popisu situace a zamotání vstupních podmínek.

5.3 Typy slovních úloh o pohybu

Z hlediska zadaných situací a částečně také z hlediska způsobu řešení rozděluje Trávníček (2004/2005) několik typů slovních úloh o pohybu:

1. Jednoduché úlohy na vztah mezi dráhou, rychlostí a časem

V tomto typu úloh jsou dány dvě ze tří hodnot s, v, t a má se vypočítat zbývající. Obměny této úlohy v podstatě spočívají pouze v tom, které veličiny jsou zadány. Komplikace může být nanejvýš v sémantice zadání nebo v použitých jednotkách (tak, aby bylo nutno je převádět).

Např. *Za kolik minut dojede vlak pražského metra ze stanice Dejvická do stanice Skalka (10,1 km), je-li průměrná cestovní rychlost vlaku 34 km/h?* (Frýzek, Müllerová 1992, s. 65)

2. Pohyb týmž směrem po neuzavřené dráze

Tento typ patří ve školní výuce k jednomu ze dvou nejtypičtějších příkladů slovních úloh o pohybu. Jedná se o následující model: Z místa A vyjede první objekt rychlostí v_1 km/h, poté co urazí dráhu d km (nebo po čase t_O) za ním vyrazí druhý objekt rychlostí v_2 km/h., která je vždy vyšší než v_1. Otázka zpravidla zní, za jak dlouho dostihne druhý objekt první.

Princip řešení je v tom, že v okamžiku setkání jsou oba objekty stejně vzdálené od místa A, tudíž se jejich dráhy rovnají. To je také zpravidla základní informace pro sestavení rovnic (rovnice).

Např. – základní typ s náskokem vyjádřeným v čase: *V 6 hodin ráno odpochodovala z kasáren četa vojáků rychlostí 5 km/h. V 8 hodin vyrazila za ní spojka rychlostí 15 km/h.*

V kolik hodin a jak daleko od kasáren dostihne spojka četu?(Czudek; Havlicová; Hozová a kol. 1998, s. 91). Stejným způsobem je sestaven i druhý základní typ úlohy, náskok je ovšem vyjádřen v kilometrech.

Úloh tohoto typu je nepřeberné množství, dají se mnoha způsoby komplikovat, měnit podmínky a okolnosti úlohy. Změny podmínek mohou být v různých oblastech. Může se jednat o nejrůznější obměny ve způsobu zadání téhož, například různé vyjádření náskoku (např. dvě lodi původně vzdálené 256 m plují stejným směrem namísto vyjádření, že jedna loď urazila 256 m a poté vyjela druhá)

Obměna může být dána také zadáním jiných známých a neznámých než v základním typu úlohy. Např. *Za traktorem jedoucím rychlostí 12 km/h bylo vysláno za 3 h 30 minut osobní auto, které ho musí dohnat nejpozději za 45 minut. Jakou nejmenší rychlostí musí auto jet?* (Czudek; Havlicová; Hozová a kol. 1998, s. 93) (Také takových obměn je větší množství, mohou být zadány pokaždé jiné známé a můžeme se ptát na různé neznámé (průměrné rychlosti, vzdálenost dráhy atd.).

Právě v komplikovaných úlohách bude zřejmé, jak dalece děti používanému vzorci rozumějí. Obzvláště tam, kde bude narušeno základní pravidlo o rovnosti drah a časů (se zohledněním náskoku). Zajímavé budou také úlohy, kde budou zadány jiné než obvyklé známé a neznámé.

3. Pohyb protisměrný po neuzavřené dráze

Tento typ je druhým nejčastěji se vyskytujícím ve školním vyučování, jedná se o klasické modelové příklady, zadávané na následujícím principu: Vzdálenost dvou míst A a B je d km. Z A do B se začne v určitém okamžiku pohybovat určitý objekt rychlostí v_1 km/h. Z B do A se ve stejný okamžik (nebo později – to už se jedná o variaci) začne pohybovat jiný objekt rychlostí v_2 km/h. Otázka zní, kdy a kde se objekty setkají. Není příliš jasné, proč tento typ úloh Trávníček označuje jako pohyb po neuzavřené dráze, neboť dráha je často zcela jasně uzavřená. Dále v textu bude tedy používáno označení pohyb protisměrný po uzavřené dráze.

Základním principem řešení tohoto typu úloh o pohybu zpravidla bývá, že $s_1 + s_2 = d$ a $t_1 = t_2$ (pokud není úloha zkomplikována různou dobou startu objektů). Podobně jako u předchozího typu (a pochopitelně u všech ostatních) lze tento typ tak typických školních úloh mnoha způsoby zkomplikovat, měnit vstupní podmínky, což může vést ke zmapování skutečného pochopení principu řešení těchto úloh žáky.

Např. *Ze dvou míst A a B vzdálených od sebe 375 km vyjedou současně proti sobě dvě auta. Z místa A jede nákladní auto rychlostí 50 km/h, z místa B jede osobní auto rychlostí 75* *km/h. Za jak dlouho a v jaké vzdálenosti od A se setkají?* (Bušek; Kubínová; Novotná 1995, s. 84).

Podobně jako u předchozího se můžeme ptát na jiné neznámé, můžeme měnit sémantiku nebo v zadání změnit podmínky natolik, že již neplatí základní podmínka o rovnosti času nebo o součtu drah ($s_1 + s_2 = d$).

Příklad komplikované úlohy různými způsoby:

Vzdálenost z Prahy do Příbrami je 80 km. Z obou měst vyjela současně proti sobě nákladní auta. Auto z Prahy jelo průměrnou rychlostí o 6 km/h větší než auto z Příbrami a tak do okamžiku setkání ujelo o 4 km více. Určete průměrnou rychlost jednotlivých aut a dobu, za jak dlouho se setkala. (Czudek, Havlicová, Hozová a kol. 1998, s. 101)

4. Pohyb po okruhu

Tyto úlohy jsou v mnohém podobné dvěma předchozím typům úloh. Po okruhu (z téhož místa) vyjedou dva objekty buď v tomtéž nebo v opačném směru. Jsou zadány jejich rychlosti a má se zjistit, jak často se objekty potkávají, nebo naopak je zadáno, jak často se objekty potkávají a mají se zjistit jejich rychlosti.

Např. *Na kruhové dráze vyjedou z téhož místa dva cyklisté v témže směru. První objede dráhu za 1 min. 52 vteřin, druhý za 2 min. 24 vteřin. Po jaké době se dohoní?* (Trávníček 2004/2005, s. 453)

Princip řešení této úlohy je podobný jako řešení úlohy o pohybu týmž směrem po neuzavřené dráze. Vycházíme z toho, že jejich dráhy při prvním setkání se liší o jedno kolo.

5. Opakované návraty

Z určitého místa vyjede současně několik objektů, které se opakovaně vracejí s různými periodami. Otázka zní, kdy budou opět všechny zpět na původním místě a pokolikáté se přitom každý z nich vrátil.

Např. *Kruhovou dráhu stadionu objede 1 cyklista za 8 minut, druhý za 10 minut, třetí za 12 minut, vyjedou-li současně od startu a jedou-li stále stejně rychle, přibližně po téže kružnici, za kolik minut projedou zase zároveň startem a po kolikáté se při tom každý z nich vrátil?* (Trávníček 2004/2005, s. 453)

6. Kombinace různých rychlostí pohybu

U tohoto typu úloh najdeme několik forem zadání. Může se jednat o jeden objekt, který se na své cestě pohybuje v prvním úseku rychlostí v_1, ve druhém úseku rychlostí v_2. Je dána délka některého úseku dráhy (nebo celá dráha) a celkový čas (nebo dílčí čas). Mají se dopočítat zbývající údaje.

Např. *Cyklista jel z osady do města. První polovinu cesty, vedoucí převážně do kopce, jel rychlostí 10 km/h, druhou polovinu cesty, která převážně klesala, jel rychlostí 18 km/h. Celá cesta mu trvala 56 minut. Určete vzdálenost osady od města.* (Běloun a kol. 1992, s. 107)

Druhou možností zadání je, že se určitý objekt pohybuje po dráze určitou rychlostí a pak se jinou rychlostí vrací zpět. Jsou dány rychlosti a celkový čas.

Např. *Mezi dvěma přístavišti na řece jezdí parník. Cesta tam a zpět mu trvá 3h 45min. Po proudu pluje rychlostí 12 km/h a proti proudu 8 km/h. Vypočítejte vzdálenost mezi přístavišti.* (Běloun a kol 1992, s. 107)

Třetí forma zadání je podobná první - objekt jede v různých úsecích své cesty různými rychlostmi a máme určit jeho průměrnou rychlost.

Komplikovanější podoba tohoto typu úlohy pak může vypadat takto:

Turista šel 1/3 cesty rychlostí 4,5 km/h, 2/5 cesty rychlostí 4 km/h a zbývajících 6 km rychlostí 5 km/h. Kolik km ušel a jak dlouho mu trvala cesta? (Frýzek; Müllerová 1992, s. 66)

7. Pohyby v pohybujícím se prostředí

Zpravidla jsou aktéry těchto úloh plavci či lodě plující proti proudu a po proudu, nebo objekty létající po větru a proti větru (ptáci, letadla…). Objekt se pohybuje proti proudu rychlostí v_1 a pak hned po proudu rychlostí v_2. Kromě toho je potřeba zohlednit rychlost proudu.

Např. *Parník ujede vzdálenost mezi dvěma přístavy proti proudu řeky za 40 minut a zpáteční cestu po proudu vykoná za 30 minut. Určete rychlost parníku v klidné vodě, je-li rychlost proudu řeky 2 km/h.* (Běloun a kol. 1992, s. 108).

8. Doprava v konstantních intervalech

Na trati délky s jezdí dopravní prostředky rychlostí v_1 každých x minut. Po této trati se pohybuje objekt rychlostí v_2 a) stejným směrem b) opačným směrem. Jak často se potkává s dopravními prostředky (s kolika se cestou setká)?

Např. *Chodec kráčí rychlostí 5 km/h podél trati elektrické dráhy. Jestliže v určitém okamžiku potkal vůz elektrické dráhy, po kolika minutách potká druhý, jestliže vozy jezdí v intervalech 5 minut a rychlostí 15 km/h? Jestliže v určitém okamžiku jej předjede jeden vůz, po kolika minutách jej předjede druhý vůz?* (Trávníček 2004/2005, s. 457)

9. Pohyby po dvou různých drahách

Objekty se pohybují po dvou různých drahách, které se křižují. Z místa ve vzdálenosti d_1 před křižovatkou se dává do pohybu 1. objekt směrem ke křižovatce, po uplynutí doby t_0 se na druhé dráze z místa ve vzdálenosti d_2 před křižovatkou dává do pohybu 2. objekt směrem ke křižovatce, jejich rychlosti jsou v_1, v_2. Kdy budou tyto objekty v dané vzdálenosti d, nebo kdy si tyto objekty budou nejblíže?

Např. *Dva cestující vyšli současně z téhož místa. Jeden směrem na východ, druhý směrem na sever. První ušel denně o 8 km více než druhý. Po pěti dnech chůze byli od sebe vzdáleni 200 km. Kolik ušel každý z nich denně, jestliže předpokládáme, že délka cesty, kterou ušli za den, se u žádného z nich za ty dva dny nezměnila?* (Trávníček 2004/2005, s. 458)

10. Jízda vlaků

Jedná se o úlohy, ve kterých se musí kromě klasických veličin počítat ještě s délkou vlaku.

Např. *Po dvou rovnoběžných kolejích jedou týmž směrem dva vlaky, rychlík 105 m dlouhý rychlostí 57 km/h a osobní vlak 75 m dlouhý rychlostí 39 km/h. Jak dlouho trvá, než každý vlak mine pořizovatele sedícího na druhém vlaku?* (Trávníček 2004/2005, s. 458)

11. Jiné

Úlohy, které nelze zařadit do žádného z předchozích typů, úlohy, které jsou něčím zvláštní, nebo úlohy různým způsobem kombinované, které vyžadují řešení problémů několika typů.

6 Postup experimentu

6.1 Popis vzorku

Pro výzkum jsem zvolila skupinu studentů z jedné třídy víceletého gymnázia, která věkově odpovídá deváté třídě ZŠ. Studenti tudíž mají dostatečně zažité postupy řešení slovních úloh všech typů, včetně slovních úloh o pohybu. Výzkumný vzorek tvořilo 30 studentů, 14 dívek a 16 chlapců.

6.2 Popis výzkumu

Před začátkem výzkumu byla na základě analýzy učebnic matematiky pro základní školy a sbírek úloh z matematiky vybrána série úloh, zastupující typové úlohy a dále úlohy, o nichž jsem se domnívala, že jsou spíše nestandardní a studenti je běžně ve škole neprocvičují. Vytvořený seznam patnácti úloh byl předložen učitelce matematiky dané třídy s prosbou o vyjádření, zda žáci úlohy znají, běžně řeší, nebo jsou spíše výjimečné či je vůbec neznají (alespoň ne z hodin matematiky). Na základě vyjádření učitelky byly sestaveny dvě varianty písemné práce o třech úlohách, které měly zastupovat typové úlohy, známé ze školního prostředí. Tyto úlohy byly žákům předloženy k vypracování na začátku hodiny matematiky v září 2007. Jednalo se o půlené hodiny, takže bylo přítomno vždy pouze 15 studentů, kteří byli posazeni do lavic po jednom, aby se eliminovalo opisování (proto byly vytvořeny dvě varianty písemné práce). Po dokončení písemných prací učitelka všechny úlohy se žáky probrala u tabule (vždy byl vyvolán jeden žák), což bylo pozorováno a zaznamenáno na diktafon (přepis pozorování z hodin viz přílohy 1,2). Při zadávání chyběla jedna žákyně, které byly úlohy předloženy dodatečně při individuální práci.

Během září a října 2007 následovala individuální práce se všemi žáky, pro kterou byly zvoleny úlohy, které měly zastupovat méně běžné, komplikované a zcela nestandardní úlohy o pohybu. Se žáky byla individuální práce prováděna v samostatné učebně po dobu jedné, v některých případech dvou, vyučovacích hodin. Ze série úloh byly pro přímou práci vybírány a seřazeny úlohy individuálně na základě rychlé analýzy záznamů z řešení písemných prací. Některým studentům, kde bylo potřeba sledovat podrobněji proces řešení typových úloh, byly při individuální práci předloženy některé úlohy z písemné práce druhé varianty, než té, kterou již písemně řešili. Někteří studenti byli před samotným řešením dalších úloh požádáni o vysvětlení postupů z písemné práce. Do samotného řešení bylo neustále zasahováno. Požadovala jsem vysvětlení každého provedeného kroku řešení a poskytovala nápovědy, pokud si student nebyl jist, nebo nevěděl, jak dále v řešení pokračovat.

Po dokončení práce se studenty byly písemné i zvukové záznamy analyzovány (zvukové a písemné záznamy řešení a jejich analýzy jsou přiloženy na CD).

6.3 Úlohy použité v písemné práci

Varianta A

1. Za chodcem jedoucím průměrnou rychlostí 5 km/h vyjel z téhož místa o 3 hodiny později cyklista průměrnou rychlostí 20 km/h. Za jak dlouho dohoní cyklista chodce? ? (Czudek; Havlicová; Hozová a kol. 1998, s. 89)
2. Z míst A a B, vzdálených od sebe 210 km, vyjely současně proti sobě 2 kamióny rychlostmi 40 km/h a 30 km/h. Kdy a kde se potkají? (Czudek; Havlicová; Hozová a kol. 1998, s. 95)
3. Z města A do města B vyjelo nákladní auto průměrnou rychlostí 30 km/h. Současně s ním vyjel i autobus, který měl průměrnou rychlost 40 km/h a který přijel do města B o 1 h 15 min dříve než nákladní auto. Jaká je vzdálenost mezi oběma městy? (Vymyšleno)

Varianta B

4. Ve 13 hodin vyjelo z Pardubic ke Kolínu auto Škoda Felicia rychlostí 60 km/h. O půl hodiny později vyjelo stejnou cestou auto Škoda Octavia rychlostí 80 km/h. Kdy dohoní Octavia Felicii? (Vymyšleno)
5. Z Prahy do Olomouce je přibližně 250 km. V 6 hodin vyjel z Prahy do Olomouce rychlík průměrnou rychlostí 85 km/h. Ve stejném okamžiku vyjel z Olomouce do Prahy osobní vlak průměrnou rychlostí 40 km/h. V kolik hodin a v jaké vzdálenosti od Prahy se setkají? (Vymyšleno)
6. Nákladní auto jelo průměrnou rychlostí 20 km/h a vyjelo z Prahy směrem k Liberci. Současně s ním vyjel autobus, který jel průměrnou rychlostí 30 km/h a který přijel do Liberce o 2 hodiny dříve než nákladní auto. Jaká je vzdálenost mezi Prahou a Libercem? (Czudek; Havlicová; Hozová a kol. 1998, s. 93)

Všechny tyto úlohy tvoří dle slov učitelky základ učiva tohoto typu úloh. V učebnicích se také podobné úlohy běžně vyskytují. Úlohy 2,3 a 4,5 jsou záměrně sémanticky odlišné. Ve variantě B je voleno sémanticky konkrétnější zadání. Objekty zde jedou mezi konkrétními městy, zatímco ve variantě A jezdí mezi abstraktními místy A a B. Tyto dvě varianty zadání si kladly za cíl sledovat, zda bude mít konkrétnost zadání vliv na řešení úloh.

6.4 Úlohy použité pro individuální práci

1. Etapa cyklistického závodu se jela průměrnou rychlostí 45 km/h. Jeden závodník ztratil defektem 4 minuty. Za jak dlouho a jak daleko musel jet rychlostí 50 km/h, aby opět dostihl peloton? (Czudek; Havlicová; Hozová a kol. 1998, s. 91)
2. Martin byl s kamarády na chalupě. Řekl, že vyjdou-li z chalupy přesně v 8 hodin a půjdou rychlostí 3 km/h, přijdou na zastávku autobusu 9 minut po odjezdu autobusu. Půjdou-li však rychlostí 4 km/h, přijdou na zastávku 6 minut před odjezdem autobusu. Určete vzdálenost zastávky od chalupy a v kolik hodin jede autobus. (Běloun a kol. 1992, s. 99)
3. Z míst A a B vyšli současně proti sobě dva chodci. První došel z A do B za 4 hodiny. Druhý došel z B do A za 3,5 hodiny. Za jak dlouho se potkali? (Frýzek; Müllerová 1992, s. 66)
4. Po okruhu dlouhém 2550 m jezdí dva motocykly takovými rychlostmi, že se potkávají každou minutu, jezdí-li proti sobě a dohánějí každých 5 minut, jezdí-li týmž směrem. Určete jejich rychlosti. (Trávníček 2004/2005, s. 453).
5. Osobní automobil Mercedes vyjede v čase T=0 z Prahy k hraničnímu přechodu Rozvadov. V čase T = 40 minut vyjede z Rozvadova Audi A8. Mercedes se pohybuje průměrnou rychlostí 160 km/h a Audi 145 km/h. Mercedes musí třikrát zastavit policejní kontrole. Tato kontrola trvá poprvé 4 minuty, podruhé 3 minuty, potřetí 5 minut. Audi jede po celou dobu bez zastávky. Setkají se auta v Plzni? (Z Prahy do Plzně je to 90 km a z Plzně na Rozvadov 60 km.) (Převzato od Kropáčkové 2004/2005, příloha 2, str. 5, upraveno)
6. V 5 hodin vyšel turista z noclehárny na delší cestu. Za hodinu ušel 5 km. Současně s ním vyjel z noclehárny stejným směrem cyklista rychlostí 17 km/h. Za jak dlouho budou od sebe vzdáleni 20 km? (Czudek; Havlicová; Hozová a kol. 1998, s. 93)
7. Za traktorem jedoucím rychlostí 12 km/h bylo vysláno za 3 h 30 minut osobní auto, které ho musí dohnat nejpozději za 45 minut. Jakou nejmenší rychlostí musí auto jet? (Czudek; Havlicová; Hozová a kol. 1998, s. 93)
8. Cyklista jede z bodu A do C do kopce rychlostí v_1 = 10 km/h, z bodu C do B z kopce rychlostí 18 km/h. Dráhu z A do B dlouhou 31,5km ujel za 2 hodiny 5 minut. Jak dlouho jel z kopce a do kopce a jak dlouhá je dráha AC a BC? (Trávníček 2004/2005, s. 454)
9. Auto jelo z A do B a celou trasu 12,5km absolvovalo průměrnou rychlostí 75 km/h. Prvních 8 km jelo rychlostí 80 km/h, pak 3 minuty pojíždělo obcí C a zbývající úsek

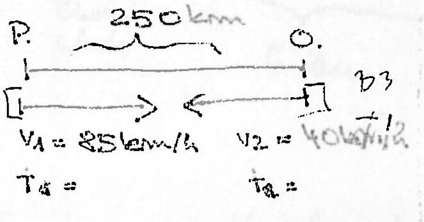
zvládlo za 1 minutu rychlostí 90 km/h. Zjistěte kolik km jelo auto obcí C a zda přitom řidič dodržel povolenou rychlost jízdy. (Trávníček 2004/2005, s. 455)

Úlohy 1 a 2 byly zvoleny jako zvláštní varianty úloh o pohybu za sebou – první komplikovaná prodloužením dráhy o úsek před zdržením cyklisty, který není pro řešení podstatný, ale pro studenty může být značně matoucí. Ve druhé úloze je zvláštnost ve „zdvojení" jednoho objektu úlohy a v celkové zvláštní sémantice zadání, která není v typových úlohách běžná. Úlohy 3 a 4 zastupují zcela nestandardní a pro studenty ze školního prostředí neznámé úlohy. Úloha 5 byla zařazena především pro značnou komplikovanost zadání a nabourání základního schématu zadání typových úloh o pohybu týmž směrem. Úlohy 6 – 9 byly zařazeny jako rezervní, pro případ, že student dokončí prvních 5 úloh před koncem hodiny. Jedná se komplikované podoby typových úloh, kde jde především o to, že jsou zadány jiné veličiny a jiné neznámé, než je zcela běžné. Dle slov učitelky ale tyto úlohy byly ve škole řešeny (i když ne tak často jako typové úlohy z písemné práce). Úloha 6 se ale nakonec ukázala jako důležitá pro zjištění porozumění algebraickému řešení pomocí vzorce a rovnic pro dráhu a byla zařazena u velké části studentů. Úlohy 8 a 9 nikdo z řešitelů nevypracovával.

7 Legendy a kódování

Většina studentů před samotným řešením provádí tzv. kódování slovní úlohy (ve smyslu převedení zadání do referenčního jazyka), jehož výsledkem je legenda. V mém vzorku se vyskytovala u všech studentů nápadně podobná legenda, v naprosté většině obrázková se slovními poznámkami (resp. se zápisem známých a neznámých veličin ze zadání).

Příklad:



U některých studentů se vyskytuje podobná legenda bez obrázkové části, tedy pouhý zápis známých veličin a zápis neznámých s otazníkem, jak je tomu například zde:

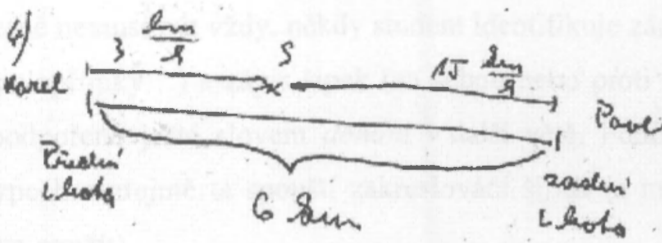
$$v_1 = 160 \text{ km/h}$$

$$v_2 = 145 \text{ km/h}$$

$$t_c = t_1 + t_2$$

$$t_2 = \cancel{t_1 - 40} \quad (t_1 + t_2) - 40$$

Způsob zapisování legendy v těchto typicky školských úlohách jistě do velké míry závisí na zvyku z hodin, což dokládá také to, že v jiném vzorku (Schöffelová 2005/2006) se vyskytovala jiná, ale také v dané třídě typická legenda – obrázková a tabulková, například takto:

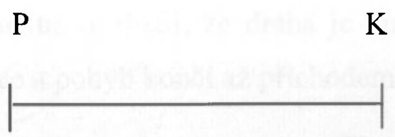


Karel	Pavel
$v_1 = 3 \frac{km}{h}$	$v_2 = 15 \frac{km}{h}$
$t_1 = x = \frac{1}{3} h$	$t_2 = x = \frac{1}{3} h$
$s_1 = 3x$	$s_2 = 15x$

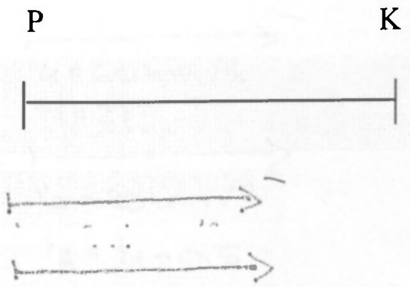
Pro většinu studentů je typické sériové uchopování textu úlohy a zápis legendy už v průběhu čtení (ať už volí legendu i s obrázkovou částí či nikoliv). To je v souladu s odhalováním jednotlivých klíčových slov („příkazových idiomů“). U úloh podobných typovým (v typových to nebylo možné pro pouhý písemný záznam přímo sledovat, ale předpokládám, že to bude přítomno i tam) studenti většinou čtou postupně a zapisují (nebo často postupují tak, že si nejdříve přečtou celou úlohu, ale poté čtou znovu a stejně ji uchopují sériově). Jedná se o dost automatický postup, který mají studenti zřejmě nacvičený z hodiny, protože je téměř totožný u valné většiny řešitelů – pokusím se ukázat jednotlivé fáze zápisu na příkladu 4 z písemné práce a řešení Ivany.

Zadání: *Ve 13 hodin vyjelo z Pardubic ke Kolínu auto Škoda Felicia rychlostí 60 km/h. O půl hodiny později vyjelo stejnou cestou auto Škoda Octavia rychlostí 80 km/h. Kdy dohoní Octavia Felicii?*

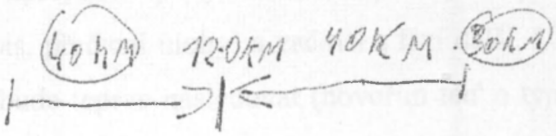
Při identifikaci, že se jedná o úlohu o pohybu a identifikaci míst, odkud kam k pohybu dochází, zakreslují úsečku (nebo polopřímku). K takovému odhalení dojde většinou v první větě (spouštěcími slovy budou zřejmě slovesa *jet, jít*…zde zřejmě k tomuto stačí přečíst *Ve 13 hodin vyjelo z Pardubic ke Kolínu*):



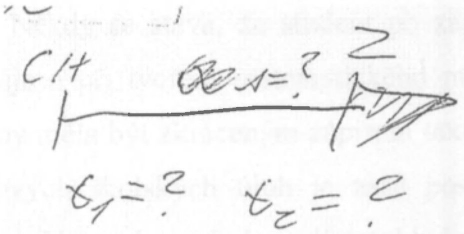
Následuje odhalení, zda se jedná o pohyb za sebou nebo proti sobě (pochopitelně tomu takto přesně nemusí být vždy, někdy student identifikuje zároveň pohyb i jeho druh a zapisuje rovnou polopřímky...) a zápis šipek (za sebou nebo proti sobě). Spouštěčem zde je *stejnou cestou* podpořeno ještě slovem *dohoní* v další větě. Podobná slova se vyskytují ve všech těchto typech a zřejmě ta spouští zakreslování šipek (a možná už v tu chvíli vzorec, který bude třeba použít).



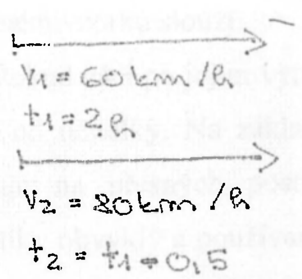
Zobrazované šipky jsou zajímavým aspektem obrázkové legendy. V některých případech zobrazují jen směr pohybu. Pak je většinou v legendě úsečka (odkud kam se objekty pohybují) a následně pod touto úsečkou šipky proti sobě nebo za sebou, které skutečně jen naznačují směr pohybu. V takovém případě jsou šipky typicky krátké (respektive nezobrazují přesně, kam aktéři dojedou, jen jakým směrem jedou). To můžeme vidět i v legendách Ivany výše. Druhou možností je, že šipky zobrazují dráhu. Pak je typické, že v úlohách o pohybu protisměrném se v určitém místě střetávají (což už naznačuje součet drah obou aktérů používaný ve vzorci pro výpočet), navíc často v místě, kde řešitel setkání odhaduje:



Pro úlohy o pohybu týmž směrem po neuzavřené dráze je typické zobrazování dvou šipek, které mohou rovněž znamenat jak směr pohybu, tak dráhu. Šipka pak může naznačovat neuzavřenost dráhy v úlohách kde není určeno, kam až by měli aktéři dojet. Uvědomění a zobrazení uzavřenosti či neuzavřenosti je dobře vidět v úloze 2 u Davida (která je, jak uvidíme později, specifickou formou úlohy o pohybu týmž směrem, ovšem po dráze uzavřené). Ten nejdříve po identifikaci pohybu za sebou nakreslil šipku a poté, co se znovu vrátil k textu, a zjistil, že dráha je vlastně uzavřená (zde je pohyb zcela jasně od chalupy k zastávce a pohyb končí až příchodem na zastávku) přetvořil šipku v úsečku.



Po zakreslení obrázkové legendy následuje dočtení celého textu a tím identifikace známých, neznámých a otázky. Poté dojde k zápisu toho, co bylo identifikováno:



Jak vidíme zde, někdy už dojde v této fázi k odhalení a správnému zápisu některých důležitých vztahů (zde vztah mezi t_1 a t_2), někdy v první fázi studenti zapíší k oběma veličinám otazník.

Zajímavé je, že téměř vždy dojde k zápisu této legendy velmi rychle a možná až zautomatizovaně. Je zcela patrné, že pokud je postup skutečně takový, nedochází v tu chvíli ještě k nalezení sjednocujícího pohledu a leckdy ani k reálné představě situace (viz dále). Po tomto zápisu totiž zpravidla dojde k tomu, že student vytvoří jakousi pauzu, po které jako by úlohu teprve začal skutečně řešit. Taková pauza a začátek reálného řešení úlohy se projeví např. tím, že student řekne výroky jako „tak“, „jo“, „takže“, udělá čáru pod legendou, na chvíli se opře, nebo pokývá hlavou apod., jakoby v tu chvíli měl za sebou jednu fázi řešení (tedy zápis, přečtení úlohy) a začínal s fází další. Už to naznačuje, že hledání sjednocujícího pohledu bude teprve následovat (hovořím teď o typickém postupu v úlohách typových nebo typovým podobných, jinak je tomu u velmi komplikovaných úloh typu úloha 4). Navíc i u nevyřešených úloh se často legenda vyskytuje. To značí, že lze legendu zapsat naprosto bez porozumění situaci a následný sjednocující pohled vůbec nemusí být nalezen. Po této „pauze“ většinou řešitel hledá správný vzorec pro použití v dané úloze, nebo v případě řešení úvahou způsob výpočtu. Až v tom – a nikoliv už v zápise legendy - spatřuji proniknutí do struktury úlohy a nalezení sjednocujícího pohledu.

7.1 Obrázková legenda

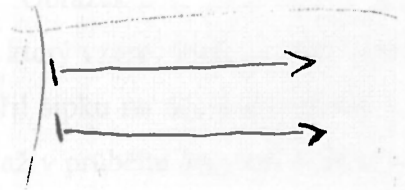
Otázkou ovšem zůstává, proč si řešitel obrázkovou legendu vytváří, k čemu řešiteli slouží. Někdy se stává, že student po zápise této legendy už vůbec nijak dále s legendou nepracuje a při tvoření matematického modelu se vrací zpět do textu, nikoliv do legendy (která by měla být zkráceným zápisem textu). Tak je tomu především u velmi složitých úloh. U typových školských úloh je zase postup natolik zautomatizovaný, že už při čtení a zapisování legendy je sjednocující pohled znám (resp. student si uvědomí, o jaký typ úlohy se jedná, a to mu asociuje příslušný vzorec, jehož řešení může být zcela mechanické – viz dále), a tak legendu opět již nepotřebuje. Nabízí se několik vysvětlení, k čemu legenda ve zkoumaném vzorku slouží.

Pokud žáci po jejím vytvoření legendu dále nepoužívají, může se jednat o vyžadování legendy od učitelky. Na základě pozorování (viz příloha č. 2) je však patrné, že učitelka nebazíruje na přesných postupech řešení. Typický postup ale může být v hodinách matematiky obvyklý a používaný učitelkou, a proto ho žáci posléze při samostatné práci také používají, aniž by jim k něčemu výrazně sloužila.

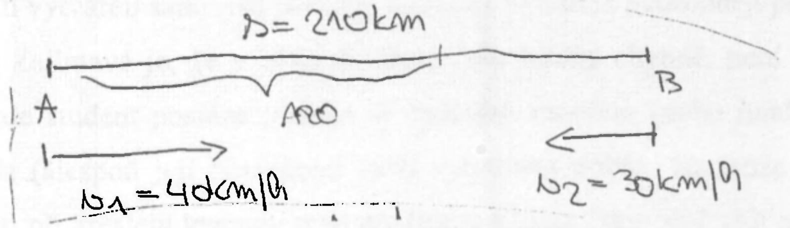
Další možností s tím související je, že legenda se stala součástí zautomatizovaného postupu při řešení tohoto typu úloh (součástí celého algoritmu řešení). To ale ještě neznamená, že se jedná o pouhé „kopírování" předkládaného postupu, který byl předložen včetně legendy. Původně legenda mohla skutečně sloužit jako zkrácený zápis zadání, se kterým se dále pracovalo při hledání sjednocujícího postupu. Obrázková legenda mohla být také používána pro lepší představu reálné situace při původním probírání těchto úloh. Žáci si tak mohli na začátku řešení těchto úloh, kdy ještě postup nebyl zautomatizovaný, text takto zobrazovat právě na základě reálné představy situace, což jim mohlo pomáhat k lepšímu uchopení úlohy. Nyní ale již do struktury těchto (alespoň základních) typů úloh pronikli natolik, že sjednocující pohled vidí rovnou a nepotřebují si ho zobrazovat. Už při čtení identifikují jednotlivé „příkazové idiomy", které hovoří o typu potřebného vzorečku. Legenda tak může být pozůstatkem z doby, kdy ji řešitel potřeboval, ale nyní ji už reálně potřebovat nemusí (přesto ji může pokládat za nutnou součást algoritmu). Navíc s postupným zautomatizováním postupu už může být legenda tvořena naprosto bez představy reálné situace, jen na základě klíčových slov, která vyznačují druh pohybu.

Pochopitelně je ale pravděpodobné, že alespoň některým studentům legenda skutečně slouží k lepší práci s úlohou. Proces zápisu může být stejně automatický jako při formálním použití jako součást algoritmu, ale přesto může být velice důležitý, a to především v úlohách komplikovaných, kde se postup řešení liší od algoritmu řešení typových úloh. To lze sledovat například v úloze 5 z individuálního zadání, kde je text komplikován zpožděním a několika přestávkami (takže je velice náročný na pouhé udržení údajů v pracovní paměti). Když totiž dochází ke kreslení legendy (obzvláště pak při sériovém uchopování), musí si řešitel skutečně pozorně přečíst text, aby nakreslil skutečný pohyb. Pokud text jen přečte a pohyb si nijak nezobrazí, může následně pracovat snadno s opačným vzorcem (tedy v úloze 5 se vzorcem pro pohyb týmž směrem po neuzavřené dráze), protože při čtení nevěnoval úplně pozornost pohybu, o který se jedná, nebo to neudržel v paměti díky dalším komplikacím úlohy. Pokud si má pohyb nakreslit, musí si zobrazit skutečně to, co je zapsáno; teprve poté už to po celou dobu řešení vidí a může se toho držet. Je tedy skutečně možné, že i když kreslí legendu na základě jednotlivých „příkazových idiomů“ (především odhalení typu úlohy - nejdříve o pohybu, poté kterého konkrétního typu), může to být prostě aparát pro zapamatování, o který typ úlohy se jedná, protože jinak by to při složitém procesu řešení mohlo být zapomenuto. Při pohledu na správně sestavenou legendu je pak možné odhalit, který vzorec zde bude potřeba – buď na základě automatického naučeného spojení typu „proti sobě = vzorec se součtem drah“, nebo na základě představy situace na obrázku.

Obrázková legenda může obsahovat různé množství informací a může být v různé míře věrným odrazem textu (resp. situace) úlohy. Můžeme vidět jednat velmi schématické legendy, například:

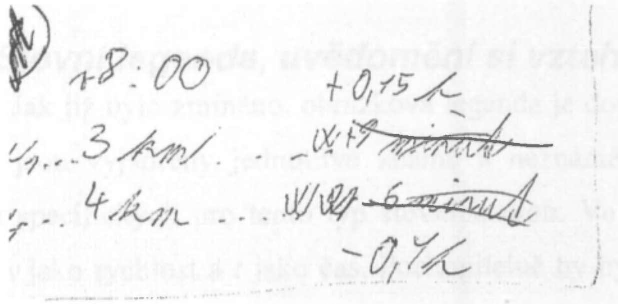


Nebo velmi podrobné legendy

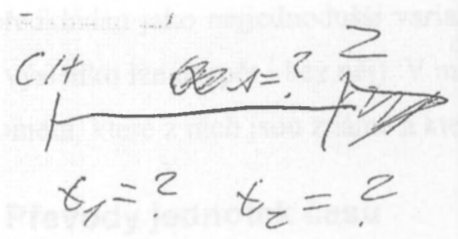


Ovšem například tyto dvě legendy jsou od jedné žákyně. Do určité míry to může vypovídat o tom, jak dalece legenda pomáhá k pochopení, protože u některých studentů je legenda tím podrobnější, čím je text delší a složitější (viz například záznam a analýza řešení Pavlíny). To může naznačovat nutnost si ve složitějších úlohách text co nejvíce zpřehlednit v legendě, zatímco v typových a jim podobných úlohách jde jen o schéma, o který ze dvou základních typů úlohy se jedná.

V některých případech je dosti evidentní, že právě při procesu vytváření obrázkové legendy (a díky němu) dochází k postupnému pronikání do vztahů v úloze. To se týká především nestandardních úloh. Dobře je to vidět například u Davida v úloze 2, která už byla zmíněna výše v souvislosti se zobrazováním uzavřené a neuzavřené dráhy. David začal nejdříve legendou slovní:



Poté se zamyslel nad dalším postupem a nakreslil obrázkovou legendu nejdříve se šipkou:



Obrázek tedy začal kreslit až po zápisu základních podmínek, jako by mu měl pomoci zjistit, který vzorec bude potřeba použít. Po prvním zobrazení legendy se znovu vrátil k textu, přetvořil šipku na úsečku a zapsal $s_1 = s_2$. Je tedy dost pravděpodobné, že na rovnost drah přišel až v průběhu kreslení legendy. Ještě lépe je postupné pronikání vidět při zobrazování situace v úloze 4, kde byla používána série obrázkových nápověd nebo si podobný postup studenti vytvářeli sami (též pomocí obrázků). O tom je podrobněji pojednáno v kapitole 9.

Zajímavé je, že v úlohách, které jsou řešeny chybně, není nikdy chyba v legendě. I tam, kde student posléze pracuje se špatným vzorcem (nebo jinak chybným postupem), je legenda (alespoň její obrázková část) vytvořena dobře. To může vypovídat též o tom, že studenti při kreslení legendy mají představu situace (skutečně vidí pohybující se objekty proti sobě nebo za sebou), nebo mají postup zautomatizovaný na základě klíčových slov. V každém případě jejich kresby alespoň schématicky odpovídají textu. Přesto jsou pak studenti schopni použít chybný vzorec (většinou opačný). To může vypovídat o tom, že ač v legendě reálná představa situace je, při hledání sjednocujícího pohledu být nemusí, resp. k němu vůbec nemusí dojít a použití vzorce může být zcela mechanické. Studenti mohou mít vytvořena spojení – pohyb za sebou – $s_1 = s_2$ a pohyb proti sobě – $s_1 + s_2 = s$. Takové čistě mechanické spojení může být snadno zapomenuto, a proto se může stát, že dojde k jejich záměně. Takový postup by navíc vypovídal o tom, že je používán čistě mechanicky tak, jak byl předložen k pouhému mechanickému zapamatování. Jak uvidíme později, i při mechanickém užití bez nalezení sjednocujícího pohledu a proniknutí do struktury lze úlohu úspěšně vyřešit. Na druhé straně ale stejně vypadající postup může být podložen skutečným pochopením (viz dále).

7.2 *Slovní legenda, uvědomění si vztahů jednotlivých veličin*

Jak již bylo zmíněno, obrázková legenda je doprovázena slovními poznámkami, resp. častěji jsou vyjádřeny jednotlivé známé a neznámé z úlohy prostřednictvím fyzikálních veličin specifických pro tento typ slovních úloh. Ve hře jsou v zásadě 3 veličiny – s jako dráha, v jako rychlost a t jako čas. Pochopitelně by bylo možné použít označení typické pro všechny ostatní typy slovních úloh, tedy písmena x, y apod., nebo počáteční písmena objektů úlohy. Použití těchto veličin je ovšem součástí algoritmu pro řešení těchto úloh, který bývá ve škole předkládán jako nejjednodušší varianta řešení za pomoci vzorce pro dráhu – $s = v.t$ (i když k výsledku lze dospět i bez něj). V místě, kde dochází k zápisu těchto veličin, musí dojít k uvědomění, které z nich jsou známé a které bude třeba vypočítat.

7.2.1 Převody jednotek času

Již v tomto místě se můžeme setkat s druhem chyb specifickým pro tento typ úloh, a sice s chybnými převody jednotek času, které jsou všeobecně pro žáky obtížné. Rychlost je zde zpravidla uváděna v km/h, zatímco čas je mnohdy uváděn v minutách. Nejčastější chybou v tomto místě je opomenutí tohoto převodu. Kromě toho studenti někdy používají k převodu opačnou operaci, než je potřeba. Většina z nich ví, že je zapotřebí určitá operace s číslem 60 (protože z běžného života vědí, že hodina má 60 minut), ovšem v danou chvíli nejsou ihned schopni tuto znalost aplikovat v matematickém příkladu, neuvědomí si, co tento fakt znamená pro převod jednotek. Dokládá to například následující rozhovor nad řešením Dáši:

Dáša: Takže to je 1,6 hodiny.

Experimentátorka: No takže to je kolik zhruba? Jak si z toho spočítáš, kolik je to minut?

Dáša dosti dlouze přemýšlí.

Ex: Kolik má hodina minut?

Dáša: (Bez váhání odpovídá) 60.

Ex: Takže když máš třeba 2 hodiny, jak zjistíš, kolik to je minut?

Dáša: (Opět bez váhání) 120.

Ex: Což je? Cos udělala s tou dvojkou, abys zjistila kolik to je?

Dáša: Vynásobila.

Ex: No a čím?

Dáša: Šedesátkou.

Ex: No, takže to musíš vždycky vynásobit šedesátkou. Takže to číslo, co máš teď v kalkulačce, musíš vynásobit 60. Pak ti vyjdou minuty. Kolik to je minut?

Dáša: Takže to je hodinu a... mam to napsat?

Ex: No jenom aby to bylo pro orientaci lepší.

Dáša: Tak to je 1h a 40 minut.

Zde je dobře vidět, že Dáša skutečně (stejně jako i ostatní studenti) ví, kolik má hodina minut, a ví také, že právě s číslem 60 je třeba provést nějakou operaci. Toto vědomí má ale do určité míry odděleno od matematické operace, protože v běžném životě, pokud chceme zjistit, kolik je určitý počet hodin minut, šedesáti zpravidla nenásobíme (protože běžně se nesetkáváme s otázkou, kolik minut je hodina vyjádřená v desetinném čísle). V běžném životě převádíme maximálně celé hodiny, kde nám ovšem počet minut naskakuje spíše automaticky, aniž bychom vědomě použili operaci násobení 60 (i když implicitně ji použijeme). Jinými slovy za faktem, že hodina má 60 minut běžně nevidíme matematickou operaci 1 hodina = 1.60 minut.

Studenti nejčastěji nechávají převedené minuty ve zlomku, neboť pokud má hodina 60 minut, je 1 minuta 1/60 hodiny a tudíž x minut x/60 hodiny. Přestože by bylo mnohdy možná pohodlnější (nebo spíše elegantnější?) pracovat s desetinným číslem, pro žáky je zřejmě srozumitelnější práce se zlomkem, protože v něm přímo vidí danou část hodiny, na rozdíl od desetinného čísla, které je v podstatě nic neříkající. Navíc při práci s dětmi nabývám dojmu, že zlomek je specifická matematická záležitost, se kterou se specificky pracuje a děti si možná někdy ani neuvědomují, jak by ze zlomku desetinné číslo dostaly. 1/60, o které děti hovoří jako o „jedné šedesátině“ pro ně nemusí nutně znamenat číslo, které dostaneme operací jedna děleno šedesáti (chápání zlomků a práce s nimi by ovšem bylo na samostatný výzkum).

7.2.2 Vztahy mezi veličinami, sémantika časových vztahů

Ve většině slovních úloh o pohybu se setkáváme již v místě zapisování legendy (v tomto vzorku tedy slovní či slovního doprovodu obrázkové) s nutností některé neznámé zapisovat pomocí jejich vzájemného vztahu. (Případně tento krok následuje těsně poté, ale ještě před rozhodnutím, který vzorec či jiný postup bude použit). Trochu mimo to stojí uvědomění rovnosti některých veličin. Ve zkoumaném vzorku pracují žáci ve vzorcích téměř výhradně s drahami, tudíž zde by mělo dojít k uvědomění rovnosti času u úloh proti sobě. To už ale dle mého názoru souvisí více s následující fází – nalezení sjednocujícího vhledu a uvědomění si ekvivalencí. Ještě předtím je ale nejčastěji nutné vyjádřit vzájemný vztah času jednoho a druhého aktéra, a to v případě, že stejný není. V průběhu výzkumu se ukázal tento vztah jako nejvíce problematický bod slovních úloh o pohybu a chyba v tomto bodě se vyskytla alespoň jednou u většiny studentů. Jedná se o problém v sémantice zadání, nejčastěji spojený se slovními úlohami o pohybu stejnosměrném po neuzavřené dráze. Ze zadávaných úloh se tento problém vyskytoval téměř výhradně v těchto úlohách (výjimečně lze obdobu najít i v jiných, ale pak je to spíše záležitost jednotlivců):

*1. Za chodcem jedoucím průměrnou rychlostí 5 km/h vyjel z téhož místa o 3 hodiny **později** cyklista průměrnou rychlostí 20 km/h. Za jak dlouho dohoní cyklista chodce?*

*2. Ve 13 hodin vyjelo z Pardubic ke Kolínu auto Škoda Felicia rychlostí 60 km/h. O půl hodiny **později** vyjelo stejnou cestou auto Škoda Octavia rychlostí 80 km/h. Kdy dohoní Octavia Felicii?*

A několikrát jsme ho mohli pozorovat i zde, ovšem ne už tak výrazně jako v předchozích dvou:

*3. Etapa cyklistického závodu se jela průměrnou rychlostí 45 km/h. Jeden závodník **ztratil** defektem 4 minuty. Za jak dlouho a jak daleko musel jet rychlostí 50 km/h, aby opět dostihl pelotón?*

Problém byl v matematickém vyjádření zpoždění dohánějícího objektu. Studenti ho obvykle vyjadřují jako t_2 ve vztahu k t_1, nikoliv obráceně, což zřejmě vychází ze sériového uchopování a sériového zapisování – tedy, ukážeme-li to například na úloze 1, student nejdříve přečte *„Za chodcem jedoucím průměrnou rychlostí 5 km/h...“* a zapíše v_1 = 5 km/h. Dále čte *„vyjel z téhož místa o 3 hodiny později cyklista...“*; zde identifikuje, že bude ve hře další objekt, který bude mít číslo 2, zatím většinou jeho čas nezapisuje. Dále čte *„průměrnou rychlostí 20 km/h...“*, což zapíše jako v_2 = 20 km/h. Poté dočte otázku. Protože o času chodce neví ze zadání nic (tedy alespoň to tak na první pohled vypadá), zapíše ho jako neznámou (např. x nebo častěji jako t_1 = ?) a o druhém čase ví, že se liší o 3 hodiny – a právě zde je problém. Velice často se v prvním zápise objeví $t_2 = t_1 + 3$, ačkoliv vztah je přesně opačný – měl by být vyjádřen jako $t_2 = t_1 - 3$. Tato opakující se chyba se vyskytovala i v jiném výzkumu (Kropáčková 2004/2005). Proč k této chybě tak často dochází? Nabízí se několik vysvětlení. Ovšem skutečnost bude zřejmě taková, že chyba bude způsobena částečně všemi dále popsanými aspekty (a možná ještě nějakými dalšími), které vzájemně vznik chyby podporují.

Prvním vysvětlení může být dle Rendla (2004/2005) tzv. interference významu času jako časového údaje na hodinkách a času jako údaje o trvání – tedy rozdíl mezi tím, kdo jel „později“ versus kdo jel „déle“ (ve smyslu delší dobu). Zde je hned dvakrát patrná sémantická dvojznačnost času – jednak čas je v češtině označován jedním termínem pro údaj na hodinkách i pro údaj o době trvání. Navíc se v řeči běžně používá slovo „déle“ nebo „dýl“ pro oba tyto významy (např. „bude to trvat dýl“ – delší dobu, „přijdu dýl“ – později). V úlohách 1-3 (viz výše) jdou pak tyto dva významy času proti sobě – ten, kdo vyjel později, jede kratší dobu, ale na hodinkách je jeho doba odjezdu o daný rozdíl vyšší. Toto vysvětlení by korespondovalo s tím, proč tuto chybu řešitelé nedělají například v úloze:

Z města A do města B vyjelo nákladní auto průměrnou rychlostí 30 km/h. Současně s ním vyjel i autobus, který měl průměrnou rychlost 40 km/h a který přijel do města B o 1 h 15 min dříve než nákladní auto. Jaká je vzdálenost mezi oběma městy?

Zde je zpoždění na rozdíl od předchozích úloh vyjádřeno při příjezdu, nikoliv odjezdu, tudíž dvojznačnost časů zde proti sobě nejde. Ten, co přijel později, má vyšší údaj o době příjezdu na hodinkách a také čas jako doba trvání je u něj delší.

Další možné vysvětlení této chyby souvisí s tzv. signály a antisignály (Hejný 2001). Zde by se ovšem jednalo o trochu jiné pojetí. Hejný o signálech hovoří jako o slovech, která spouštějí určitou matematickou operaci. Tato slova mají mít podle něj děti naučená ze školy. Antisignál pak znamená, že toto slovo (signál), které je obvykle spojeno s určitou operací, je v některých úlohách nutno spojit s operací opačnou (ale děti použijí tu, kterou mají se slovem spojenou, a vzniká tak chyba) (více viz kapitola 2.2 – hledání způsobu řešení). Zde by mohl být podobný problém se slovem *„později“,* ale - jak se ukázalo ve výzkumu Kropáčkové (2004/2005) - i s jinými slovními spojeními, která vyjadřují zpoždění při odjezdu. V tomto případě by ovšem nevycházel z naučeného spojení ze školy, ale spíše z reálných situací. V běžném životě se setkáváme většinou při označení *„později“* s nutností přičítat. Například *„přijdu o 10 minut později“* znamená, můj čas bude o 10 minut delší (a zde je zapletena i interference dvou významů času; jednak na hodinkách bude o 10 minut více, jednak i čas může (ale nemusí) být delší – „zasekl jsem se v zácpě“, můj čas je delší, nebo „vyjel jsem o 10 minut později“, pak můj čas není delší). V běžném životě se s formulací, že někdo vyjel později, a tudíž jeho čas je kratší běžně nesetkáváme. Z toho může působení tohoto signálu vycházet. Když někdo řekne *„později“*, je to většinou ve spojení s příchodem a tudíž se přičítá. Říkáme „přijdu o hodinu později“, „vlak má 20 minut zpoždění“ atd. a pak přičítáme (a to funguje i ve slovních úlohách, kde je rozdíl vyjádřen při příjezdu, nikoliv odjezdu – viz úloha výše). Zde je toto slovo spojeno s operací opačnou – proto se často vyskytuje chyba.

Kromě problematické sémantiky zde může vstupovat do hry také nepřímá úměra, která je pro děti všeobecně problematickým matematickým jevem. Zde se nepřímá úměra vyskytuje mezi rychlostí a časem, tedy čím vyšší je rychlost, tím kratší je čas (protože dráhy jsou zde stejné) a naopak. To může vznik chyby také podporovat, protože přímá úměra (čím vyšší jedno, tím vyšší druhé) je zřejmě přirozenější. Zde je navíc matoucí to, že v druhém typu úloh o pohybu protisměrném toto neplatí, protože alespoň typové jsou založeny na rovnosti časů, tudíž zde nepřímá úměra přítomná není a naopak se zde pracuje na principu úměry přímé (i když se to v řešení nikterak neprojevuje, ale významově je to důležité pro kontrolu správnosti výsledku), tedy čím vyšší rychlost, tím delší ujetá dráha.

Dalším problémem, který může u této chyby vstupovat do hry, je nezažitý způsob algebraického vyjadřování. Koresponduje to s jiným typem slovních úloh z předchozího výzkumu (Schöffelová 2005/2006). Typickou chybu lze vysvětlit na následující slovní úloze:

Petra říká: „V naší třídě gymnázia mám pětkrát více spolužáků než spolužaček". Karel, její spolužák z téže třídy, dodává: „Já mám čtyřikrát více spolužáků než spolužaček." Kolik studentů je v této třídě gymnázia?

Chyba souvisí s výrazy „pětkrát více spolužáků než spolužaček, čtyřikrát více spolužáků než spolužaček". Problémem je převedení tohoto výroku do matematického jazyka. Některým studentům dělá problém si uvědomit z této části věty, kde vlastně bude činitel 5 (4), zda u spolužáků nebo spolužaček, ačkoliv vědí, že více je chlapců. Problém je tedy v kroku převedení „pětkrát více spolužáků než spolužaček" na „spolužáků jako spolužaček krát pět", protože použila-li jsem tento výrok takto přeformulovaný, student již věděl, jak toto matematicky zapsat, ačkoliv si předtím s původním výrokem nebyl jist. Podobný problém se objevil i v jednom typu slovních úloh o věku (Schöffelová 2006), kde se vyskytuje podobná sémantika textu: „Jendovi je dvakrát víc, než bylo Evě". U některých studentů to způsobovalo podobné potíže jako v úloze o třídě gymnázia.

Podobný aspekt se může promítnout i v sémantice slovních úloh o pohybu. Pokud řekneme, že cyklista vyjel o 2 hodiny později, je možné, že student dobře ví, že cesta cyklisty byla o 2 hodiny kratší, ovšem neví, jak to vyjádřit v matematickém jazyce, tedy podobně jako v úloze o třídě gymnázia a zmíněné úloze o věku má problém, co se zde čemu rovná – tedy převést výrok „cyklista vyjel o 2 hodiny později", nebo také „cyklistova cesta je 2 hodiny kratší" na „cyklistova cesta je jako cesta chodce mínus dvě hodiny". Dokládá to, jak studenti reagují na otázky experimentátora při procesu zápisu. Například Pavel zapisuje vztah časů až při dosazení do vzorce:

Zápis:

$5t_1 = 20.\ (t_1 + 3)$

Experimentátor: Co to znamená? Tady máš t_1 a $t_1 + 3$

Pavel: To jsem si dosadil že...ten cyklista vyjel až o tři hodiny později než ten chodec.

Ex: No to je pravda. A co znamená ten čas? Tady máš nějakou rychlost krát čas, takže ten čas, to je nějaká doba, že jo?

Pavel: No.

Ex: Doba od kdy do kdy?

Pavel: Doba než došel tam.

Ex: Přesně, doba, než došel... On vlastně vyšel odněkud a někam došel. A ta doba je od tý doby, co vyšel, než se potkaj. To je doba jo? A kterej měl delší tuhle dobu? Tady ten chodec šel, vyšel a pak se potkali. Ten cyklista taky – vyjel...

Pavel: No delší jí měl ten chodec.

Ex: No, delší jí měl ten chodec. A co sis tady zapsal? Která tady z těch dvou je delší? (Myšleno v zápise:) Když se podíváš na ten svůj zápis?

Pavel: No že delší šel ten chodec, takže tady musí bejt mínus.

Ex: No, protože cyklista jel jako chodec, ale o tři hodiny míň. (přepisuje)

Zpravidla bylo k ujasnění potřeba nápověd ve dvou fázích – nejprve ujasnění, co je časem myšleno – viz interference významů času. (*„Co znamená ten čas?“ „To je nějaká doba, že jo?“ „Ta doba je od tý doby, co vyšel, než se potkaj. A kterej měl delší tuhle dobu?“*. Jinak řečeno, musíme převést otázku "kdy", kterou asi spontánně reagujeme na vyjádření "později" na otázku "jak dlouho"). Poté ještě verbálně výrok vyjádřit tak, aby byl co nejbližší vyjádření algebraickému (*„cyklista jel jako chodec, ale o tři hodiny míň“*).

Posledním problémem, který se v místě zápisu podmínek pomocí veličin vyskytoval, byla záměna „zdvojených neznámých“. Protože se to týká jen specifického druhu úloh, je o tomto problému blíže pojednáno v kapitole 9.5).

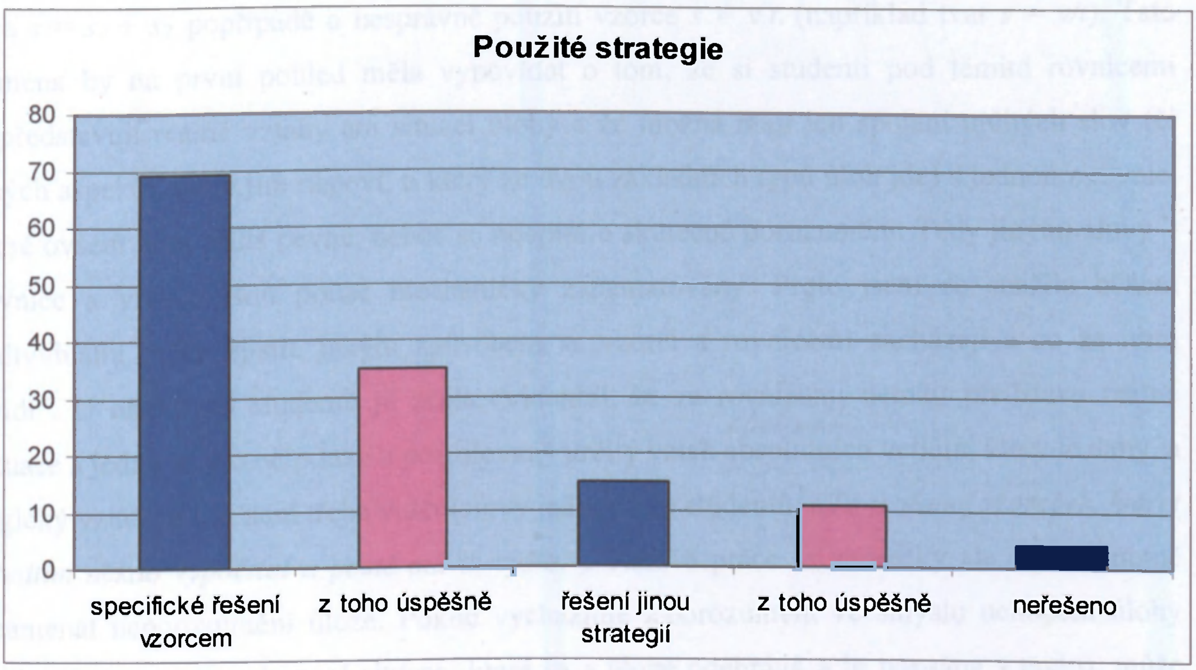
8 Strategie řešení

Ačkoliv, jak později uvidíme, nejsou v žákovských řešeních strategie příliš pestré, nalezneme několik způsobů řešení a za jednotlivými stejně vypadajícími řešeními se skrývají často zcela rozdílné myšlenkové procesy a úvahy.

Nejčastěji používanou strategií ve zkoumaném vzorku byla specifická forma algebraického řešení, typická právě pro slovní úlohy o pohybu. Tedy použití v zásadě tří rovnic (vzorců) v různých obměnách: vzorec pro výpočet dráhy: $s = v.t$ a dvě rovnice drah pro dva základní typy úloh: $s = s_1 + s_2$ a $s_1 = s_2$. Tato podoba se vyskytovala nejčastěji, upravené tvary nebo práce s jinými veličinami (např. namísto $s = s_1 + s_2$ vzorec $t_1 = t_2$) byly spíše výjimečné. Tento základní postup mají studenti zautomatizovaný a jde dle slov učitelky o postup, který byl při výkladu a školním řešení nejvíce procvičován (ovšem studentům byly předloženy i jiné možnosti).

Následující graf zpřehledňuje, jaké zastoupení má tento specifický typ řešení v typových úlohách z písemné práce. Celkem bylo studentům zadáno 87 úloh.

Graf 1.



V grafu můžeme vidět, že zastoupení specifického algoritmu řešení je skutečně vysoké. Z 87 úloh bylo 69krát použito toto řešení a pouze 15krát řešení jiné (úvahové či řešení metodou pokus – omyl). Všimněme si, že aritmetické strategie byly procentuelně mnohem úspěšnější (z patnácti pokusů jedenáct zdařilých) než algebraické (pouze 35, což je téměř polovina správně vyřešených úloh). Jak lze tuto relativní neúspěšnost ve specifickém a plně zažitém řešení interpretovat? Znamená, že studenti počítají úlohy pouze mechanicky dle naučeného algoritmu a skutečné podstatě řešení nerozumí?[7] Nebo naopak, je postup natolik procvičený a zautomatizovaný, že už při něm studenti nepřemýšlejí a dopouštějí se tak mnoha nepozornostních chyb, zatímco úvahová strategie je natolik náročná, především kvůli nutnosti při každé nové úloze znovu pronikat do struktury, že je nutné postupovat pomalu a pozorně a k nepozornostním chybám nedochází?

8.1 Porozumění algebraické strategii s použitím vzorců a rovnic pro dráhy

8.1.1 „Částečné" porozumění

Je třeba brát v úvahu typ chyb. Velkou část tvoří chyby „z nepozornosti" – opomenutí převodů jednotek času nebo chybný převod, odpověď na jinou otázku, než jaká byla zadána, početní chyby. Velkou část tvoří také specifická chyba při zápisu zpoždění, která je popsána výše. Ani jedna z těchto chyb ale není chybou ve strategii.

Kromě toho se v některých případech vyskytovaly chyby, které se týkaly skutečně procesu řešení. Téměř výhradně se jednalo o záměnu dvou základních rovnic pro dráhy – $s_1 = s_2$ a $s = s_1 + s_2$, popřípadě o nesprávné použití vzorce $s = v.t.$ (například tvar $s = v/t$). Tato záměna by na první pohled měla vypovídat o tom, že si studenti pod těmito rovnicemi nepředstavují reálné vztahy ani situaci úlohy a že možná mají jen spojení určitých slov (či jiných aspektů, které jim napoví, o který ze dvou základních typů úloh jde) s jednou z rovnic, které ovšem není příliš pevné, neboť se neopírá o skutečné porozumění. Tedy jinými slovy – rovnice a vzorce jsou pouze mechanicky zapamatovány. Proto jsem se snažila během individuální práce zjistit, jakým způsobem se vzorci a rovnicemi zacházejí a co za nimi „vidí". U některých studentů je zcela evidentní, že za rovnicemi nemají představu reálné
abstraktních
situace a jedná se pro ně pouze o postulovaný určitý vztah absolutních veličin, který je daný, a logický vztah za tím není třeba vidět (slovy jednoho ze studentů: *„To je danej vzoreček, kterej předtím někdo vypočítal a postě mu to vyšlo."*. Taková práce se vzorečky ale nemusí nutně znamenat neporozumění úloze. Pokud vycházíme z porozumění ve smyslu uchopení úlohy (tedy představa a pochopení situace, která se v úloze odehrává a je popsána v textu), může k němu dojít bez nutnosti skutečného porozumění vzorečkům. Takový student pak vidí za situací úlohy reálné vztahy a ví, že k určité situaci patří jeden ze vzorečků (ovšem může je zaměnit, protože za nimi už reálné vztahy nemá) a řešení úlohy může být úspěšné (a nebo vlivem záměny vzorečků nemusí). Lze to doložit na řešení úlohy 6 u Karolíny.

---

[7] Nebo slovy didaktiky matematiky jejich poznání je formální?

Zadání: *V 5 hodin vyšel turista z noclehárny na delší cestu. Za hodinu ušel 5 km. Současně s ním vyjel z noclehárny stejným směrem cyklista rychlostí 17 km/h. Za jak dlouho budou od sebe vzdáleni 20 km?*

Karolína: Takže ten turista vlastně jeho rychlost je 5 km/h (zapisuje a kreslí legendu). A ten cyklista má 17 km/h a vyjeli ve stejnou dobu, to znamená, že t bude stejný a vyšli v 5 hodin. Za jak dlouho od sebe budou vzdáleni 20 km. (Vidíme, že má reálnou představu situace, vidí, že pohybující se objekty vyjely ve stejnou dobu a dokonce předem říká, že jejich čas bude stejný).

Ex: Takže ten čas je stejný, jak jsi říkala a my chceme vědět, kolik to bude hodin nebo minut, nebo jak dlouho to bude. Vlastně vyjeli nastejno a tenhle jede rychleji, takže on mu furt ujíždí a my chceme vědět, za jak dlouho bude od něj 20 km. Za jak dlouho mu ujede o 20 km.

Karolína: Takže se ptáme na to s toho... vůbec nevíme s.

Ex: No s nevíme. Jaká je dráha toho prvního?

Karolína: s_1

Ex: A jaká je dráha toho druhého?

Karolína: s_2, *takže není to stejný.*(Opět je jasné, že má reálnou představu, z textu vidí, že dráhy nejsou stejné, i když se jedná o úlohu o pohybu týmž směrem, kde obvykle stejné jsou).

Ex: O kolik je to jiný?

Karolína: O těch 20 km. Takže to bude s_1 *plus* $s_2 = s$. (Toto dokládá, že rovnice jsou částečně pouze naučené – Karolína má zřejmě určitou představu o tom, co rovnice znamenají, protože vidí, že dráhy nejsou stejné, tudíž nemůže použít $s_1 = s_2$. Zbývá jen možnost druhé rovnice – za tou ale nemůže vidět reálný vztah drah, jinak by věděla, že to zde neplatí.)

Ex: Proč myslíš? Já ti tady nakreslím čáru. Tady odtud vyšli (kreslím jí celou situaci), tady je ta noclehárna a ten chodec prostě jde nějakou rychlostí a dojde třeba sem za ten čas, který hledáme. Ten druhej dojde sem. Tady to je chodec a tady to je cyklista a tady je 20 km. (zvýrazňuji úsek rozdílu drah). Takže jakou vzdálenost ušel chodec z noclehárny sem?

Karolína: s_1

Ex: s_1 *a ten druhý?*

Karolína: s_2

Ex: Což je kolik?

Karolína: $s_1 + s_2 = s$ (opět dokládá, že neví, co to znamená).

Ex: To by znamenalo, že když sečtu tohle (zvýrazňuji s_1*) a tohle (zvýrazňuji* s_2*) (pokoušela jsem se jí vytvořit reálnou představu, co se za vzorcem skrývá)...*

Karolína: Když sečtu dráhu chodce a dráhu cyklisty, tak mám celkovou dráhu. (Takže ona ví, co vzorec znamená, ale zcela bez vazby na situaci této konkrétní úlohy. Ví, že s je dráha a chápe, jak lze vzorec převést do slov běžného jazyka – ví, že $s_1 + s_2 = s$ znamená, že součet drah obou aktérů tvoří celkovou dráhu. Ovšem se situací úlohy to nespojuje – v úloze o spojení drah aktérů úlohy hovořit nelze. Tedy i když chápe, že vzorec je určitým vztahem drah, reálně tam ten vztah nevidí, resp. nevidí souvislost mezi ním a situací úlohy - souvisí to s poznámkami o izolovaném chápání vzorce a situace úlohy viz dále).

Zde se tedy jedná o částečné porozumění úloze. Nelze říci, že poznání úlohy je formální, protože při takovém by Karolína sestavila mechanicky řešení na základě klíčových slov a pokud by měla dobře zapamatované spojení se vzorcem, úlohu by asi počítala s pomocí $s_1 = s_2$, ovšem naprosto bez reálné představy situace. K tomu zde nedošlo. Zde je evidentní porozumění situaci, ovšem používání vzorců je do určité míry pouze mechanické bez porozumění. Do jisté míry takové „částečné“ poznání může být dáno celkově malou schopností algebraizace, která je evidentní i v jiných případech – viz například zásadní problém zápisu zpoždění, či problém s algebraickým zápisem „spolužáků je pětkrát více než spolužaček“ (viz výše). Problém tedy pravděpodobně nebude v nedostatečném vysvětlení principů úlohy a principů řešení, ale v nedostatcích v procesu algebraického přepisu běžného jazyka (i když je pochopen). Děti tak mohou rozumět větě, ale algebraický zápis takové věty pro ně nemusí znamenat totéž. To má za důsledek, že nemusí porozumět vzorcům, i když jim byly vysvětleny, protože algebraický jazyk je pro ně nesamozřejmý. Ještě lépe je tato situace vidět u některých studentů (např. Dominik) v úloze 4, která je zadána zcela nestandardně. Stejně jako v úloze 6 se i v úloze 4 často opakovalo, že student přišel na „vtip“ úlohy (tedy, že jeden aktér ujede za daný čas o kolo víc – viz specifika úlohy 4), ale vzápětí klidně zapsal $s_1 = s_2$, ačkoliv chvíli předtím toto popřel. Je to asi dáno tím, že vzorec (a veličiny v něm obsažené) jsou chápány zcela odděleně od chápání úlohy jako takové a vzorec je specifickým matematickým jevem (viz dále).

8.1.1.1 Chápání vzorečku jako danosti

Dále uvidíme, že studenti mají všeobecně problém s použitím upravených tvarů rovnic drah v úloze 4 a 6 a někdy se raději přiklánějí k jinému řešení. V obou případech totiž neplatí dvě základní rovnice, které se děti ve škole učí – tedy $s_1 = s_2$ a $s_1 + s_2 = s$. Když už studenti dospějí k tomu, že vytvoří tvar $s_1 = s_2 + 20$, nebo u úlohy 4 $s_1 = s_2 + 2550$ (což vytvoří na základě skutečného pochopení a vhledu do úlohy), přestává to pro ně často být vzoreček, se kterým je možné pracovat. To dle mého názoru jednak opět souvisí s již dříve zmíněnými problémy s algebraizací jako takovou, ale vstupuje zde do hry ještě další problém. Vzorečky totiž často (i když děti mohou vědět, co znamenají) představují určitý postulovaný vztah absolutních veličin a jsou zcela zvláštním aspektem matematiky (nebo i jiných předmětů). Jak řekl jeden ze studentů, jedná se o DANÝ vztah, který *„někdo vypočítal a vyšlo mu to"*. Student ví, že $s_1 = s_2$ znamená, že dráhy objektů se rovnají. Ví také, jak vypadá situace v úloze. Zároveň ale cítím, že obě tato pochopení má jaksi nepropojená. Rovnost ve vzorci chápe částečně nějak „nadmatematicky" a při použití těchto daných vzorečků je to najednou od situace úlohy odtrženo. Jedná se prostě o danost, která pokud neplatí, nelze s úlohou pracovat jinak než vytvořit jiný typ výpočtu. Pokud tedy $s_1 = s_2$ neplatí, všeobecně se má za to, že zde nelze počítat s rovnicí drah (jakoukoliv, protože jediná další existující $s_1 + s_2 = s$ zde taky neplatí). To, že $s_1 = s_2$ vlastně jen vyjadřuje skutečnou reálnou rovnost drah v situaci úlohy, je obtížné přijmout, je to zřejmě jiná oblast chápání. Vzoreček a reálná situace úlohy jsou odtržené (i když dojde k pochopení obou oblastí izolovaně). Proto $s_1 = s_2 + 20$ už není možné přijmout jako vzoreček, do kterého lze dosadit další ($s = v.t$), protože takový není přijat jako skutečný vzoreček. Ten zobrazuje realitu – reálné pochopení textu, kdežto $s_1 = s_2$ je chápáno jako danost, ne jako algebraické vyjádření rovnosti drah z textu. Dle vedoucího práce jde v podstatě o to, že studenti berou rovnice drah jako povinné, konstantní premisy, které nesouvisí se situací v úloze, nýbrž jsou tu nějak předem a vně, podobně jako vzorec $s = v.t$. Mají tedy vztahy veličin rozdělené na abstraktně postulované vzorce, které tvoří premisy jakékoliv úlohy v dané oblasti učiva, a na popisy situace zadané v textu úlohy. Vzorce nechápou jako popis situace, nýbrž shůry zadané moudro.

Ještě rigidnější je chápání vzorce $s = v.t$. Ten je mnohem častěji pouze mechanicky zapamatován nebo nějak odvozen. Sledujme například odvozování u Martina K.:

Zapsal $s_2 = s_1 + 20$

Martin: Takže $t_1 = t_2$. *Teď t to je v/s...ne s/v*

Ex: Jak si na to přišel?

Martin: To je podle vzorečku $s = v/t$

Ex: počkej...

Martin: Ne v/s...ne počkat.

Ex: Jak to je ten vzoreček?

Martin: km/h, tak $v = s/t$, *takže t je s/v*

To je častý způsob odvození. Vědí, že rychlost se udává v *km/h,* což značí, že *km* je dráha a *h* je čas, tudíž $v = s/t$.

Představa reálného pohybu se za tím skrývá zcela výjimečně. Přesto u většiny studentů nelze tvrdit, že by vzorci $s = v.t$ a jeho ostatním tvarům vůbec nerozuměli. Všech studentů jsem se na porozumění ptala. Málokdo byl schopen podstatu vzorce explicitně vyjádřit a je pravděpodobné, že za vzorcem ani žádnou logiku nehledají, protože předpokládají, že platí. Dokonce se u některých řešitelů stalo, že vzoreček použili nesprávně – v jiném tvaru. V příkladech a zřejmě i v běžném životě ho však bez problému (i když nevědomě) používají. Pokud jim byla uvedena reálná situace, neměli s jeho aplikací většinou problém, ale opět je zde vidět, že chápání reálné situace a chápání vzorečku se děje odděleně. Tento jev lze přirovnat k výše zmíněnému implicitnímu chápání převodů jednotek času.

Příklad:

Michaela: No, takže mohla bych dát ten vzoreček $s_2 = s_1 + 20$?

Ex: A co tam potom dosadíš?

Michaela: No v_2 a t_2

Ex: A proč tam místo toho dosadíš tohle?

Michaela: No to je ta pyramida. Dráha je rychlost za čas (to je specifický školní způsob vyjadřování jednotlivých veličin, dle mého názoru neúčinný, protože pokud je pyramida zapamatována mechanicky, časem student zapomene, která veličina byla na kterém místě. Navíc to dle mého názoru podporuje problémy s algebraizací).

Ex: No a proč? Proč to není třeba v/t. Zkus mi říct třeba nějakej příklad. (Dlouho mlčí.) Když jede nějaký auto rychlostí 20 km/h a já chci vědět kolik ujede za tři hodiny, jak to spočítám?

Michaela: Musím si vynásobit tu rychlost tím časem, protože...

Ex: Co mám vlastně řečený v tý rychlosti? Tam vždycky říkám, že jedu 20 km/h, co to znamená?

Michaela: Že ujedu 20 km za hodinu.

Ex: Jo, takže když mam 3 hodiny, tak těch 20 za 3 hodiny musím vynásobit.

8.1.2 Formální používání postupu

Předchozí ukázka částečného porozumění pochopitelně nepopírá, že někdy studenti postupům skutečně nerozumí a do úlohy nemají žádný vhled – viz například práce Dáši, která postupně získávala vhled až po rozebírání úloh při individuální práci a při použití různých typů nápověd. Přesto například úlohu 1 z písemné práce vyřešila (i když chybně, protože zapomněla na převod jednotky času). I s takovou čistě mechanickou aplikací postupu je možné úlohu úspěšně vyřešit, ale je vysoce pravděpodobné, že u složitějších úloh bez zásahů (nápovědy) student neuspěje.

8.1.3 Zdánlivě formální používání postupu

Druhým (a ve vzorku častým) případem je, že řešení studenta vykazuje znaky formálního poznání - mnohdy zapisují rovnice víceméně na základě klíčových slov nebo na základě legendy, kterou si zapíší. (Zdá se ale, že vzoreček, resp. rovnice drah jim naskakuje skutečně v okamžiku, kdy identifikují typ úlohy). [8]

Vzhledem k časté rychlosti a samozřejmosti řešení se zdá, že si ani za textem ani za vzorci nepředstavují žádné reálné vztahy. A je dosti možné, že v danou chvíli je tomu skutečně tak. Bylo to dobře vidět při pozorování v hodině, kde řešili úlohy v písemné práci (při individuální práci už to nebylo možné příliš pozorovat, protože zde už byly úlohy alespoň sémanticky netypické). Musí to ale nutně znamenat neporozumění slovním úlohám o pohybu a jejich pouhé formální poznání? Musí předložení typového řešení, které studenti navíc v tak hojném počtu přijmou a dále aplikují, znamenat pouhé memorování algebraického postupu? Studenti sice v typových úlohách takto postupují a možná ani příliš nevnímají text úlohy (jen některé klíčové okamžiky). Při individuální práci se ale ukázalo, že jsou-li na princip úlohy dotazováni, jsou schopni objasnit jak situaci úlohy, tak používané postupy (včetně vzorců). Někdy jsou i schopni zapsat rovnici chybně, resp. zapsat druhou variantu, která v řešené úloze neplatí. Pokud se jich ale následně doptávám, většinou si svou chybu rychle uvědomí. To vyvolává dojem, že jsou si studenti řešením díky mnohonásobnému procvičování natolik jistí, že sázejí na jisté řešení (proto také nevolí jiné strategie řešení, ale neznamená to, že by jich nebyli schopni). Příliš o něm nepřemýšlejí a také díky zautomatizování postupu už nemají potřebu „dívat se“ do vztahů v úloze a reálně si situaci představovat. Stejně tak nemusejí mít potřebu představovat, co je za rovnicemi o drahách (proto jsou schopni je zaměnit). Provádějí jakési zkrácené řešení. Pokud jsou ale dotázáni, jsou často schopni rovnice vysvětlit a dát je do spojitosti s konkrétní řešenou úlohou. Navíc při individuální práci řešili složitější úlohy, které už neměly tak samozřejmé řešení jako úlohy typové. Právě v nich se dalo prokázat, jak hluboké je jejich chápání slovních úloh o pohybu. Ve složitých úlohách se jejich potřeba znovu kódovat celou situaci úlohy může vrátit (což značí, že dříve než se postup v typových úlohách zautomatizoval, také tuto potřebu měli). Jasným důkazem toho, že porozumění není pouze formální, je už jen fakt, že některé úlohy (například úloha 2) byly pro studenty (oproti očekávání) naprosto jednoduché, ačkoliv jsou sémanticky zcela odlišné od typových úloh. Formální poznání přece znamená, že pokud dojde k odchýlení od typového zadání, jsou

[8] Už jen tak výrazná podobnost řešení mezi studenty by pro konstruktivisty značila naučené a nepochopené schéma z hodin (protože konstruktivistický přístup prosazuje nalezení vlastního řešení, nikoliv předkládání typového, které žáci přijmou).

řešitelé „ztracení“. V úloze 2 tomu tak nebylo – i když v podstatě se zde jednalo matematicky o typovou úlohu o pohybu týmž směrem po neuzavřené dráze, sémanticky je zadána úplně jinak (a jak uvidíme později, studenti si ji pro řešení na typovou úlohu byli schopni převést). Kromě toho lze porozumění doložit dobře i na úloze 6. V ní je porušeno naopak matematické schéma a sémantické v podstatě zůstává (text je podobný jako v klasické úloze o pohybu týmž směrem po neuzavřené dráze, je pouze jiná otázka), ale matematické řešení neodpovídá klasickému vzorci. Někteří studenti nejdříve udělali chybu a začali se zápisem klasického řešení. Daleko častější ale bylo přečtení textu znovu, odhalení, že zákonitost rovnosti drah zde neplatí, a sestavení zcela nového vzorce (který ovšem někdy nebyl už automaticky brán jako vzorec – viz výše, což opět může souviset s problémovou algebraizací).

Velmi dobře je toto vidět například u Michaely. Její písemná práce je naprostou třídní „klasikou“, používá vzorečky a její řešení je velmi rychlé. Už jen samotné používání vzorečků bez většího rozmyslu by mohlo znamenat pouhé přijetí typového řešení, neporozumění a mechanickou aplikaci. Pak by ovšem jistě nebyla schopna tento způsob řešení aplikovat na složitějších úlohách a už vůbec ho nějak přetvořit či využít jinak. Podívejme se ale, jak řešila složitější úlohy:

Úloha 1: *Etapa cyklistického závodu se jela průměrnou rychlostí 45 km/h. Jeden závodník ztratil defektem 4 minuty. Za jak dlouho a jak daleko musel jet rychlostí 50 km/h, aby opět dostihl peloton?*

Vidíme jasné odlišnosti v sémantice a zdánlivě matoucí úsek před defektem.

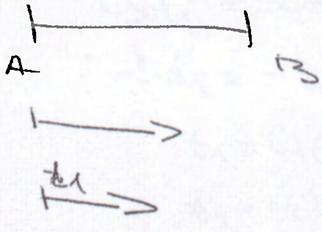
Michaela: No, takže vlastně všichni ty závodníci jeli 45 i včetně toho cyklisty před tím defektem, kde pak ztratil 4 minuty a pak musel jet 50 km za hodinu aby je dohnal.

Ex: A jaká je otázka?

Michaela: Jak dlouho a jak daleko musel jet těch 50km/h, aby je dohnal.

Ex: Aby vlastně nahnal ty 4 minuty, který tím ztratil. Zkus mi to zase nakreslit, jak to vypadá.

Kreslí obrázkovou legendu:



$v_2 = 50\,km/h$

$t_2 = t_1 - \cancel{4}\,\frac{1}{15}$

Michaela: Tady ten jel... (myšleno cyklista)

Ex: Jaká je jeho rychlost?

Michaela: No nejdřív 45 a potom 50.

Ex: A co nás zajímá? Co sis to tady nakreslila za dráhu, to je odkud kam?

Michaela: To je od startu.

Ex: Od startu celého toho závodu?

Michaela: Ne to je vlastně od tý doby, co on měl ten defekt, až po dobu, co je dohnal.

Ex: Od tý doby, co měl defekt, než je dohnal, měl jakou rychlost?

Michaela: 50

Ex: A co ta doba předtím, než měl ten defekt?

Michaela: To jel furt stejně jako oni.

Ex: A zajímá tě ta doba? Oni jeli furt stejně, potom on měl defekt, tam stál 4 minuty a pak jel za nima.

Michaela: No to nepotřebuju.

Ex: Nepotřebuješ no.

Michaela: Potřebuju počítat tohle (ukazuje na dráhu po defektu). Takže vlastně on jel stejně dlouho.

Ex: No on vyjel 4 minuty po nich.

Michaela: Jo takže mínus 4 minuty.

Ex: No akorát, že tady máš km/h a 4 minuty.

Michaela: Jo, ježišmarja. Převádí na zlomek. Tak 1/15 hodiny? No a tu trasu měl stejnou (zapisuje $s_1 = s_2$)

Dále počítá sama dle klasického vzorce:

$$s_1 = s_2$$
$$v_1 t_1 = v_2 t_2$$
$$45\, t_1 = 50\left(t_1 - \frac{1}{15}\right)$$
$$45 t_1 = 50 t_1 - 3{,}\overline{3} \quad | -50 t_1$$
$$-5 t_1 = -3{,}\overline{3} \quad | :(-5)$$
$$t_1 = 0{,}6\,h$$
$$\underline{t_1 = 40\,min}$$

Tedy studentka pochopila, že úloha není typová a neřešila ji s takovou jistotou. Ovšem jakmile se zamyslela nad principem, nebyla pro ni úloha nijak zvlášť problematická (což značí, že i u typových úloh je jí princip jasný).

Ještě lépe to ukazuje tato úloha:

Úloha 6: *V 5 hodin vyšel turista z noclehárny na delší cestu. Za hodinu ušel 5 km. Současně s ním vyjel z noclehárny stejným směrem cyklista rychlostí 17 km/h. Za jak dlouho budou od sebe vzdáleni 20 km?*

Michaela: No takže vyjeli na stejno, nebo vyšli a šli stejnej čas, stejně dlouho a mam vypočítat, za jak dlouho budou od sebe vzdáleni.

Ex: Tam máš přesně zadaný, že budou od sebe 20 km, protože tady ten jde rychleji, tak za jak dlouho ho předjede o 20 km.

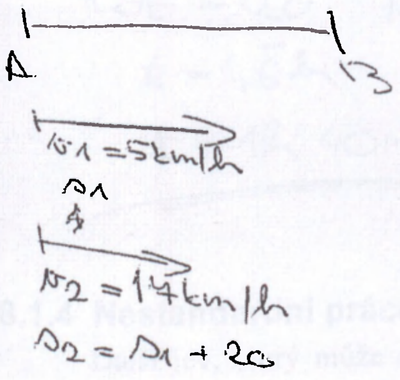
Michaela: Takže ten cyklista pojede 20 km? A ten turista 25. Ne to je blbost.

Ex: No to by byli od sebe jenom 5 a oni se ptaj, za jak dlouho budou od sebe 20 km. To znamená tenhle ujde něco a ten druhej ujede o 20 km víc. A oni se ptaj, za jak dlouho to bude.

Michaela: Můžu si to nakreslit?

Ex: No jasný.

Kreslí legendu:



Michaela: Takže dráha toho cyklisty bude s_1 + 20. (Zde vidíme, že bez problému použila vzorec, který se ve škole neučili a který neodpovídá klasickému řešení u pohybu týmž směrem, kde je v typových úlohách $s_1 = s_2$)

Ex: Jak je to s časem?

Michaela: No půjdou stejně, takže $t_1 = t_2$ (to také obvykle v typových úlohách týmž směrem neplatí, naopak, tam je čas většinou jiný – ani to jí nedělá problém).

Ex: Výborný a co teď s tím?

Michaela: No, takže mohla bych dát ten vzoreček $s_2 = s_1 + 20$?

Ex: A co tam potom dosadíš?

Michaela: No v_2 a t_2

Ex: A proč tam místo toho dosadíš tohle?

Michaela: No to je ta pyramida. Dráha je rychlost za čas.

Ex: No a proč? Proč to není třeba v/t. Zkus mi říct třeba nějakej příklad. Mlčí. Když jede nějaký auto rychlostí 20 km/h a já chci vědět kolik ujede za tři hodiny, jak to spočítám?

Michaela: Musím si vynásobit tu rychlost tím časem, protože...

Ex: Co mám vlastně řečený v tý rychlosti? Tam vždycky říkám, že jedu 20 km/h, co to znamená?

Michaela: Že ujedu 20 km za hodinu.

Ex: Jo, takže když mam 3 hodiny, tak těch 20 za 3 hodiny musím vynásobit. (Zde jsem se ptala na porozumění vzorce pro rychlost – o tom později).

Dále vypočítala sama následujícím způsobem:

$$s_2 = s_1 + 20$$

$$v_2 t_2 = (v_1 t_1) + 20$$

$$17t = 5t + 20 \quad | -5t$$

$$12t = 20 \quad | :12$$

$$t = 1{,}\bar{6}\,h$$

$$t = 1h\ 40min$$

8.1.4 Nestandardní práce se vzorcem

Další jev, který může doložit skutečné porozumění algebraickému druhu řešení, je hledání jiného použití vzorce. To lze vidět například u Honzy B. opět u úlohy 6.

Po přečtení a zakreslení legendy zapisuje $s_2 = s_1$.

Ex: Proč sis teď napsal $s_2 = s_1$? Co to znamená?

Honza: Já jsem to ještě nedopsal. Připisuje mínus 20 km. Protože tady je napsaný, za jak dlouho od sebe budou 20 km a ten chodec je pomalejší, takže ujde o 20 km míň, než ten cyklista ujede. (Dráhu zobrazuje jako kratší už v obrázkové legendě, což značí, že vidí reálnou situaci.)

Ex: No přesně tak. (v tu chvíli má zapsaný vzorec $s_2 = s_1 - 20$).

Zapisuje $t_1 = t_2$

Ex: Co znamená tohle?

Honza: Že jedou oba stejnou dobu.

V dalším postupu nedosazuje do $s_2 = s_1$-20 vzoreček pro dráhu (tedy v.t), jak to automaticky dělá v jiných úlohách (viz zápis z jeho individuální práce), ale vytváří jinou rovnost $t_1 = t_2$ (na základě evidentního porozumění textu), kam dosazuje veličiny s a v. Rovnice tedy vypadá takto:

$s_1{:}v_1 = s_2{:}v_2$

$s_1{:}17 = (s_1-20){:}\ 5$

Tak, jako Honza pracoval s jinými veličinami ze vzorce, ale poté postupoval vlastně podobně, jako by použil základní verzi, lze řešit úlohy i dalšími způsoby. Při introspektivní analýze řešení byly nalezeny v zásadě vždy dva způsoby řešení (protože nemám již zafixovaný žádný způsob řešení, takže se lépe dařilo počítat různými způsoby řešení). Ve většině úloh jsou zadány rychlosti objektů. Neznámými jsou pak dráhy a časy, které jsou vyjádřeny různým způsobem (vzájemným vztahem, součtem atd.). Lze tedy počítat vždy jednu nebo druhou z těchto neznámých. Stejně, jako lze například v typové úloze o pohybu protisměrném použít rovnici $s_1 + s_2 = s$, můžeme stejně tak použít rovnici $t_1 = t_2$ (jak to učinil Honza v úloze 6). Podobně u typových úloh o pohybu týmž směrem lze použít buď $s_1 = s_2$, nebo také vztah časů, tzn. například $t_1 = t_2 + náskok$ a zbylé veličiny pak dosazovat dle vzorce $s = v.t$ do tohoto tvaru. Při introspekci se jevilo jako zajímavé, že vlastně vždy dojde k výpočtu jiné veličiny, než pro kterou je formulována rovnost (ono je to logické, pokud dosazujeme za neznámou další veličiny). Na první pohled by se mohlo zdát (a já jsem to tak při introspekci cítila), že počítáme-li například $t_1 = t_2 + náskok$ a do tohoto tvaru dosazujeme, chceme tím vypočítat neznámou času. Ovšem ve skutečnosti ve výsledku vypočítáme dráhu a naopak (a zbylé veličiny lze pochopitelně vždy dopočítat). Nicméně právě poukázání na to, že lze pracovat těmito dvěma možnostmi by mohlo podpořit porozumění tomuto specifickému způsobu řešení, kdy by studenti mohli přestat vzorec brát jako něco fixního a přijímat ho v podstatě bez hlubšího pochopení. Dětem by takto bylo možné ukázat, že $s_1 = s_2$ a $t_1 = t_2 +$ *náskok* je vlastně pro úlohu totéž, protože se nejedná o vzorečky, ale o vzájemný vztah veličin vycházející přímo z úlohy.

Nabízel by se ještě jeden způsob výpočtu, který by byl pro děti ale zřejmě dosti obtížně uchopitelný, a to práce s rychlostmi. Na gymnáziu, kde byl prováděn výzkum, jeden z vyučujících tuto variantu dětem předkládá. Jedná se o výpočty pomocí sčítání a odčítání rychlostí. Nabízí se především pro úlohy o pohybu protisměrném. Sčítáním rychlostí ($v_1 + v_2$

= *v*) řešitel dostane *skutečný čas přibližování*. Výpočet poukážeme například na úloze 2 z písemné práce.

Zadání: *Z míst A a B, vzdálených od sebe 210 km, vyjely současně proti sobě 2 kamióny rychlostmi 40 km/h a 30 km/h. Kdy a kde se potkají?*

$v_1 + v_2 = v \rightarrow 40 + 30 = 70$

$s = 210$

$t = ?$

$s = v.t \rightarrow t = s/v = 210/70 = 3$ hodiny.

Podobně lze toto aplikovat na úlohách o pohybu týmž směrem – jak nám ukázal ve svém řešení například Michal. Problém bude zřejmě u studentů s uchopitelností takového postupu. Pokud student pracuje se sčítáním či rovností drah, lze si to reálně představit (nebo dokonce určitým způsobem zobrazit například v legendě). Stejně tak si lze představit rovnost času (alespoň na nějaké verbální úrovni), nebo porovnání jednoho a druhého kratšího času. Jak lze ale interpretovat sčítání rychlostí? Lze v reálném životě jakkoliv sčítat a odčítat rychlosti? S takovým jevem se můžeme setkat nanejvýš u dopravních nehod, kde se sčítání rychlostí používá při čelním nárazu. Rozhodně je to ale pro děti méně časté a méně samozřejmé než práce se zbylými dvěma veličinami, tudíž ji zřejmě samy objeví jen zřídka a pokud by jim tento postup byl předložen, zřejmě pro ně bude hůře pochopitelný.

8.2 Použití jiných strategií

Předchozí práce s veličinami už hraničí s použitím aritmetické úvahové strategie. Navíc v případě Michala nebo Kuby už se skutečně jedná spíše o úvahu, kde je pouze využíváno veličin rychlosti, času a dráhy (což asi u úloh o pohybu ani nelze nevyužít).

Úvahy Michala jsou obzvláště zajímavé, proto je namístě uvést alespoň některé (více viz záznamy a analýzy jeho řešení v přílohách na CD). Právě v souvislosti se sčítáním a odčítáním rychlostí používá zajímavou úvahu například v úloze 1 z písemné práce.

Zadání: *Ve 13 hodin vyjelo z Pardubic ke Kolínu auto Škoda Felicia rychlostí 60 km/h. O půl hodiny později vyjelo stejnou cestou auto Škoda Octavia rychlostí 80 km/h. Kdy dohoní Octavia Felicii?*

Z vysvětlení postupu také v úloze 1 v individuální práci, která byla řešena stejně, vyplynulo, že postup je takový: vypočítá náskok, který musí Octávie nahnat – to je 30 km. Poté počítá rozdíl v rychlostech – to je 20 km/h a když poté vypočítá čas, za jaký ujede samotným rozdílem v rychlostech tuto dráhu, vyjde mu správný výsledek – zbaví se tak v podstatě nutnosti do nekonečna počítat, o kolik mu zase za dobu, kdy naháněl zpoždění, ujel druhý objekt, protože nenásobí potřebnou dráhu celkovou rychlostí, ale jen rozdílem v rychlostech – tedy počítá jakoby stále oba objekty jely – tam je obsaženo to, že jsou stále v pohybu oba a počítá pouze se *skutečnou přibližovací rychlostí* objektu – ne s jeho celkovou rychlostí – a to je rozdíl v rychlostech.

Na rozdíl od něj někteří studenti, kteří se také pokoušeli o úvahu, se v ní nedokázali dobře vypořádat s jedním ze specifik těchto úloh, a sice s nutností respektování stále pokračujícího pohybu (jedna z typických chyb v těchto úlohách). Sledovat to můžeme například u Lucky, která o nutnosti toto respektovat věděla a pokoušela se o to, ale její výpočet nebyl zcela přesný.

Zadání: *Za chodcem jedoucím průměrnou rychlostí 5 km/h vyjel z téhož místa o 3 hodiny později cyklista průměrnou rychlostí 20 km/h. Za jak dlouho dohoní cyklista chodce?*

Její postup vypadá takto:

$v_1 = 5\ km/h$
$v_2 = 20\ km/h$
$s_1 = 15\ km$

$s = 15\ km$
$v = 20\ km$
$t = ?$
$t = \frac{s}{v}$
$t = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$
$t = \frac{3}{4}\ h$

$s = 3{,}75\ km$
$v = 20$
$t = ?$
$t = \frac{s}{v}$
$t = 0{,}18\ h$

$t = \frac{3}{4}\ h$
$v = 5\ km/h$
$s = ?$
$s = v \cdot t$
$s = 5 \cdot \frac{3}{4}$
$s = \frac{15}{4}$
$s = 3{,}75\ km$

$t = 1{,}05\ h$

Cikelista dojel chodce za 1,05 h.

Lucka: No tak tady jsou rychlosti a tady je dráha.

Ex: A co je to za dráhu?

Lucka: No to je ta jejich dráha, oni maj stejnou tu dráhu.

Ex: No a proč je to 15 km? Ono to tam není zadáno, že jo?

Lucka: Já jsem to měla, jakože to s_1, jako že on ujde za ty 3 hodiny 15 km.

Ex: Jo ten náskok jakoby jo?

Lucka: Jako za jak dlouho to ujde a pak jako za jak dlouho to ujede ten cyklista a potom jako ten čas toho cyklisty a jak dojde ten chodec. No a vyšlo mi to jako skoro stejně.

Ex: Jo, takže si tady měla dráha 15, teď za jak dlouho ujede ten náskok ten cyklista.

Lucka: No a ten to ujel za ¾ hodiny a teď, že za jak dlouho dojde ten chodec.

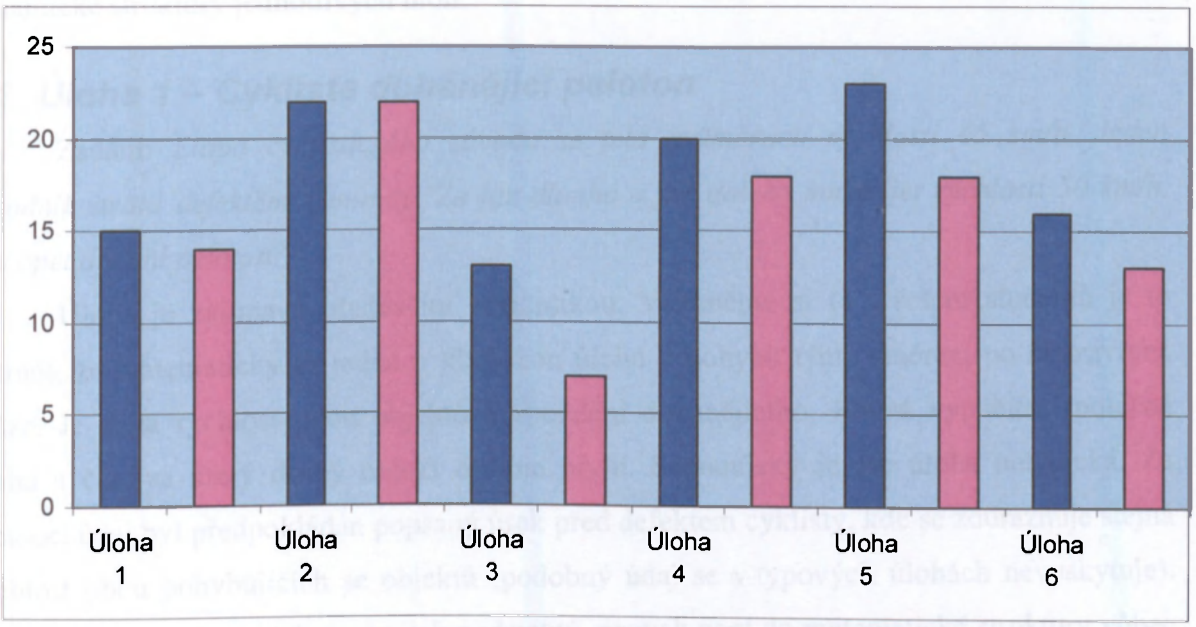
Ex: Jo kam až jako on dojde za tu ¾ hodinu? (Myšleno chodec, za dobu, co bude cyklista dohánět náskok.)

Lucka: A pak ještě cyklistu, za jak dlouho to ujede on a pak jsem to sečetla všechny ty čísla.

V jejím případě šlo o algebraické řešení pomocí klasických vzorců pro výpočet dráhy a zároveň úvahy mimo klasické školní řešení. Pravděpodobně byl její postup následující: nejdříve pracovala se zpožděním 3 hodiny – vypočítala, kolik za tu dobu ujde chodec, který jde sám – to byla dráha $s_1 = 15$ km. Poté spočítala, za jak dlouho tento náskok dožene cyklista svou rychlostí a vyšlo jí ¾ hodiny. Musela ale ještě vypočítat, kam za dobu, kdy cyklista doháněl náskok, opět „utekl" chodec, a vypočítala tedy, jakou dráhu ujde chodec svou rychlostí za ¾ hodiny. To byl pro ni vlastně další náskok, který musel cyklista dohnat (3,75 km), a tak opět vypočítala, jak dlouho tuto dráhu pojede cyklista. Ovšem proces by měl dále pokračovat, protože zatímco cyklista nahání druhý náskok 3,75 km, chodec opět nějaký metr ujde a ten musí cyklista opět dohnat – bylo by to na delší výpočet. Princip myšlenkového postupu jde ale správným směrem. Na rozdíl od ní někteří si stále pokračující pohyb vůbec neuvědomují. Například řešení Matěje u téže úlohy, který podle rozhovoru nad úlohou pouze vypočítal, kam dojde za dobu náskoku chodec a následně za jak dlouho tuto danou vzdálenost (15km) ujede cyklista.

Kromě úvahové strategie se několikrát vyskytla i druhá aritmetická strategie – pokus-omyl či složitější forma – systematický pokus. Vyskytovala se především v typových úlohách. Jako příklad lze uvést Kubovo řešení úlohy 4 z písemné práce (zadání viz výše). Nejdříve zapsal rychlosti, poté zkusil tipovat, že potřebný čas by mohl být půl hodiny a vypočítal, kolik za tu dobu aktéři ujedou. Zjistil, že je to málo. Vypočítal tedy, kolik ujedou za hodinu a půl a zjistil, že mu vyjde, že se sejdou, tudíž je to správný výsledek.

V této kapitole bylo předloženo několik způsobů řešení u různých úloh zadaných ve výzkumu. Pochopitelně s netradičností úloh se strategie studentů více liší (což může souviset s identifikací nestandardností úlohy v procesu uchopování, jak je popsáno v diskusi, kdy studenti mohou na základě toho „odložit" klasické řešení a hledat jiné). Různé způsoby řešení jednotlivých složitých úloh je blíže popsáno v kapitole 9 a 10. Přehled o tom, jak často byly používány jiné než „klasické" strategie zobrazuje následující graf. Modré sloupce ukazují, kolikrát byla daná úloha zadána. Fialové sloupce zobrazují počet řešení dané úlohy specifickým algebraickým řešením pomocí vzorců a rovnic pro dráhu. Je pochopitelné, že nebylo vždy možné zcela odlišit tuto strategii od různých kombinovaných podob (stejně jako v grafu výše). Úspěšnost strategií tentokrát nelze brát v úvahu, neboť do řešení bylo zásadním způsobem zasahováno a studenti byli k řešení dovedeni téměř vždy.



9 Specifika jednotlivých úloh

Protože v individuální práci byly studentům zadávány úlohy více či méně se vzdalující od typových školních úloh, vyskytla se u všech určitá specifika při jejich řešení. Nyní se pokusím na tato specifika poukázat a dát je do souvislosti se zvláštnostmi matematické a sémantické struktury jednotlivých úloh.

9.1 Úloha 1 – Cyklista dohánějící peloton

Zadání: *Etapa cyklistického závodu se jela průměrnou rychlostí 45 km/h. Jeden závodník ztratil defektem 4 minuty. Za jak dlouho a jak daleko musel jet rychlostí 50 km/h, aby opět dostihl peloton?*

Úloha je zajímavá především sémantikou. Všimněme si (a v řešení studentů je to patrné), že matematicky se jedná o klasickou úlohu o pohybu týmž směrem po neuzavřené dráze. Je dána rychlost obou objektů a zpoždění dohánějícího. Zbývá vypočítat společná dráha a čas, za který druhý objekt dožene první. Sémanticky je ale úloha netypická. Za matoucí údaj byl předpokládán popsaný úsek před defektem cyklisty, kde se zdůrazňuje stejná rychlost obou pohybujících se objektů (podobný údaj se v typových úlohách nevyskytuje). Pro výpočet ale tento úsek není nijak podstatný, naopak není do matematické struktury vůbec zahrnut. Také zvláštnost otázky se jeví jako matoucí. Obvykle bývá otázka v poslední větě a její formulace je např. „kdy a kde dožene...“. Rychlost objektu, ke kterému se otázka vztahuje, bývá zpravidla udána na začátku úlohy v oznamovací větě a nevztahuje se přímo k otázce. Zde otázka zní: „jak dlouho a jak daleko musí jet rychlostí 50 km/h“. Jednak je tedy zvláštní zadání rychlosti i otázky v jedné větě, jedna „musí jet rychlostí“ zní jakoby podmínkově – pohyb se neodehrál, zatímco v běžných úlohách je většinou zadáno „jede/jel rychlostí“, tedy pohyb probíhá nebo proběhl.

K mému překvapení ale studenti s úlohou výrazné problémy neměli. U některých byla zpočátku vidět větší pozornost vůči textu a při prvním čtení možná byla úloha klasifikována jako nestandardní. To souvisí s aspektem, který je popsán v diskusi - a sice s tím, že studenti kromě druhu úlohy také identifikují její typovost či netypovost. Zde zřejmě student po identifikaci úlohy o pohybu nejdříve považoval úlohu za netypickou, ale posléze po dalším čtení a lepším vhledu do matematické struktury – která je totožná v typových úlohách - úlohu identifikoval znovu jako typovou o pohybu týmž směrem. (Nebo k tomuto uvědomění mohlo dojít po zápisu podmínek do obrázkové a slovní legendy, kde student viděl, že se shoduje s legendou z typových úloh.) Dle toho také byla řešena. Postup byl téměř totožný jako u úloh

1 a 4 z písemné práce. Pro příklad můžeme uvést práci Štěpánky. Její řešení v úloze 1 z písemky vypadá takto:

$\vdash \xrightarrow[v_1 = 60\,km/h]{s_1}$

t_1

$\vdash \xrightarrow{s_2}$

$v_2 = 80\,km/h$

$t_2 = t_1 - 0{,}5\,h$

$$s_1 = s_2$$
$$v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_2$$
$$60 \cdot t_1 = 80 \cdot (t_1 - 0{,}5)$$
$$60t_1 = 80t_1 - 40$$
$$40 = 20t_1$$
$$\underline{\underline{t_1 = 2\,h}}$$

A pro srovnání řešení úlohy 1 – cyklista dohánějící peloton:

$\vdash \longrightarrow$

$v_1 = 45\,km/h$ $\qquad 4\,min = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}\,h$

$t_1 =$

$\vdash \longrightarrow$

$v_2 = 50\,km/h$

$t_2 = t_1 - \frac{1}{15}\,h$

$$s_1 = s_2$$
$$v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_2$$
$$45\,t_1 = 50 \cdot (t_1 - \tfrac{1}{15})$$
$$45\,t_1 = 50t_1 - 3{,}\overline{3}$$
$$3{,}\overline{3} = 5\,t_1$$
$$t_1 = 0{,}\overline{6}\,h = \underline{\underline{40\,min}}$$

Vidíme tedy, že řešení je téměř stejné. Z rozhovoru je navíc jasné, že sémantické zvláštnosti nezpůsobily žádné zaváhání, a to ani přesto, že se autorka o znejistění pokoušela (poté, co Štěpánka automaticky zapsala matematickou strukturu):

Ex: Ještě se tě zeptám, tady se vlastně píše, že oni jeli spolu rychlostí 45 km, pak on měl ten defekt a pak jel za nimi. A co ta dráha, kterou on měl vlastně před tím než se mu to stalo? Je tam důležitá nebo není?

Štěpánka: No není, to jedou stejně.

Ex: Takže se to začne počítat od kdy?

Štěpánka: Až od tý doby, co on je dojíždí.

Ex: Ano a tu dráhu, kterou my vlastně potřebujeme zjistit, než on je dojel, tak to je jaká dráha? Odkud kam?

Štěpánka: No tak od toho místa, než se mu to stalo, než je dojel.

Stejně jako v typových úlohách můžeme vidět i podobné rozložení „klasických" a jiných řešení. Byla řešena patnácti studenty, z nichž pouze jeden počítal úvahovou strategií (Michal - student, který úvahově postupoval i v typových úlohách a zvolil totožný postup jako v úloze 1 z písemky, tudíž také úlohu identifikoval jako typovou o pohybu týmž směrem).

Úloha s sebou nesla i chybu s přičtením zpoždění typickou právě pro úlohy týmž směrem po neuzavřené dráze (je vidět i u Štěpánky – viz záznamy a analýzy její práce – přílohy na CD).

Další zajímavostí úlohy je nepravděpodobnost zadané situace – na kole člověk málokdy dosáhne rychlosti 50 km/h. Nad tím se pozastavila pouze 1 žákyně (Kristýna), která reagovala: „*Takže musel jet 50 km/h 30 km. Ty jo, ten si máknul*", která tak jasně dokazuje, že si pod textem úlohy představuje reálnou situaci.

9.2 Úloha 2 – Cesta od chalupy k zastávce

Zadání: *Martin byl s kamarády na chalupě. Řekl, že vyjdou-li z chalupy přesně v 8 hodin a půjdou rychlostí 3 km/h, přijdou na zastávku autobusu 9 minut po odjezdu autobusu. Půjdou-li však rychlostí 4 km/h, přijdou na zastávku 6 minut před odjezdem autobusu. Určete vzdálenost zastávky od chalupy a v kolik hodin jede autobus.*

Zvláštností úlohy je opět především sémantická struktura. Matematicky jde, stejně jako v úloze předchozí, o úlohu o pohybu týmž směrem po neuzavřené dráze, má však několik sémantických zvláštností:

- Vystupuje zde, oproti typické podobě, pouze jeden pohybující se objekt.
- Dráha je zde zcela jasně uzavřená.
- Pohyb je vyjádřen v podmínkových větách. Nejde tedy o skutečný pohyb, který se odehrál (nebo odehraje), jak je tomu u většiny úloh, ale pouze o možné varianty pohybu.
- Navíc měření rychlosti chůze není v reálnu běžné (a udržení stejné rychlosti po celou dobu chůze už vůbec ne), tudíž celá úloha vystupuje spíše jako hádanka nebo hlavolam.
- Otázky jsou kladeny neobvyklým způsobem.

Způsob, jakým studenti úlohu řešili, byl opět překvapující. Většina studentů pracovala s úlohou dle její matematické struktury – tedy jako s typovou úlohou o pohybu týmž směrem po neuzavřené dráze. Oproti očekávání byla navíc pro mnoho z nich naopak jednodušší oproti úloze 1 a 4 z písemné práce, protože způsobovala menší problém s vyjádřením časového rozdílu. Se sémantickými zvláštnostmi se vypořádali takto.

Jeden objekt, u kterého se zvažovali dvě varianty pohybu, automaticky brali jako dva objekty (takže je možné, že spíše než pohybující se objekty – nebo spíše subjekty - úlohy jsou za matematické objekty brány triády rychlost, čas, dráha). Někteří studenti dokonce explicitně hovořili o dvou skupinkách lidí, u nichž každá půjde jinou rychlostí (odstranili tak také automaticky podmínkovou formulaci a brali pohyb jako uskutečňující se) a sama jsem se přistihla, že v rozhovoru se studenty také hovořím o dvou skupinách.

Uzavřená dráha nebyla v řešení překážkou, naopak studenti lépe viděli platnost vzorce $s_1 = s_2$, protože u typových úloh je tento tvar vyjádřen spíše skrytě. Zde je dráha jasná u obou variant – od chalupy k zastávce. (Uvědomění je vidět např. u Davida v zápisu legendy – viz kapitola 7.1)

Použité strategie jsou ve všech případech algebraické. Zvláštní je, že tuto úlohu řešil algebraicky i Michal, který se jinak tomuto způsobu výpočtu spíše vyhýbá, protože vzorečky nezná. Nakonec se mu podařilo na ně přijít, ale má je spíše mechanicky zapamatované:

Michal: To je nějak rychlost se rovná rychlosti? Ne počkat. (Vidíme, že to jen zkouší, ale uvědomuje si, že to tak není možné).

Ex: Rychlosti nejsou stejný, to vidíš. Co časy?

Michal: Taky ne. Jo dráhu maj stejnou (takže $s_1 = s_2$ chápe jako rovnost drah a vidí to i v situaci úlohy). *Takže ...*

Zapisuje $s_1 = s_2$ *a dále* $v_1 + t_1 = v_2 + t_2$ (opět asi jen zkouší, jen si pamatuje, že je tam nějaká operace s těmito dvěma veličinami)

Ex: Proč je tam $v_1 + t_1 = v_1 + t_2$*?*

Michal: Ne to je krát, počkat.

Opravil

Ex: No jak si na to teď přišel?

Michal: To je vzoreček pro rychlost.

Ex: No a ty si ho nepamatuješ, tak jak si na to přišel?

Michal: Km/h takže dráha za čas. (Má to tedy zapamatováno asi jen pomocí této pomůcky, nikoliv pomocí logiky vzorce.)

Otázkou zůstává, proč se najednou uchýlil k algebře, když v jednodušších úlohách používal úvahu? Koresponduje to se závěry z předchozího výzkumu. Tam se ukázalo, že *„děti mají potřebu vidět do logiky pohybu ve slovní úloze a potřebují po celou dobu sledovat děj a postupné změny. Proto také častěji volí složitější a méně „elegantní" strategie, které to umožňují. Přeneseme-li tento poznatek na samotné používané strategie, ukazuje se, že zřejmě všude, kde by studenti byli schopni vidět do logiky vztahů v úloze, dali by přednost řešení úvahou (což také činí v jednoduchých slovních úlohách). Řada úloh je ale tak složitých, že jsou schopni jen dílčích vhledů (viz fragmentace textu úlohy) a algebraická strategie je tak jediná možnost. Ovšem v průběhu algebraického řešení ztrácejí kontrolu nad tím, co tomu v realitě odpovídá. To je do určité míry nutné, neboť v realitě úpravám algebraických výrazů a rovnic často neodpovídá nic. Podobně ale často ztrácejí kontrolu i při vyjádření dílčích vztahů. Proto zvládají rovnice jen v úlohách, kde je mají nacvičené – v prototypových školních úlohách. Tam mají jejich použití „nadrilované" tak, že do vztahů vidí. Díky této dobře zvládnuté strategii, kterou umí alespoň na úrovni klasických školních úloh, pro ně může být jednodušší i vyřešení úloh komplikovaných. Na rozdíl od toho, nejsou-li děti do algebry nuceny, mohou jistě vyřešit lépe jednoduché úlohy, kde je možné celou úlohu úvahově zvládnout, neboť lze najednou pojmout všechny vztahy v ní. Problém pak ale nastane v úlohách, o kterých je řeč výše – tedy v těch, kde už jsou děti schopny jen dílčích vhledů. Děti, které nejsou dostatečně vybaveny algebrou, která je zde takřka jedinou možností, pak mají jen malou šanci takovou úlohu vyřešit."* (Schöffelová 2005/2006, s. 66)

Zde pochopitelně nelze takový závěr generalizovat jen na základě práce jednoho studenta. Podíváme-li se podrobně na celou Michalovu práci, vidíme, že úvahu použil i v úloze 6,5 a 3. V úloze 6 je to pochopitelné, protože sémanticky se jedná o klasiku úlohy o pohybu týmž směrem. Matematická odlišnost v neplatnosti vzorce, která dělala problémy ostatním, Michala nemůže zmást, protože vzorec nemá zafixovaný. Úloha 5 byla vyřešena úvahou, protože pokud se student rozhodne odpovědět pouze na otázku úlohy (zda se setkají v Plzni), jedná se o poměrně jednoduchou sémantickou i matematickou strukturu a lze ji úvahově pojmout najednou. Úloha 3 je zcela specifická a nestandardní a použití vzorce je zde velmi obtížné. Naopak úvaha se zde nabízí, protože vztahy nejsou komplikované, v podstatě je třeba nalézt jeden sjednocující pohled. To, že Michal nedokázal úvahou vyřešit právě úlohu 2, která je pro představení si situace (díky podmínkové formulaci) obtížná a úlohu 4, kde je text podobný (také vidíme podmínkové věty a navíc je text dlouhý a zamotaný), je při nejmenším nápadné a lze to dát do souvislosti s výše zmíněným závěrem z předchozího výzkumu.

9.3 Úloha 3 – Chodci

Zadání: *Z míst A a B vyšli současně proti sobě dva chodci. První došel z A do B za 4 hodiny. Druhý došel z B do A za 3,5 hodiny. Za jak dlouho se potkali?*

Tato úloha byla všemi řešiteli považována za nejobtížnější, proto také nebyla zadávána všem studentům. Řešilo ji 13 žáků a pouze 2 ji vyřešili bez mého zásahu. U této úlohy stojí za to zmínit alespoň 3 základní typy řešení.

Bylo možné ji vyřešit algebraicky, ovšem jednalo se o velmi složitou aplikaci klasického algebraického vzorce, protože student v postatě nezná ani jednu neznámou – nezná celkové s ani s_1 nebo s_2. Nezná také rychlosti a časy, které jsou zadány, neodpovídají časům, které je třeba dosadit do vzorce. Právě v tomto studenti nečastěji chybovali. Většinou se snažili (pokud nerezignovali) využít základní vzorec $s = v.t$ v naději, že jim na výpočet bude stačit znalost t_1 a t_2 a za tyto veličiny si dosazovali zadané hodnoty 3,5h a 4 h, aniž by si uvědomili (alespoň zpočátku), že se jedná o jiné t_1 a t_2, než dosazují obvykle. V běžných úlohách jde o čas do setkání (který se většinou má zjistit), ale zde jde o čas, po který ujde každý chodec celou trasu (takový pokus je vidět například u Ivany – viz zápis a interpretace jejího řešení). Existuje možnost velmi složité aplikace, kterou nabízí učebnice, ze které je tato úloha použita (Frýzek; Müllerová 1992, s. 66). V řešení studentů ji můžeme vidět např. u Martina K., vypadá takto:

$$v = \frac{km}{h} \qquad v_1 = \frac{s}{4}$$

$$v_2 = \frac{s}{3{,}5}$$

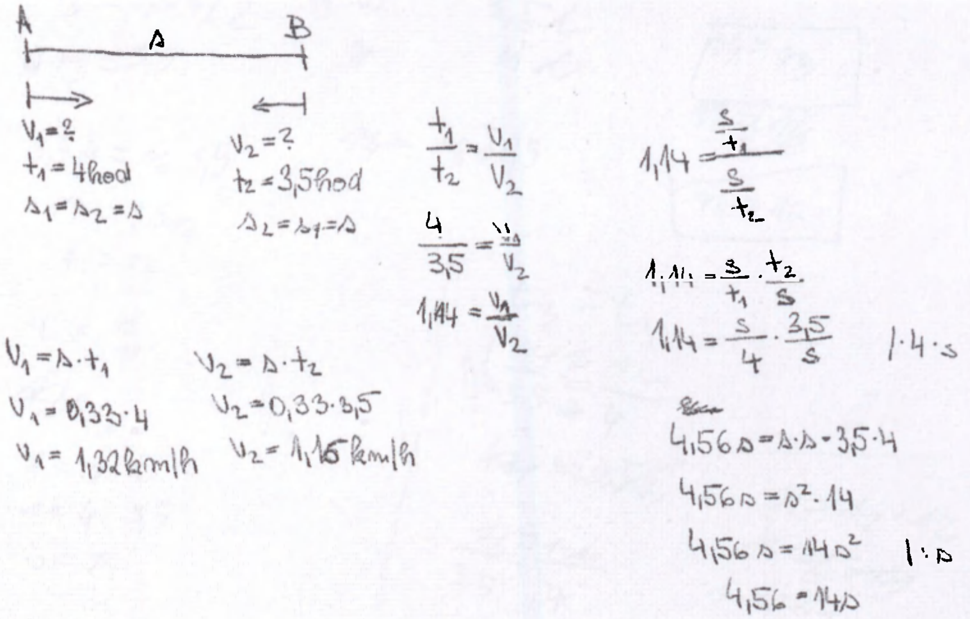
$$s = \frac{s}{4} \cdot t_1 + \frac{s}{3{,}5} \cdot t_2 \quad \Big| \cdot 4 / :$$

$$1 = \frac{t_1}{4} + \frac{t_2}{3{,}5} \quad \Big| \cdot 4 / 3{,}5$$

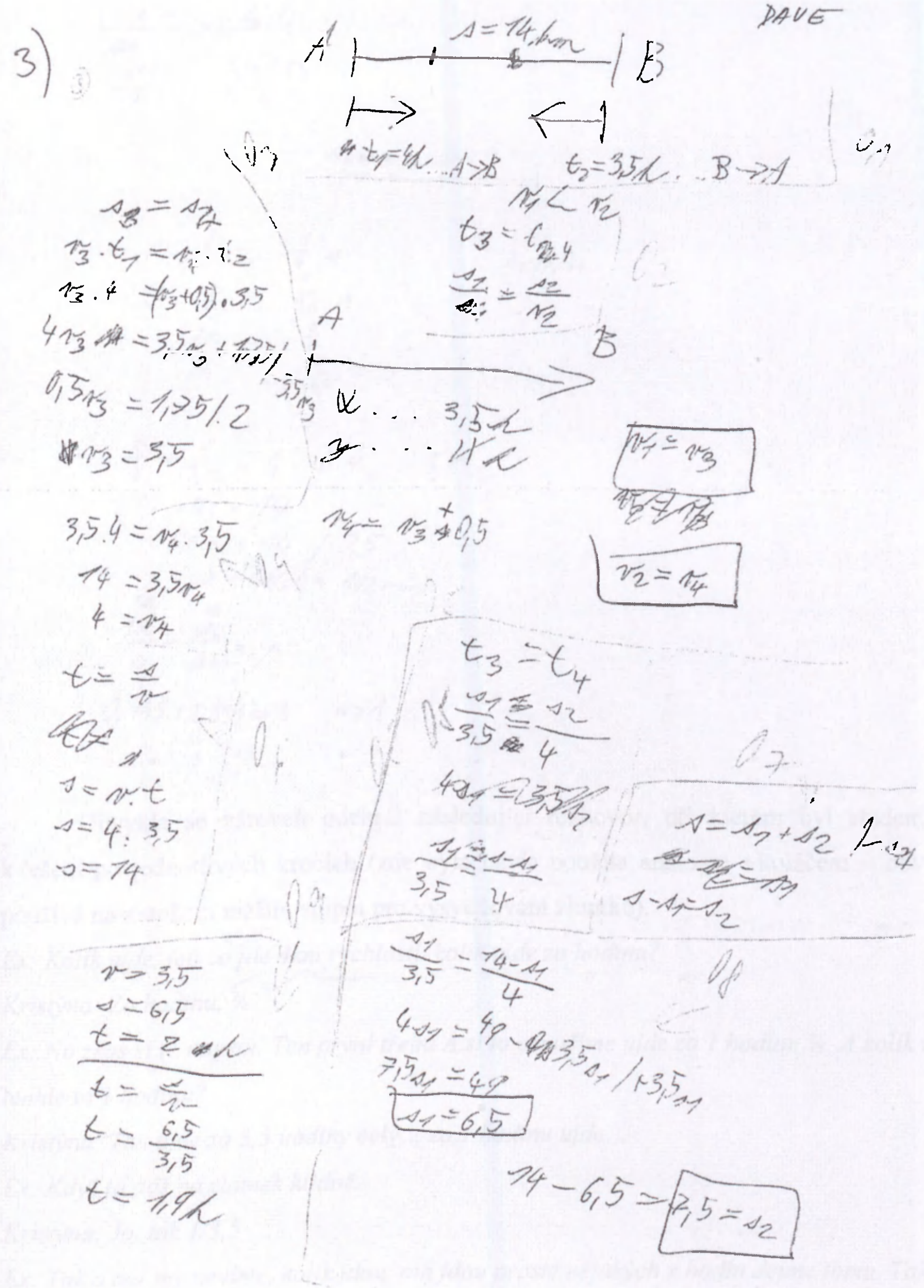
$$14 = 3{,}5t_1 + 4t_2$$

$$t_1 = 1{,}86\ h = 112\ min$$

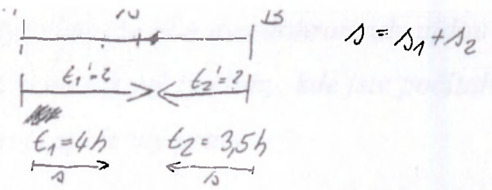
Obecně ale byl tento způsob řešení pro studenty velmi obtížně uchopitelný. Jedna z obtížností byla v tom, že by student musel použít velmi netypicky veličinu rychlosti, a sice jako dráha za jednotku času – tedy s/3,5 a s/4. To se všeobecně ukázalo jako obtížně přijatelné a potvrdilo se to i v úloze 4. Km/h jsou jednotky pro vyjádření rychlosti, ale málokdo si uvědomuje, že je to vlastně dráha za čas, tedy klidně zde neznámá dráha za 3,5 hodiny nebo za 4 hodiny (jak zapisuje Martin), podobně tak v úloze 4 jedno kolo za minutu, nebo 4 kola za 5 minut, nebo obecně dráha *x* za čas *y*. Tato neschopnost abstraktně pojmout vyjádření rychlosti podpořila neschopnost se s úlohou algebraicky vypořádat. Kromě toho měli studenti nejrůznější pokusy pro využití základního vzorce, ale jejich postupy byly velice složité a ne vždy vedly ke správnému výsledku, například neúspěšné řešení Lenky:

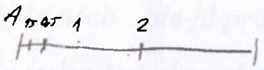


David nakonec ke správnému výsledku došel, ale velmi složitou cestou:



Na jiný způsob řešení jsem přišla při introspekci a pokud měli studenti tendenci k rezignaci, pokoušela se je na toto řešení navést a u všech se to s pomocí nápověd zdařilo. Princip řešení mohu ukázat například u Kristýny:





$A: 1h \ldots \frac{1}{4}\, s$ $\qquad s_1 = v_1 t_1$

$B: 1h \ldots \frac{1}{3{,}5}\, s$

$xh \ldots \frac{x}{4}$

$xh \ldots \frac{x}{3{,}5}$

$$\frac{x}{4} + \frac{x}{3{,}5} = 1 \quad / \cdot 4 ; \cdot 3{,}5$$

$$3{,}5x + 4x = 14$$

$$7{,}5x = 14 \quad / : 7{,}5$$

$$x = 1{,}86\,h = 112\,min$$

$$\frac{\cancel{112}\;1{,}86}{4} + \frac{\cancel{112}\;1{,}86}{3{,}5} = s$$

$$0{,}465 + 0{,}531 = s \quad \Rightarrow 1$$

Obvykle se zároveň odehrál následující rozhovor, při kterém byl student veden k řešení po jednotlivých krocích (zde byla navíc použita analogie s koláčem – obvykle se používá na mnohem nižším stupni pro vysvětlování zlomků).

Ex: Kolik ujde, ten co jde 4km rychlostí, kolik ujde za hodinu?

Kristýna: Za hodinu, ¼.

Ex: No zkus si to napsat. Ten první třeba A si to označíme ujde za 1 hodinu ¼. A kolik ujde tenhle ta 1 hodinu?

Kristýna: Ten ujde za 3,5 hodiny celý... za 1 hodinu ujde...

Ex: Když to dáš na zlomek klidně.

Kristýna: Jo, tak 1/3,5

Ex: Tak a teď my nevíme, kolik jdou, oni jdou prostě nějakých x hodin dejme tomu. Tak když tady ten ujde za 1 hodinu ¼, tak kolik ujde za x hodin?

Kristýna: x/4.

Ex: A ten druhej?

Kristýna: x/3,5

Ex: A když víme, že oba dva dohromady ujdou celou tu dráhu, jak to můžeme zapsat... vzpomeň si na takový ty úlohy, kde jste počítali...

Kristýna: O společný práci.

Ex: No.

Kristýna: No a já vim, že tam bylo něco...ale já právě nevim.

Ex: No tam bylo, že jeden udělá jeden kus, druhej další kus a dohromady to udělají celý. Jak se to zapsalo to dohromady? Když máš zlomek, když máš třeba ½ + ½, kolik je to dohromady?

Kristýna: 1/10, ne to je blbost. 1/5

Ex: ½, zkus si přestavit koláč. Půlka koláče a půlka koláče je kolik.

Kristýna: Jednička.

Ex: No JEDEN koláč že jo?

Kristýna: Takže jakoby x/4 plus...

Ex: No oni musej dohromady zas udělat celek. Tak si představ, že tohle je koláč (ukazuji na dráhu). A my nevíme, kolik měří ani nic, ale víme, že tady ten tam má nějakej podíl x/4, kterej snědl a tenhle x/3,5 a dohromady to musí dávat ten jeden celej koláč.

Kristýna: Takže dohromady to dá jakoby jednu.

Ex: Tak jak se to zapíše?

Zapisuje rovnici a dopočítává:

Poslední řešení, které použili dva studenti (a také jediní dospěli k výsledku bez mé pomoci), použili úvahu (viz záznamy a analýzy řešení Michala a Honzy Z v přílohách na CD). Ta spočívala v tom, že jejich společný čas musí vzniknou zprůměrňováním jejich polovičních časů. Tedy jejich sečtením poloviny času prvního chodce a poloviny času druhého a vydělením dvěma. Tím získáme výsledek 112,5 minuty (liší se tedy o 0,5 minuty od výsledku, který získáme při předchozích postupech. V zásadě by ale postup měl být také správný).

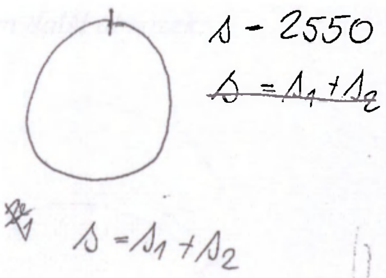
9.4 Úloha 4 – Pohyb v kruhu

Zadání: *Po okruhu dlouhém 2550 m jezdí dva motocykly takovými rychlostmi, že se potkávají každou minutu, jezdí-li proti sobě, a dohánějí každých 5 minut, jezdí-li týmž směrem. Určete jejich rychlosti.*

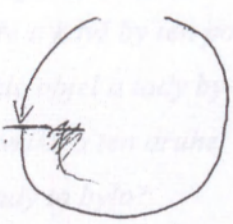
Tato úloha je zástupcem zcela netradičních a pro žáky neznámých úloh o pohybu (i přestože, jak se za chvíli ukáže, ji lze řešit téměř klasickým postupem). Hlavní rozdíl je v tom, že se jedná o pohyb po dráze, která je kruhová a sémantika úlohy je taková, že není vyloučeno, že pohyb od startu k cíli se vícekrát opakuje. Z hlediska matematické struktury se jedná o úlohu, ve které jsou obsaženy oba základní typy úloh. První část hovoří o pohybu proti sobě a matematicky se jedná o klasické schéma, kde platí základní údaje těchto úloh – tedy je zadána vzdálenost mezi dvěma body – 2550m, čas obou aktérů je stejný a součtem jejich drah získáme dráhu celkovou. Jediná odlišnost od klasické úlohy o pohybu protisměrném v matematické struktuře je v tom, že neznámou jsou rychlosti, které jsou obvykle zadány. Kromě toho je zadána pouze celková dráha, ale bez zadání dráhy jednoho a druhého motocyklu (to má naopak s typovými úlohami společné). Právě proto nelze úlohu vypočítat bez její druhé části, protože rychlosti nelze dát do přímého vztahu tak jako časy nebo dráhy v obvyklé struktuře úlohy o pohybu protisměrném. Kruhová dráha je zde matoucí spíše sémanticky, protože v matematické struktuře nehraje roli. Pro výpočet je důležitý pouze pohyb v jednom kole (opakování se nemusí, resp. ani nemůže) brát v potaz. Motocykly vyjedou ze startu a sejdou se na určitém místě (přičemž jeden motocykl ujede dráhu větší než druhý). Tedy kdybychom „natáhli“ tuto dráhu, jednalo by se o běžnou úlohu, kde jsou jen zadány jiné neznámé. Zřejmě také proto s touto částí úlohy neměli studenti zásadní problém. Většinou sestavili klasickou rovnici drah $s_1 + s_2 = s$ a do ní dosadili $v.t$, po čemž zjistili, že mají dvě neznámé a úlohu tedy takto nevypočítají.

Klíčový bod úlohy je v druhé polovině. Zde už kruhová dráha hraje roli zásadní a to jak sémanticky, tak matematicky. Jednak je třeba se oprostit od základního schématu – pohyb za sebou – $s_1 = s_2$, protože to zde neplatí, jednak je třeba si představit (nebo uvědomit), že pohyb po kruhu musí alespoň u jednoho aktéra proběhnout opakovaně, aby se objekty mohly sejít. Na rozdíl od klasické úlohy o pohybu týmž směrem objekty vyjíždějí nejen ze stejného místa, ale i ve stejný čas (není zde klasické zpoždění jednoho z objektů), takže jejich oddálení, které je nutné proto, aby bylo možné následné potkávání, se musí odehrát prostřednictvím odlišných rychlostí, které tvoří neznámé úlohy. Pokud by se nejednalo o kruhovou dráhu, nemohla by při společném startu otázka znít „kdy se dohoní“, ale „za jak dlouho budou od sebe vzdáleni…“. Kruhová dráha však umožňuje při tomto neklasickém zadání klást klasickou otázku „kdy se dohoní“, protože v daném kontextu je to sémantický ekvivalent otázky „kdy budou od sebe vzdáleni na vzdálenost rovnající se délce okruhu“.

Při řešení této úlohy studenty se objevilo hned několik typických potíží. Pokusím se to nyní ukázat na řešení Kristýny. Po přečtení zadání jako první zapsala situaci v první části. Nejdříve nakreslila legendu a poté zapsala $s = s_1 + s_2$:

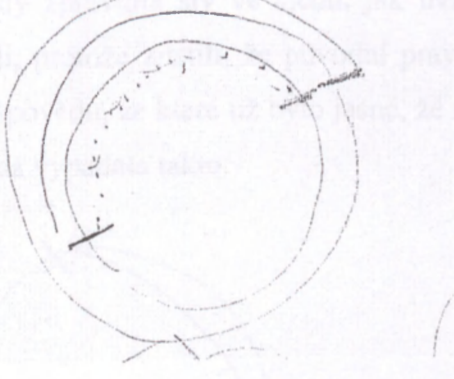


Poté chvíli váhala (jak vidíme rovnici škrtla a poté napsala znovu), ale společně jsme došly k tomu, že je tomu tak, a Kristýna s tím neměla větší problém. Poté jsme opustily tuto situaci a začaly řešit situaci jízdy za sebou. Zezačátku jí situace nebyla vůbec jasná. Na mou výzvu si vytvořila nákres situace:



Ani poté na princip nepřišla (ani po přirovnání ke kruhovému stadionu, což je kontext jí blízký). Zvolila jsem tedy sérii nápověd, kterou jsem volila téměř u všech studentů, protože si skoro nikdo jinak s touto situací neporadil.

Ex: Tak hele, já ti to nakreslím. (Kreslím tento obrázek):



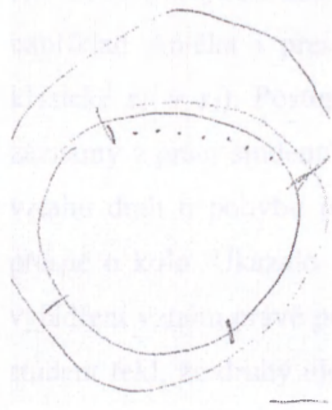
Ex: Nakreslim ti takhle kolo, tady je start a teď ten jede, pojede pomalu a dejme tomu, že dojede třeba do půlky (vytečkovaná část dráhy). A ten rychlejší, ten jel mnohem rychleji, takže ten už dávno v tý půlce byl, takhle to celý objel a tady v tý půlce ho dohonil. Kolik ujel ten pomalejší?

Krist: Třikrát míň než…

Ex: No kolik z toho kola ujel?

Krist: No půlku a ten druhej jedno a půl, takže ujel třikrát míň ten pomalejší.(Další zajímavý aspekt – viz dále).

Kreslím další obrázek:



Ex: Dobře a když by ten pomalej byl ještě pomalejší a dojel by jenom sem. A ten druhej by to zase takhle objel a tady by ho dohonil. Kolik ujel ten pomalejší?

Krist: Čtvrtku a ten druhej kolo a čtvrt.

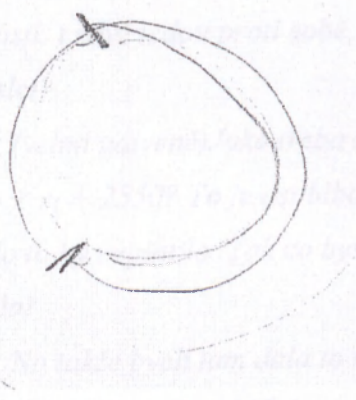
Ex: No tady to bylo?

Krist: Půlka a kolo a půl, takže ten druhej je vždycky jakoby o kolo dřív. Takže s_1 a to s_2 to je ten rychlejší se rovná jedno kolo a teď nevim ale…

Ex: Kolik je jedno kolo?

Krist: Takže 2550m.

U některých studentů byl proces nápověd, než byli schopni zobecnění pravidla, delší. Nápovědy zpravidla šly ve sledu, jak uvádím u Kristýny. Po druhé nápovědě ale někteří znejistěli, protože zjistili, že původní pravidlo „třikrát více" neplatí. Zvolila jsem pak ještě jednu nápovědu, ze které už bylo jasné, že nejde o násobek dráhy, ale vždy o jedno celé kolo. Nápověda vypadala takto:



Úsek pomalejšího jsem v poslední nápovědě označila jako s_1 a znovu jsem zopakovala: *„Tady ujel čtvrt a ten kolo a čtvrt nebo půl a kolo a půl. Tady ujel s_1 a ten?"*

Zde už většinou byli schopni říci, že druhý ujede vždy s_1 + *kolo* a zapsat to jako $s_2 = s_1 + 2550$ (i když ne úplně samozřejmě, což souvisí s aspektem popsaným v kapitole 8.1.1.1 – například Anička i přesto, že princip pochopila, zprvu napsala jako vzorec pro výpočet klasické $s_1 = s_2$). Postupné pronikání do této situace můžeme vidět i jinde (viz jednotlivé záznamy z prací studentů, např. Štěpán). „Vtip“ úlohy je tedy právě v odhalení vzájemného vztahu drah u pohybu po okruhu za sebou, které se liší při jednom setkání objektů vždy přesně o kolo. Ukázalo se, že dráha vyjádřená v kolech je pro žáky obtížně uchopitelná a vyjádření vztahu právě pomocí kola také. Proto se opakovaně objevilo po první nápovědě, že student řekl, že druhý ujede třikrát více, než první. V této fázi většina studentů generalizuje, že **vždy** rychlejší ujede třikrát tolik než pomalejší – možná to vyplývá z toho, že většinou je v matematice všechno v nějaké jasné úměře – několikrát více, méně atd. Studenti patrně hledají vztah úměry i zde, neboť úměra by odpovídala vztahům násobení a dělení ve vzorcích pro dráhu – čas – rychlost. Tady je to vždy o kolo víc, tzn. pokud ujede půl kruhu, druhý ½ + 1. Pokud jeden ujede 6 kruhů, druhý 6 + 1 atd. Není to tedy úměra, je to vždy přesně o kolo více, což působí zřejmě pro studenty nematematicky a nepředpokládají, že by zde taková zákonitost mohla platit a nabízí-li se jiná, nejdříve volí tu.

Další problém vznikal v momentě, kdy již byly sestaveny obě rovnice pro výpočet. Za prvé bylo pro studenty nesamozřejmé nahrazovat dráhy veličinami ($v.t$) – viz problém s daností vzorce. Poté, co pochopili, že nahrazování je možné provést, bylo pro ně těžké pochopit, že vytvořené rovnice lze spojit a řešit je jako klasickou soustavu rovnic. Vraťme se k řešení Kristýny. V rozhovoru nad jejím řešením úlohy je vidět, jak obtížné je pro ni pochopit, že obě situace úlohy lze spojit:

Ex: No tak teď tady máš dvě rovnice. A teď se jedná o stejný motorky, který jedou stejnou rychlostí, i když jedou proti sobě, i když jedou za sebou. Tak co můžeš z těch dvou rovnic vymyslet?

Krist: (velmi udiveně)Jako třeba to spojit jako?

$s = s_1 + s_1 + 2550$? To je asi blbost že jo?

Ex: No to by neplatilo. Tak co bys udělala, kdyby tohle vůbec nebylo, co bys s tim normálně udělala?

Krist: No takže bych tam dala to véčko.

Ex: A co by ti z toho vzniklo?

Krist: Rovnice o dvou neznámých.

Ex: Tak jí zkus schválně napsat.

Zapisuje rovnici

Krist: Takže mi vyjde, že 2550 se rovná $v_1 + v_2$.

Ex: No tak ti vznikla rovnice o dvou neznámých. A co bys udělal s tímhle?

Krist: To samý, akorát s pěti minutama.

Zapisuje

Ex: Takže teď máš tady rovnici o dvou neznámých. A jsou to ty samý neznámý? Je tohle v_1 zároveň tohle v_1?

Krist: Jo.

Ex: Jo, takže co s tim můžeš udělat? To jsou furt ty samý motorky, tohle jsou stejný motorky se stejnejma rychlostmi a tohle taky.

Krist: To nevim jako.

Ex: Co se normálně dělá, když máš dvě rovnice o dvou neznámých?

Krist: No vynásobila bych to tím.

Ex: Řeší se to jako soustava rovnic. A tady to jde nebo nejde?

Krist: Jde, takže to mam normálně vypočítat?

Ex: Jo.

Krist: Ty jo, tak na to bych nepřišla.

Objevovalo se to u mnoha studentů. Čím je to způsobeno? Při řešení studentů jsem měla opakovaně pocit, jako by věděli, že na matematické úrovni s tím lze takto pracovat a lze obě situace spojit, protože si jsou vědomi, že v_1 a v_2 v jedné i druhé rovnici jsou tytéž neznámé. V realitě ale jakoby tyto dvě situace považovali za nespojitelné (a ony nespojitelné jsou). Mají možná pocit, že jde o dvě rozdílné situace, které se vždy odehrávají buď jedna nebo druhá (což tak v realitě skutečně je) a mohou mít pocit, že sčítají „jablka a hrušky“. Možná zde hraje roli i to, že soustava rovnic pro ně neodpovídá ničemu reálnému, tudíž je obtížně pochopitelné samotné spojení situace v úloze a rovnice jako takové (podobně, jako obtížně spojují situace v úloze se vzorci). Možná by stačilo přetvořit text na: „Motorky jezdí po okruhu proti sobě a potkávají se každou minutu. Kdyby stejnými rychlostmi jezdily za sebou, doháněla by rychlejší motorka pomalejší každých 5 minut.“ Z toho už by mohlo být jasnější, co je tím myšleno a že lze situace spojit, protože druhá možnost je na úrovni hypotetické a je v textu přímo vztažena k první situaci. Jak to v textu leží to může být matoucí, protože spojitost dvou situací není explicitně vyjádřena – není zde zdůrazněno, že motorky jezdí stejnými rychlostmi.

Strategie používané v této úloze jsou opět převážně algebraické – v osmnácti případech z dvaceti řešení, resp. v sedmnácti, protože jednou se jedná napohled o algebraické řešení, ale ve skutečnosti jde o kombinaci algebry a velmi zajímavé úvahy. V tomto řešení se dokonce ukázalo, že není úplně nutné využít rovnici z obou situací – viz záznam a interpretace řešení Lenky.

9.5 Úloha 5 – Audi a Mercedes

Zadání: *Osobní automobil Mercedes vyjede v čase T=0 z Prahy k hraničnímu přechodu Rozvadov. V čase T = 40 minut vyjede z Rozvadova Audi A8. Mercedes se pohybuje průměrnou rychlostí 160 km/h a Audi 145 km/h. Mercedes musí třikrát zastavit policejní kontrole. Tato kontrola trvá poprvé 4 minuty, podruhé 3 minuty, potřetí 5 minut. Audi jede po celou dobu bez zastávky. Setkají se auta v Plzni? (Z Prahy do Plzně je to 90 km a z Plzně na Rozvadov 60 km.)*

Ve své podstatě se jedná o klasickou úlohu o pohybu protisměrném, alespoň pokud jde o použití základní rovnice $s_1 + s_2 = s$ (I když, jak za chvíli uvidíme, není nutné ji použít.) Komplikace je v nerovnosti časů objektů, která nebývá v úlohách o pohybu protisměrném obvyklá (ovšem v této třídě se s rovností časů nepracuje, není fixně vázána na tento druh úloh, takže primárně to pro studenty zásadním problémem není). Potíž je spíše v komplikovaném vyjádření nerovnosti časů (která už sama o sobě – jak je vidět v úlohách o pohybu týmž směrem – je pro studenty obtížně algebraicky vyjádřitelná). Ta je vyjádřena v několika fázích – nejdříve jako zpoždění Audi (nebo spíše náskok Mercedesu), což je navíc vyjádřeno netypicky jako T=*0* a T=*40* (s tím se ale studenti vypořádali poměrně snadno). Kromě toho je zde ve hře několik zastávek Mercedesu, které jeho náskok snižují. Studenti tedy musí ve vyjádření vztahu mezi časy postupovat ve dvou krocích – nejdříve zohlednit náskok Mercedesu a poté od něho odečíst dobu jeho zdržení. V této úloze se práce s časem ukázala jako velmi obtížná a i když nakonec s nápovědami ke správnému zápisu studenti došli, většina s tím měla potíže. Pravděpodobně proto, že úloha má tak dlouhé zadání, že žáci měli tendenci k fragmentaci textu a postupnému zápisu podmínek. V té souvislosti docházelo k různým chybám.

U prvního typu chyby šlo v principu o to, že studenti nejdříve vyjádřili čas Mercedesu (obvykle jako t_1), poté čas Audi ve vztahu k tomuto času Mercedesu t_1. Po dočtení úlohy, kde zjistí, že Mercedes se několikrát zastavuje zapíší naopak čas Mercedesu ve vztahu k času Audi (což nelze, protože již byl zapsán obrácený vztah a čas Audi je tak už změněn – typicky ale od něj odečtou 12 minut, aniž by zohlednili, že jde vlastně o opačný pohyb v čase, než zapisovali ve chvíli, kdy psali čas Audi jako čas Mercedesu, od kterého odečítalo 40 minut zpoždění). Algebrou by se celý popsaný děj dal vyjádřit takto:

Čas Mercedesu – t_1

Čas Audi (t_2) = čas Mercedesu (t_1) – 40 minut, tzn. $t_2 = t_1 - 40$ minut

Poté, co zjistí, že Mercedes stavěl, zapíší znovu čas Mercedesu (t_1) = čas Audi (t_2) – 12 minut nebo to jen připíší k původnímu t_1. V každém případě tak vznikne pro čas Mercedesu tvar: $t_1 = t_2 - 12$ minut. Zde vznikne chyba - za Audi (t_2) dosadí celý tvar, jak ho vyjádřili předtím – tedy (t_1 – 40 minut) – jak jsou zvyklí (pokud se dosazuje například v soustavách rovnic, vždy si musí dát pozor, aby dosadili celý tvar). Vzniká tak čas Mercedesu v tomto tvaru: $t_1 = (t_1 - 40$ minut$) - 12$ minut – tedy konečný zápis je: čas Audi $t_2 = t_1 - 40$ minut, čas Mercedesu $= t_1 - 52$ minut. Vstupuje zde do hry samozřejmě nepříliš šťastné číselné značení. Pokud by si neznámé označovali např. prvním písmenem, mohli by lépe vidět, že čas M. nemůže být čas M. – 40 – 12 minut (i když možná by i tak udělali tuto chybu). t_1 a t_2 jsou neznámé, které ztrácejí původní význam spjatý s konkrétním objektem, obzvláště v úlohách, kde je text takto komplikovaný. Studenti prostě ztratí přehled, co je co a jsou pak schopni to takto zapsat.

Druhá častá chyba vyplývala ze záměny dvou druhů časů. Ukázalo se, že někteří studenti v této úloze rozlišují dva druhy času Mercedesu – zřejmě právě proto, že jsou změny času předkládány v textu postupně. Odlišují čistý čas jízdy (tedy skutečného pohybu) a dobu na cestě (tedy i se zastávkami). Je to jedno ze specifik těchto úloh – v podstatě je přítomno ve všech, kde je rozdíl v časech aktérů. Ovšem pokud je zdržení na začátku, dá se jednoduše ihned odečíst a čistý čas je tak roven času na cestě. Toto rozdělení je velmi důležité z hlediska toho, čím se násobí ve vzorci $s = v.t$. To zřejmě studenti alespoň implicitně cítí, a proto mají potřebu tyto dva druhy času odlišit. Tento moment je také dobrým nástrojem zjišťování, zda studenti rozumí vzorci $s = v.t$. Děti někdy násobí rychlost časem víceméně mechanicky a nevědí proč (a nebo nemají potřebu se tím zabývat, pokud je obsah veličin jasný). Znají to jen ze vzorce, ale nepředstavují si pod tím reálný pohyb a nevědí, že násobení rychlosti časem vyplývá vlastně z toho, že rychlost udává, kolik aktér ujede právě za jednu hodinu, tudíž je třeba toto číslo násobit počtem ujetých hodin (ale musí jít o reálný pohyb). Na úrovni aplikace vzorce si to děti nemusí uvědomit. Opět se prokázalo (když jsem jim dávala jednotlivé nápovědy), že implicitně vědí, že když člověk stojí, nemůže být tato doba započítána do pohybu a nelze jí tedy násobit rychlost (viz např. záznam z rozhovoru s Martinem K.). Zároveň samotnému vzorci také mnohdy rozumějí a vědí, že dráhu získáme tím, že vynásobíme čas a rychlost. Opět ale nemusí být schopni tyto dvě situace spojit. Koresponduje to s tím, co je uvedeno u porozumění rovnicím drah (viz kapitola 8.1). Pokud tedy používají tyto dva druhy času, protože musí zohlednit zdržení jak u Audi tak u Mercedesu, dochází často k „zamotání se“ do toho, která neznámá označuje který čas, protože většinou pochopitelně volí označení číselné nebo pomocí t a x. K tomu došlo například u Katy:

Katy: A to t_1 se rovná x plus a teď 4 + 3 + 7 je 12.

Ex: Co je to x?

Katy: To je nějakej ten čas, kolik pojede celkově.

Ex: To znamená, když pojede celkově, tak to myslíš od tý doby co vyjede, než se potkaj?

Katy: Jo.

Ex: A těch 12 minut je co?

Katy: No plus ty zastávky, protože u toho Audi, tak ten pojede vlastně t_2, což se bude rovnat tomu t_1 a vlastně plus 40 minut.(Tady to vypadá, že jako t_1 skutečně myslela celkovou dobu jízdy Mercedesu).

Ex: Co to znamená plus 40 minut?

Katy: No že vyjede později. (Tady vidíme klasickou chybu).

Ex: Jo a když vyjede později, tak pojede kratší nebo delší dobu než ten Mercedes?

Katy: hmmmm, to vlastně oni právě to musim vyřešit, jestli se potkaj v tý Plzni.

Ex: To jo, ale to není zas tak důležitý teď. Ale když někdo vyjede, vlastně on jede ten Mercedes a jede 40 minut a pak teprve vyjede to Audi. Kdo jede delší dobu do tý doby než se potkaj?

Katy: Mercedes.

Ex: Mercedes. A tys tady napsala: Audi je jako čas Mercedesu a 40 minut navíc.

Katy: Jo takhle – opravuje na $t_2 = x + 40$ (klasická chyba zůstává a navíc teď zpoždění přičítá k čistému času jízdy Mercedesu – nikoliv k době na cestě).

Ex: No můžeš to zkusit, já teď nevim. x teda je... záleží na tom, co přesně myslíš tim x.

Katy: No ten čas, dokud se potkaj a jako... nebo bych to možná dala takhle – to je ten čas x a ten jede vlastně... já jsem se teď do toho zamotala.(My obě.)

Další možností je kombinace obojího – zamotání se do čistého času a doby na cestě a navíc chyba plynoucí z fragmentace – např. Tomáš:

Zakreslil legendu s popisky měst. K tomu zapsal rychlosti obou aut. Poté zapsal na stranách $t = 0$ a $t = 40$. Dále zapsal $t_2 = t_1 - 0,6$ a $t_1 = t-0,2$

Ex: Co tohle znamená?

Tomáš: Že vlastně jel o 40 minut kratší čas.

Dále zapsal $s = s_1 + s_2$

Ex: Proč je to $s_1 + s_2 = s$?

Tomáš: Protože vlastně jedou proti sobě, takže se jednou setkaj a nemaj vlastně stejnou tu dráhu, ale součet je jejich dráha.

Dále dosadil do rovnice veličiny dle vzorce s = v.t, za t_1 dosadil (t – 0,2) a za t_2 dosadil (t_1 – 0,6))(ovšem t_1 v jejím celém tvaru, tedy jako(t – 0,2 – 0,6)). Jeho rovnice vypadá takto:

$$s = s_1 + s_2$$

$$s = 160 \cdot (t - 0{,}2) + 145 \cdot (t - 0{,}2 - 0{,}\overline{6})$$

Ex: Co vlastně znamená to samotné t, bez čísla?

Tomáš: No to je ten čas těch obou.

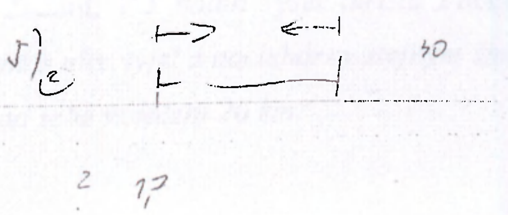
Ex: Teď jde o to, jestli to je čas jízdy, kdy skutečně jedou – mají pohyb, nebo jestli to je čas, kdy jsou na cestě.

Tomáš: No to je ten čas, který jsou na cestě, doufám.

V podstatě to původně myslel dobře – zapsat čas Audi jako čas Mercedesu mínus 40 minut. Poté zapsal čas Mercedesu (po dočtení, kdy zjistil, že musí zohlednit přestávky) jako čas na cestě, od kterého odečítá 12 minut a tím vytváří čistý čas pohybu Mercedesu *(t_1)*, který bude potřeba pro dosazení do vzorce – je mu tedy jasné, že přestávkami násobit nemůže). Poté už se ale nevrátil zpět k Audi – což je chyba, protože Audi má zpoždění vůči celé době Mercedesu na cestě (není řečeno, kdy jsou přestávky) a ne jen vůči čistému času jízdy a t_1 v době vyjadřování času Audi ještě vyjadřovalo celkový čas Mercedesu na cestě.

V podstatě jde zřejmě vždy, když vzniknou tyto chyby, o kombinaci obojího – jak nutnosti rozlišit čas jízdy od doby na cestě, tak nutnosti vyjádřit čas jednoho ve vztahu k druhému a nutnosti uvědomit si, že čas druhého už byl předtím vyjádřen ve vztahu k prvnímu. Vše je ještě podpořeno klasickou chybou v přičtení (na místo odečtení) zpoždění (viz chyby v úlohách o pohybu týmž směrem).

Podíváme-li se zpět na zadání úlohy, je zde ještě jedna zvláštnost – v otázce, která zní: *„Setkají se auta v Plzni?"* Z celkového množství řešitelů byli pouze 3, kteří řešili primárně tuto otázku. Všichni ostatní zjišťovali, kde přesně se auta setkají, ačkoliv taková otázka v textu není (i když pochopitelně ji lze po takovém výpočtu zodpovědět). U většiny studentů totiž můžeme vidět klasické řešení pomocí vzorce $s_1 + s_2 = s$. Úlohu bylo ale možné řešit i velmi jednoduchou úvahou, která přímo odpovídala na otázku. Ukázka tohoto jednoduchého řešení je například u Radka. Toto je jeho zápis:



Průběh řešení:

Dívá se na zadání a přemýšlí. Nic nepíše ani neříká.

Ex: Cos teď počítal?

Radek: Za jak dlouho on tady tou rychlostí odjede do Prahy ten Mercedes.

Ex: Počkej Mercedes jede z Prahy do Rozvadova.

Radek: No jo, ale tady je otázka, jestli se setkaj v Plzni. Tak počítám, za jak dlouho dojede do Plzně. Opět přemýšlí.

Ex: Cos teď počítal?

Radek: No v Plzni se nesetkaj určitě.

Ex: Proč?

Radek: No protože tady ten je rychlejší, tak i když tam má to zpoždění těch 12 minut, tak to vůbec nic nemění, protože tady ten má zpoždění 40 minut a jede pomaleji, takže se nemůžou v Plzni potkat. (Vidíme, že se jedná o dále nekontrolovaný odhad.)

Setkala jsem se s podobnou úvahou i u jiných studentů. Pochopitelně (i když není jasné, jestli takto Radek uvažoval) lze úlohu tímto jednoduchým způsobem vyřešit. Je jasné, že když má Mercedes náskok 28 minut, ujede za tento náskok (tedy než Audi vůbec z druhé strany vyrazí) 74,6 km (to je možná to, co si Radek počítal v hlavě). Zbývá mu tedy do Plzně pouze něco přes 15 km, zatímco Audi musí ujet 60 – taková je bilance ve chvíli, kdy vyrážejí obě auta – je tedy jasné, že pokud má Mercedes ujet méně km a jede rychleji, dávno Plzeň do doby setkání přejede. Nevím, zda to Radek tak myslel, ale je to naprosto logický postup, kterým je student schopen odpovědět na otázku úlohy, aniž by musel počítat přesné místo setkání. Stejným způsobem nakonec úlohu řešil i David (viz záznam a interpretace jeho řešení).

Ondra se mě dokonce zeptal, zda přestávky měl Mercedes před nebo až za Plzní – teoreticky by tedy student (protože v zadání to upřesněno není) mohl počítat s tím, že zastávky se odehrály až poté, co se obě auta setkala a pak by se s nimi vůbec nemuselo pracovat.

9.6 Úloha 6 – Noclehárna

Zadání: *V 5 hodin vyšel turista z noclehárny na delší cestu. Za hodinu ušel 5 km. Současně s ním vyjel z noclehárny stejným směrem cyklista rychlostí 17 km/h. Za jak dlouho budou od sebe vzdáleni 20 km?*

Hlavní zvláštnosti v této úloze tkví v narušení základní struktury typické pro úlohy o pohybu týmž směrem – především neplatnost rovnosti drah, jak již bylo pojednáno výše (viz kapitola 8.1), tedy není třeba o ní pojednávat znovu na tomto místě.

10 Srovnání strategií v typových a komplikovaných úlohách

V průběhu analýzy jednotlivých řešení žáků je možné si povšimnout naprosto převládající algebraické strategie řešení, a to jak v typových úlohách, tak v úlohách komplikovaných. Znamená to de facto, že žáci, kteří mají naučené typové řešení pro typové úlohy, jsou schopni tyto postupy použít i v komplikovaných úlohách. O úspěšnosti nelze vzhledem k charakteru výzkumu příliš spekulovat. Žáci nebyli ponecháni, aby úlohy řešili samostatně, protože účelem výzkumu nebylo sledovat úspěšnost strategií, ale porozumění myšlenkovým postupům při řešení – byli tak neustále dotazováni na jednotlivé kroky řešení a při chybě většinou okamžitě dotazem navedeni k její opravě (takže nelze s jistotou hodnotit, jak by postupovali bez této intervence). I tak lze ale usuzovat, že schopnost aplikace naučených strategií v typových úlohách je značná a potvrzuje to výsledky předchozího výzkumu v jiné třídě stejného gymnázia (s jinou učitelkou matematiky). Podívejme se nyní na studenty, kteří v některé úloze použili jinou strategii.

David - úvahou řešil úlohu 5 – tuto úlohu řešil jednoduše – odpověděl jen na otázku, jestli se auta setkají v Plzni nebo ne.

Honza Z. – úvahu použil pouze v úloze 3, což, jak popisuji výše, je úloha velmi netypická, kde lze klasické řešení aplikovat jen velmi obtížně.

Pavel – úvahou řešil úlohu 6 a úlohy z písemné práce – jak mi řekl, v době psaní písemné práce neznal vzorečky a do individuální práce se je doučil. Poté kromě úlohy 6 použil všude algebru. Proč? Pokud byl úspěšný v úvahových řešeních a algebru neuměl, proč měl potřebu se vzorečky doučit a v komplikovaných úlohách jim dát přednost před úvahou? To dosti koresponduje se závěrem z výzkumu 2005/2006, že komplikované úlohy už úvahově není schopen pojmout. Jeho použití úvahy v úloze 6 by mohlo mít dva důvody. Buď použil úvahu proto, že sémanticky je úloha velmi podobná typovým úlohám, kde byly úvahy použity, nebo proto, že je zde narušena základní matematická struktura, především platnost rovnosti drah, a protože Pavel vzorečky má pouze mechanicky naučené, nemohl je zde použít. (Což ale - opět připomínám - neznamená, že nemá vhled do úlohy: jak vidíme, je schopen řešit úlohu úvahou, tudíž vhled mít musí.)

Radek – Jak vidíme, příliš algebraickou strategii nepřijal za svou a ve všech typových úlohách používá úvahu, proto je předvídatelné, že ji použije i v komplikovaných úlohách. Ve dvou úlohách ale přece jen použil algebru, a to v úlohách 1, 2 (zřejmě ne náhodou v úlohách nápadně podobných). Proč ale? Jedná se o úlohy o pohybu týmž směrem, které (jak nám děti v řešení ukázaly) mají stejnou matematickou strukturu a je možné použít stejné řešení jako v typových úlohách. Jsou ovšem sémanticky zamotané. Proto použil algebru? Vidí zde do vztahů méně, takže musí zapisovat jednotlivé kroky pomocí algebry? Pokud ano, opět to koresponduje s předchozím výzkumem (2005/2006). V podstatě u tohoto žáka vidíme, že úvahově zvládl pouze typové úlohy. Na řešení úlohy 5 (po zjištění, že to zřejmě úvahou nepůjde) rezignoval. Úlohy 4 a 6 ale též úvahou nezvládl a použil (na vhled mnohem méně náročnou) strategii pokus-omyl.

Klára a Kristýna-řešily úvahově pouze úlohu 3 – a to až poté, co se samy pokusily o řešení s použitím klasického vzorce (jak už jsem zmínila obtížně aplikovatelného) a na úvahu byly v podstatě navedeny.

Kuba – ve své písemné práci použil úvahy (resp. spíše systematický pokus). Když dostal stejné úlohy z druhé varianty zadání, použil už algebraické řešení (i když v úloze 2 ne v typické formě). Proč? Že by se stejně jako Radek doučil vzorečky? Jak u něj tak u Radka to budí dojem, že i v případě, že jsou vzorečky „jen" mechanicky naučené, je řešení pomocí nich pohodlnější, protože je přehledné, srozumitelné a uplatnitelné i na komplikovaných úlohách, navíc jeho metoda systematického pokusu je nenáročná pouze v úlohách, kde je řešení jednoduché (celé hodiny nebo půlhodiny a tam, kde není třeba provádět pokusů mnoho) (Kuba řeší algebraicky i úlohy 2 a 4). Úvahu použil z komplikovaných úloh pouze v úloze 5, ovšem řešil pouze otázku úlohy (zda se setkají v Plzni, nikoliv kde přesně se setkají), kde se úvaha nabízí.

Přinejmenším je vidět, že je pro studenty použití algebry (i za cenu toho, že ji používají bez plného vhledu do významu vzorečků) jednodušší (jinak by zůstali u svých úvah či pokusů-omylů). Ovšem pro tento typ úloh je algebra mnohem univerzálnější a princip stačí zřejmě pochopit jen jednou, zatímco v případě použití úvahy je třeba získat vhled znovu v každé další úloze, je tak třeba více do struktury úlohy vidět a je to mnohem náročnější na pracovní paměť. Opět se zdá, že to potvrzuje závěry z předchozího výzkumu (2005/2006), (zde citováno v kapitole 9.2).

Martin H. – použil úvahu ve všech úlohách písemky. Při individuální práci řešil pro nedostatek času jen úlohu 5 – zde rovněž použil úvahu – opět pouze pro zjištění základní otázky úlohy. V úloze 2 použil algebru – proč? Nabízí se opět vysvětlení jako u Radka. Úloha je tentokrát sémanticky zamotaná, a tak je na místě algebra?

Michal – V dané třídě svými řešeními velmi vybočuje. Vše řeší velmi zajímavými úvahami a pokud už používá algebru, používá ji nestandardním způsobem (viz pozorování z hodiny – příloha 2). Stejně jako v typových úloh zůstává u svých jedinečných úvah i v komplikovaných typech úloh. Jedna zvláštnost je tu ale patrná – úlohu 2 řešil (stejně jako Radek a Kuba) klasicky – najednou nebyl schopen dostatečného vhledu, aby mohl opět uplatnit úvahovou strategii? Navíc úlohu 4 vzdal – to se u dětí používajících algebru nestávalo. Na druhou stranu úlohu 3 vyřešil během několika vteřin, zatímco děti používající algebru by se zřejmě bez mé pomoci k výsledku vůbec nedobraly.

Ondra – jediná úvaha se u něj vyskytuje v úloze 3 – tam, kde je algebra obtížná. Všude jinde používá klasické postupy.

11 Diskuse

11.1 Strategie řešení a porozumění úloze

Při zpracovávání a interpretaci získaných dat se ukázalo několik bodů, které jsou v menším či větším rozporu s literaturou. Naopak některé výsledky jasně tvrzení uváděná v literatuře podporují.

Budeme-li postupovat od začátku práce s úlohou, prvním sporným bodem, jak se ostatně již ukázalo v předchozím výzkumu (Schöffelová 2006), je Hejného *vrstva příběhu (expozice)*, která má být vůbec prvním krokem práce s úlohou. V předchozím výzkumu, kde se jednalo o slovní úlohy o věku, k tomuto procesu mnohdy nedocházelo, protože zadání je v nich natolik zamotané, že jen těžko tvoří nějaký příběh, který by si děti mohly představit. Zde je problém jiný. Ve slovních úlohách o pohybu se jedná o tak notoricky známá zadání, že postup je mnohdy již natolik zautomatizovaný, že k této fázi nedochází jednoduše proto, že studenti si představu o situaci k úspěšnému vyřešení úlohy tvořit již nepotřebují (i když zřejmě implicitně pracují s určitou již mnohem dříve vytvořenou představou situace úloh o pohybu obecně).

Další rozpor se stále ještě týká procesu uchopování slovní úlohy. Hejný i Novotná podobně pojímají fázi řešitelského procesu, kdy dochází k vytvoření matematického modelu, tedy zápisu podmínek úlohy. Oba tuto fázi zařazují až za proces uchopování úlohy a tedy až za pochopení vztahů v úloze. Při práci s dětmi se ale ukázalo, že nelze zcela jednoznačně říci, že žáci nejdříve pochopí vztahy mezi jednotlivými objekty a teprve potom provádějí toto kódování. Tak je to zpravidla pouze v případě, že jde o legendu algebraickou (tedy rovnici). Při zapisování vztahů do smysluplné rovnice již zpravidla vztahy mezi jednotlivými objekty chápou (i když v tomto typu úloh díky automatizaci postupu ani v tomto okamžiku nemusí k pochopení dojít a volba vzorců a rovnic je pak spíše náhodná). Na rozdíl od toho legendy či kódování obrázkové, tabulkové a slovní bych od algebraické zcela oddělila a stavěla na jinou rovinu, protože podle mých zkušeností slouží tento typ legend žákům spíše pro lepší orientaci ve vztazích, pro jejich snadnější pochopení a jsou tedy něčím, co pochopení vztahů v úloze předchází. Navíc se ukázalo, že legenda obrázková a slovní je mnohdy jen automatickou součástí algoritmu, která už studentům v pochopení nenapomáhá. Na druhou stranu ale souhlasím s tvrzením Novotné, že legenda může sloužit pro uvolnění okamžité paměti, což se ukázalo především v úlohách s dlouhým a zamotaným zadáním (např. úloha 5, viz kapitola o legendách).

V průběhu samotného řešení úlohy se také ukázalo několik sporných bodů. Hejný jednak uvádí, že student obvykle nejdříve identifikuje úlohu jako známou či neznámou. S tím lze souhlasit. Ve výzkumu se ovšem ukázalo, že kromě toho dochází ještě k mezikroku při identifikaci známé úlohy (kterou je právě úloha o pohybu), a sice identifikaci typové či netypové úlohy, a volba strategie se dle toho může lišit. Tzn. pokud student identifikuje úlohu jako známou (úlohu o pohybu), neznamená to ještě nutně (i když ve většině případů ano), že automaticky použije známé řešení. Pokud totiž zjistí, že úloha je sice známá, ale nejedná se o úlohu typovou školní, může volit řešení jiné, jak tomu činí většinou u úloh neznámých, nestandardních.

Hejný dále hovoří o spuštění určitého *skriptu* (algoritmu řešení) na základě identifikace *spouštěcích idiomů* (nebo také *signálů*). K takovému procesu jistě určitým způsobem dochází a jak je popsáno například v kapitole o mentálních reprezentacích, skutečně dochází k jakémusi selektivnímu čtení zadání a zautomatizovanému řešení, které je do určité míry spuštěno na základě určitých bodů v zadání. Hejný ovšem v této souvislosti hovoří o řešení bez pochopení, které vyplývá z formálního poznání úlohy (už samotné označení příkazový idiom zní velmi mechanicky). Ve výzkumu se ale ukázalo, že toto nepochopení nemusí být (a většinou také není) přítomno, naopak studenti většinou již v minulosti do struktury úlohy natolik pronikli, že nemají potřebu do nové úlohy (která má vždy podobnou strukturu) pronikat znovu a znovu, a tak je jejich řešení už natolik automatické, že se zdá, že u něho nepřemýšlejí. Při dotazování studentů se ale mnohdy ukáže, že ač ve chvíli řešení skutečně neprovádějí jednotlivé kroky po hlubokém zamyšlení nad úlohou, struktuře úlohy rozumí.

Hejný navíc upozorňuje, že při zautomatizovaném skriptu spouštěném na základě příkazových idiomů (a tedy formálním poznání) jsou žáci „ztraceni“ pokud jim úlohu zkomplikujeme. To se u většiny studentů nedělo. Pokud zůstala zachována matematická struktura, byla pro ně úloha až překvapivě jednoduchá (viz úloha 2). Pokud byla matematická struktura odlišná, měli někdy studenti problém, který ale spíše vyplýval z prvotního automatického použití známého postupu (neboť pokud ho znají, nemají potřebu vymýšlet jiný). Ovšem pokud student zjistil, že známý postup nelze použít, zdaleka nebyl „ztracen“ a dokázal řešení zadání přizpůsobit. Spuštění zautomatizovaného řešení bych navíc neoznačovala jako spouštění skriptu na základě příkazových idiomů, ale spíše jako aktualizaci dispozičních mentálních reprezentací dříve řešených úloh na základě identifikace známého zdání.

Také u Novotné (2000, s. 37) se můžeme dočíst o dvou možnostech řešení *„...řešení založeno na identifikaci slov nebo slovních spojení v zadání, která jsou pro řešitele signálem pro použití vzorce, postupu, nebo* ***naopak*** *na porozumění struktuře úlohy."* Tyto dva body bych rozhodně nestavěla do opozice, neboť, jak se ukázalo, studenti jsou schopni první způsob řešení použít s hlubokým pochopením.

Důležitým bodem při práci se studenty se ukázala práce se zpožděním jednoho z aktérů v úlohách o pohybu týmž směrem po neuzavřené dráze, kde studenti dělali opakovaně stejnou chybu. Jedním z důvodů, který je možné u dané chyby připustit, je spojení slov *později, déle, za ním* atd. s operací přičítání. Hejný v tomto smyslu (jak je již v textu zmíněno) hovoří o tzv. antisignálu, kdy v úlohách je někdy určité slovo, obvykle spojené s určitou operací, použito tak, že je třeba použít operaci právě opačnou. To může být i tento případ, neboť výše zmíněná slova se skutečně obvykle pojí s operaci přičítání, zatímco zde je nutné naopak zpoždění odečíst. Hejný ovšem v antisignálu opět vidí problém formalismu – tedy děti mají dle něj určitá spojení slov a operací naučená ze školy a vypovídá to o formálním převzetí těchto spojení a nepochopení podstaty úlohy. Zde se ale ukázalo, že se jedná o úplně jiný problém. Práce studentů dle mého názoru popírá formální chápání úloh a potvrzuje skutečnost právě opačnou. Slovo *později* je totiž obvykle spojováno s přičtením nikoliv ve školách (učitelé těžko děti učí, že při použití takového slova mají přičítat), ale žáci vycházejí z běžných životních situací – jak je popsáno již v textu, v běžném životě se setkáváme většinou při označení „později" s nutností přičítat, například „přijdu o 10 minut později" znamená, můj čas bude o 10 minut delší. V úlohách je však toto slovo spojeno s operací opačnou – proto se často vyskytuje chyba, která ale v žádném případě nevypovídá o formalismu. Naopak, využívají-li děti poznatek z běžného života, je jasné, že nemůže jít o pouhou aplikaci postupu naučeného ze školy bez pochopení.

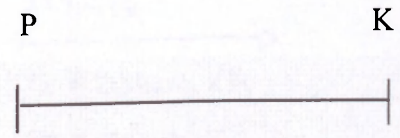
11.2 Mentální reprezentace žáků při řešení úloh

V práci jsem si kladla za cíl sledovat postupy žáků ve vazbě na jejich mentální reprezentace situací prezentovaných v úlohách a mentální reprezentace používané v průběhu řešení a porovnat svá zjištění s tím co je uváděno v literatuře. Otázky byly následující:

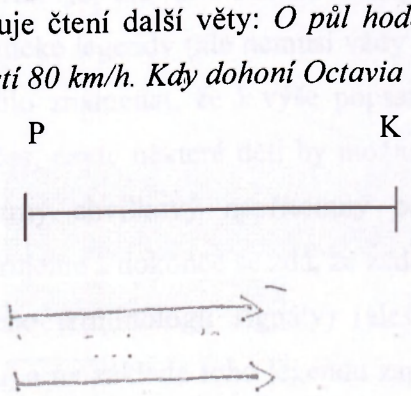
Zda, jak tvrdí Novotná ([illegible] 2004), si žáci skutečně první model zadání konstruují „v hlavě", tedy dochází k mentální reprezentaci (či mentálnímu modelu) slovní úlohy. Jak žáci reprezentují úlohu, kterou právě řeší (resp. její zadání, které vidí poprvé)? Dochází v průběhu řešení k používání již dříve vzniklých reprezentací v jiných úlohách tohoto typu? Jak žáci reprezentují známé schéma (ať už matematické nebo sémantické) úloh o pohybu jako takových? Jak reprezentují učitelkou představená typová řešení? Jak je využívají ve svém řešení? Jak reprezentují v těchto úlohách používané vzorečky? Jak používané modely či reprezentace vypadají? Který kód pravděpodobně používají a jak souvisí způsob zadání slovní úlohy s použitým kódem? Do jaké míry souvisí exteriorizovaná reprezentace (tedy zveřejněná forma mentální reprezentace – zpravidla v legendě) s podobou vnitřní mentální reprezentace a použitým kódem?

Prvním bodem, jehož prostřednictvím můžeme reprezentace sledovat, jsou jejich externí podoby – tedy zpravidla legenda nebo jiný způsob rekapitulace zadání. Jak je již popsáno výše v kapitole o legendách a kódování, žáci užívají zpravidla dva typy legend – slovní a obrázkovou, nebo kombinaci obojího. Odpovídá to tak externím formám reprezentace, které popisuje literatura – tedy verbální (symbolická), kterou zastupuje legenda slovní, a analogová (obrazová), kterou zastupuje legenda obrázková. Co se ale děje „v hlavách“ studentů, když tuto legendu zobrazují? A co se děje, když nezobrazují žádnou (tedy začnou rovnou s výpočty)? Podíváme-li se znovu na popis různého způsobu zapisování legend, vidíme, že častým postupem je zapisování legendy (slovní i obrázkové) po jednotlivých krocích při sériovém uchopování úlohy (tak, jak je vidět u Ivany výše). K jaké mentální reprezentaci zde dochází? Pokusím se zobrazit jednu z možností použití imaginativní mentální reprezentace při zápisu legendy na příkladu Ivany:

Po přečtení věty: *Ve 13 hodin vyjelo z Pardubic ke Kolínu auto Škoda Felicia rychlostí 60 km/h* následuje zápis:

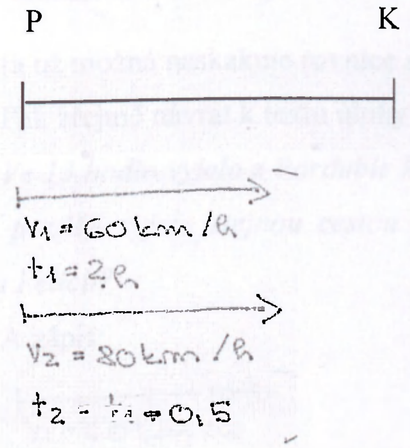


Může dojít k tomu, že si řešitel ve chvíli, kdy dočte 1. větu zadání, představí skutečnou vzdálenost mezi Pardubicemi a Kolínem, nebo její symbolickou podobu (nějakou cestu, silnici, nebo jen přímku, úsečku…i tak se zřejmě stále bude jednat o imaginativní kód). Následuje čtení další věty: *O půl hodiny později vyjelo stejnou cestou auto Škoda Octavia rychlostí 80 km/h. Kdy dohoní Octavia Felicii?* A zápis:



Při imaginativní reprezentaci situace dojde k tomu, že si řešitel představí skutečné pohybující se objekty na představené trase, zřejmě tak, že v mysli manipuluje s jedním vozidlem, které posouvá po dráze a následně za ním po chvíli nechává vyjet druhý objekt a představuje si jejich pohyb, kdy druhý objekt jede rychleji než první a po čase ho dojede. V daném bodě je pak konec cesty obou objektů a v mysli vzniká představa ujetého úseku, na který se ptáme. (Každý si jistě umíme takovou představu vyvolat a introspektivně ji sledovat, zřejmě si budeme představovat spíše symbolické zástupce objektů, než skutečná auta jedoucí po skutečné silnici. Už v hlavě si budeme tvořit spíše obrázky jako zástupce skutečných objektů – alespoň při vlastní introspekci autorky k tomu došlo). Celá tato představa koresponduje s hypotézou funkční ekvivalence představ, která hovoří o tom, že vizuální představivost není se zrakovou percepcí identická, je s ní však funkčně ekvivalentní (Farah; Finke; Kosslyn aj. in Sedláková 2004) – dokážeme s představami pohybovat a představit si je v prostoru.

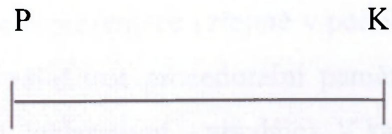
Následuje (nebo k němu dochází už v předchozím kroku) dopsání údajů, takže konečná legenda vypadá takto:



K tomuto procesu může jistě docházet jak při řešení algebraickými, tak (především?) při řešení aritmetickými strategiemi.

Jak je ale zdůrazněno v kapitole o legendách, často dochází k zápisu pouze schématické legendy (ale nemusí vždy být jen schématická) velmi rychle přímo při čtení, což by mohlo znamenat, že k výše popsanému procesu nedojde. Na takový proces je potřeba určitý čas, navíc některé děti by možná k takové představě musely zavřít oči nebo by musel být patrný chvilkový nepřítomný pohled apod. Nic z toho ale u některých studentů nepozorujeme a dokonce se zdá, že zadání čtou selektivně (jen některá, pro ně důležitá slova – v Hejného terminologii signály) (alespoň pokud identifikují úlohu jako typovou – tedy známou) a na základě toho legendu zapisují. Pochopitelně čtou zřejmě i zbytek zadání, spíše je tím myšleno, že v tu chvíli „nedůležitým“ momentům nevěnují pozornost. Stejný proces, jaký je u Ivany vidět, tak může mít i tuto podobu:

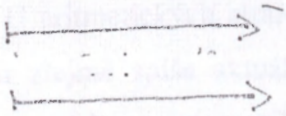
Čteme první větu, resp. spíše ji očima přelétneme: *Ve 13 hodin* ***vyjelo z Pardubic ke Kolínu*** *auto Škoda Felicia rychlostí 60 km/h* (zvýrazňuji momenty, které jsou zřejmě v tu chvíli stěžejní).



V hlavě ale může namísto představy proběhnou *„jo úloha o pohybu, Pardubice – Kolín, takže P,K, tam se kreslí ta dráha.“*

O půl hodiny později vyjelo ***stejnou cestou*** *auto Škoda Octavia rychlostí 80 km/h.* ***Kdy dohoní*** *Octavia Felicii?*

Dojde k identifikaci typu úlohy – stejnou cestou, takže šipky stejným směrem:

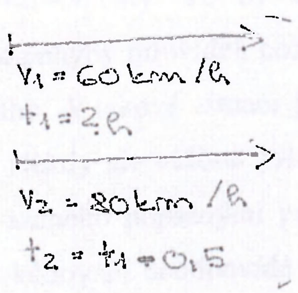


(a už možná naskakuje rovnice $s_1 = s_2$)

Pak zřejmě návrat k textu úlohy a zápisu veličin:

Ve 13 hodin vyjelo z Pardubic ke Kolínu auto Škoda ***Felicia rychlostí 60 km/h. O půl hodiny později*** *vyjelo stejnou cestou auto Škoda* ***Octavia rychlostí 80 km/h. Kdy dohoní*** *Octavia Felicii?*

A zápis:



Pak ale je jasné, že nedojde k imaginativnímu kódování zadání. Přesto vidíme externí reprezentaci v podobě obrázku, tedy analogovou (obrazovou). To odpovídá na jednu z otázek – to, jak vypadá exteriorizovaná forma mentální reprezentace, zřejmě nemusí odpovídat formě mentální reprezentace (alespoň ne té aktuální). Jak ale vypadá v tomto popsaném příkladu mentální reprezentace úlohy? Je dost pravděpodobné, že aktuální reprezentace konkrétní zadané úlohy vůbec neproběhne, resp. lépe řečeno, je zaktualizována nějaká dříve vytvořená reprezentace pro tento typ úloh obecně – tedy je využita tzv. dispoziční reprezentace. Zřejmě se bude jednat o nějakou reprezentaci vytvořenou již při prvním setkání s tímto typem úlohy (a několikrát zpevněnou v průběhu procvičování v hodinách matematiky). Dle mého názoru to dokládají především rychlé až automatické postupy studentů – provádějí jakési zkratky řešení, kde zřejmě proběhne identifikace úlohy a z dispoziční paměti se do operační dostane dříve osvojená reprezentace (zřejmě v podobě nějakého scénáře či schématu – tedy bude se jednat spíše o záležitost procedurální paměti – ovšem v průběhu budou jistě využity i poznatky z paměti deklarativní – viz dále). V kapitole o legendách je to popsáno jako jeden z významů legendy – jedná se pouze o součást zautomatizovaného postupu, kde legenda mohla na začátku sloužit pro představu situace, nyní ale už neslouží. Podobně tomu bude i tam, kde studenti nepoužívají žádnou legendu a rovnou začínají s algebraickým řešením. Pravděpodobně to bude záležitost zejména (nebo výhradně?) studentů používajících algebraické strategie a především záležitost typových úloh.

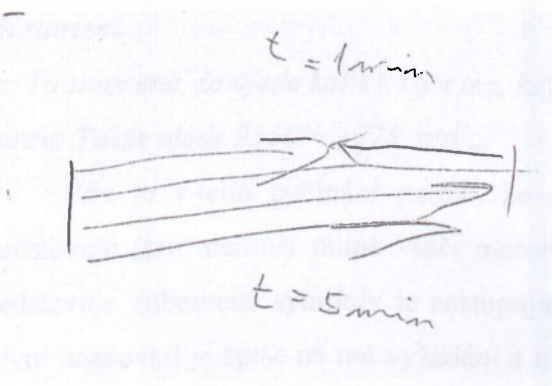
U aritmetických strategií a v jiných než typových úlohách možná i u algebraických strategií zřejmě spíše aktuální reprezentace zadané úlohy probíhá. Student musí určitým způsobem vždy znovu proniknout do struktury úlohy (alespoň v aritmetických strategiích) a nějak ji reprezentovat – nejspíše si ji skutečně představit (tedy použít imaginativní kód), ale není vyloučeno ani použití propozičního kódu, zejména ve smyslu hloubkového kódování významů. Při úvaze totiž často vidíme ono „zamyšlení“ (které u zautomatizovaných postupů není přítomno) v podobě nepřítomného pohledu, obrácení „očí v sloup“, zavření očí atd. Někdy je celá situace doprovázena gesty, pohyby rukou, jakoby si student v mysli skutečně pohyboval objekty. To by vypovídalo o použití imaginativního kódu. Někdy můžeme sledovat pohyby mluvidel, což by vypovídalo zřejmě naopak o propozičním kódu ve smyslu verbálního. V takové situaci je student někdy schopen situaci nám skutečně verbalizovat, popsat. Někdy ale vidíme zvláštní fenomén – student výsledek prostě po chvíli přemýšlení (doprovázeného popsanými projevy) ví a přitom není schopen nijak svůj postup vysvětlit. Takové kódování neodpovídá ani imaginativnímu ani propozičnímu (ve smyslu verbálního) kódu. Lze ho také velmi obtížně sledovat, spíše ho můžeme znát z vlastní introspekce, kdy určité úloze (a nemusí se jednat o oblast matematiky) prostě rozumíme, nějakým způsobem do ní vidíme, známe řešení a nějak jsme na něj museli přijít. Nejsme schopni ho ale ani vysvětlit, ani nakreslit či jinak zobrazit. Většinou použijeme nějaká gesta, která naznačují, že „máme cosi na mysli“, ale nedokážeme to popsat a nakonec konstatujeme „prostě to tak je“, „prostě to vím“. Na použití tohoto způsobu kódování u dětí můžeme jen nepřímo usuzovat, přímo jej pochopitelně sledovat a prokázat nelze. Navíc děti leckdy nakonec (na naši žádost) nějak svou úvahu vysvětlí, i když vysvětlení je spíše kostrbaté a ve chvíli řešení si ho zřejmě v mysli neverbalizují (proto lze usuzovat, na to, že nejde o klasický verbální kód).

Mám-li ukázat jednotlivé typy kódů, které jsem nalezla v řešeních studentů, bude snazší sledovat komplikované úlohy, neboť v typových dochází podle mého názoru u naprosté většiny k použití dispozičního kódu. Tedy vezměme nyní úlohu 4:

Zadání: *Po okruhu dlouhém 2550 m jezdí dva motocykly takovými rychlostmi, že se potkávají každou minutu, jezdí-li proti sobě, a dohánějí každých 5 minut, jezdí-li týmž směrem. Určete jejich rychlosti.*

Řešení Honzy Z.

Zapisuje tuto legendu:



Honza: Takže tady mam proti sobě, tak to je jedna minuta a když to je... tak t je 5 minut. Takže... jestliže mam v = s:t, tak...

Ex: My vlastně chceme zjistit co?

Honza: Rychlost. To znamená, jestliže se dohoněj za 5 minut a je to kruhovej okruh, to znamená, že by měl ujet 2550 plus něco navrch, to je...

Ex: Co navrch?

Honza: No ještě nějaká ta dráha. (Kreslí kruhovou dráhu, po které si krouží tužkou):

Honza: Aby ho dojel, protože musej oba dva startovat a teď mám takhle ten okruh, tak jestliže tady vystartujou a jedou, tak jestliže on ho takhle dožene, tam oni vyrazej oba, tak to musí bejt víc než 2550.

Ex: To ujede ten rychlejší?

Honza: To ujede ten rychlejší, víc než 2550 a tady ten by měl ujet rozhodně míň než on a teď o kolik... asi o polovinu. Ne to je blbost, to určitě ne.

Ex: Tak mi to zkus tady ještě znova nakreslit. Tady je to kolo a tady je ten start. Tak když ten pomalejší, necháš ho dojet třeba sem, dejme tomu, že má nějakou rychlost, že za těch 5 minut dojede třeba do půlky a kam dojede ten druhej?

Honza: Ten druhej za těch 5 minut dojede taky sem, ale už to je, už minimálně jednou projede tím startem.

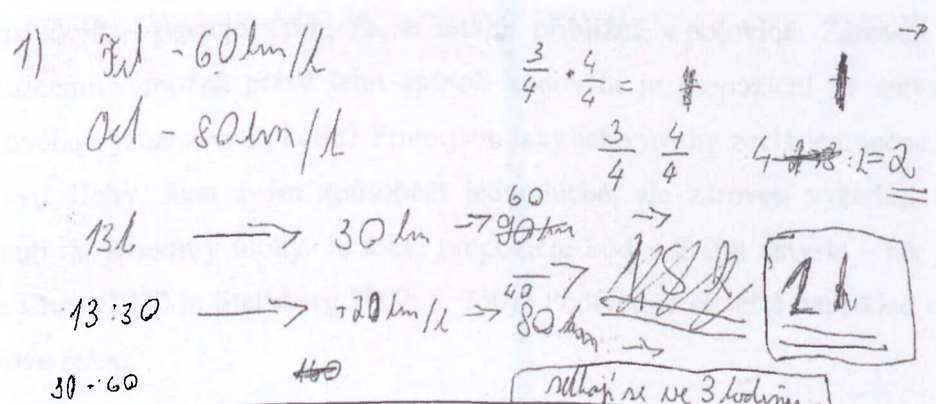
Ex: To znamená, že ujede kolik? Tam ten, když dojede do půlky, tak ujede?

Honza: Takže ujede 2550 + 1225. atd....

Zde je v jeho počínání patrné, že si celou situaci alespoň na symbolické úrovni představuje (tzn. nemusí nutně vidět motorky a kruhovou cestu se všemi detaily, spíše si představuje zobrazené symboly je zastupující, se kterými pohybuje). Také je vidět, že jeho slovní doprovod je spíše na mé vyžádání a nedává sám o sobě příliš smysl. I na základě toho usuzuji, že se jedná o imaginativní kód (i když dle mého názoru se většinou nejedná o čistou podobu ani jednoho).

Zástupce propozičního (ve smyslu verbálního) kódu shledávám zde (i když opět to pochopitelně nelze tvrdit s jistotou). Jedná se o typovou úlohu, ale netypové řešení:

Zadání: *Ve 13 hodin vyjelo z Pardubic ke Kolínu auto Škoda Felicia rychlostí 60 km/h. O půl hodiny později vyjelo stejnou cestou auto Škoda Octavia rychlostí 80 km/h. Kdy dohoní Octavia Felicii?*



Student použil metodu pokus-omyl, jak vyplynulo i z jeho vysvětlení postupu. Protože se jedná o záznam písemné práce, nebylo možné sledovat celý proces řešení. Je pravděpodobné, že vychází z vědomého faktu, který zřejmě přijal pomocí propozičního kódu – rychlost je udávána v km/h, tzn. Felície ujede za hodinu 60 a Octavia 80 km. Ve 13 hodin vyjela jen Felície, za půl hodiny ujede 60:2, tj. 30 a Octavia v té době neujela ještě nic, za dalších půl hodiny ujede Felície dalších 30 a Octavia 40… atd. Tam asi k imaginaci nedochází (i když možná ano, ale neslouží asi k samotnému řešení). Vpravo nahoře je patrný ještě jeden pokus o řešení. Student nebyl schopen ho zpětně vysvětlit. Mohlo se jednat o náhodné operace s čísly – násobí tam rychlosti, které převedl do zlomku – rychlost prvního vozidla představuje ¾ rychlosti druhého – proč je ale násobí nevím. Pod tím s nimi chtěl zřejmě provést jinou operaci. Skutečně to připomíná náhodné operace s čísly.

S propozičním kódováním zřejmě téměř ve všech úlohách pracuje Michal, i když jeho reprezentace jsou diskutabilní, bude se jednat spíše o smíšené formy – tedy mentální modely. Například v úloze 3: *Z míst A a B vyšli současně proti sobě dva chodci. První došel z A do B za 4 hodiny. Druhý došel z B do A za 3,5 hodiny. Za jak dlouho se potkali?*

Po přečtení ihned odpovídá:
Michal: Za dvě hodiny.
Ex: Proč myslíš, že za 2 hodiny?
Michal: Ne počkat, tři čtvrtě hodiny, za 3h a 45 minut.
Ex: No za 3 hodiny a 45 minut se potkat nemůžou, protože za tu dobu to tenhle ujde už celý.
Michal: 1,875.
Ex: Jak si na to přišel?
Michal: Vzal jsem si polovinu toho času, co šli a zprůměrňoval jsem to.

Tam skutečně musí docházet ke zvláštnímu způsobu kódování. Zřejmě si nepředstavuje skutečný pohyb objektů (alespoň to tak nevypadá), ale k určité představě přece jen musí dojít – pracuje s tím, že se setkají přibližně v polovině. Zároveň určitě pracuje s propozicemi… možná právě jeho způsob kódování je propoziční ve smyslu skutečného hloubkového významového kódu? Proto jsou taky jeho úvahy zcela jedinečné, originální pro každý typ úlohy. Jsou svým způsobem jednoduché, ale zároveň vyžadují velmi hluboké proniknutí do struktury úlohy. Je tohle propoziční kód v širším smyslu - tak jak ho uvádějí Clark a Chas (1972 in Sternberg 2002, s. 250)? Podívejme se ještě například na tuto úlohu a Michalovo řešení:

Zadání: *V 5 hodin vyšel turista z noclehárny na delší cestu. Za hodinu ušel 5 km. Současně s ním vyjel z noclehárny stejným směrem cyklista rychlostí 17 km/h. Za jak dlouho budou od sebe vzdáleni 20 km?*

Takhle vypadá jeho řešení:

turista – 5 km/h

ciklista – 17 km/h

12 km/h ← oddalují se rychlostí

$\frac{60}{12} = 5$ minut

$5 \cdot 8 = 40$ min

Michal: Takže bych si rozdělil 1 hodinu na 12 částí, takže po pěti minutách, takže půjde hodinu 40 minut od noclehárny.

Ex: No přesně tak, ale ještě mi to vysvětli. Ty si udělal rozdíl těch rychlostí...

Michal: No rozdíl rychlostí, takže oddalujou se rychlostí 12 km/h za hodinu, když si rozdělim na 12 částí...

Ex: Proč na 12 částí?

Michal: Abych věděl, za jak dlouho ujde 1 km. Takže za 5 minut ujde 1 km a já potřebuju 8 km, ta to vynásobim osmi.

Počítá se *skutečnou rychlostí oddalování* – to je výborná metoda – počítá opět automaticky s tím, že oba jsou stále v pohybu, proto počítá skutečnou rychlost oddalování, podobně jako v příkladu 1 z písemky *skutečný čas přibližování*. Tím ví, že 12 km od sebe budou vzdáleni za hodinu. Takže potřebuje ještě spočítat, za jak dlouho se od sebe vzdálí zbývajících 8 km. Proto rozděluje hodinu na 12 dílů (když za hodinu se vzdálí 12 km, 1 km se vzdálí za 60/12 minut) a to pak násobí zbývajícími osmi kilometry. I zde – hluboké poznání struktury je zřejmé. O imaginaci se zřejmě nejedná. Může jít tedy o hloubkový propoziční kód.

Zbývá ještě odpovědět na otázku, jak vypadá reprezentace původních předložených typových řešení, které jsou později využívány v řešení úloh jako dispoziční reprezentace. Je velmi pravděpodobné, že budou reprezentace vypadat u každého řešitele jinak a budou podobné aktuálním reprezentacím, které byly právě popsány. Zřejmě záleží na celkově větší inklinaci každého konkrétního studenta k jednomu či druhému (nebo třetímu – hloubkovému) kódování.

Poslední nezodpovězenou otázkou je reprezentace zvláštního fenoménu úloh – vzorečků. I ta byla v podstatě již zodpovězena. Jak bylo vidět v kapitole o porozumění algebraické strategii, někteří studenti reprezentují vzorečky (a obzvláště vzoreček $s = v.t$) propozičním kódem v užším smyslu – tedy přijímají ho jako danou informaci, která se dá pouze aplikovat, nikoliv logicky zdůvodnit či jakkoliv přetvářet. Mohli jsme ale vidět i imaginativní reprezentaci vzorečků (pak se jednalo spíše o rovnice drah), kde studenti rovnici použili na základě skutečné (či symbolické) představy stejných ujetých drah či dvou ujetých drah, které po střetnutí tvoří celou dráhu. V příslušné kapitole ale zároveň poukazuji na to, že student sice někdy používá vzoreček automaticky – (kód je propoziční v užším slova smyslu), ale zároveň má-li řešit zcela praktickou úlohu (jen jednoduchou na vztah dráhy, rychlosti a času), principu vzorečku rozumí, vidí do jeho struktury alespoň na implicitní úrovni. A zde se právě může opět jednat o propoziční kód v širší smyslu.

V praxi nelze při řešení studentů zcela striktně oddělit, jak řešitel reprezentuje jednotlivé části úlohy, jak se liší reprezentace zadání, vzorečků, rovnic apod. Stejně tak nelze většinou plně sledovat, kde vytváří reprezentace nové a kde využívá již dříve vytvořené reprezentace dispoziční. Ve skutečnosti se bude zřejmě v průběhu celého řešení jednat o směsici aktuálních i dispozičních reprezentací, které jsou vtahovány zpět do operační paměti jak z paměti procedurální (v podobě naučených postupů), tak deklarativní (v podobě naučených vzorečků a fakt).

Závěr

Díky sledování rozličných řešení studentů, rozhovorům nad jejich postupy a pokusům o interpretace jejich myšlenkových procesů a reprezentací, je možné souhrnně hovořit o několika poznatcích, které práce přinesla.

Oblast strategií řešení a porozumění úloze

Slovní úlohy o pohybu tvoří skutečně specifickou skupinu slovních úloh, která s sebou obvykle přináší specifický (a pro jiný typ úloh nepoužitelný) způsob řešení. Studenti nejčastěji využívají ke svému řešení vzorec vztahu dráhy, rychlosti a času ($s = v.t$) a princip rovnosti či součtu drah ($s_1 = s_2$ nebo $s_1 + s_2 = s$) a to v naprosté většině případů, jak v typových školních úlohách, tak v netradičních nebo komplikovaných úlohách. V několika případech se ale objevují i řešení, která využívají vztah dráhy, rychlosti a času jiným než tímto způsobem, nebo se objevují zcela jiné strategie řešení (úvaha, řešení metodou pokus-omyl a systematický pokus), což dokládá, že úlohy lze řešit i jinak než použitím fyzikálního vzorce a děti jsou toho schopny.

Obecně používají studenti jiné než klasické algebraické strategie jen velmi málo. Pokud ano, jedná se o jedince, kteří používají úvahy i v typových úlohách. Ale i ti se v některých komplikovaných úlohách uchylují k použití algebry, svých úvah se tedy nedrží striktně. Na rozdíl od toho studenti, kteří v typových úlohách používají algebru, se jí striktně drží i v komplikovaných úlohách. Jediné úlohy, kde se úvahy vyskytly u dětí používajících algebru, byla úloha 3, kde je aplikace algebry neobvyklá a velmi obtížná, a v úloze 5 tam, pokud studenti přišli na to, že mohou pouze jednoduše zjistit, zda se auta potkají v Plzni, aniž by museli zjišťovat přesné místo setkání (pokud ho zjišťovali, opět vždy pomocí algebry). Tedy řečeno jinak – použití úvah v typových úlohách neznamená stoprocentní použití úvah v komplikovaných úlohách. Použití algebraické strategie v typových úlohách ale znamená téměř stoprocentní užití v komplikovaných úlohách tam, kde je to možné (úlohu 3 mezi ně nelze plně započítat). Co může zůstat otázkou je, jak úspěšné je použití jednotlivých strategií, protože to zde není (vzhledem k intervenci experimentátora) možné s jistotou říci.

Ve většině případů má řešení úloh o pohybu zcela přesný sled (s drobnými odchylkami), které se dá shrnout takto: přečtení zadání (v celku, nebo fragmentovaně – s častější fragmentací textu) a zápis podmínek do typické obrázkové legendy doprovázené symboly či slovy, která může mít, jak ukazuje kapitola 7, pro studenty různý význam a může značit různou podobu mentální reprezentace. Následuje vyhledání a zapsání příslušné rovnice drah a posléze dosazení veličin v a t za veličiny s (přičemž v průběhu nebo ještě před tím musí dojít k vyjádření veličin číselně – pokud jsou známy, nebo pomocí neznámých a jejich vzájemného vztahu, pokud je vyjádřen). Dalším krokem je dosazení takto vyjádřených známých a neznámých za veličiny v rovnici a matematický výpočet. Zkouška zpravidla prováděna není. U některých studentů (ale zdaleka ne vždy) dochází ještě k návratu ke kontextu úlohy.

Ve všech krocích se objevovaly opakující se chyby. Obrázková legenda byla zpravidla sestavena správně a vystihovala situaci úlohy (s větší či menší věrností). Ve slovní legendě nebo slovním a symbolickém doprovodu legendy obrázkové se objevovaly problémy s převody jednotek a naprosto typická chyba s přičítáním zpoždění aktéra v úlohách o pohybu týmž směrem po neuzavřené dráze (viz kapitola 7.2.2). V kroku hledání správné rovnice drah (resp. dle mého názoru hledání sjednocujícího pohledu na úlohu) byla nejčastější chybou záměna dvou základních rovnic, plynoucí z nejrůznějších důvodů, jak je popsáno v kapitole 8.1. V dalším postupu bylo možné sledovat chyby početního rázu, nebo chyby při návratu do kontextu úlohy, kdy student odpověděl na jinou otázku, než byla položena, nebo nesprávně přiřadil vypočtenou veličinu k původnímu zadání. Zjištěné opakující se chyby plně korespondují s chybami, které se vyskytovaly v jiném zkoumaném vzorku (Schöffelová, 2004/2005 a Kropáčková 2003/2004) , tedy nejedná se o specifikum dané třídy.

Ukázalo se, že všeobecně obtížnější jsou pro studenty slovní úlohy o pohybu týmž směrem po uzavřené dráze, než úlohy o pohybu protisměrném po neuzavřené dráze, a to především díky nutnosti pracovat s rozdílným časem objektů, který je vyjádřen jejich vzájemným vztahem. Kromě toho se protisměrný pohyb ukončený místem setkání ukazuje jako lépe představitelný než pohyb po jedné dráze, který nemá jasně ohraničený konec. Úlohy s komplikovanou sémantickou strukturou, které lze řešit klasickým matematickým postupem (neboť matematická struktura zůstává víceméně stejná), si studenti většinou automaticky reprezentují jako typovou úlohu a řešení je tak pro ně poměrně snadné. Větší problém vzniká při změně matematické struktury, kde není dodržena pro daný typ úlohy typická rovnice drah (úlohy 4 a 6), nebo v úlohách odlišujících se od typových matematicky i sémanticky (úloha 3).

Oblast mentálních reprezentací

Ze sledování zápisu legendy u studentů se ukázalo, že podoba exteriorizované mentální reprezentace zřejmě nemusí odpovídat formě mentální reprezentace.

U studentů bylo možné pozorovat několik způsobů kódování, které korespondují s mentálními reprezentace, jak je popisuje literatura. Při mentální reprezentaci textu úlohy a následném řešení studenti používají imaginativní i propoziční kód (ve smyslu verbálního kódování). Kromě toho bylo možné z pozorování usuzovat i na propoziční kód ve smyslu hloubkového kódování významů. Při řešení vstupují do hry také dispoziční (tedy již dříve vytvořené) mentální reprezentace.

V praxi nelze při řešení studentů zcela striktně oddělit, jak řešitel reprezentuje jednotlivé části úlohy, jak se liší reprezentace zadání, vzorečků, rovnic apod. Stejně tak nelze většinou plně sledovat, kde vytváří reprezentace nové a kde využívá již dříve vytvořené reprezentace dispoziční. Ve skutečnosti se bude zřejmě v průběhu celého řešení jednat o směsici aktuálních i dispozičních reprezentací, které jsou vtahovány zpět do operační paměti jak z paměti procedurální (v podobě naučených postupů), tak deklarativní (v podobě naučených vzorečků a fakt).

Résumé

Title: Understanding the Word Problems on Motion

The topic of the thesis was selected based on the long term interests shown by the author in course of her studies. The thesis is a follow up of previous research activities that focused on word problems and the use of experience gathered from them. The whole issue of word problems on motion was selected as the example of typical problems, which children have to face at school, and therefore, they acquire more or less a specific procedure of solving them (as established in prior research). They provide option to draw comparison of their type resemblance and comprehensive variants and of the pupils' capability to implement the acquired procedures when the problem is getting more difficult.

This was one of the objectives of the thesis. Another objective was to monitor the specifics of this type of word problems and also the related specific solutions including specific errors the pupils make when solving these types of problems. Furthermore, the objectives include monitoring and analyzing the different pupils' procedures from the qualitative point of view and the efforts to describe their mental representations of the problems and train of thoughts when solving them.

The work is divided in two basic parts. The first part is mostly theoretical, containing quotations and theoretical basics excerpted during the study of literature on word problems discussed from the didactics and mathematics point of view. There is a part where concepts of three representatives of Czech authors are compared. This part explains the terminology and theories used in the empirical part, which are then compared with the results of the research in the discussion. The second – empiric – part is structured in several chapters. The description of the research sample, research process and used material is followed by the detailed description and analysis of tackling word problems and the ways thereof, including specifics of relevant types of problems, descriptions and possible explanations of specific errors. The next part deals with the solution strategies, both typical and non-typical procedures within the given class and with the description of different ways of understanding the strategies recorded within the children. The strategies used in case of typical and comprehensive problems are compared in the last chapter. One of the chapters also describes the specifics of problems, which were used in the research and the impact thereof on the solutions.

Observations made in course of the research are then compared with theory in the discussion; the first part compares the aspect of solutions (strategies and understanding) with the information in published works and the second one deals mainly with mental

representations of pupils when solving problems, which is then also compared with the basic works published on this issue.

The research of the strategies and procedures provided the following results:

When solving the word problems on motion, the majority of pupils uses typical algebraic solutions applying the physics formula for the relation between path, velocity and time with the exactly given order both in typical and comprehensive problems.

Pupils using different types of strategy use such strategies also for typical problems. However, even these pupils use algebra when solving comprehensive problems, so they do not follow strictly their own procedures. On contrary, pupils using algebra for typical problems use it also for solving comprehensive problems.

Problems with a difficult semantic structure, which could be solved using the common mathematical procedure (as the mathematical structure remains more or less the same), are automatically visualised by the students as a typical problem, and therefore the solution thereof is for them quite easy. On the other hand, changing the mathematical structure or solving problems with different mathematical and semantic structure proves to be more difficult. The reason for the pupils to use the typical solutions – which may look the same at first sight – may lie in the various decree of understanding.

Pupils' solutions contain often the same errors that were typical only for these word problems and that could be caused by several difficult aspects of the semantics of word problems on motion.

Concerning the mental representations of pupils the following conclusion were reached:

Monitoring the records of keys used by the pupils showed that the form of external representation is not necessary compliant with form of mental representation.

There were several ways of coding, which correspond with the mental representations, as described in literature. When mentally representing the text of the problem and solving it, pupils use imaginative and proposition code (in sense of the verbal coding). Furthermore, the monitoring provided hints to use of proposition code in sense of the deep sense coding. The solution is also influenced by disposition (already formed) mental representations.

In the real life, it is impossible to separate strictly the manner the person solving the problem represents the individual parts of the problem and how the representation of the problems, equations and formulas differs, etc. Usually, it is also impossible to monitor, where new representations are used and where the already formed disposition representations are applied. Actually, when solving a problem the current and disposition representations will mix together and then they will be applied again in the operation memory extracted form both the procedural memory (in form of learned procedures) and declarative memory (in form of learned formulas and facts).

Seznam literatury

BĚLOUN, F. a kol. *Sbírka úloh z matematiky pro základní školu.* Praha: SPN, 1992. ISBN 80-04-26365-8

BUŠEK, I.; KUBÍNOVÁ, M.; NOVOTNÁ, J. *Matematika pro 9. ročník ZŠ. Sbírka úloh z matematiky.* Praha: Prométheus, 1995. ISBN 80-7196-132-9

ČÁP, J.; MAREŠ, J. *Psychologie pro učitele.* Praha: Portál, 2001. ISBN 80-7178-463-X

CZUDEK P.; HAVLICOVÁ K.; HOZOVÁ L.; A KOL. *Slovní úlohy řešené rovnicemi pro žáky a učitele ZŠ, studenty a profesory SŠ.* Praha: sdružení podnikatelů HAV, 1998.

FRÝZEK, M.; MÜLLEROVÁ, J. *Sbírka úloh z matematiky pro bystré hlavy.* Praha: Fortuna, 1992. ISBN 80-85298-51-1

HEJNÝ, M. *Zmocňování se slovní úlohy.* Pedagogika. 1995, Č. XLV, s. 386 - 399. ISSN 0031-3815

HEJNÝ, M.; KUŘINA, F. *Konstruktivní přístupy k vyučování matematice.* Matematika – fyzika – informatika. Praha: Prométheus, 1997/1998, č.7, s.385 – 395. ISSN 1210-1761

HEJNÝ, M.; KUŘINA, F. *Dítě, škola a matematika.* Praha: Portál, 2001. ISBN 80-7178-581-4

HEJNÝ, M. *Anatómia slovnej úlohy.* Konference Ružomberok. 2003, článok12.

HEJNÝ, M.; NOVOTNÁ, J.; STEHLÍKOVÁ, N. *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky 2. díl.* Praha: Univerzita Karlova v Praze – pedagogická fakulta, 2004. ISBN 80-7290-189-3 (2.sv)

KAFKOVÁ M. *Slovní úlohy o pohybu,* Praha, 2004. 90 s., 54 s. příl. Diplomová práce. Univerzita Karlova v Praze. Pedagogická fakulta. Katedra matematiky a didaktiky matematiky. Vedoucí práce M. Hejný.

KROPÁČKOVÁ, L. *Řešení slovních úloh se zaměřením na slovní úlohy o pohybu* [online]. Praha: 2004/2005. Univerzita Karlova. Pedagogická fakulta. Katedra pedagogické a školní psychologie. [cit. 2008-02-12]. Dostupné na WWW: http://userweb.pedf.cuni.cz/kpsp/archivvyzkumu/kpsp04-05/prace/Kropackova.pdf

KUŘINA, F. *Umění vidět v matematice.* Praha: SPN, 1989. ISBN 80-04-23753-3

NOVOTNÁ, J. *Zpracování informací při řešení slovních úloh.* In *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky 2. díl.* Praha: Univerzita Karlova v Praze – pedagogická fakulta, 2004, s. 367-378. ISBN 80-7290-189-3 (2.sv)

NOVOTNÁ, J. *Analýza řešení slovních úloh.* Praha: Pedf UK, 2000, ISBN 80-7290-011-0

ODVÁRKO, O.; CALDA, E.; ŠEDIVÝ, J.; ŽIDEK, S. *Metody řešení matematických úloh.* Praha: SPN, 1990. ISBN 80-04-20434-1

RENDL, M. *Poznámky ke struktuře a sémantice slovních úloh: od 4. do 6. třídy* [online]. Praha: Univerzita Karlova. Pedagogická fakulta. Katedra pedagogické a školní psychologie. [cit. 2008-02-17]. Dostupné na WWW: http://userweb.pedf.cuni.cz/kpsp/etnografie/vyzkum/6/rendl.pdf

RENDL, M. Nepublikované poznámky a ústní sdělení k práci KROPÁČKOVÉ, L. *Řešení slovních úloh se zaměřením na slovní úlohy o pohybu* [online]. Praha: 2004/2005. Univerzita Karlova. Pedagogická fakulta. Katedra pedagogické a školní psychologie. [cit. 2008-02-12]. Dostupné na WWW: http://userweb.pedf.cuni.cz/kpsp/archivvyzkumu/kpsp04-05/prace/Kropackova.pdf.

SEDLÁKOVÁ, M. Vybrané kapitoly z kognitivní psychologie. Mentální reprezentace a mentální modely. Praha: Grada, 2004. ISBN 80-247-0375-0

SEMADENI, Z. Developing children's understanding of verbal arithmetical problems. In M. Hejný & J. Novotná (Eds.), Proceedings of the International Symposium on Elementary Math Teaching (pp. 27-33). Praha, Faculty of Education, Charles University, 1995

SCHÖFFELOVÁ, M. *Porozumění slovním úlohám o věku.* Praha: 2006. Postupová práce Praha: Univerzita Karlova. Pedagogická fakulta. Katedra pedagogické a školní psychologie. Vedoucí práce M. Rendl

SCHÖFFELOVÁ, M. *Strategie řešení slovních úloh (u žáků víceletého gymnázia).* [online]. Praha: 2005/2006. Univerzita Karlova. Pedagogická fakulta. Katedra pedagogické a školní psychologie. [cit. 2007-09-05]. Dostupné na WWW: http://userweb.pedf.cuni.cz/kpsp/archivvyzkumu/kpsp05-06/prace/Schoffelova.pdf

STERNBERG, R.J. *Kognitivní psychologie.* Praha: Portál, 2002. ISBN80-7178-376-5

STRNADOVÁ, M. *Slovní úlohy s antisignálem*, Praha, 2003. 111 s. Diplomová práce. Univerzita Karlova v Praze. Pedagogická fakulta. Katedra matematiky a didaktiky matematiky. Vedoucí práce M. Hejný.

TEICHMAN, V. *Vazby informační společnosti k psychologii (pokus o syntézu problematiky symbolických operací a informačních procesů, a nastínění implikací v současné informační společnosti)*, Praha, 2006. 147 s. Diplomová práce. Univerzita Karlova v Praze. Filozofická fakulta. Katedra psychologie. Vedoucí práce P. Uhlář

TICHÁ, M. *K strategiím řešení úloh v učení žáků matematice na Základní škole.* Praha: 1982. 130 s., 14 s. příl. Kandidátská disertační práce. Univerzita Karlova. Pedagogická fakulta. Katedra matematiky. Školitel J. Hortek

TREJBAL, J. *Sbírka zajímavých úloh z matematiky*. Praha: Prométheus, 1996. ISBN 80-7196-084-5

TRÁVNÍČEK, S. *Slovní úlohy o pohybu*. Matematika – fyzika – informatika. Praha: Prométheus, 2004/2005, č.14, s.449 – 462. ISSN 1210-1761

Příloha 1 - Záznam pozorování hodiny 10.9.2007

6. vyučovací hodiny – matematika

Učitelka vešla do třídy společně se mnou. Ve třídě byla jen polovina žáků, protože na tuto hodinu jsou půlení a druhá polovina má Angličtinu. Nejdříve řekla studentům, aby si sedli do lavic po jednom. Představila mě a seznámila je s tím, proč jsem do školy přišla. (Studenti ale byli na můj příchod předem připraveni a věděli přibližně, co budu v jejich třídě dělat). Poté dala slovo mě. Studentům jsem se představila a seznámila jsem je s tím, oč se přesně bude jednat (tedy, že dostanou jednu písemnou práci a poté se mnou bude každý z nich individuálně pracovat na slovních úlohách). Následně jsem je seznámila s dnešní písemnou prací. Byli upozorněni, že písemná práce není známkovaná a učitelka ani nebude s jejich výsledky seznámena, že nemusí uvádět celé jméno a pokud chtějí, křestní jméno si mohou vymyslet. Poté jsem poprosila jednoho ze studentů, aby zadání rozdal. Dostali k počítání 3 slovní úlohy:

7. **Za chodcem jedoucím průměrnou rychlostí 5 km/h vyjel z téhož místa o 3 hodiny později cyklista průměrnou rychlostí 20 km/h. Za jak dlouho dohoní cyklista chodce?**

8. **Z míst A a B, vzdálených od sebe 210 km, vyjely současně proti sobě 2 kamióny rychlostmi 40 km/h a 30 km/h. Kdy a kde se potkají?**

9. **Z města A do města B vyjelo nákladní auto průměrnou rychlostí 30 km/h. Současně s ním vyjel i autobus, který měl průměrnou rychlost 40 km/h a který přijel do města B o 1 h 15 min dříve než nákladní auto. Jaká je vzdálenost mezi oběma městy?**

Písemná práce trvala cca 25 minut. Po sebrání písemných prací učitelka okomentovala celou situaci. Pochválila studenty, že nezapomněli, jak se tento typ úloh počítá a upozornila je, že si ještě musí dát pozor na početní chyby a chyby z nepozornosti. Dále uvedla několik příkladů chyb, které v písemných pracích viděla v průběhu psaní:

U: *„Když máme někde, že vyjel o 3 hodiny POZDĚJI, ty 3 hodiny musíme co??? ODEČÍST, NE PŘIČÍST.*[9]

[9] Což není zcela přesné. Učitelka má zřejmě na mysli, pokud je v zadání, že jeden aktér vyjel o dvě hodiny později, musí se od jeho času odečíst 2. Student ale také může zvolit variantu přičtení tohoto rozdílu k času

Učitelka: Nikol, v čem se udává rychlost?

Nikol: V km/h.

U: A v čem se udává čas?

N: Vv hodinách.

U: Tak co tam těch tvých 75???[10]

U: No a pak někteří dojeli na zlomkách, že jo Vendulo, Dominik na rovnici...hrůza. Takže vzoreček známe, ale utekla nám logika!!!"

Dále jsem učitelku požádala, zda může úlohy společně se studenty vyřešit u tabule. Vyvolala vždy jednoho žáka.

Na první úlohu vyvolala žákyni, která ji měla v písemné práci špatně. Požádala ji, ať zapisuje a vše nahlas komentuje. Žákyně zapsala na tabuli:

$V_1 = 5$ km/h $\quad v_2 = 20$ km/h

Vendula: *„Oni maj vlastně rozdílnej čas, takže $t_2 = t_1 + 3$".*

Učitelka: *„No počkej, kdo jel... nakresli si obrázek, dyť jsme byli zvyklí si kreslit obrázky"*

V: *„Takže"*

Nakreslila:

V: *„Ten chodec šel, ten prostě šel."*

U: *„Takže kdo jel dýl?"*

V: *„Chodec."*

U: *„Tak jak je to s tím t_1?"*

V: *„$t_2 + 3 = t_1$ a dyť jsem to říkala."*

U: *„Dobře, tak se omlouvám*[11]*. Tak piš, co se teď bude dít?"*

---

druhého aktéra (a já osobně to tak pro větší pohodlnost při počítání dělám), tedy není nutné vždy čas odečíst. Navíc může v zadání být také, že jeden z aktérů dorazil na místo o 2 hodiny později, kde se pak naopak čas musí přičíst. Takovýmto zdůrazňování postupu, si mohou žáci zafixovat slovo později v takovýchto úlohách jako signál znamenající odečítání tohoto času od jednoho z aktérů. Pokud je ale v zadání případ druhý, tedy, že jeden z aktérů dorazil později na místo, může toto slovo působit u studentů jako antisignál (viz Hejný) a mohou pak automaticky odečítat bez logického uchopení zadání.

[10] V úloze, kterou má učitelka na mysli, je skutečně rychlost udána v km/h. Je též pravda, že se rychlost zpravidla udává v km/h, stejně tak čas se někdy udává v hodinách (ale v zadáních těchto úloh také velice často v minutách nebo v hodinách a minutách, jako i v této úloze, a je nutno čas na hodiny teprve převést, což bývá jeden z problémů a ukázalo se to i v této písemné práci). Nelze to ovšem takto zobecnit. Každá úloha se dá počítat jak v km/h a hodinách, tak v m/min a minutách a záleží spíše na řešiteli, co je pro něj jednodušší (zřejmě hlavně z hlediska převodu). Učitelé jistě preferují běžný způsob, tedy udávání rychlosti v km/h a času v hodinách s desetinným místem či zlomkem. Zpravidla bude zřejmě toto řešení také „elegantnější", ovšem ne vždy (jak se ukázalo v postupové práci a v práci na klinický semestr) je „elegantní" řešení také jednodušší pro žáky a mnohdy může být pohodlnější udávat rychlost v m/min a čas v minutách, obzvláště, je-li některý údaj v těchto jednotkách udán již v zadání, jako například v úloze 4 ze zadání individuální práce.

V: „*s mají stejnou, takže $s_1 = s_2$*“ [12]

U: „*A co to znamená dál?*“

Žákyně píše vzorec na tabuli a pod ním dosazuje:

$v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_2$ $t_1 = t_2 + 3h$

V: „*Takže to je vlastně*“ (zapisuje):

$5 \cdot (t_2 + 3) = 20\,t_2$

U: „*Tak vyřeš, no obyčejná rovnice*“

$5t_2 + 15 = 20t_2$ /- 5t2

$15 = 15t_2$ /: 15

$t_2 = 1$

U: „*A co řekneš?*“

V: „*Že t_2 = jedna hodina.*“

U: „*No t_2 = jedna hodina a co řekneš? Podívej se na otázku?*“

V: „*jo...*“(čte zadání) „*Cyklista dohoní chodce za 1 hodinu.*“

Na druhou úlohu vyvolala Adama.

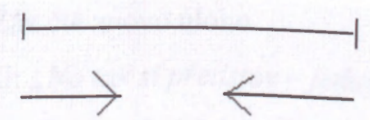
Učitelka: „*Adame tys to měl dobře?*“ (pochybovačně)

A: „*No já nevim, asi myslím, že jo.*“

U: „*No to nevadí, pojď k tabuli*“

Žák začal sám od sebe obrázkem[13]

210 km



40 km/h 30 km/h

U: „*Mě by k tomu sedlo, kdybych věděla, co to je za čísla*“

Žák zapsal k rychlostem *Pr.* jako průměrná rychlost.

U: „*No tak jsme se to neučili*“

U: „*Co je to 40 a 30*“

---

[11] Myslím, že žákyně mohla na začátku vyjádření času myslet skutečně správně, ale dostala se do problému s označením časů. Myslím, že zde je dobrá ukázka toho, jak je školské označení čísly ($t_{1,2}$...) matoucí. Zde se v tomto označení ztratila jak žákyně tak učitelka. Žákyně na začátku řekl vztah obráceně, ale na konci tohoto dialogu si tím nebyl nikdo jist. Možná, že s označení např. v_{ch} a v_c by se tento problém odstranil.

[12] Skutečně ví, že dráhy budou stejné. nebo jen používá tento vzorec ve spojení s úlohou o pohybu za sebou? To bychom měli zjistit při individuální práci. Učitelka se jí na porozumění neptá.

[13] Může to být důsledek toho, že po žákyni řešící minulou úlohu ho chtěla, tak předpokládá, že ho učitelka bude chtít i po ní. Může ho ale také skutečně potřebovat. Nebo také může být jen zvyklý ho vždy kreslit, bez toho. aby mu byl nějakou oporou.

A: *„Rychlost toho náklaďáku."* Dopsal k rychlostem v_1 a v_2

U: *„No a nebo by sis mohl i označit v náklaďáku klidně, to je jedno."*

Dále na tabuli zapsal: $s = s_1 + s_2$

U: *„No vidíš, paráda, ten vzorec zvládáš úplně bezvadně."*

Dále zapisuje:

$210 = v_1 \,.\, t_1 + v_2 \,.\, t_2$

$210 = 40. \qquad +$

U: *„Víš jak dlouho jel?"*

A: *„Nevím."*

U: *„No tak tam tu proměnnou nechej."*

Zapsal:

$210 = 40 \,.\, t_1 + 30 \,.\, t_2$

U: *„Co to před tebou je ten poslední řádek?"*

Ukázal na tabuli.

U: *„A kolik je tam neznámých?"*

A: *„Dvě"*

U: *„A ty umíš takovou rovnici řešit? Neumíš, musíš se té jedné proměnné zbavit."*

Žák jednu proměnnou smazal a nechal místo ní prázdné místo. Ostatní žíci se začali smát. Učitelka je uklidňuje.

U: *„Jaký je mezi nimi vztah?"*

Žák čte znovu úlohu.

U: *„No tak si představ – jedou najednou a pak se... oni se nesrazej, ani zabrzděn, ale v jednu chvíli se potkaj."* (vše demonstruje pohybem rukou proti sobě)

A: *„Takže ty časy jsou stejný."*

U: *„Tak tu rovnici přepiš tak, aby měla jen jednu proměnnou."*

$210 = 40\, t_2 + 30\, t_2$

$210 = 70\, t_2$ /: 70

$t_2 = 3h$

U: *„Jak dlouho tedy jel ten druhý?"*

A: *„3 hodiny"*

U: *„A ten první"*

A: „Taky 3 hodiny."

U: „Otázka zní kdy a kde se potkají. Dosadím do $s = s_1 + s_2$"

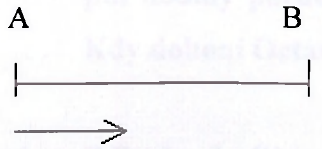
Dosadil: s = 40 + 30 (sčítá rychlosti) nakonec to učitelka dopočítala za něj, protože bude zvonit.

U: *„Rychle někdo třetí úlohu.“*

Přihlásil se jeden žák.

U: „Máš na to 3 minuty.“

Nakreslil:



$v_1 = 30$ km/h

$v_2 = 40$ km/h

$t_2 = t_1 - 1{,}25$ $\qquad s_1 = s_2$

$v_1 \,.\, t_1 = v_2 \,.\, t_2$

$30t_1 = 40\,(t_1 - 1{,}25)$

$30t_1 = 40t_1 - 50$

$-10t_1 = -50$

$t_1 = 5$[14]

Žák: „*Ujel 150 km*“

Učitelka: *„ Výborně, tak služba tabule, židle nahoru a můžete jít na oběd.“*

---

[14] Dle pozorování mám pocit, že žáci v této třídě mají přesně naučený postup – pracují dle tří základních vzorců: $s = s_1 + s_2$ nebo $s_1 = s_2$ a $s = v.t$. Tento žák nám to přesně ukázal. Otázkou tedy je, zda znají i jiné postupy (zda jim byli předloženy a tento volí, protože se jim zdá nejlepší, nebo alespoň povoleny, pokud je chtěli použít), jak dalece postupům rozumí a jak jsou schopni je použít ve složitých úlohách. Právě toto snad uvidíme při individuální práci.

Příloha 2 - Záznam pozorování hodiny 14.9.2007

3. vyučovací hodiny - matematika

Začátek – viz pozorování 10.9.

Zadány tyto úlohy:

10. Ve 13 hodin vyjelo z Pardubic ke Kolínu auto Škoda Felicia rychlostí 60 km/h. O půl hodiny později vyjelo stejnou cestou auto Škoda Octavia rychlostí 80 km/h. Kdy dohoní Octavia Felicii?

11. Z Prahy do Olomouce je přibližně 250 km. V 6 hodin vyjel z Prahy do Olomouce rychlík průměrnou rychlostí 85 km/h. Ve stejném okamžiku vyjel z Olomouce do Prahy osobní vlak průměrnou rychlostí 40 km/h. V kolik hodin a v jaké vzdálenosti od Prahy se setkají?

12. Nákladní auto jelo průměrnou rychlostí 20 km/h a vyjelo z Prahy směrem k Liberci. Současně s ním vyjel autobus, který jel průměrnou rychlostí 30 km/h a který přijel do Liberce o 2 hodiny dříve než nákladní auto. Jaká je vzdálenost mezi Prahou a Libercem?

Po písemné práci učitelka okomentovala průběh:

Učitelka: *„Tak musím vás pochválit, koukala jsem, že jste to měli všichni zhruba dobře. Výsledky: první úloha – dojel ho v 15 hodin, druhá – sejdou se 170 km od Prahy za 2 hodiny, takže v 8 a třetí – 120 km. Musím teda říct, že ta třetí úloha, když jsem tam viděla, že to jel 6 hodin a představila jsem si jak tam jedem autobusem a jsme tam za hodinu, tak jsem se musela smát. Tak. Kdo se nedobral těmto výsledkům?"*

Žáci hromadně odpovídají, že k některým.

U: *„Jedničku, kdo nemá jedničku, komu nevyšlo těch 15 hodin?"*

Přihlásilo se několik žáků.

U: *„Kubo, k tabuli."*

Ž: *„Proč já?"*

U: *„Vyšlo ti to?"*

Ž: *„No nevyšlo právě."*

U: *„Tak pojď k tabuli, abys to konečně pochopil, pojď nám říct, jak si pracoval."*

Učitelka ke třídě: *„Kdo se doma mrknukl na vzorečky? Přece jenom jste měli nějaké echo."*

Zákyně ve třídě: *„No o přestávce jsme si je tady říkali."*

U: *„Jo?"*

Žák ve třídě: *„No já si vždycky řeknu, že rychlost je v km/h, tím pádem je to dráha za čas a mám vzoreček a zbytek si odvodím."*

U: *„Takže ticho. My se teď tady budeme dívat, jak to ten Kuba myslel, jak on to počítal."*

Zápis na tabuli:

v_1 = 60 km/H

v_2 = 80 km/h

Felície za 1/2hodiny = 30 km

Za 1 a 1/2 hodiny = 90 km

Octávie za 1,5 hodiny 120 km

U: *„Tak já bych zatím z tohoto viděla. Všichni máte ty slovní úlohy. Martine, ty budeš koukat na tu tabuli a budeš komentovat, co to tam Kuba napsal. Tak jednak tam vidíme, že rychlost jednoho je 60 km/h, rychlost druhého 80 km/h. Tak a teď tam vidím něco za půl hodiny – co to tam je Martine? „*

Žák v lavici: *„No že z ½ hodiny ujede 30 km."*

U: *„Tak to znamená, že za půl hodiny ujede 30 km. To chápu. Co znamená ta 1 a půl hodiny?"*

Ž: *„To znamená, že za 1,5"*

U: *„Kubo, proč tě napadlo 1,5 hodina?"*

Kuba: *„No to jsem zkusil."*

U: *„Aha, no tak jo, ale to asi není úplně dobré to zkusit, to se asi netrefíme zrovna. No a tak dobře. Za 1,5 hodiny ujede 90 km a co to znamená?"*

K: *„No, že za půl hodiny ujede třicet, to znamená, že ve 13:30 ujede 30, pak musí ujet dalších hodinu a půl, takže to už by bylo 15."*

Ve třídě je šum, děti se ozývají, že neví, co znamená 15.

U: *„Počkej, my ti nerozumíme, co 15?"*

K: *„No 15 hodin a ... 90 + 30 to je 120 a to musí ujet a to musí ujet i ta Oktávka, takže ta ujede 120 za hodinu a půl, takže ji dojede v 15:00."*

U: *„Tak podívejte se na tu tabuli, myslíte si, že má ten postup relativně logicky správný? Kde totiž ten Kuba udělal hloupou chybu?"*

Žák v lavici: *„Že odhadoval"*.

U: *„Ne ne ne, to není chyba. Tak ho napadlo hodinu a půl, proč ne, to může používat, někdy ten selskej rozum je lepší. To nemám nic proti tomu, ale kde udělal, Kubo zkus si najít tu tvojí* *chybu. Protože ten čas máš vypočítaný správně. Čili za půl hodiny ujede 30 km. To všichni víme, za nějakou další ujede 90, to chápeme, ale kde je ten zakopanej pes? Octávie ujede za 1,5 hodiny taky 120 s tím souhlasím, ale ty máš v tý odpovědi za 1,5 hodiny."*

Ž: *„No za hodinu a půl by tam dojela ta oktávka."*

U: *„No a kdy dohoní ta oktávka tu felicii?"*

K: *„No za tu... no celý se musí jet 2 hodiny. No já jsem zapsal za hodinu a půl, protože to tam pojede ta Oktávka"*

U: *„Takže jenom tohle si tam spletl. Kdy konkrétně dojede ta Oktávka tu Felicii?"*

K: *„No v 15:00."*

U: *„A tos věděl už v tý písemce nebo až tady u tabule?"*

K: *„No už tam, akorát jsem o tam blbě napsal."*

U: *„Ach jo."*

U: *„No zvláštní postup, samozřejmě máme pravidla jaká? Štěpánko, běž tam nahodit klasiku, utíkej."*

U: *„Dej tam jenom ten vzoreček a dosaď ho číslama."*

Na tabuli:

$s_1 = s_2$

$v_1t_1 = v_2t_2$

Učitelka čte zápis: *„Ano, správně, teď tam dosaď ty čísla, ano."*

Na tabuli:

$60t_1 = 80\ (t_1 - 0{,}5)$

U: *„Tak dvojku, komu ve dvojce nevyšlo 170 km.?"*

Žákyně v lavici: *„Já jsem počítala úplně přesně to samý, akorát jsem počítala ten druhej vzoreček."*

U: *„No to nemůžeš ale. Tak kdo neměl dobře tu druhou úlohu?"*

Žák v lavici: *„Já jsem tam špatně nejdřív dosadil, vyšlo mi 80."*

U: *„No to nevadí, tak to bylo z té druhé strany."*

Žák v lavici: *„No mě to přišlo divný, tak jsem to přepočítal a vyšlo mi to."*

U: *„Jo. Tak Davide pojď k tabuli."*

Zápis na tabuli:

P **s = 250 km** **O**

U: *„Ano, takhle by se mi to líbilo, dobrý."*

Zápis:

w….v = 85 km….v 6 …..P-O

y ….v = 40 km….v 6 ….O-P

U: *„Ano to je dobře, jenom prosimtě v těchto úlohách se Davide striktně držíme proměnných – dráha je s, rychlost v, čas je t, tam nedosazuj něco jiného, jo? Dej mi tam něco jiného."*

D: *„Tak 1,2."*

U: *„A co to myslíš, co je to x?"*

D: *„No x je rychlík a y je osobní vlak."*

U: *„No aha ty to myslíš takhle. No tak dobře, ale tak bych někde potřebovala slyšet, že x je rychlík a y je osobní vlak a někde to tam mít napsáno. Já jsem si myslela, že ty proměnné znamenají něco jiného."*

Přepsal na *r* a *os*.

U: *„No to už je lepší, to už by mě napadlo, protože já jsem si myslela, že ty proměnné jsou něco jiného."*

D: *„Takže vlastně oni jeli stejnou dobu."*

U: *„Hm, výborně ano."*

Zapsal:

$t_1 = t_2$

$v = s/t$

$t = s/v$

$s_1/v_1 = s_2/v_2$

U: *„Tohle absolutně nemůžeš použít, pokud máš jen jedno v. Nahoře máš jen jedno v a teď tam najednou vidim v_1 a v_2."*

Opravil v legendě – označil číselně rychlosti.

U: *„No jistě, v to musíme bejt důsledný."*

D: *„Takže vlastně $s = s_1 + s_2$"* (zapisuje). *„Tím pádem třeba $250 - s_2 = s_1$"* (zapisuje)

U: *„No dobře, zbytečně složitě, ale takhle by ses určitě k výsledku dobral."*

D: *„No a to mi nevyšlo."*

U: *„No to's určitě jen udělal někde chybu ve zlomcích, jinak by to muselo vyjít. Takže $250 - s_2/85 = s_1/40$."* (zapsáno na tabuli) *„Dobře. Tak a teď."*

Žák vynásobil rovnici 40.

U: *„No to se ale nezbavíme zlomku 85, ale dobře, ty tam budeš moct krátit, dobře hoď to tam."*

Začal chybně násobit.

U: *„No jo, ty se tam asi zamotáš matematicky. Takže piš krát 40.“*

Učitelka jde k tabuli. Žák píše:

$40\ (250 - s_2)/85 = 40\ s_2/40$

Učitelka čte jeho jednotlivé kroky a souhlasí.

U: *„Tak a teďka ještě já bych využila krácení, aby nám nevycházely šílený hausnumera. Čím to určitě půjde?“*

D: *„Pětkou.“*

U: *„Pětkou výborně“*

Žák píše chyby.

U: *„Pětkou, pětkou!!!“*

Vychází:

$8\ (250 - s_2)/17 = S2$

U: *„No a teď se musíš ještě zbavit tý 17. Krát 17, dobře.“*

Dále počítá:

$2000 - 8s_2 = 17s_2\ /+\ 8s_2$

Učitelka souhlasí.

Žákyně v lavici: *„A nešlo by to tam křížovým pravidlem?“*

U: *„Jo mohl by, akorát by vyšly šílený hausnumera. On by to pak násobil 40 a to, no mohl by, ale já nerada počítám s těma velkejma číslama.“*

Mezitím žák zapsal:

$2000 = 19s_2$

Zvoní.

U: *„Kolik ti to tam vychází?“*

D: *„No 2000 děleno 19.“*

U: *„Počkej, počkej. Já to tady nechápu, 17 + 8 určitě nebude 19. 17 + 8 bude určitě?“*

D: *„25.“*

U: *„A vyjde to docela slušně. Jo?“*

Zapisuje:

$2000 = 25\ s_2\ /:\ 25$

$s_2 = 80$

U: *„A dostaneš dráhu a vyjde ti 80, ta druhá dráha bude 80 jo? Tak dobře.“*

Ukončuje hodinu.

Po hodině za mnou ještě přišel jeden žák (Michal), že to počítal jinak. Zapsal mi řešení – učitelka byla u toho:

250/ 85 + 40 = 250 / 125 = 2

Řekl: *„Takže se sejdou za dvě hodiny, tím pádem je to těch 170 km.“*

Experimentátor: *„No a počkej, proč si tady sečetl ty rychlosti?“*

Michal: *„No protože oni se k sobě blížej tou rychlostí celkovou, jako když se sečtou, tam tim můžu vydělit tu celkovou dráhu a vyjde mi celkový čas.“*

Řekla jsem mu že to je zajímavé řešení. Učitelka ho také pochválila. Poté už odešel. Učitelka se zamyslela nad postupem a byla překvapena, jak je to jednoduché a elegantní řešení, které nikdy žákům neukazovala. Vyjádřila se, že je to škoda, že by jim ho ukázala, kdyby ho znala, že čím více řešení jim ukáže, tím lépe.