MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Lukáš Macek

Vektorový součin

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce:	Zdeněk Halas, DiS., Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	MZUIZV

Praha 2021

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Rád bych poděkoval mému vedoucímu práce Zdeňku Halasovi, DiS., Ph.D. za pomoc, velkou ochotu a nesmírnou inspiraci při zhotovování této práce. Dále děkuji všem, kteří mě při práci podporovali a kteří mi poskytli možnost se odreagovat, zejména mým dobrým přátelům a taky mé rodině.

Název práce: Vektorový součin

Autor: Lukáš Macek

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Zdeněk Halas, DiS., Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: V práci se pokoušíme naznačit odvození vektorového součinu postupem zpřísňování podmínek pro výsledný vektor, dokud není jednoznačně určen. Práce je psána tak, aby jí měl možnost porozumět student střední školy, může tedy sloužit jako inspirace pro učitele při vyučování vektorového součinu na školách. Nejprve hledáme ve 3D vektor kolmý ke dvěma lineárně nezávislým vektorům. Poté zkoumáme, jak vyjádřit obsah rovnoběžníku určeného dvěma lineárně nezávislými vektory pomocí souřadnic těchto vektorů vzhledem ke kartézské bázi. Dále naznačujeme, co je orientace vektorového prostoru, a matematicky ji formalizujeme. Pak už definujeme vektorový součin a ukazujeme některé jeho základní vlastnosti s tím, že také ve zkratce naznačujeme, kde se využívají.

Klíčová slova: Vektorový součin, determinant, orientace vektorového prostoru.

Title: Cross product

Author: Lukáš Macek

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: Zdeněk Halas, DiS., Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: In this thesis, we try to indicate a way of obtaining cross product. We use a method of adding conditions defining a vector, until we are left with the only one that fits them. The text is written in such way that a highschool student should by able to understand it, therefore it can be used as an inspiration for teachers teaching cross product at schools. First, we search for a vector perpendicular to two given linearly independent vectors in 3D. Then we study the area of a parallelogram, which is determined by two linearly independent vectors. Also, we try to express the area using coordinates of these vectors with respect to the cartesian basis. Afterwards, we indicate what an orientation of a vector space is and formalize it mathematically. Then we define cross product and show some of its basic properties while giving the reader an idea of the field of their usage.

Keywords: Crosss product, determinant, orientation of vector space.

Vektorový součin

Lukáš Macek

28. května 2021

Obsah

Úvod

V této práci se pokusíme nahlédnout na vektorový součin z didaktického hlediska. Jedná se o téma, se kterým se studenti středních škol nepřímo setkávají poprvé snad již v prvním ročníku ve fyzice. Pořádně se však probírá až ve třetím ročníku, kde se většinou pouze řekne, jak se vektorový součin dvou vektorů v $\mathbb{R}^3$ počítá s tím, že se zmíní jeho nejdůležitější vlastnosti. Konkrétně, že výsledný vektor je k oběma vektorům, jejichž vektorový součin počítáme, kolmý, jeho velikost je rovna velikosti obsahu rovnoběžníku, který tyto dva vektory určují, a někdy se ještě dodává, že výsledná báze je kladná – samozřejmě všechno za předpokladu, že oba vstupní vektory jsou lineárně nezávislé. Zápisy studentů v sešitech pak mohou vypadat nějak takto:

Mějme dva vektory $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ s tím, že jejich souřadnice vzhledem ke kartézské bázi jsou $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Vektorový součin těchto vektorů spočítáme jako

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, -(u_1v_3 - u_3v_1), u_1v_2 - u_2v_1)\,.$$

Pak se ještě dopíšou zmiňované vlastnosti výsledného vektoru, a tím teorie okolo vektorového součinu končí. Studenti se často naučí mechanický postup, který jim umožní si vzorec zapamatovat, a ten pak používají, když potřebují vektorový součin spočítat. Uvedené vlastnosti si také dokážou zapamatovat, nemusí jim však být zřejmé jejich vzájemné propojení s naučeným vzorcem. Proč zrovna vektor, jehož souřadnice vzhledem ke kartézské bázi jsou určeny takovým předpisem, má tyto vlastnosti? Toto je klíčová otázka, kterou si klade velká spousta nejen středoškolských studentů.

Odpovědět na tuto otázku přehledně, pokud možno stručně a elementární řečí, která by byla srozumitelná pro studenty už středních škol, není úplně snadné. Snažíme se proto využívat postupy a vyjádření, která by měla být pro studenty, alespoň ve třetím ročníku gymnázií, již známá, jako například parametrické vyjádření rovnice roviny a vzorec pro výpočet obsahu rovnoběžníku. Dále pracujeme se souřadnicemi vyjádřenými výhradně vzhledem ke kartézské bázi, a to jak ve 2D, tak ve 3D, jelikož tuto bázi studenti dobře znají. Bohužel se v práci neobejdeme bez determinantů, kterým se většina středních škol vyhýbá.

Při odvozování klademe důraz na názornost a jednotlivé kroky často podrobně popisujeme, a to i v případech, kdy výpočet působí triviálně. Cílem je provést čtenáře, jakožto i možného současného studenta střední školy, touto problematikou tak, aby bylo po přečtení práce srozumitelné, odkud se vektorový součin vzal.

Nejprve se pokusíme najít vektor kolmý ke dvěma lineárně nezávislým vektorům v $\mathbb{R}^3$. Zjistíme, že takový vektor není pouze jeden, a pokusíme se přidat postupně další rozumné podmínky k tomu, abychom výsledný vektor určili jednoznačně. Uvidíme, že výrazy vyjadřující jeho souřadnice vzhledem ke kartézské bázi úzce souvisí s obsahem rovnoběžníků. Budeme se tedy snažit spočítat obsah rovnoběžníku určeného dvěma lineárně nezávislými vektory, abychom mohli určit požadavek na velikost již získaného, ale zatím nejednoznačného kolmého vektoru. I po tomto zpřísnění si stále budeme moci vybrat mezi dvěma vzájemně opačnými vektory, a tak naznačíme, jak nahlížet na orientaci vektorového prostoru, abychom se mohli kvalifikovaněji rozhodnout, který z vektorů si zvolit. Tímto je výsledný vektor určen jednoznačně, načež definujeme samotný vektorový součin podle výsledků, ke kterým jsme dospěli, a poté odvodíme některé z jeho dalších základních vlastností. Právě v kapitole o definici vektorového součinu se nachází velký přínos této práce, jelikož jsme k této definici, která se obvykle uvádí bez větší motivace na různých vysokých školách, dospěli zcela přirozeně. Se znalostí myšlenek této práce pak už není záhadou, proč takovou definici vektorového součinu[1] chtít.

V samotném závěru práce se ještě nachází dodatek k determinantům druhého a třetího řádu pro čtenáře, kteří se s determinanty doposud nesetkali. Je zde zmíněna rekurzivní definice determinantu pomocí rozvoje podle posledního řádku a na jejím základě jsou v tomto dodatku dále odvozeny základní vlastnosti determinantů, kterých využíváme především ve třetí kapitole, která se týká orientace. Na determinanty v textu nahlížíme jako na nový nástroj, bez kterého by všechno bylo mnohem nepřehlednější, avšak jejich zkoumání není tématem této práce, a proto je tato část uvedena pouze informativně bez další motivace. Nechceme čtenáře mást a odvádět od hlavní myšlenky nabalování podmínek na jistý vektor odbočkou k determinantům, ale na druhou stranu chceme poskytnout čtenářovi, který zatím neměl možnost se s determinanty setkat, šanci práci porozumět, a to bez nutnosti dohledávání dodatečných informací.

V celé práci se soustředíme především na motivační stránku problémů, jelikož ta bývá často ve výuce tohoto tématu velmi slabá. Účelem je, aby čtenář pochopil, odkud se vektorový součin vzal, nikoliv vybudování rozsáhlé teorie, která je už zapsána v různých učebnicích.[2]

[1] [Se], kapitola 2, strana 113.

[2] Například [Se], kapitola 1, strany 100–103 či [Se] kapitola 2, strany 104–115.

1 Hledání vektoru kolmého na dané vektory v $\mathbb{R}^3$

1.1 Proč kolmý vektor hledat?

V analytické geometrii často narážíme na problém, kde máme zadáno parametrické vyjádření roviny a chceme její obecnou rovnici.

Parametrické vyjádření roviny ρ zadané bodem $A = [a_1, a_2, a_3]$ a lineárně nezávislými vektory $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vypadá takto:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + t \cdot u_1 + s \cdot v_1, \\ y &= a_2 + t \cdot u_2 + s \cdot v_2, \\ z &= a_3 + t \cdot u_3 + s \cdot v_3, \end{aligned}$$

$t, s \in \mathbb{R}$. Chceme obecnou rovnici této roviny, která bude tvaru

$$ax + by + cz + d = 0,$$

kde $\vec{n} = (a, b, c)$ je normálový vektor roviny ρ.

Jak tento normálový vektor ale najít? To odvodíme v následující podkapitole.

1.2 Výpočet kolmého vektoru

Mějme zadány dva lineárně nezávislé vektory $\vec{u}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Hledáme nenulový vektor $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$, který je k oběma zadaným vektorům kolmý, tj. $\vec{w} \perp \vec{u}$ a $\vec{w} \perp \vec{v}$.

Mějme kartézskou soustavu souřadnic, vzhledem k níž mají naše vektory souřadnice $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ a $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$. Vektor $\vec{w}$ je kolmý ke každému z vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ právě tehdy, když je jeho skalární součin s každým z nich roven nule. Musí tedy platit

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{w} &= 0, \\ \vec{v} \cdot \vec{w} &= 0, \end{aligned}$$

což můžeme přepsat jako soustavu dvou rovnic o třech neznámých:

$$u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3 = 0, \tag{1.1}$$

$$v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = 0. \tag{1.2}$$

K řešení soustav lineárních rovnic je výhodné používat matice. Přepišme si tedy naši soustavu do matice typu 2×3 a upravme ji na odstupňovaný tvar:

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_2 v_1 & u_3 v_1 \\ v_1 u_1 & v_2 u_1 & v_3 u_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_2 v_1 & u_3 v_1 \\ 0 & u_1 v_2 - u_2 v_1 & u_1 v_3 - u_3 v_1 \end{pmatrix}.$$

Nejprve jsme první řádek vynásobili v_1 a druhý řádek u_1, abychom mohli řádky od sebe hezky odečíst a dostali jsme v prvním sloupci a druhém řádku 0. (Odečítali jsme od druhého řádku první.)

Nyní nám stačí už jenom vektor $\vec{w}$ dopočítat. Uvědomme si, že nám jde pouze o jeho směr, tj. hledáme jeho libovolný nenulový násobek. Zvolme si tedy chytře souřadnici w_3 tak, abychom nemuseli zbytečně dělit:

$$w_3 := u_1 v_2 - u_2 v_1.$$

Pak ze druhé upravené rovnice dostaneme:

$$\begin{aligned} 0w_1 + (\boldsymbol{u_1 v_2 - u_2 v_1})\, w_2 + (u_1 v_3 - u_3 v_1)\, (\boldsymbol{u_1 v_2 - u_2 v_1}) &= 0, \\ w_2 &= -\left(u_1 v_3 - u_3 v_1\right). \end{aligned}$$

Dopočítejme ještě w_1 z rovnice (1.1):

$$\begin{aligned} u_1 w_1 - u_2(u_1 v_3 - u_3 v_1) + u_3(u_1 v_2 - u_2 v_1) &= 0, \\ u_1 w_1 - u_1 u_2 v_3 + \boldsymbol{u_2 u_3 v_1} + u_1 u_3 v_2 - \boldsymbol{u_2 u_3 v_1} &= 0, \\ u_1 w_1 - u_1 u_2 v_3 + u_1 u_3 v_2 &= 0, \\ u_1(w_1 - u_2 v_3 + u_3 v_2) &= 0. \end{aligned}$$

Součin je roven nule právě tehdy když je alespoň jeden z činitelů roven nule. Protože hledáme vektor $\vec{w}$ pro obecně zadané vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, nemůžeme o nich nic předpokládat. Proto řešení $u_1 = 0$ je k ničemu – neřeší případy, kdy $u_1 \neq 0$. Musí tedy být roven nule druhý z činitelů:

$$\begin{aligned} w_1 - u_2 v_3 + u_3 v_2 &= 0, \\ w_1 &= u_2 v_3 - u_3 v_2. \end{aligned}$$

Nalezli jsme jeden z možných $\vec{w}$, což nám bohatě stačí. Námi nalezený vektor $\vec{w}$ je totiž jednoznačný až na nenulový násobek. Nezáleží nám na velikosti, případně na znaménku. Všechny takové vektory budou stále kolmé jak na $\vec{u}$, tak na $\vec{v}$. Vítězoslavně můžeme tedy napsat jedno z nekonečně mnoha možných řešení naší úlohy:

$$\vec{w} = \left(u_2 v_3 - u_3 v_2, -\left(u_1 v_3 - u_3 v_1\right), u_1 v_2 - u_2 v_1\right). \tag{1.3}$$

1.3 Interpretace pomocí determinantu

Všimněme si ještě, že jsme se při hledání kolmého vektoru v $\mathbb{R}^3$ stále setkávali s výrazy tvaru

$$u_i v_j - u_j v_i,$$
$$i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j.$$

Pokud jste se již seznámili s determinanty, možná je v našem výsledku poznáváte. Připomeňme si, že determinant matice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se vypočítá takto:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb.$$

Tuto skutečnost můžeme použít ke zkrácení zápisu souřadnic našeho nalezeného vektoru:

$$\vec{w} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right). \tag{1.4}$$

Více se o výpočtech determinantů může čtenář dozvědět v dodatku, kde se např. v (5.1) nachází v modifikované podobně i vzorec zmiňovaný výše.

K čemu determinanty jsou kromě zkrácení zápisu a jakou mají geometrickou interpretaci zjistíme v další kapitole.

1.4 Který kolmý vektor je nejlepší?

Ke dvěma lineárně nezávislým vektorům $\vec{u}, \vec{v}$ generujícím rovinu jsme vypočítali normálový vektor $\vec{w}$ této roviny. Zvolili jsme takový násobek, abychom nemuseli zbytečně dělit a aby vypadal co nejjednodušeji.

Otázka: *Je možné zachovat estetiku vyjádření $\vec{w}$ a zároveň ho obohatit o další hezké vlastnosti?*

Pokud chceme zachovat kolmost $\vec{w}$ k zadaným vektorům, musíme vzít nějaký vektor

$$\overrightarrow{w'} = c \cdot \left(\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right). \tag{1.5}$$

U konstanty $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ tedy můžeme zvolit jednak její velikost, jednak její znaménko. V ničem jiném už volnost nemáme, jelikož chceme, aby $\vec{w}$ byl k $\vec{u}, \vec{v}$ kolmý, a proto bereme c-násobek vektoru ze vztahu (1.4).[3] O nic jiného se tedy starat nemusíme. Možnosti volby konstanty c použijeme k nastavení našeho vektoru tak, aby byl o další hezké vlastnosti, které budeme mít možnost získat, obohacen.

Ze zmiňovaného vztahu také vidíme, že je možné zvolit **velikost** $\vec{w}$ tak, aby byla rovna nějakému determinantu – stačí, aby $\vec{u}, \vec{v}$ měly oba i-tou souřadnici nulovou, $i \in \{1, 2, 3\}$, a v tomto případě estetika vyjádření zůstane zachována. Hodilo by se tedy prozkoumat, co vlastně determinanty vyjadřují.

Znaménko nenulové konstanty c ovlivňuje, na které vektorové polopřímce bude $\overrightarrow{w'}$ ležet, což souvisí s pojmem **orientace** vektorového prostoru. Změnit znaménko můžeme vždycky a na estetice vyjádření nám rozhodně neubere. V budoucnu bychom se tedy mohli podívat na to, která orientace je výhodnější a vybrat si právě ji.

Tím máme plán zkoumání určen. Jakmile se nám podaří tyto oblasti prozkoumat, můžeme toto zobrazení definovat a vhodně ho pojmenovat.

[3] Pokud bychom vzali vektor, který není násobkem tohoto vektoru, kolmost by zachována nebyla.

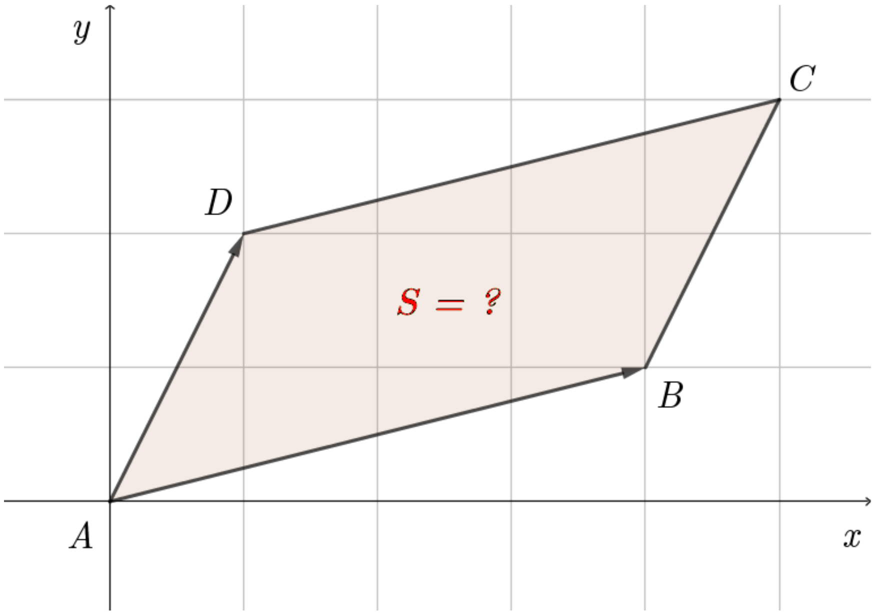
2 Obsah rovnoběžníku v $\mathbb{R}^2$

Hledejme obsah rovnoběžníku pomocí souřadnic generujících vektorů vyjádřených vzhledem ke kartézské bázi. Vzápětí ukážeme, že tento obsah úzce souvisí s determinanty a následně nalezneme jejich geometrickou interpretaci.

Poznámka: *V celé této kapitole budeme souřadnice všech vektorů vyjadřovat vzhledem k jedné zvolené kartézské soustavě souřadnic.*

2.1 Odvození vzorce obsahu rovnoběžníku v $\mathbb{R}^2$

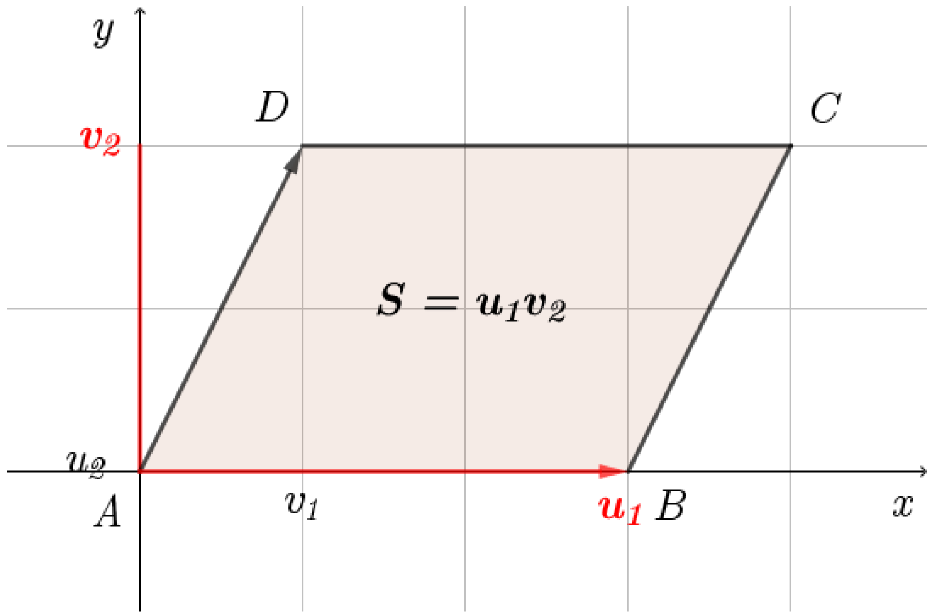
Mějme rovnoběžník $ABCD$ zadaný vektory $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} \in \mathbb{R}^2$. Nechť jsou souřadnice těchto vektorů vzhledem ke kartézské soustavě souřadnic $\overrightarrow{AB} = (u_1, u_2)$, $\overrightarrow{AD} = (v_1, v_2)$ a platí $u_1, u_2, v_1, v_2 \geq 0$, dále $u_1 > v_1$ a také $v_2 > u_2$ jako na obrázku níže.



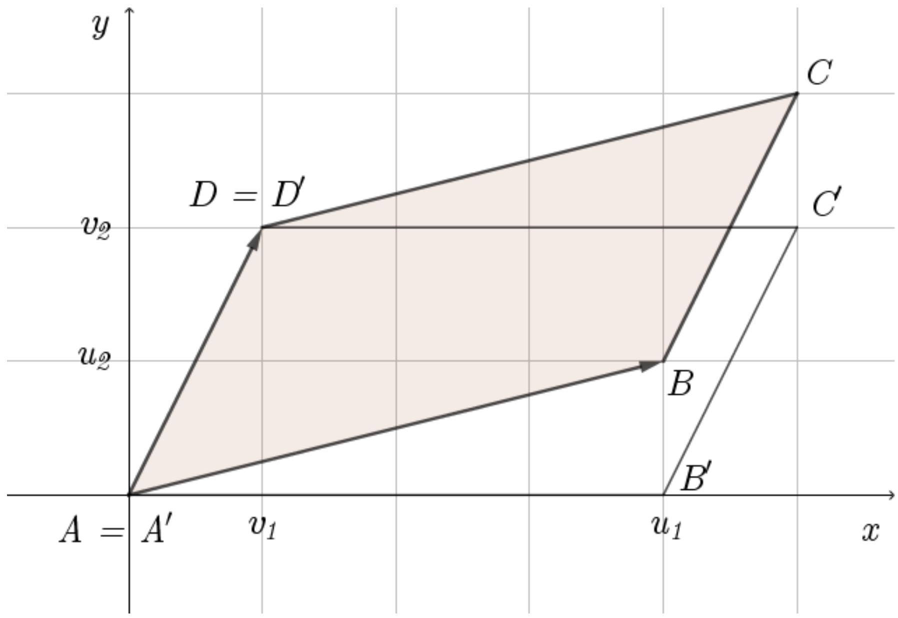
Otázka: *Jak spočítáme obsah tohoto rovnoběžníku?*

Na první pohled může úloha vypadat velmi složitě, proto si ji pro začátek trochu zjednodušíme a poté znovu zobecníme zpět do původní podoby.

Rozeberme si situaci, kde $\overrightarrow{AB} = (u_1, 0)$, $\overrightarrow{AD} = (v_1, v_2)$. Víme, že obsah rovnoběžníku lze spočítat jako délka strany krát výška na danou stranu. Z obrázku na následující stránce vidíme, že u_1 je délka strany našeho rovnoběžníku a v_2 je právě délka výšky na tuto stranu. Obsah rovnoběžníku tedy spočítáme jako $S = u_1 v_2$.



Nyní se vraťme k naší původní úloze, kde žádná souřadnice nemusí být nutně nulová, s tím, že si do obrázku přidáme ještě rovnoběžník $A'B'C'D'$, který je zadaný vektory o souřadnicích $(u_1, 0)$ a (v_1, v_2) jako v předchozím případě.

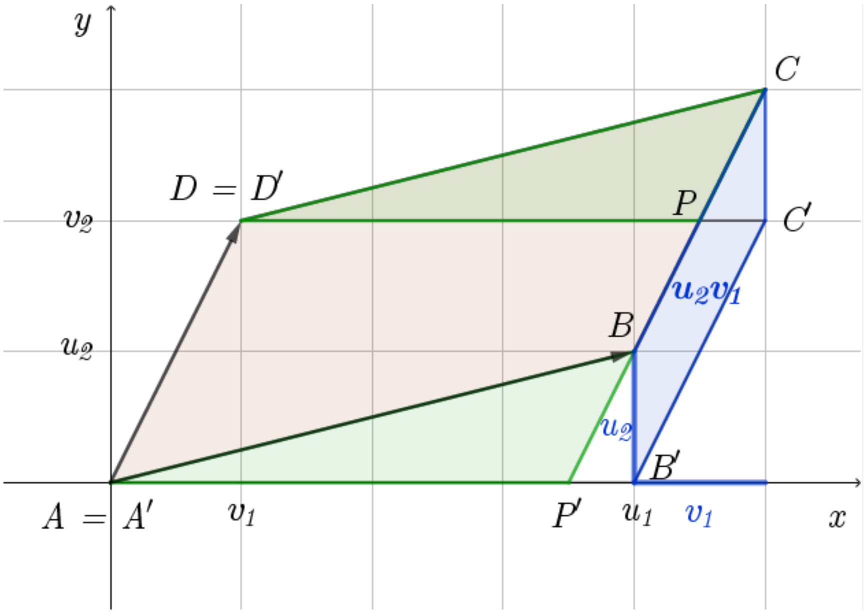


Pokusme se najít rozdíl obsahů těchto dvou rovnoběžníků.

Zaprvé si všimneme rovnoběžníku $B'C'CB$. Jeho strana $B'B$ má délku u_2, protože rozdíl y-ových souřadnic bodů B' a B je $u_2 - 0 = u_2$. Výška na tuto stranu má délku rovnou rozdílu x-ových souřadnic bodů C' a B', tedy je taky rovna rozdílu x-ových souřadnic bodů D' a A'. Tyto body jsou totožné po řadě s body D a A, hledaná výška má tedy délku v_1. Obsah tohoto rovnoběžníku je tedy

$$S_{B'C'CB} = u_2 v_1. \tag{2.1}$$

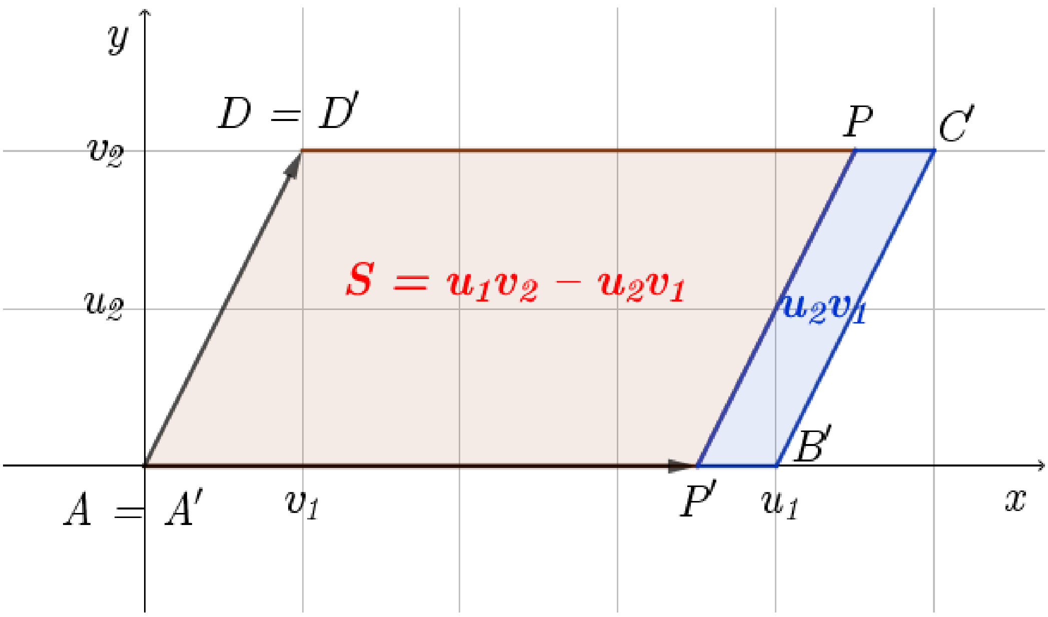
Zaměřme se na trojúhelník $\triangle D'C'C$. Délka strany $D'C'$ je rovna u_1, výška na stranu $D'C'$ má délku $|C'C| = u_2$, jelikož je tento trojúhelník pravoúhlý.[4] Trojúhelník $\triangle D'C'C$ je tedy shodný s trojúhelníkem $\triangle A'B'B$ podle věty *sus*.



Označme si ještě průsečík přímek $C'D'$ a BC jako P a vyznačme také P' na trojúhelníku $\triangle A'B'B$ využívaje objevené shodnosti.[5] Zaměřme se konečně na trojúhelník $\triangle PC'C$, který je opět pravoúhlý. Díky naší konstrukci bodu P' máme zajištěno, že $|PC'| = |P'B'|$. Trojúhelníky $\triangle PC'C$ a $\triangle P'B'B$ jsou tedy také shodné, a to opět podle věty *sus*.

Překresleme nyní obrázek tak, aby bylo možné rozdíl v obsazích na první pohled vidět: Trojúhelník $\triangle D'C'C$ posuneme na místo trojúhelníku $\triangle A'B'B$, čímž získáme rovnoběžník $A'P'PD'$ o stejném obsahu, jako je obsah rovnoběžníku $ABCD$, a také rovnoběžník $P'B'C'P$, který má stejný obsah jako rovnoběžník $B'C'CB$, tedy u_2v_1.

Nyní si můžeme všimnout, že obsah rovnoběžníku $ABCD$ je roven **rozdílu** obsahů rovnoběžníků $A'B'C'D'$, jehož obsah jsme spočítali ve zjednodušené formě úlohy, a $P'B'C'P$.



[4]Pravoúhlost je zajištěna naší konstrukcí: body B, C jsou pouze posunuté body B', C' ve směru osy y.
[5]Bude se jednat o průsečík přímek $A'B'$ a BC.

Shrnutí: *Získali jsme vzorec pro výpočet obsahu rovnoběžníku v prvním kvadrantu. V ostatních kvadrantech bychom postupovali analogicky, museli bychom ovšem dát pozor na znaménka. Upustíme-li od podmínek $u_1, u_2, v_1, v_2 \geq 0$, dostaneme absolutní hodnotu výrazu $u_1v_2 - u_2v_1$. Jelikož nás však zajímá obsah rovnoběžníku, což je nezáporná hodnota, absolutní hodnota nám ve výsledku nijak nevadí. Celkem tedy máme*

$$S = |u_1v_2 - u_2v_1| = abs\left(\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}\right). \tag{2.2}$$

V tomto odvozeném vzorci krásně vidíme geometrický význam determinantu v $\mathbb{R}^2$. Jeho absolutní hodnota nám vyjadřuje velikost obsahu rovnoběžníku, který je určen dvojicí lineárně nezávislých vektorů, jejichž souřadnice vzhledem ke kartézské bázi jsou ve sloupcích matice, jejíž determinant počítáme.

Absolutní hodnota nám pouze zajišťuje nezápornost obsahu, kdyby byl obsah rovnoběžníku $P'B'C'P$ větší než obsah rovnoběžníku $A'B'C'D'$. Další hlubší význam postrádá, a proto se často vynechává.

Poznámka: *Je-li libovolný prvek této matice nulový, jeden z členů automaticky vypadne. Například pokud $u_2 = 0$, vychází $S = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ 0 & v_2 \end{vmatrix} = u_1v_2$, což je výsledek zjednodušené verze naší úlohy, který jsme shrnuli již ve vztahu (2.1).*

2.2 Souvislost s vektorovým součinem

Připomeňme, že jsme v kapitole o hledání vektoru kolmého na dané vektory našli vektor $\vec{w}$, který tyto podmínky splňoval, viz (1.4). Také ale víme, že podobně i každý jeho nenulový násobek bude řešením takové úlohy. Tento vektor měl souřadnice

$$\vec{w} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}\right).$$

Na velikosti $\vec{w}$ nám nezáleželo. Nyní, když jsme poznali geometrickou interpretaci determinantu, můžeme si vybrat takovou velikost, aby vypovídací hodnota $\vec{w}$ byla co největší při zachování jednoduchosti jeho vyjádření.

Mohlo by nás napadnout zvolit takový násobek vektoru $\vec{w}$, aby jeho velikost byla rovna velikosti obsahu rovnoběžníku zadaného lineárně nezávislými vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$. Kdyby pak někdo chtěl tento obsah spočítat, stačilo by, aby spočítal velikost $\vec{w}$ a obsah rovnoběžníku by jí už byl roven.

Zároveň vidíme, že souřadnice $\vec{w}$ jsou determinanty, tj. obsahy nějakých rovnoběžníků. Neměl by tedy problém, aby jeho velikost byla rovna nějakému takovému obsahu, a zároveň by vyjádření $\vec{w}$ nemělo být o nic méně hezké.

Zkusme tuto myšlenku rozvinout v úlohu, kterou následně vyřešíme.
Mějme rovnoběžník v rovině zadaný lineárně nezávislými vektory sousedních stran
$\vec{u} = (u_1, u_2)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2)$. Zvolme takový násobek vektoru $\vec{w}$, aby jeho velikost byla rovna obsahu tohoto rovnoběžníku. Chceme, aby platilo

$$\|\vec{w}\| = abs\left(\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}\right).$$

Spočítejme velikost našeho vektoru $\vec{w}$ a pak ji případně vynásobíme potřebnou konstantou, aby kýžená rovnost platila:

$$
\begin{aligned}
\|\vec{w}\| &= \left\| \left(\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right) \right\|, \\
\|\vec{w}\| &= \left\| \left(\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right) \right\|, \\
\|\vec{w}\| &= \left\| \left(0, 0, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right) \right\|, \\
\|\vec{w}\| &= abs \left(\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right).
\end{aligned}
$$

Jelikož $\vec{u}$, $\vec{v}$ jsou vektory ležící v jedné rovině (tvoří strany rovnoběžníku), lze zvolit lineární soustava souřadnic tak, aby byly jejich třetí souřadnice nulové, tedy po drobném výpočtu budou také první dvě souřadnice $\vec{w}$ rovny nule. Vidíme, že velikost $\vec{w}$ se už obsahu tohoto rovnoběžníku rovná, a tedy ji nijak měnit nemusíme, což je skvělá zpráva.

Ještě prošetřeme případ, kdy $\vec{u}$, $\vec{v}$ jsou lineárně závislé. Bude i pak platit $\|\vec{w}\| = S$? Z lineární závislosti vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ plyne, že musí existovat konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\vec{v} = c \cdot \vec{u}.$$

Tuto skutečnost můžeme v souřadnicích rozepsat jako

$$
\begin{aligned}
v_1 &= c \cdot u_1 \\
v_2 &= c \cdot u_2 \\
v_3 &= 0,
\end{aligned}
$$

kde nulovost poslední souřadnice má stejný důvod jako v předchozím výpočtu (platí také $u_3 = 0$).

Potom velikost vektoru $\vec{w}$ spočítáme následovně:

$$
\begin{aligned}
\|\vec{w}\| &= \left\| \left(\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right) \right\|, \\
\|\vec{w}\| &= \left\| \left(0, 0, \begin{vmatrix} u_1 & c \cdot u_1 \\ u_2 & c \cdot u_2 \end{vmatrix} \right) \right\|, \\
\|\vec{w}\| &= \left\| (0, 0, u_1(c \cdot u_2) - u_2(c \cdot u_1)) \right\|, \\
\|\vec{w}\| &= 0.
\end{aligned}
$$

Závěr: *Ve vztahu (1.5) zvolíme takové $\vec{w}$, aby $|c| = 1$, čímž získáme navíc ke kolmosti $\vec{w}$ k $\vec{u}, \vec{v}$ vlastnost, že velikost $\vec{w}$ bude rovna obsahu rovnoběžníku určeného vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$.*

Poznámka: *Stále máme dvě možnosti, jak vektor $\vec{w}$ zvolit. Buď $c = 1$, nebo $c = -1$. Není na první pohled vidět, která volba je pro nás přínosnější.*

Vektor $\vec{w}$ má velmi zajímavé vlastnosti a je jednoznačný až na znaménko.[6] V příští kapitole se zaměříme na volbu znaménka s užitečnějšími vlastnostmi a poté budeme připraveni definovat vektorový součin.

[6] Uvědomme si, že pro zadanou přímku existují vždy právě dva různé vektory zadané kladné velikosti a jsou vzájemně opačné.

3 Orientace

Už máme vektor, který je kolmý k dalším dvěma vektorům s tím, že jsou všechny tři lineárně nezávislé. Jeho velikost je rovna obsahu rovnoběžníku, což se nám může hodit, ale stále máme dvě možnosti, jak zvolit, na které vektorové polopřímce bude tento vektor ležet. V této kapitolce se pokusíme prozkoumat souvislosti s touto volbou spojené a na jejím konci se kvalifikovaně rozhodneme pro ten „lepší". Tato volba úzce souvisí s pojmem orientace vektorového prostoru.

3.1 Názorná představa

V této podkapitole se pokusíme naznačit, jak si orientaci vektorového prostoru představit, avšak nebude se jednat o odvození.

Otázka: *Jak si orientaci vektorového prostoru představit?*

Podíváme se postupně na příklady orientace jednorozměrného, dvourozměrného a trojrozměrného vektorového prostoru.[7]

3.1.1 Vektorová přímka (1D)

Nechť $B = (\vec{u})$ je báze jednorozměrného vektorového prostoru $\mathbb{R}^1$.[8]

Představme si, že jsme v rovném tunelu bez zatáček. Můžeme jít buď na jednu stranu, nebo na druhou. Směr naší chůze bude vyjadřovat směr vektoru $\vec{u}$. Můžeme na celou situaci tedy nahlížet tak, že vektor $\vec{u}$ určuje „orientaci" našeho pohybu. Můžeme si hned všimnout, že se **orientace změní na opačnou**, pokud **vektor $\vec{u}$ změníme na opačný**.

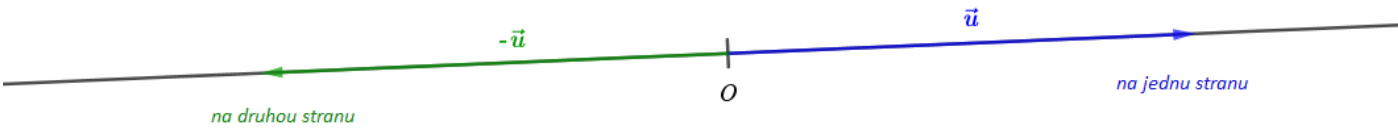
Jinými slovy báze $B = (\vec{u})$ a $B' = (-\vec{u})$ mají „opačnou orientaci", neboli jsou nesouhlasné.[9]

[7] Orientaci vektorového prostoru však záměrně nebudeme pořádně matematicky zavádět. Motivované zavedení by nás stálo velké množství práce a zapadla by při něm hlavní myšlenka této práce, která nás postupně vede k motivované definici vektorového součinu. Zájemci mohou přesnější matematické zavedení nalézt v knize [Se], kapitola 1, strany 100–102.

[8] Tedy $\vec{u} \neq \vec{0}$.

[9] Přesněji bychom měli říct, že báze B je kladná právě tehdy, když je báze B' záporná a naopak báze B je záporná právě tehdy, když je báze B' kladná s tím, že báze B je buď kladná, nebo záporná. V textu ale budeme za účelem motivace a větší přehlednosti používat vyjádření, že mají tyto báze „opačnou orientaci".

Orientace jednorozměrného vektorového prostoru je naznačena na obrázku:



3.1.2 Vektorová rovina (2D)

Nechť $B = (\vec{u}, \vec{v})$ je báze dvourozměrného vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$. Uvědomme si, že báze je posloupnost vektorů, tj. vektor $\vec{u}$ je první, vektor $\vec{v}$ zase druhý.

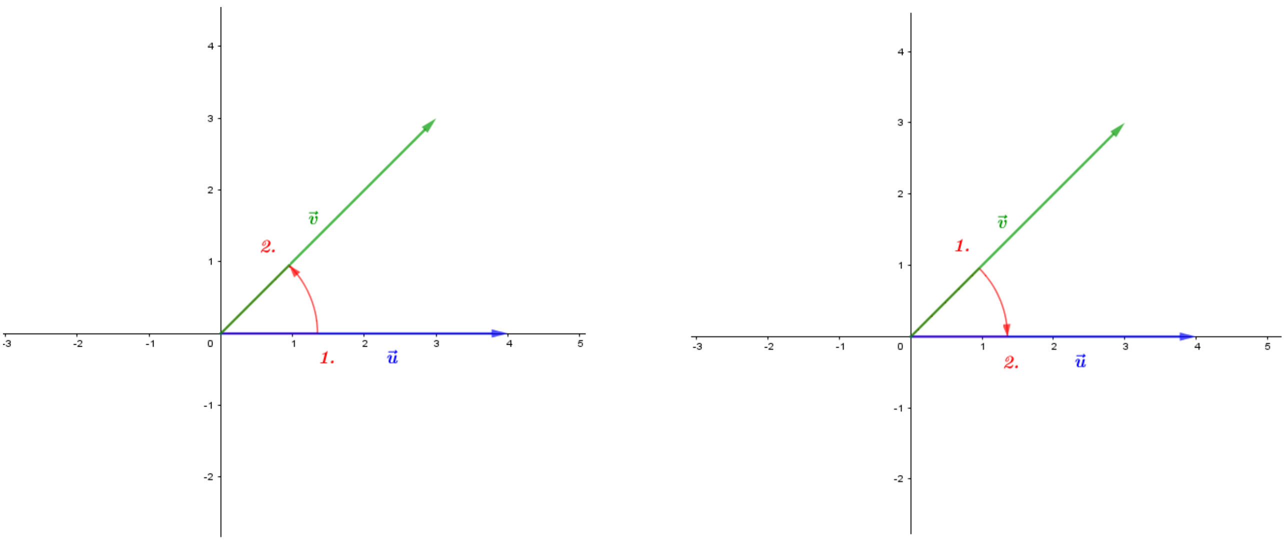
Představme si, že se nacházíme v této rovině někde na vektorové polopřímce vektoru $\vec{u}$, avšak mimo počátek. Chceme odtud po co nejkratší části kružnice, která má střed v počátku, dojít k vektorové polopřímce vektoru $\vec{v}$ s tím, že budeme šipkou značit směr našeho pohybu. Díky lineární nezávislosti $\vec{u}, \vec{v}$ bude úhel ke zdolání vždy z intervalu $(0; \pi)$.

Šipka, kterou značíme směr naší cesty, bude vždy směřovat buď proti směru hodinových ručiček (kladný směr otáčení), anebo po směru hodinových ručiček (záporný směr otáčení). Tyto dva případy můžeme pokládat za dvě různé orientace vektorového prostoru. Zároveň si všimněme, že **vyměníme-li pořadí vektorů v bázi, směr šipky se otočí**.

Jinými slovy báze $B = (\vec{u}, \vec{v})$ a $B' = (\vec{v}, \vec{u})$ mají „opačnou orientaci“, neboli jsou nesouhlasné.

Pokud vyměníme jeden z vektorů za vektor k němu opačný, orientace vektorového prostoru se opět změní jako v případě přímky. To taky znamená, že zaměníme-li oba vektory za vektory k nim opačné, orientace se změní na opačnou dvakrát, a tedy zůstane ve výsledku stejná jako orientace původního vektorového prostoru.

Obrázek orientace dvourozměrného vektorového prostoru:



3.1.3 Trojrozměrný vektorový prostor (3D)

Nechť $B = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ je báze trojrozměrného vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$.

Zvolme kartézskou soustavu souřadnic tak, aby vektor $\vec{u}$ ležel na poloose $+x$ a aby $\vec{v}$ ležel v polorovině určené osou x jako hraniční přímkou a dále poloosou $+y$.[10] Všechny bázové vektory báze B zároveň přesuňme tak, aby vycházely z počátku.[11] Tím jsme zároveň zafixovali vektor $\vec{w}$, který nyní leží buď v poloprostoru určeném rovinou xy a poloosou $+z$, anebo v poloprostoru určeném rovinou xy a zápornou poloosou $-z$. Podle toho, zda vektor kartézské báze[12] $\vec{e_3}$ a $\vec{w}$ leží ve stejném ze zmiňovaných poloprostorů, řekneme, že báze B je souhlasná s kartézskou bází, což je právě tehdy, když leží oba $\vec{e_3}, \vec{w}$ v témže poloprostoru, či nesouhlasná v případě opačném.

Poznámka: *Analogicky bychom postupovali u bází vyšších prostorů. Nastavili bychom prvních $n-1$ vektorů tak, aby ležely v daných polo-podprostorech (polopřímka $+x$, polorovina daná x a $+y$, ...), až bychom zafixovali n-tý vektor, který bychom pak srovnali s umístěním vektoru $\vec{e_n}$.*

3.1.4 Závěr

Máme dvě vzájemně opačné možnosti orientace vektorového prostoru. Musíme si tedy zvolit nějakou bázi, které budeme říkat kladná. Báze souhlasné s ní pak budou také kladné a báze nesouhlasné s ní budou záporné. Touto volbou vektorový prostor orientujeme.

Všimněme si, že změnit orientaci vektorového prostoru můžeme dvěma způsoby:
1) změnou jednoho z vektorů báze na vektor k němu opačný,
2) záměnou pořadí dvou libovolných vektorů báze (nelze v 1D).

[10] Všimněme si, že v této části jistým způsobem využíváme poznatky z 1D a 2D.
[11] Odborně bychom řekli, že $\{\vec{u}\}$ generuje osu x a že $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ generuje rovinu xy.
[12] Kartézská báze $\mathbb{R}^3$ je báze $K_3 = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, kde $\vec{e_1} = (1,0,0)$, $\vec{e_2} = (0,1,0)$ a $\vec{e_3} = (0,0,1)$.

Inspirováni předchozími úvahami budeme tímto způsobem orientaci vektorového prostoru matematicky formalizovat.

Zároveň nahlédněme, že orientaci žádného vektorového prostoru nemůžeme změnit pouhým otáčením jeho báze v libovolném smyslu přípustném pro daný prostor. Z pravé boty neuděláme nikdy pouhým otáčením levou.[13]

Vzpomeňme si nyní na determinanty. V jedné z minulých kapitol jsme se setkali s determinanty ve 2D, ale tyto objekty můžeme využívat i v prostorech vyšší dimenze. A právě determinanty mají tu vlastnost, že do nich nejen můžeme zapsat souřadnice vektorů vyjádřené vzhledem kartézské bázi, ale také se jejich znaménko mění právě po záměně pořadí souřadnic dvou vektorů, viz (5.5), nebo po výměně jednoho z vektorů za opačný, viz (5.4) pro volbu $c = -1$. Znaménko determinantu matice tvořené souřadnicemi vektorů báze B vzhledem ke kartézské bázi tedy můžeme použít k určení, zda je báze B kladná, či záporná za předpokladu, že je příslušný vektorový prostor orientovaný, tj. zvolili jsme již nějakou jeho bázi za kladnou.

Poznatek: *K vypočítání orientace báze B použijeme znaménko determinantu*

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Jak jsme již naznačili v předchozím textu, pro orientaci vektorového prostoru je nutné zvolit některou jeho bázi za kladnou. Jelikož souřadnice všech vektorů vyjadřujeme vzhledem ke kartézské bázi[14], dává dobrý smysl zvolit si za kladnou právě bázi kartézskou.

Úmluva: *Kartézská báze je kladná.*

Znaménko uvedeného determinantu pak rozhodne, zda jsou báze B a K_3 souhlasné, či nesouhlasné. Odtud plyne, že tento determinant bude kladný právě tehdy, když je báze B kladná, a záporný právě tehdy, když je záporná.

Otázka: *Preferujeme, aby vzniklá báze $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ ze vztahu (1.3) byla kladná, nebo záporná?*

Máme-li pravou botu vzhledem ke K_3, bude pak tato bota pravá vzhledem k B právě tehdy, když je B kladná. Může sice být různě deformovaná, ale poznáme, že se jedná o botu pravou. Již toto je dostatečný důvod pro to chtít, aby báze, která vznikne z vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\vec{w}$, se kterými počítáme například ve vztahu (1.3), byla **kladná**.

[13] Něco jiného je, pokud máme bázi podprostoru nějaké prostoru. Například jsme-li ve 2D, ve kterém máme přímku, pak ji snadno otočíme v dané rovině tak, aby bázový vektor, který před tím ukazoval na jednu stranu, ukazoval nyní na stranu druhou. Podobně bychom mohli otočit levou botu (ze 3D) na pravou, pokud bychom měli k dispozici čtvrtý rozměr. Dává tedy smysl definovat pouze orientaci vektorového prostoru, nikoliv vektorových podprostorů!

[14] Právě tu používáme jako srovnávací bázi při určování, zda jsou báze kladné, či záporné, v předchozích podkapitolách.

3.2 Výpočet odhalující, zda je báze $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ kladná, nebo záporná

Mějme bázi $B = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$,[15] kde $\vec{w}$ je vektor ze vztahu (1.3). Zvolme kartézskou soustavu souřadnic. Nechť jsou souřadnice vektorů báze B rovny $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ a $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$. Potom ze vztahu (1.3) máme

$$\vec{w} = (w_1, w_2, w_3) = (u_2v_3 - u_3v_2, -(u_1v_3 - u_3v_1), u_1v_2 - u_2v_1).$$

Dohoda: *Užíváme-li kartézskou soustavu souřadnic a neuvádíme-li bázi při výpisu jednotlivých složek vektoru, máme na mysli vyjádření vzhledem ke kartézské bázi daného prostoru.* [16]

Sestavme matici A z vektorů báze B tak, že jejich souřadnice zapíšeme například do sloupců.[17] Pak

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}.$$

Nezapomeňme však na to, že vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ leží v jedné rovině. Můžeme tedy bez újmy na obecnosti předpokládat, že $u_3 = v_3 = 0$ (jako v předchozí kapitole).[18] Po dosazení do $\vec{w}$ ze zmiňovaného vztahu (1.3) dostaneme

$$\vec{w} = (0, 0, u_1v_2 - u_2v_1).$$

Nyní se nabízí více variant, jak determinant matice A spočítat. My ukážeme dvě hlavní – Sarrusovo pravidlo a rozvoj determinantu podle třetího řádku.

3.2.1 Pomocí Sarrusova pravidla

Dosaďme do matice A a spočítejme[19] její determinant pomocí vztahu (5.3):

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & 0 \\ u_2 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}, \\
detA &= \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 0 \\ u_2 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & u_1v_2 - u_2v_1 \end{vmatrix}, \\
detA &= u_1v_2(u_1v_2 - u_2v_1) - u_2v_1(u_1v_2 - u_2v_1), \\
detA &= {u_1}^2{v_2}^2 - u_1u_2v_1v_2 - u_1u_2v_1v_2 + {u_2}^2{v_1}^2, \\
detA &= (u_1v_2)^2 - 2u_1v_2u_2v_1 + (u_2v_1)^2, \\
detA &= (u_1v_2 - u_2v_1)^2.
\end{aligned}$$

[15] To znamená, že vektory $\vec{u}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ jsou lineárně nezávislé. Pro případ, kde by byly $\vec{u}$, $\vec{v}$ lineárně závislé, jsme ukázali v minulé kapitole, že by $\vec{w} = \vec{0}$. Nemá tedy smysl se o směru takového vektoru bavit.

[16] Jinými slovy: Užíváme-li kartézskou soustavu souřadnic, zápis $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ znamená, že vzhledem ke K_3 má vektor $\vec{x}$ souřadnice po řadě x_1, x_2 a x_3.

[17] Vlastně se jedná o tzv. matici přechodu P_{BK_3} od báze B ke kartézské bázi K_3. Matice přechodu od báze B k bázi C je obecně matice, která obsahuje ve sloupcích vektory původní báze, tedy B, vyjádřené vzhledem k bázi nové, tedy C. Znaménko determinantu matice přechodu P_{BC} pak určuje, zda jsou tyto báze souhlasné, nebo nesouhlasné. Pro naše potřeby ale bohatě postačí pouze matice přechodu k bázi kartézské, která budí dojem, že stačí souřadnice vektorů báze B pouze vhodně zapsat do matice, což je velmi jednoduché a elegantní.

[18] Neznamená to nutně, že jsou vzhledem ke K_3 třetí souřadnice opravdu nulové. Existuje ale určitě jiná lineární soustava souřadnic, vzhledem ke které třetí složky těchto vektorů nulové budou.

[19] [Be], kapitola 14, strany 165–166.

Vidíme, že determinant matice A je roven nezápornému výrazu.[20]. Zároveň není nulový, protože vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\vec{w}$ jsou lineárně nezávislé. Musí být tedy kladný, odkud plyne, že naše báze B je kladná, což přesně chceme. Není tedy třeba $\vec{w}$ zaměnit za $-\vec{w}$.

3.2.2 Pomocí rozvoje determinantu

Na rozdíl od předchozího výpočtu využijeme pro $\vec{w}$ vztah (1.4) a budeme počítat podle (5.2).

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & 0 \\ u_2 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}, \\
det\ A &= \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 0 \\ u_2 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}, \\
det\ A &= 1^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}, \\
det\ A &= \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}^2 .
\end{aligned}$$

Podobně jako v předchozím případě jsme získali nezáporný výraz, který ale díky lineární nezávislosti $\vec{u}$ a $\vec{v}$ musí být navíc kladný.

3.2.3 Závěr

Shrnutí: *Znaménko $\vec{w}$ ze vztazích (1.3) a (1.4) měnit nemusíme, výsledná báze bude kladná.*

Nyní je už tento vektor $\vec{w}$ natolik zajímavý a užitečný, že by určitě nebylo na škodu ho definovat jako výsledek binární operace na množině vektorů z $\mathbb{R}^3$. O to se postaráme v příští kapitole.

[20] Platí $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geqslant 0$.

4 Vektorový součin

4.1 Volba vhodného názvu

Připomenutí: *Ze dvou lineárně nezávislých*[21] *vektorů umíme vytvořit vektor $\vec{w}$, který je na oba kolmý, jeho velikost je rovna obsahu rovnoběžníku a dohromady tyto tři vektory tvoří bázi $\mathbb{R}^3$.*

Uvědomme si, že se jedná o **zobrazení**. Dočasně ho označme f. Potom:

$$f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$

$$f(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{w}, \tag{4.1}$$

kde $\vec{w}$ je vektor z (1.3), neboli z (1.4), pokud preferujeme vyjádření pomocí determinantů.

Cíl: *Objevit základní vlastnosti tohoto zobrazení, dobře ho označit a vhodně ho pojmenovat.*

Jelikož naše f je vlastně binární operace mezi vektory, může nás okamžitě napadnout se zeptat, jaké operace s vektory umíme. Nejzákladnější z nich je sčítání dvou vektorů.

Otázka: *Jak se chová naše zobrazení f vůči sčítání dvou vektorů?*

Odpověď na tuto otázku se dá najít mnoha způsoby. Rozebereme konkrétně dva – přímý výpočet pomocí souřadnic a chytřejší postup využívající determinantů. Pokud vám determinanty nevadí, rozhodně doporučuji hlavně postup, který je zužitkuje. V opačném případě bude pro vás asi srozumitelnější první řešení.

4.1.1 Přímý výpočet pomocí souřadnic

Mějme vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$. Nechť jsou vektory v každé z dvojic $\left(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}\right)$ a $\left(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}\right)$ lineárně nezávislé. Zvolme kartézskou soustavu souřadnic a vzhledem k ní ať jsou souřadnice našich vektorů $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$.

Vypočítejme souřadnice výsledného vektoru využívaje vztahu (1.3):

$$\begin{aligned}
f(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = {} & (a_2(b_3 + c_3) - a_3(b_2 + c_2), - \left[a_1(b_3 + c_3) - a_3(b_1 + c_1)\right], \\
& a_1(b_2 + c_2) - a_2(b_1 + c_1)) = \\
= {} & ((a_2b_3 - a_3b_2) + (a_2c_3 - a_3c_2), \left[-(a_1b_3 - a_3b_1)\right] + \left[-(a_1c_3 - a_3c_1)\right], \\
& (a_1b_2 - a_2b_1) + (a_1c_2 - a_2c_1)) = f(\vec{a}, \vec{b}) + f(\vec{a}, \vec{c}).
\end{aligned}$$

Po aplikaci vztahu (1.3) jsme výrazy vyjadřující jednotlivé souřadnice vektoru $f(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c})$ roznásobili a poté vhodně uzávorkovali. Porovnáme-li začátek a konec série rovností, vidíme, že platí

$$f(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = f(\vec{a}, \vec{b}) + f(\vec{a}, \vec{c}). \tag{4.2}$$

Analogicky lze také ukázat, že platí

$$f(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = f(\vec{a}, \vec{c}) + f(\vec{b}, \vec{c}). \tag{4.3}$$

[21] Vzpomeňme si na kapitolu 2, kde jsme rozebírali velikost $\vec{w}$. Co by se stalo v případě, že by $\vec{u}$, $\vec{v}$ byly lineárně závislé? Pak by tyto dva vektory neurčovaly rovnoběžník, tj. můžeme říct, že takový obsah by byl roven nule. Odtud dostáváme, že $\vec{w} = \vec{0}$, jelikož nulový vektor je jediný vektor s nulovou velikostí. Zobrazení f tedy bude definováno na celém $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

4.1.2 Postup využívající determinantů

Mějme lineárně nezávislé vektory $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ a kanonickou bázi $K_3 = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Nechť $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ jsou souřadnice těchto vektorů vzhledem ke K_3. Protože je K_3 bází $\mathbb{R}^3$, můžeme si napsat $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ jako lineární kombinaci jejích vektorů a pak za jednotlivé souřadnice $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ dosadit například dle (1.4):

$$\begin{aligned}\vec{w} &= w_1\vec{e_1} - w_2\vec{e_2} + w_3\vec{e_3},\\ \vec{w} &= \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}\vec{e_1} - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}\vec{e_2} + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}\vec{e_3}.\end{aligned}$$

Jak si takový vzorec jednoduše zapamatovat? Můžeme si situaci představit jako rozvoj nějakého zvláštního determinantu jako ve vztahu (5.3), jehož jeden řádek netvoří skaláry, ale vektory:

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \end{vmatrix}.$$

Nejedná se o opravdový determinant, ale pro zkrácení zápisu lineární kombinace budeme tento zápis formálně používat.

Podívejme se nyní na to, jak se chová naše binární operace vůči sčítání vektorů v $\mathbb{R}^3$. Využijeme při tom přímo vztah (1.4):

$$f(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \end{vmatrix} = f(\vec{a}, \vec{c}) + f(\vec{b}, \vec{c}).$$

Z prvního na druhý řádek jsme přešli podle pravidel počítání s determinanty. Došli jsme ke stejnému vztahu jako v (4.3) a analogicky lze tímto postupem také dokázat, že platí (4.2).

4.1.3 Shrnutí

Objevená vlastnost naší binární operace se nazývá **distributivita**[22]. Právě součin je distributivní vůči sčítání vektorů.

Tato skutečnost nás motivuje k tomu, abychom do názvu naší binární operace vložili název součin. Jelikož je jejím výsledkem vektor, a ne skalár jako u skalárního součinu, přímo se nabízí název **vektorový součin**. Zbývá jediná otázka: Jak ho označit? Tečkou již značíme skalární součin, a proto použijeme jinou značku pro násobení – křížek: $\times$.

4.2 Definice

Definice: *Mějme vektorový prostor $\mathbb{R}^3$ a orientujme ho volbou kartézské báze, kterou zvolme za kladnou. Nechť $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ jsou souřadnice vzhledem k této bázi. Pak binární operaci $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$, kde*

$$\vec{w} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right),$$

nazýváme vektorový součin *vektorů $\vec{u}, \vec{v}$.*

[22] [Be], kapitola 2, strana 18.

Dohoda: *V celé této podkapitole budeme využívat námi na začátku zvolenou kartézskou soustavu souřadnic. Souřadnice vektorů $\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}$ vzhledem k této kartézské bázi budeme pak po celou dobu značit $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ a $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.*

Jak už jsme ukázali, vektorový součin je **distributivní** vůči sčítání vektorů, tedy

$$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3 : \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c},$$

$$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3 : (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}.$$

Poznámka: *Na pořadí vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ záleží. Obecně neplatí, že by se vektorový součin vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ rovnal vektorovému součinu vektorů $\vec{v}, \vec{u}$. Jinými slovy, vektorový součin **není komutativní** operace. Můžeme dokonce jednoduše ukázat, že je antikomutativní – stačí si rozepsat $\vec{w}$ jako „zvláštní determinant", který jsme použili v předchozí kapitole:*

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \end{vmatrix} = - \vec{v} \times \vec{u}.$$

Při úpravách využíváme vztah (5.5).

Vyjádření vektorového součinu pomocí tohoto „zvláštního determinantu" má však kromě výhod, jako jsou přehlednost a snadná zapamatovatelnost, také značné nevýhody – jedná se pouze o formální sestavení determinantu (všechny prvky by měly být z jednoho okruhu, což zde ale nejsou, protože se v našem „determinantu" mísí reálná čísla a vektory).

Cíl: *Chceme přijít na lepší vyjádření, které zachová výhody a zbaví se nevýhod.*

Místo vektorů $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ bychom v determinantu potřebovali mít skaláry. Na to se báječně hodí **skalární součin**. Vezměme libovolný vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, jehož souřadnice jsou vyjádřené vzhledem ke kartézské bázi. Pak

$$\vec{x} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}.$$

Nyní ho (například zprava) skalárně vynásobme bázovým vektorem $\vec{e_1}$. Z předchozího vyjádření dostaneme

$$\vec{x} \cdot \vec{e_1} = x_1\vec{e_1} \cdot \vec{e_1} + x_2\vec{e_2} \cdot \vec{e_1} + x_3\vec{e_3} \cdot \vec{e_1} = x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 0 = x_1,$$

jelikož každé dva různé bázové vektory $\vec{e_i}, \vec{e_j}$ jsou k sobě kolmé, a tedy je jejich skalární součin roven nule, a zároveň

$$\forall i \in \{1, 2, 3\} : \vec{e_i} \cdot \vec{e_i} = \|\vec{e_i}\|^2 = 1^2 = 1,$$

protože bázové vektory kartézské soustavy souřadnic jsou jednotkové.

Porovnáme-li začátek a konec, vidíme, že platí

$$\vec{x} \cdot \vec{e_1} = x_1.$$

Analogicky získáme:

$$\vec{x} \cdot \vec{e_2} = x_2,$$
$$\vec{x} \cdot \vec{e_3} = x_3.$$

Využijme získaných znalostí a vynásobme naše původní vyjádření vektorového součinu pomocí „determinantu“, tj.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \end{vmatrix} = \vec{w},$$

skalárně vynásobme vektorem $\vec{x}$ a použijme dvakrát vztah (5.3):

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \end{vmatrix} \cdot \vec{x} &= \vec{w} \cdot \vec{x}, \\
[(u_1 v_2 \overrightarrow{e_3} + u_2 v_3 \overrightarrow{e_1} + u_3 v_1 \overrightarrow{e_2}) - (v_2 u_3 \overrightarrow{e_1} + v_3 u_1 \overrightarrow{e_2} + v_1 u_2 \overrightarrow{e_3})] \cdot \vec{x} &= \vec{w} \cdot \vec{x}, \\
(u_1 v_2 \overrightarrow{e_3} \cdot \vec{x} + u_2 v_3 \overrightarrow{e_1} \cdot \vec{x} + u_3 v_1 \overrightarrow{e_2} \cdot \vec{x}) - (v_2 u_3 \overrightarrow{e_1} \cdot \vec{x} + v_3 u_1 \overrightarrow{e_2} \cdot \vec{x} + v_1 u_2 \overrightarrow{e_3} \cdot \vec{x}) &= \vec{w} \cdot \vec{x}, \\
\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \overrightarrow{e_1} \cdot \vec{x} & \overrightarrow{e_2} \cdot \vec{x} & \overrightarrow{e_3} \cdot \vec{x} \end{vmatrix} &= \vec{w} \cdot \vec{x}, \\
\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} &= \vec{w} \cdot \vec{x}.
\end{aligned}$$

Takovéto vyjádření vektorového součinu je nejen elegantní, ale také neobsahuje žádné „determinanty“ s prvky, které jsou vektory. Levá strana obsahuje determinant, který má v každém z řádků jeden vektor, jedná se tedy o determinant, jak ho známe. Uvědomme si ještě, že souřadnice všech vektorů máme vyjádřené vzhledem ke kartézské bázi, která je nezbytnou součástí odvození.[23]

Právě v této části textu se děje to nejdůležitější. Podařilo se nám elegantně vysvětlit běžnou definici vektorového součinu, která často bývá na vysokých školách uváděna bez jakékoliv motivace a mnohdy se studentům se středoškolskou definicí vektorového součinu vůbec nespojí.

Naše poznatky shrneme v následujících dvou větách.

Věta (vyjádření vektorového součinu)**.** *Zvolme kartézskou soustavu souřadnic a označme souřadnice vektorů $\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}$ podle dohody ze začátku podkapitoly. Pak pro každý $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ existuje právě jeden $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ takový, že pro všechny $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ platí*

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \vec{w} \cdot \vec{x}.$$

Důkaz:
Důkaz byl proveden odvozením, viz výše.

□

[23] Přesněji nám stačí libovolná kladná ortonormální báze, viz [Be], kapitola 26, strana 367, avšak pro jednoduchost zůstáváme u báze kartézské, která je čtenářovi blízká.

Poznámka: *Předchozí věta se často na vysokých školách uvádí jako jednoznačná definice vektorového součinu, za který je pak označen takový vektor $\vec{w}$, který uvedenému výroku vyhovuje.*[24] *Vztah, pomocí kterého jsme vektorový součin definovali v této práci my, je pak potřeba dokázat podobně jako volené vlastnosti, na základě kterých jsme tento vztah odvodili.*

Věta (základní vlastnosti vektorového součinu)**.** *Nechť $\vec{u}, \vec{v}$ a $\vec{w}$ jsou vektory z předchozí věty. Pak je vektor $\vec{w}$ kolmý ke každému z vektorů $\vec{u}, \vec{v}$, velikost $\vec{w}$ je rovna velikosti obsahu rovnoběžníku zadaného vektory $\vec{u}, \vec{v}$, jsou-li lineárně nezávislé, anebo nule, jsou-li lineárně závislé, a konečně v případě, že $\vec{u}, \vec{v}$ jsou lineárně nezávislé, je $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ kladná báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$.*

Důkaz:
Již jsme ukázali, že při vyjádření z předchozí věty platí $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$, tj. vektor $\vec{w}$ je vektorovým součinem vektorů $\vec{u}, \vec{v}$. V předchozích kapitolách jsme vlastnosti, které zmiňujeme v této větě, pro vektorový součin odvodili a na základě nich ho také jednoznačně definovali.

□

4.3 Základní vlastnosti

Připomenutí: *Z předchozí kapitoly víme:*

$$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3 : \vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c},$$

$$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3 : \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c},$$

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 : \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

Dohoda: *V celé této podkapitole budeme kvůli přehlednosti pro determinanty typu*

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}$$

používat zkrácený zápis:

$$\begin{vmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{x} \end{vmatrix}.$$

Ve všech těchto případech jsme si zvolili kartézskou soustavu souřadnic s tím, že jsme označili souřadnice vektorů $\vec{u}, \vec{v}, \vec{x} \in \mathbb{R}^3$ vzhledem k této kladně volené kartézské bázi jako $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ a $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

[24] [Se], kapitola 2, strana 113.

Využívaje nově získaného vyjádření vektorového součinu z předchozí podkapitoly se nyní pokusme odvodit další vlastnosti vektorového součinu:

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \, \forall c \in \mathbb{R} : (c \cdot \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (c \cdot \vec{v}) = c \cdot (\vec{u} \times \vec{v}). \tag{4.4}$$

Důkaz:

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \, \forall c \in \mathbb{R} : \begin{vmatrix} c \cdot \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{u} \\ c \cdot \vec{v} \\ \vec{x} \end{vmatrix} = c \cdot \begin{vmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{x} \end{vmatrix} \; \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3.$$

□

Můžeme si zároveň všimnout další vlastnosti:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \iff (\vec{u}, \vec{v}) \text{ lineárně nezávislá.} \tag{4.5}$$

Důkaz:

$$\begin{vmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{x} \end{vmatrix} = 0 \; \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \iff (\vec{u}, \vec{v}) \text{ lineárně nezávislá.}$$

□

Horní rovnosti nám říkají, že změníme-li velikost libovolného z vektorů na její c-násobek, změní se také velikost jejich vektorového součinu na jeho c-násobek s tím, že zaměníme-li navíc jeden z vektorů za vektor k němu opačný, změní se také výsledný vektor na opačný. Uvedený výrok pak pouze formalizuje skutečnosti, které jsme již rozebírali v dřívějších kapitolách. Je-li vektor $\vec{u}$ reálným násobkem vektoru $\vec{v}$, pak neurčují rovnoběžník, a tedy velikost jejich vektorového součinu musí být rovna nule, tedy $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.[25]

A nakonec si ještě uveďme jeden zajímavý vztah, který dává do souvislosti vztah skalárního součinu vektorových součinů a determinantu skalárních součinů:

$$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3 : (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{a} \cdot \vec{d} \\ \vec{b} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{vmatrix}. \tag{4.6}$$

[25] Tato implikace platí i naopak.

Důkaz:
Zvolme takovou kladnou ortonormální bázi,[26] že $\vec{a} = (a_1, 0, 0)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, 0)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ a $\vec{d} = (d_1, d_2, d_3)$. Dosaďme souřadnice do levé strany rovnosti:

$$\begin{aligned}
(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) &= (0, 0, a_1, b_2) \cdot (c_2d_3 - c_3d_2, c_3d_1 - c_1d_3, c_1d_2 - c_2d_1),\\
(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) &= a_1b_2c_1d_2 - a_1b_2c_2d_1,\\
(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) &= (a_1c_1)(b_2d_2) - (a_1d_1)(b_2c_2),\\
(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) &= (a_1c_1)(b_2d_2) + a_1b_1c_1d_1 - a_1b_1c_1d_1 - (a_1d_1)(b_2c_2),\\
(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) &= (a_1c_1)(b_2d_2 + b_1d_1) - (a_1d_1)(b_2c_2 + b_1c_1),\\
(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) &= (a_1c_1)(b_1d_1 + b_2d_2) - (a_1d_1)(b_1c_1 + b_2c_2),\\
(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) &= \begin{vmatrix} a_1c_1 & a_1d_1 \\ b_1c_1 + b_2c_2 & b_1d_1 + b_2d_2 \end{vmatrix},\\
(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) &= \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{a} \cdot \vec{d} \\ \vec{b} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

□

Tato rovnost se anglicky nazývá Quadruple product.[27] Využíváme ji například v rovinné a sférické geometrii.[28]

[26] [Be], kapitola 26, strana 367.
[27] Doslovný český překlad zní Čtyřnásobný součin, avšak tento pojem se v matematice neužívá.
[28] [Gi], strana 76–80.

5 Dodatek – determinant

Definice: Determinant *reálné čtvercové matice typu* 1×1 *je roven hodnotě jediného prvku této matice.* Determinant *reálné čtvercové matice* A *typu* $n \times n$*, kde* $n \in \mathbb{N}, n > 1$*, spočítáme jako*

$$detA = a_{n1} \cdot A_{n1} + a_{n2} \cdot A_{n2} + ... + a_{nn} \cdot A_{nn},^{29}$$

kde a_{ij} *je prvek matice* A *nacházející se v i-tém řádku a j-tém sloupci a kde* A_{ij} *nazýváme* algebraickým doplňkem prvku a_{ij} *v této matici. Platí:*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot A^*_{ij},$$

kde A^*_{ij} *je determinant čtvercové matice typu* $(n-1) \times (n-1)$*, která vznikne z matice* A *vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.* Řádem *determinantu rozumíme číslo* n*.*

5.1 Determinant druhého řádu

Nahlédněme, že vztah (2.2) k výpočtu determinantu druhého řádu, ke kterému jsme dospěli v kapitole dva, odpovídá definici.

Nechť

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}.$$

Pak

$$detA = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = u_2 \cdot A_{21} + v_2 \cdot A_{22} = (-1)^{2+1} \cdot u_2 \cdot v_1 + (-1)^{2+2} \cdot v_2 \cdot u_1 = u_1 v_2 - u_2 v_1. \quad (5.1)$$

Vidíme, že pravé strany obou rovností se rovnají, vztah (2.2) je tedy korektní.

5.2 Determinant třetího řádu

V kapitole 4 jsme potřebovali počítat s determinanty třetího řádu. Spočítejme tedy nějaký takový determinant pomocí naší nové definice.

Nechť

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}.$$

[29] Determinant je možné definovat rekurzivně rozvojem podle libovolného řádku či sloupce. Pro zjednodušení jsme v textu zvolili pevně poslední řádek. Tomuto způsobu výpočtu determinantu se v matematice říká rozvoj determinantu podle daného řádku či sloupce.

Pak

$$
\begin{aligned}
detA &= \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = u_3 \cdot A_{31} + v_3 \cdot A_{32} + w_3 \cdot A_{33}, \\
detA &= (-1)^{3+1} \cdot u_3 \cdot \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot v_3 \cdot \begin{vmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot w_3 \cdot \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}, \\
detA &= u_3 \cdot (v_1 w_2 - v_2 w_1) - v_3 \cdot (u_1 w_2 - u_2 w_1) + w_3 \cdot (u_1 v_2 - u_2 v_1), \\
detA &= v_1 w_2 u_3 - w_1 v_2 u_3 - u_1 w_2 v_3 + w_1 u_2 v_3 + u_1 v_2 w_3 - v_1 u_2 w_3, \\
detA &= u_1 v_2 w_3 + v_1 w_2 u_3 + w_1 u_2 v_3 - (u_1 w_2 v_3 + v_1 u_2 w_3 + w_1 v_2 u_3).
\end{aligned}
$$

Při výpočtu jsme užili vztahu (5.1) s tím, že poslední úpravy byly už pouze estetické, aby se výsledek co nejvíce podobal výsledku, který získáme po použití tzv. Sarrusova pravidla.[30]

Celkem tedy máme

$$
detA = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = u_3 \cdot \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} - v_3 \cdot \begin{vmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{vmatrix} + w_3 \cdot \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}, \tag{5.2}
$$

či

$$
detA = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = u_1 v_2 w_3 + v_1 w_2 u_3 + w_1 u_2 v_3 - (u_1 w_2 v_3 + v_1 u_2 w_3 + w_1 v_2 u_3). \tag{5.3}
$$

5.3 Základní vlastnosti determinantu

Podívejme se, co se s determinantem například třetího řádu stane, vynásobíme-li jeden z jeho řádků nějakou konstantou $c \in \mathbb{R}$.

Pro tyto účely si nyní souřadnice[31] příslušné jednomu vektoru napíšeme do stejného řádku na rozdíl od předchozích výpočtů, kde byly ve stejném sloupci.

Ještě před samotným výpočtem si všimněme, že se determinant tímto přeuspořádáním souřadnic nezmění.

Nechť

$$
A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}, \; A^T = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}.
$$
[32]

Pak dle (5.3)

$$
\begin{aligned}
detA^T &= u_1 v_2 w_3 + u_2 v_3 w_1 + u_3 v_1 w_2 - (u_1 v_3 w_2 + u_2 v_1 w_3 + u_3 v_2 w_1), \\
detA^T &= u_1 v_2 w_3 + v_1 w_2 u_3 + w_1 u_2 v_3 - (u_1 w_2 v_3 + v_1 u_2 w_3 + w_1 v_2 u_3) = detA.
\end{aligned}
$$

□

[30] [Be], kapitola 14, strana 165–166.

[31] Souřadnice jsou vyjádřené vzhledem ke kartézské bázi.

[32] Matice A^T je tzv. maticí transponovanou k matici A. [Be], kapitola 4, strana 40.

Nyní jsme připraveni výpočet provést. Díky předchozí rovnosti můžeme využít vztahu (5.3).

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ cw_1 & cw_2 & cw_3 \end{vmatrix} = u_1v_2cw_3 + v_1cw_2u_3 + cw_1u_2v_3 - (u_1cw_2v_3 + v_1u_2cw_3 + cw_1v_2u_3),$$
$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ cw_1 & cw_2 & cw_3 \end{vmatrix} = c \cdot [u_1v_2w_3 + v_1w_2u_3 + w_1u_2v_3 - (u_1w_2v_3 + v_1u_2w_3 + w_1v_2u_3)],$$
$$\begin{vmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ c \cdot \vec{w} \end{vmatrix} = c \cdot detA^T = c \cdot detA.$$

Pozorování: *Determinant se po vynásobení jeho libovolného řádku či sloupce konstantou $c \in \mathbb{R}$ bude rovnat c-násobku původního determinantu. Například*

$$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3, \forall c \in \mathbb{R} : \begin{vmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ c \cdot \vec{w} \end{vmatrix} = c \cdot \begin{vmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{vmatrix}. \tag{5.4}$$

Uvědomme si, že pokud počítáme determinant matice, v jejichž řádcích či sloupcích jsou souřadnice nějakých vektorů $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vyjádřené vzhledem ke kartézské bázi, zachováme velikost, ale **změníme znaménko** determinantu, vezmeme-li místo jednoho z těchto vektorů vektor k němu **opačný**.
Podívejme se nyní, co se s determinantem stane, zaměníme-li v matici dva vektory.

$$\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = v_1u_2w_3 + u_1w_2v_3 + w_1v_2u_3 - (v_1w_2u_3 + u_1v_2w_3 + w_1u_2v_3),$$
$$\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = -[(u_1v_2w_3 + v_1w_2u_3 + w_1u_2v_3) - (u_1w_2v_3 + v_1u_2w_3 + w_1v_2u_3)],$$
$$\begin{vmatrix} \vec{v} \\ \vec{u} \\ \vec{w} \end{vmatrix} = -detA^T = -detA.$$

Pozorování: *Záměnou dvou řádků matice se znaménko determinantu změní.*[33] *Například*

$$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3 : \begin{vmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \vec{v} \\ \vec{u} \\ \vec{w} \end{vmatrix}. \tag{5.5}$$

[33] To platí pro výměnu libovolných dvou řádků či sloupců matice libovolného čtvercového typu. [Be], kapitola 14, strana 168–170.

Závěr

Naznačili jsme propojení mezi vlastnostmi vektorového součinu, jeho definicí a samotným výpočtem. Navíc jsme zjistili, jak hledat vektory kolmé v prostoru, jak spočítat analytickou metodou obsah rovnoběžníku zadaného dvěma lineárně nezávislými vektory, a dokonce jsme se dozvěděli něco o orientaci vektorového prostoru. Ukázali jsme některé ze základních vlastností vektorového součinu a naznačili jsme, kde se využívají.

Vysvětlili jsme, proč definujeme vektorový součin tak, jak je definován například v knize [Se], kapitola 2, strana 113, což byl jeden z hlavních motivačních pilířů této práce. Ta pak může být užitečná nejen studentům středních a vysokých škol, ale také pedagogům, kteří toto téma vyučují, a to především po stránce motivační.

Okrajově jsme se v práci zmínili i o determinantech, se kterými jsme postupně pracovali víc a víc, především v kapitole o orientaci vektorového prostoru.

Seznam použité literatury

[Be] BEČVÁŘ J.: *Lineární Algebra.* Matfyzpress, Praha, 2005.

[Se] SEKANINA M. A KOL.: *Geometrie I.* SPN, Praha, 1986.

[Gi] GIBBS J. W., WILSON E. B.: *Vector Analysis.* C. Scribner's Sons, New York, 1901.