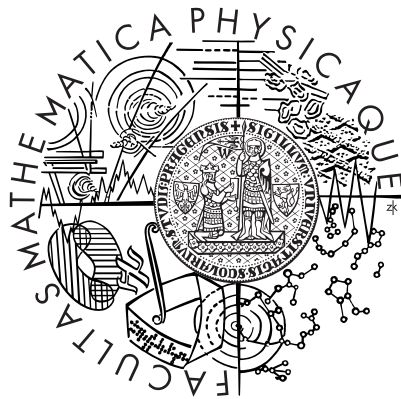


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Bc. Ondřej Pejcha

Rozlišení hvězdných povrchů dvojitými gravitačními mikročočkami

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. David Heyrovský, Ph.D.

Studijní program: Fyzika, teoretická fyzika

Dovoluji si poděkovat Mgr. Davidu Heyrovskému, Ph.D., za obětavou pomoc, neocenitelné rady a trpělivost. Děkuji Mgr. Michalu Taranovi za umožnění přístupu k počítači, na němž jsem provedl většinu výpočtů.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 16. dubna 2008

Bc. Ondřej Pejcha

Obsah

1 Úvod	5
1.1 Gravitační čočky a mikročočky	5
1.2 Dvojité gravitační mikročočky	6
1.3 Cíle práce	7
2 Teorie gravitačních mikročoček	8
2.1 Ohyb světla v gravitačním poli	8
2.1.1 Čočková rovnice	8
2.1.2 Zjasnění způsobené dvojitou gravitační mikročočkou	11
2.1.3 Kritické a kaustické křivky	13
2.1.4 Analytické rozvoje kolem záhybu a hrotu	14
2.2 Metoda výpočtu zjasnění rozlišeného zdroje	15
2.3 Okrajové ztemnění	17
3 Citlivost na rozlišený zdroj	20
3.1 Oblasti citlivosti	20
3.2 Analytické odhady	25
3.3 Pravděpodobnost efektu plošného zdroje	30
4 Chromaticita	36
4.1 Oblasti citlivosti	36
4.2 Porovnání modelů okrajového ztemnění	41
5 Spektrum během mikročočkování	43
6 Platnost aproximace v okolí záhybu	50
7 Diskuse a závěr	54
Literatura	56

Název práce: Rozlišení hvězdných povrchů dvojitými gravitačními mikročočkami

Autor: Bc. Ondřej Pejcha

Katedra (ústav): Ústav teoretické fyziky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. David Heyrovský, Ph.D.

e-mail vedoucího: David.Heyrovsky@mff.cuni.cz

Abstrakt: Dvojité gravitační mikročočky umožňují efektivně zkoumat rozložení intenzity záření na povrchu hvězd. V této práci zkoumáme citlivost míst v geometrii čočky na efekty spojené s plošným zdrojem. Identifikovali jsme dříve neznámé citlivé oblasti mezi protilehlými hroty dvou kaustických křivek. Zjistili jsme, že pravděpodobnost detekce efektu plošného zdroje může být až dvakrát vyšší než pravděpodobnost přechodu kaustické křivky. Studovali jsme vliv okrajového ztemnění a porovnali dvě třídy jeho modelů. U spektrálních změn zdroje jsme popsali základní efekty a srovnali je s podobnými jevy popsány u jednoduchých čoček dříve. Ověřovali jsme také platnost aproximace lineárního záhybu a našli jsme neshodu s přesnými výpočty i v případech příznivých pro aproximaci.

Klíčová slova: gravitační mikročočky, okrajové ztemnění, hvězdné spektrum

Title: Resolving stellar surfaces with binary gravitational microlensing

Author: Bc. Ondřej Pejcha

Department: Institute of Theoretical Physics

Supervisor: Mgr. David Heyrovský, Ph.D.

Supervisor's e-mail address: David.Heyrovsky@mff.cuni.cz

Abstract: Binary gravitational microlensing has demonstrated excellent prospects for studying the surface brightness distribution of stars. In this work we study the extended-source effects that affect the amplification of the source flux. We identify regions in the geometry that are sensitive to the extended source and find previously unknown areas between facing cusps of multi-part caustics. We find out that the probability of detecting the extended-source effect can be as much as two times higher than the probability of observing pure caustic crossing. We explore the chromaticity of binary microlensing and compare two classes of models of limb darkening. We describe spectral changes during binary microlensing and compare their amplitude to the point-lens case. Finally, we investigate the linear fold approximation and find significant residuals even in cases favorable for the method.

Keywords: gravitational microlensing, limb darkening, stellar spectrum

Kapitola 1

Úvod

1.1 Gravitační čočky a mikročočky

Tradice studia ohybu světla v gravitačním poli hmotných objektů sahá až do počátku devatenáctého století. Větší pozornosti se jevu dostalo ale až po vzniku obecné teorie relativity a jejím experimentálním potvrzení právě pomocí ohybu světla v gravitačním poli Slunce. *Gravitační čočkování*, jak začal být efekt záhy nazýván, propočítali ve třicátých letech Einstein (1936) pro objekty hvězdných hmotností a Zwicky (1937) pro vzdálené galaxie. První případ gravitačního čočkování mimo Sluneční soustavu pozorovali Walsh a kol. (1979) u kvazaru zobrazeného galaxií a první obrazy plošných zdrojů, galaxií, zobrazených kupou galaxií objevili Lynds & Petrosian (1989).

Na přelomu sedmdesátých a osmdesátých let ukázali Chang & Refsdal (1979), že jednotlivé hvězdy v halu čočkující galaxie sice nedokáží vytvořit rozlišitelné obrazy vzdáleného čočkovaného kvazaru, ale jejich pohyb vůči kvazaru způsobí časovou proměnnost součtu jasností jednotlivých obrazů. Tento jev byl nazván *mikročočkovaní*. Dnes se toto označení používá pro jakékoliv gravitační čočkování, při němž nedokážeme rozlišit jednotlivé obrazy, ale pozorujeme časové změny celkové jasnosti.

Paczynski (1986) ukázal, že chladná baryonická temná hmota v halu Galaxie se projeví efektem mikročočky, který zjasní hvězdu ve Velkém Magellanově mračnu. Pravděpodobnost takového jevu je ovšem malá, v řádu 10^{-6} . Simultánní monitorování několika milionů hvězd ale umožní několik takových událostí detekovat, protože vzájemný vlastní pohyb hvězdy v pozadí a čočky se projeví časovou závislostí jasnosti. Tuto závislost vynesenu do grafu nazveme *světelnou křivkou*. Technologie potřebná k hledání mikročoček začala být dostupná na počátku devadesátých let a první mikročočkové události byly ohlášeny v roce 1993. Různé monitorovací projekty hledaly hmotné kompaktní objekty v halu Galaxie po několik let a podařilo se ukázat, že hmotná kompaktní tělesa tvoří většinu temné hmoty v halu (Afonso a kol., 2003). Gravitační mikročočky se ale k různým zajímavým účelům používají nadále. Pozoruje se většinou směrem k výduti Galaxie, kde události nastávají výrazně častěji než směrem k Magellanovým mračkům.

1.2 Dvojité gravitační mikročočky

Speciální případ mikročočky nastává v situaci, kdy čočku tvoří dva hmotné body ve stejné vzdálenosti. Většina hvězd se nachází v dvojhvězdách a tak z teoretických výpočtů (Mao & Paczyński, 1991) plyne, že přibližně 10 % událostí by mělo vykazovat specifický tvar světelné křivky způsobený dvojitou mikročočkou. Skutečně pozorované dvojoččky představují 3 až 8 % všech událostí (Thomas a kol., 2005), což ale znamená desítky publikovaných případů (Alcock a kol., 2000; Jaroszyński, 2002; Jaroszyński a kol., 2004, 2006; Skowron a kol., 2007).

Speciálním případem dvojité mikročočky je soustava hvězda – planeta. Přítomnost planety se na světelné křivce jednoduché čočky projeví krátkými poruchami, které jsou zřetelné i pro velmi nízké poměry hmotností hvězdy a planety. Pečlivým sledováním vhodných mikročočkových událostí se týmu PLANET¹ a μ FUN² podařilo objevit už šest planet. Události OGLE-2003-BLG-235 (Bond a kol., 2004) a OGLE-2005-BLG-071 (Udalski a kol., 2005) vykazují projevy planet o hmotnosti Jupiteru, planeta v OGLE-2005-BLG-169 (Gould a kol., 2006) se podobá Neptunu, planeta v OGLE-2005-BLG-390 (Beaulieu a kol., 2006) je jedna z nejlehčích dosud objevených a OGLE-2006-BLG-109 (Gaudi a kol., 2008) obsahuje dvě planety podobné Jupiteru a Saturnu.

Specifické projevy podvojnosti čočky ve světelné křivce nastávají díky kaustickým křivkám (viz část 2.1.3), na nichž zjasnění bodového zdroje dosahuje formálně nekonečna. Přečází-li přes takové místo plošný zdroj, některé jeho části se zjasní více než ostatní a ze světelné křivky je možné rekonstruovat rozložení jasu na povrchu zdroje. Můžeme tak studovat okrajové ztemnění hvězd a potažmo i testovat modely hvězdných atmosfér.

Modely hvězdných atmosfér se tradičně ověřují na Slunci, jehož blízkost umožňuje detailně měřit okrajové ztemnění a tvar spektra. Pro hvězdy jiných spektrálních typů a vývojových stádií se používají jiné metody jako interferometrie nebo zákrytové dvojhvězdy. Interferometrie ale umožňuje studium pouze blízkých hvězd a u zákrytových dvojhvězd je potřebná značná přesnost fotometrie pro oddělení vlivu jiných efektů. Vhodnou alternativou k těmto metodám jsou gravitační mikročočky, které umožňují nejen z fotometrie běžné kvality rekonstruovat profil okrajového ztemnění (Heyrovský, 2003), ale také studovat teplotní strukturu hvězdných atmosfér pomocí časové změny spekter (Heyrovský a kol., 2000).

Parametry okrajového ztemnění byly dosud publikovány u sedmi dvojitých mikročoček: MACHO 97-BLG-28 (Albrow a kol., 1999a), MACHO 97-BLG-41 (Albrow a kol., 2000), MACHO 98-SMC-1 (Afonso a kol., 2000), OGLE-1999-BUL-23 (Albrow a kol., 2001a), EROS-BLG-2000-5 (An a kol., 2002; Fields a kol., 2003), MOA 2002-BLG-33 (Abe a kol., 2003) a OGLE-2002-BLG-069 (Kubas a kol., 2005). Navíc světelné křivky všech výše zmíněných planetárních událostí silně ovlivňuje nebodovost a okrajové ztemnění zdroje. Spektroskopická po-

¹<http://planet.iap.fr/>

²<http://www.astronomy.ohio-state.edu/~microfun/>

zorování dvojitých mikročoček byla získána pro dvě události: EROS-BLG-2000-5 (Albrow a kol., 2001b; Castro a kol., 2001) a OGLE-2002-BLG-069 (Cassan a kol., 2004). Mikročočkové události s velkým zjasněním zdroje se v poslední době začínají využívat také ke studiu chemického složení hvězd hlavní posloupnosti v galaktické výduti (Cohen a kol., 2008, a další). Během takových událostí ale také často nelze považovat zdroj za bodový.

1.3 Cíle práce

V této práci se po stručném úvodu do teorie gravitačního mikročočkování a metod výpočtu zjasnění plošného zdroje (Kapitola 2) budeme zabývat rozdíly ve zjasnění bodového a plošného zdroje pro jeho různé polohy vzhledem k dvojitě gravitační čočce (Kapitola 3). Využijeme jak numerických výpočtů (část 3.1) tak analytických odhadů v části 3.2. V části 3.3 odhadneme pravděpodobnost pozorování efektu plošného zdroje. Vlivem konkrétního tvaru okrajového ztemnění na zjasnění se zabývá Kapitola 4 a v Kapitole 5 probereme změny spektra mikročočkovaného zdroje. Platnost jedné z aproximací používaných při analýze mikročočkových událostí ověřujeme v Kapitole 6. Poslední sedmá Kapitola shrnuje a diskutuje zjištěné poznatky.

Některé části této diplomové práce byly publikovány v článku Pejcha & Heyrovský (2008, dále jen PH08), který obsahuje i poznatky mnou nevytvořené, ale pro tuto diplomovou práci relevantní. Takové myšlenky jsou pak v tomto textu označené referencí na článek PH08.

Kapitola 2

Teorie gravitačních mikročoček

2.1 Ohyb světla v gravitačním poli

2.1.1 Čočková rovnice

Nechť se ve vzdálenosti D_{OL} od pozorovatele nachází hmotný bod o hmotnosti M . Ten zobrazuje světelné paprsky vycházející ze zdroje S . Pro popis poloh obrazů zavedeme úhlový souřadný systém $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$, v němž jsou osy θ_1 a θ_2 na sebe kolmé a hmotný bod se nachází na souřadnicích $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$. Stejným způsobem zvolíme i úhlové souřadnice $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$ pro popis polohy zdroje. Vzdálenost podél optické osy (spojnice pozorovatel – hmotný bod) budeme označovat s . Z „bočního pohledu“ na Obrázku 1 plyne

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\theta} - \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \boldsymbol{\alpha}. \quad (1)$$

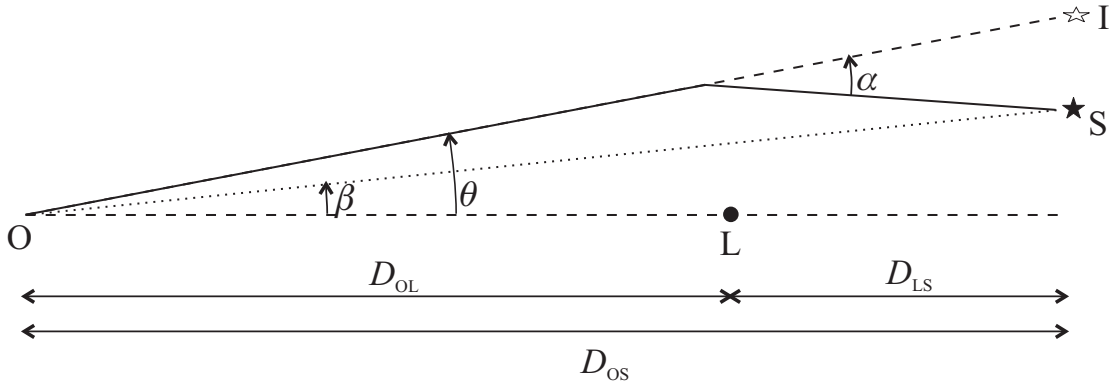
V prostoročase zakřiveném hmotným bodem M jsou vzdálenosti D_{OL} , D_{LS} a D_{OS} definovány právě tak, aby platila rovnice (1); jedná se o *úhlové vzdálenosti*. Uvažujeme-li paprsky ohýbané v gravitačním poli popsaném Schwarzschildovou metrikou a prolétávající kolem zdroje ve vzdálenosti podstatně větší než je Schwarzschildův poloměr, bude úhel odklonu $\boldsymbol{\alpha}$ v limitě slabého pole dán vztahem

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{4GM}{c^2 D_{OL}} \frac{\boldsymbol{\theta}}{|\boldsymbol{\theta}|^2}, \quad (2)$$

kde G je gravitační konstanta a c rychlost světla ve vakuu.

Máme-li obecné statické rozložení hmoty $\sigma(\boldsymbol{\theta}, s)$, jehož rozsah podél optické osy je mnohem menší než D_{OL} a D_{LS} , použijeme aproximaci *tenké čočky* (angl. thin lens approximation). V této aproximaci předpokládáme, že hmota je rozložena v rovině kolmé na optickou osu ve vzdálenosti D_{OL} s hustotou $\Sigma(\boldsymbol{\theta})$ definovanou

$$\Sigma(\boldsymbol{\theta}) = \int \sigma(\boldsymbol{\theta}, s) ds. \quad (3)$$



Obrázek 1: Geometrie gravitační čočky. Jeden ze světelných paprsků zdroje (S) se ohýbá v gravitačním poli čočky (L) a přichází k pozorovateli (O), který vidí obraz (I). Převzato a upraveno z Mollerach & Roulet (2002, str. 30).

Předpokládáme-li dále, že toto rozložení hmoty je průhledné a generuje slabé gravitační pole, bude výsledný úhel odklonu dán složením příspěvků jednotlivých infinitezimálních částí vztahem

$$\alpha(\boldsymbol{\theta}) = \frac{4G}{c^2 D_{OL}} \int \Sigma(\boldsymbol{\theta}') \frac{(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}')}{|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'|^2} d^2\boldsymbol{\theta}'. \quad (4)$$

V této práci se zabýváme dvojitými gravitačními mikročočkami, jejichž rozložení hmoty $\Sigma(\boldsymbol{\theta})$ je tvořené dvěma hmotnými body. V takovém případě se integrál v rovnici (4) redukuje na součet dvou členů. Výsledný úhel ohybu je

$$\alpha(\boldsymbol{\theta}) = \frac{4GM}{c^2 D_{OL}} \left(\mu_A \frac{\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_A}{|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_A|^2} + \mu_B \frac{\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_B}{|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_B|^2} \right), \quad (5)$$

kde $\boldsymbol{\theta}_A$ a $\boldsymbol{\theta}_B$ jsou úhly, pod kterými vidí pozorovatel hmotné body, jejichž hmotnosti jsou $\mu_A M$ a $\mu_B M$. Veličina $M = \int \Sigma(\boldsymbol{\theta}) d^2\boldsymbol{\theta}$ je celková hmotnost čočky a platí tedy $\mu_A + \mu_B = 1$.

Zavedeme nové úhlové souřadnice $\mathbf{x} = \boldsymbol{\theta}/\theta_E$ a $\mathbf{y} = \boldsymbol{\beta}/\theta_E$, kde θ_E představuje *Einsteinův úhel* definovaný vztahem

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OS} D_{OL}}}. \quad (6)$$

V případě typického mikročočkování v Galaxii, kdy světlo ohýbá hvězda ($M \sim 0,5 M_\odot$) nacházející se mezi Zemí a výdutí Galaxie ve vzdálenosti $D_{OL} \sim 6$ kpc a kdy se zdroj nachází uvnitř výduti ($D_{OS} \sim 8$ kpc), dosahuje θ_E řádu 10^{-4} až 10^{-3} úhlové vteřiny. To neumožňuje běžným optickým dalekohledům rozlišit jednotlivé obrazy či změřit změnu polohy fotocentra. Současné nejlepší úhlové rozlišení dosahované pozemskými dalekohledy s adaptivní optikou je maximálně $\sim 0,04''$, avšak

interferometry VLTI³ a SIM⁴ by v budoucnu měly dosáhnout potřebného rozlišení. Typické vzájemné tangenciální rychlosti hvězd v Galaxii dávají dobu přechodu t_E zdroje přes úsečku o délce θ_E (a tím i časovou škálu trvání úkazu) v řádu desítek až stovek dnů. Parametr t_E je degenerovanou kombinací hmotnosti čočky, vzdáleností a relativní tangenciální rychlosti, ale zároveň jedinou veličinou s fyzikálním významem měřitelnou během jednoduchých mikročočkových událostí.

V nových souřadnicích přejde čočková rovnice (1) s úhlem ohybu daným rovnicí (5) do jednoduchého tvaru

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mu_A \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_A}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_A|^2} - \mu_B \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_B}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_B|^2}, \quad (7)$$

kde $\mathbf{x}_A = \boldsymbol{\theta}_A/\theta_E$ a $\mathbf{x}_B = \boldsymbol{\theta}_B/\theta_E$. Nechť osa x_1 prochází oběma hmotnými body a počátek souřadnic se nachází v těžišti. V této konvenci platí $\mathbf{x}_A = (-\mu_B d, 0)$ a $\mathbf{x}_B = (\mu_A d, 0)$, kde d je vzdálenost mezi hmotnými body v souřadnicích \mathbf{x} .

Často je výhodné přepsat vektorové polohy v rovnici (7) pomocí komplexních proměnných $z = x_1 + ix_2$ a $\xi = y_1 + iy_2$ (Witt, 1990; Witt & Petters, 1993). Předchozí konvence zůstávají v platnosti, konkrétně jednotková úsečka má délku θ_E a polohám hmotných bodů \mathbf{x}_A a \mathbf{x}_B odpovídají čísla $z_A = -\mu_B d$ a $z_B = \mu_A d$. V tomto přepisu vypadá rovnice (7) následovně

$$\xi = z - \frac{\mu_A}{\bar{z} - \bar{z}_A} - \frac{\mu_B}{\bar{z} - \bar{z}_B}, \quad (8)$$

kde pruh značí komplexní sdružení.

Výše uvedené čočkové rovnice popisují závislost polohy zdroje ξ na poloze obrazu z , ale pro praktické použití nás zajímá opačná závislost. Potřebovali bychom tedy čočkovou rovnici invertovat. Provedeme komplexní sdružení celé rovnice (8), vyjádříme z ní \bar{z} a dosadíme zpět do rovnice (8). Po úpravách dostaneme algebraickou rovnici pátého stupně v proměnné z

$$\sum_{i=0}^5 a_i z^i = 0. \quad (9)$$

Komplexní koeficienty a_i závisí pouze na poloze zdroje, polohách hmotných bodů a jejich relativních hmotnostech. Kvůli značné délce koeficientů neuvádíme jejich explicitní tvar. Řešení rovnice (9) jsou polohy obrazů z_j , případně \mathbf{x}_j ve vektorové notaci, $j = 1 \dots 5$. Vzhledem k užitým úpravám je vždy nutné zkontrolovat získané polohy obrazů s rovnicemi (8) nebo (7), protože počet skutečných obrazů je vždy buď tři nebo pět (viz část 2.1.3). Kořeny polynomu pátého stupně je nutné hledat numerickými prostředky, což znemožňuje provést analytickou inverzi čočkové rovnice.

³<http://www.eso.org/projects/vlti/>

⁴<http://planetquest.jpl.nasa.gov/SIM/>

2.1.2 Zjasnění způsobené dvojitou gravitační mikročočkou

Gravitační čochování není spojeno s emisí ani absorpcí záření, a proto zůstává specifická intenzita během čochování nezměněná. Navíc v případě statického rozložení hmoty nedochází ani ke změně frekvence záření (kromě kosmologického červeného posuvu, který se ale při mikročochování v Galaxii neuplatňuje), takže plošná jasnost čochovaného zdroje je stejná jako při nepřítomnosti čočky. Pozorovaný světelný tok infinitezimálně malého (bodového) zdroje je součin jeho plošné jasnosti a prostorového úhlu, který vytíná na obloze. Zjasnění obrazu (tedy poměr světelných toků od obrazu a od zdroje v nepřítomnosti čočky) na souřadnicích \mathbf{x}_j je dáno poměrem ploch, které tento obraz a zdroj vytínají. Vztah mezi velikostí plošky obrazu a zdroje udává převrácená absolutní hodnota determinantu Jacobiho matice zobrazení (7), $J(\mathbf{x}) = \partial\mathbf{y}/\partial\mathbf{x}$, vyčíslená v poloze obrazu \mathbf{x}_j . Polohu obrazu získáme řešením rovnice (9) pro polohu zdroje \mathbf{y} . Celkové zjasnění bodového zdroje $A_0(\mathbf{y})$ pak dostaneme součtem přes všechny obrazy

$$A_0(\mathbf{y}) = \sum_j \frac{1}{|\det J(\mathbf{x}_j)|}. \quad (10)$$

Derivováním rovnice (7) získáme vztah pro determinant Jacobiho matice

$$\det J = 1 - \left(\frac{\mu_A}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_A|^2} + \frac{\mu_B}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_B|^2} \right)^2 + 4\mu_A\mu_B \frac{|(\mathbf{x} - \mathbf{x}_A) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_B)|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_A|^4 |\mathbf{x} - \mathbf{x}_B|^4}. \quad (11)$$

Tuto rovnici lze opět přepsat do komplexní notace stejným způsobem jako dříve a dostáváme

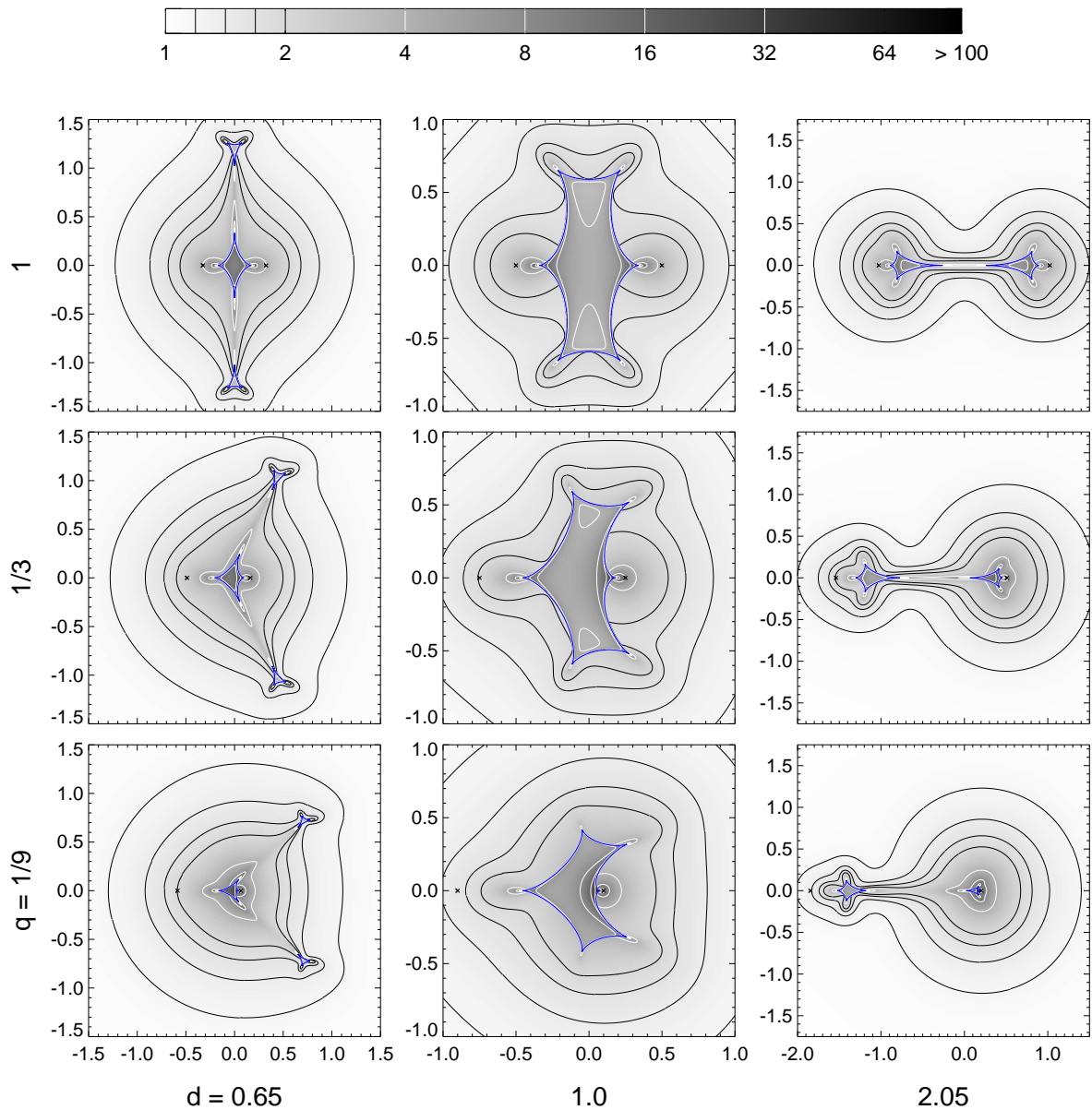
$$\det J = 1 - |\gamma|^2, \quad (12)$$

kde γ je *smyk* (angl. shear) definovaný pro dvojitou gravitační čočku vztahem

$$-\bar{\gamma} = \frac{\mu_A}{(z - z_A)^2} + \frac{\mu_B}{(z - z_B)^2}. \quad (13)$$

Závislost zjasnění A_0 na poloze bodového zdroje znázorňuje Obrázek 2. Kontury zjasnění jsou zde vyneseny pro devět konfigurací čoček získaných kombinací tří vzdáleností hmotných bodů $d \in \{0.65, 1.0, 2.05\}$ se třemi poměry jejich hmotností $q = \mu_A/\mu_B \in \{1/9, 1/3, 1\}$. Pokud bychom uvažovali dva limitní případy vzdálenosti hmotných bodů $d \searrow 0$ a $d \nearrow \infty$, viděli bychom, že kontury se budou podobat konturám zjasnění od jednoho hmotného bodu s hmotností M v prvním případě nebo konturám zjasnění dvou nezávislých hmotných bodů s hmotnostmi $\mu_A M$ a $\mu_B M$. Z Obrázku 2 rovněž vidíme, že nejvyšší zjasnění se dosahuje v oblastech kolem kaustických křivek (modré čáry), jejichž rozbor bude podán v sekci 2.1.3.

Hvězdy, které slouží jako zdroje v gravitačním mikročochování v Galaxii, nelze často považovat za bodové. Pro zdroj s plošnou jasností $B(\mathbf{y}')$ bude výsledné zjasnění A_* dáno integrálem plošné jasnosti vážené zjasněním bodového zdroje A_0 přes



Obrázek 2: Konturové grafy znázorňující zjasnění bodového zdroje A_0 pro různé geometrie čoček jako funkci polohy zdroje y . V každém sloupci jsou panely pro konfigurace se stejnou vzdáleností složek d udanou dole a v každém řádku pro stejný poměr hmotností q udaný po levé straně. V každém panelu je na horizontální ose vynesena souřadnice y_1 a na vertikální ose souřadnice y_2 . Polohy hmotných bodů vyznačují křížky, přičemž hmotnější bod se nachází vždy vpravo od lehčího. Kontury jsou vyneseny pro hodnoty $A_0 = 2^k$, přičemž černá barva přísluší hodnotám $k \in \{0.25, 0.5, 0.75, 1\}$ a bílá barva hodnotám $k \in \{2, 3, 4, 5\}$. Zjasnění A_0 je vyneseno též ve stupních šedi, které definuje legenda v horní části obrázku. Modře jsou vyneseny kaustické křivky.

plochu zdroje Σ_S , a to celé normalizované světelným tokem od zdroje v nepřítomnosti čočky

$$A_*(\mathbf{y}_c) = \frac{\int_{\Sigma_S} A_0(\mathbf{y}_c + \mathbf{y}') B(\mathbf{y}') d^2\mathbf{y}'}{\int_{\Sigma_S} B(\mathbf{y}') d^2\mathbf{y}'} = \frac{\int_{\Sigma_I} B(\mathbf{y}[\mathbf{x}] - \mathbf{y}_c) d^2\mathbf{x}}{\int_{\Sigma_S} B(\mathbf{y}') d^2\mathbf{y}'} . \quad (14)$$

Souřadnice \mathbf{y}' měříme od středu zdroje \mathbf{y}_c . Zjasnění plošného zdroje můžeme rovněž spočítat jako podíl světelného toku od všech obrazů a od nečočkováného zdroje. To vyjadřuje druhý člen v rovnici (14), přičemž závislost $\mathbf{y}[\mathbf{x}]$ je dána rovnicí (7) a integrujeme přes plochu obrazů Σ_I . Využíváme též faktu, že se plošná jasnost zdroje při čočkování nemění.

2.1.3 Kritické a kaustické křivky

Z rovnic (11) a (12) vidíme, že pro některé hodnoty \mathbf{x} , respektive z , může být $\det J = 0$, a proto zjasnění bodového zdroje definované vztahem (10) v těchto místech diverguje. Tyto body tvoří *kritické křivky*, které se po zobrazení čočkovou rovnicí (7), respektive (8), nazývají *kaustické křivky*. V závislosti na parametru d mají kritické a tedy i kaustické křivky několik částí. Pro d menší než řešení rovnice $27\mu_A\mu_B d^8 = (1 - d^4)^3$ jsou tvořené třemi částmi, pro d větší než $(\mu_A^{1/3} + \mu_B^{1/3})^{3/2}$ dvěma částmi a v ostatních případech jsou jednodílné (Schneider a kol., 1992, str. 264). V Obrázku 2 jsou kaustické křivky vyneseny modrou barvou. Parametry konfigurací čoček v Obrázku 2 byly zvoleny tak, aby pro danou hodnotu d byl počet dílů kaustiky stejný pro všechny použité hodnoty q a aby byly pokryty všechny možné počty kaustických křivek.

Pro získání bodů na kritické křivce použijeme postup, který navrhl Witt (1990). Smyk čočky můžeme zapsat ve tvaru $\gamma = |\gamma|e^{i\psi}$, kde ψ je reálná fáze. Položíme-li $|\gamma| = 1$, splníme podmínku rovnice (12) a dostaneme algebraickou rovnici čtvrtého stupně v proměnné z

$$\begin{aligned} z^4 - 2(z_A + z_B)z^3 + (z_A^2 + 4z_A z_B + z_B^2 - e^{-i\psi})z^2 + \\ + (2[\mu_B z_A + \mu_A z_B]e^{-i\psi} - 2z_A z_B [z_A + z_B])z + \\ + z_A^2 z_B^2 - (\mu_B z_A^2 + \mu_A z_B^2)e^{-i\psi} = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

jejíž kořeny jsou body na kritických křivkách. Změnou fáze ψ od 0 do 2π a opakovaním postupu pokryjeme kritickou křivku body dle libovůle. Body na kaustických křivkách získáme dosazením řešení rovnice (15) do čočkové rovnice (8).

Schneider & Weiß (1986) ukázali, že bodový zdroj zobrazený dvojitou gravitační mikročočkou má vždy buď tři nebo pět obrazů. Ke změně počtu obrazů dochází vždy, když zdroj přechází přes kaustickou křivku. Zdroj uvnitř kaustiky má obrazů více, což se projeví prudkou změnou jasnosti. Pro bodové zdroje nacházející se uvnitř kaustických křivek platí $A_0 \geq 3$ (Witt & Mao, 1995).

2.1.4 Analytické rozvoje kolem záhybu a hrotu

Schneider & Weiß (1986) ukázali, že v dvojitým gravitačním čočkování existují dva typy singularit $\det J = 0$, na nichž je zjasnění bodového zdroje formálně nekonečné. Jsou to *záhyby* (angl. folds) a *hroty* (angl. cusps). Hroty jsou izolované body spojené záhyby a kromě požadavku $\det J = 0$ je charakterizuje i podmínka, že tečný vektor kritické křivky se zobrazí čočkovou rovnicí na nulový vektor.

Rozbor zjasnění bodového zdroje kolem záhybu podali Schneider & Weiß (1986). Pro získání zjasnění v blízkosti záhybu se provede nejprve Taylorův rozvoj čočkové rovnice do druhého řádu kolem bodu na kritické křivce. Dále se předpokládá, že kritická křivka je přímka korespondující s osou x_2 . Provede se rotace souřadnic $\mathbf{y} \rightarrow \tilde{\mathbf{y}}$ tak, aby kaustická křivka souhlasila s novou souřadnicí \tilde{y}_2 . Analýzou takto získané přibližné čočkové rovnice lze zjistit, že zjasnění bodového zdroje A_0^{fold} závisí pouze na \tilde{y}_1 . Na jedné straně kaustické křivky je zjasnění nulové, zatímco na druhé je nepřímo úměrné odmocnině z \tilde{y}_1 , což lze zapsat

$$A_0^{\text{fold}}(\tilde{\mathbf{y}}) = \begin{cases} 0, & \tilde{y}_1 < 0 \\ U_0 \tilde{y}_1^{-1/2}, & \tilde{y}_1 \geq 0, \end{cases} \quad (16)$$

kde U_0 je konstanta popisující charakteristickou škálu růstu kaustiky. Vztah (16) lze interpretovat jako popis zjasnění dvou obrazů, které se objeví, když se bodový zdroj dostane dovnitř kaustiky, v naší konvenci tedy $\tilde{y}_1 \geq 0$. Zjasnění zbývajících tří obrazů v okolí záhybu se často považuje za lineární funkci \tilde{y}_1 . Platnost této aproximace studujeme v Kapitole 6. Vlastnostmi obrazů v okolí záhybu se zabývali také Gaudi & Petters (2002a).

Vlastnosti zjasnění blízko hrotu se dají zkoumat podobným způsobem jako v okolí záhybu (Schneider & Weiß, 1992). Nicméně Zakharov (1995, 1999) našel způsob, jak získat zjasnění obrazů bez nutnosti inverze čočkové rovnice. Postup a výsledky bez typografických chyb jsou shrnuty v PH08. Pro popis polohy zdroje v okolí hrotu je výhodné používat souřadnicový systém $(y_{\parallel}, y_{\perp})$, jehož počátek se nachází v hrotu, osa y_{\parallel} směřuje podél osy hrotu a y_{\perp} je na ní kolmá. Hrot je charakterizován jediným parametrem K , který určuje jeho „špičatost“ a orientaci. Pro $K < 0$ míří hrot směrem do kladných hodnot y_{\parallel} a čím vyšší hodnota $|K|$, tím je hrot špičatější. Bodový zdroj ležící uvnitř hrotu ($K^{-1}y_{\parallel}^3 > y_{\perp}^2$) má tři obrazy, jejichž zjasnění $A_{0,(j)}^{\text{cusp}}$, $j = 1 \dots 3$, je dáno vztahem

$$A_{0,(j)}^{\text{cusp}} = \left| \frac{1}{2b} \sqrt{\frac{y_{\parallel}}{y_{\parallel}^3 - Ky_{\perp}^2}} \cos \frac{1}{3} \left[\arcsin \sqrt{\frac{Ky_{\perp}^2}{y_{\parallel}^3}} + 2\pi(j-1) \right] \right|. \quad (17)$$

Výsledné zjasnění zdroje je součet zjasnění všech tří obrazů daných rovnicí (17). Pokud se zdroj nachází vně hrotu ($K^{-1}y_{\parallel}^3 < y_{\perp}^2$), má jeden obraz, a výsledné zjasnění potom činí

$$A_0^{\text{cusp}} = \left| \frac{K^{-1/3}}{2b} \frac{\left[\sqrt{y_{\perp}^2 - K^{-1}y_{\parallel}^3} + y_{\perp} \right]^{1/3} + \left[\sqrt{y_{\perp}^2 - K^{-1}y_{\parallel}^3} - y_{\perp} \right]^{1/3}}{\sqrt{y_{\perp}^2 - K^{-1}y_{\parallel}^3}} \right|. \quad (18)$$

Z rovnice (18) vidíme, že pro zdroj nacházející se mimo hrot na ose y_{\parallel} ($y_{\perp} = 0$) bude zjasnění při přibližování se k hrotu divergovat jako y_{\parallel}^{-1} . To je odlišná situace od záhybu, jehož přítomnost zdroj při přibližování se z vnější oblasti „necítí“ a při přechodu kaustiky se zjasnění skokově mění, jak vyplývá z rovnice (16) a jak ukazuje Obrázek 2. Pro zdroj nacházející se na ose y_{\perp} ($y_{\parallel} = 0$) bude zjasnění při přibližování se k hrotu divergovat jako $y_{\perp}^{-2/3}$. Podobně z rovnice (17) plyne, že zjasnění bodového zdroje nacházejícího se uvnitř hrotu na ose y_{\parallel} bude směrem k hrotu divergovat opět jako y_{\parallel}^{-1} . Rozbor zjasnění a poloh obrazů bodového zdroje poblíž hrotu podávají také Gaudi & Petters (2002b).

2.2 Metoda výpočtu zjasnění rozlišeného zdroje

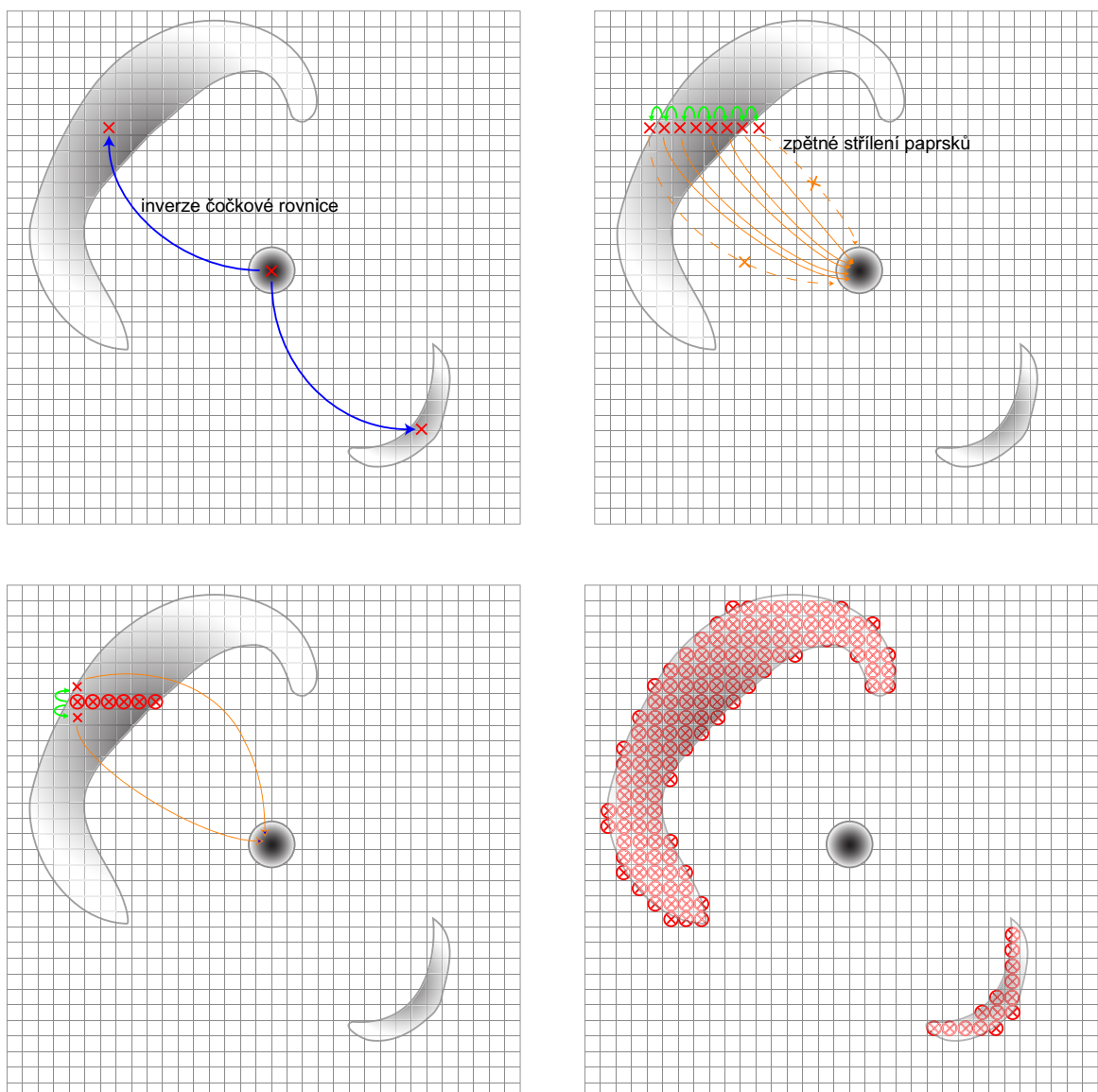
Vzhledem k nemožnosti analytické inverze rovnice (7) a přítomnosti kaustických křivek představuje výpočet zjasnění plošného zdroje A_* daný rovnicí (14) poměrně složitý úkol, který se ještě komplikuje požadavkem obecného tvaru povrchové jasnosti zdroje $B(\mathbf{y}')$. V literatuře existuje několik metod, jejichž výpočetní náročnost, použití a omezení se značně liší.

Nejjednodušší metodou je přímý výpočet pomocí prvního výrazu v rovnici (14). Zdroj rozdělíme na malé plošky, pro každou plošku najdeme polohy obrazů řešením rovnice (9), spočítáme zjasnění dané rovnicí (10) a po vynásobení plošnou jasností zdroje v daném místě sečteme. Vzhledem k problémům způsobeným přítomností kaustických křivek se tato metoda v praxi téměř nepoužívá.

Populární je naopak získání tvaru funkce $A_0(\mathbf{y})$ pomocí *zpětného střílení paprsků* (angl. inverse ray shooting), jehož různé varianty jsou popsány například v článcích Schneider & Weiß (1986), Rattenbury a kol. (2002) a Wambsganss (1999). Zde „střílíme“ paprsky z náhodně zvolených míst \mathbf{x} pomocí rovnice (7) a necháme je stráždat na mřížce. Takto získáme dvourozměrnou mapu zjasnění $A_0(\mathbf{y})$ a finální hodnotu $A_*(\mathbf{y}_c)$ dostaneme integrací plošné jasnosti zdroje přes tuto mapu. Tato metoda je značně výpočetně náročná kvůli velkému množství vyčíslení rovnice (7), jež jsou potřeba pro vytvoření mapy zjasnění.

Plošný integrál ve druhém výrazu v rovnici (14) je možné pomocí Greenovy věty přepsat na křivkový integrál, jehož integrand lze pro určité typy funkcí $B(\mathbf{y}')$ explicitně vyjádřit (Gould & Gaucherel, 1997; Dominik, 1998). Ač v jednoduchých případech velmi rychlá, tato metoda je neefektivní pro silně protáhlé obrazy a jiná než konstantní okrajová ztemnění (Dominik, 2007).

Zmíněné metody výpočtu zjasnění plošného zdroje jsou podrobně popsány v mé bakalářské práci (Pejcha, 2006). Zde budeme používat metodu integrace přes obrazy (Vermaak, 2000), která byla v bakalářské práci vyhodnocena jako nejvhodnější a nejrychlejší. Pro úplnost zde uvedeme stručný popis metody výpočtu, který je ilustrován též na Obrázku 3. Předpokládejme, že máme plošný zdroj se středem \mathbf{y}_c , který se gravitační čočkou zobrazí na několik obrazů, jejichž polohu počátku neznáme. Řešením rovnice (9) nalezneme polohy obrazů



Obrázek 3: Výpočet zjasnění plošného zdroje pomocí integrace přes obrazy. Předpokládáme, že obrazová rovina je rozdělena na pixely (šedivá mřížka na všech panelech), kruhový zdroj s rozložením plošné jasnosti označeným odstíny šedi se nachází poblíž středu. Vidíme rovněž dva „srpkovité“ obrazy, jejichž tvar a polohu zpočátku neznáme. Nejprve najdeme obrazy středu zdroje (červené křížky, levý horní panel) pomocí inverze čočkové rovnice (modré šipky). Z těchto bodů postupujeme po pixelech vlevo a vpravo (panel vpravo nahoře) „střílením“ paprsků (oranžové šipky) zpět do zdroje dokud nenajdeme hranici obrazu. Pak posuneme počáteční bod o řádek výše a níže od současného (levý dolní panel) a rekurzivně proceduru restartujeme. Tímto postupem provedeme integrál přes všechny obrazy (panel vpravo dole).

středu zdroje. Z těchto počátečních bodů začneme procházet obrazy metodou flood-fill. Z každého navštíveného pixelu „střelíme“ pomocí rovnice (7) paprsek a testujeme, zda dopadne do zdroje. Pro pixely patřící do obrazů takto zjistíme i plošnou jasnost v daném místě obrazu a sečtením příspěvků jednotlivých pixelů provedeme integraci druhého výrazu v rovnici (14). Dostane-li se část zdroje dovnitř kaustické křivky, objeví se dva nové silně zjasněné obrazy, které nemusí být propojené s ostatními obrazy. Kdybychom použili za počáteční bod pro flood-fill pouze obrazy středu zdroje, mohlo by se stát, že bychom tyto obrazy nezapočetali. Postupem popsáním v sekci 2.1.3 aproximujeme kaustickou křivku mnohoúhelníkem a testujeme, zda některá z úseček tvořících polygon neprotíná obvod zdroje (v našem případě kružnici). Pokud je tomu tak, zvolíme nedaleko od průniku bod uvnitř kaustiky a zdroje a spustíme znovu algoritmus z toho místa. Celou dobu ovšem kontrolujeme, aby byl každý pixel započítán právě jednou. Výhodou integrace přes obrazy je malé množství časově náročných inverzí čočkové rovnice a nízký počet „střelených“ paprsků, které nezasáhnou zdroj a nepřispívají tak do integrálu (14). Metoda rovněž umožňuje použít libovolný tvar funkce $B(\mathbf{y}')$. Další hybridní metody kombinující přímou integraci a zpětné střelení paprsků vyvinuli Bennett & Rhie (1996) a Dong a kol. (2006).

Při používání kódu vyvinutého v rámci mé bakalářské práce byly provedeny některé optimalizace, které zrychlily běh programu, a také bylo provedeno značné množství testů potvrzujících, že naše implementace metody integrace přes obrazy funguje správně.

2.3 Okrajové ztemnění

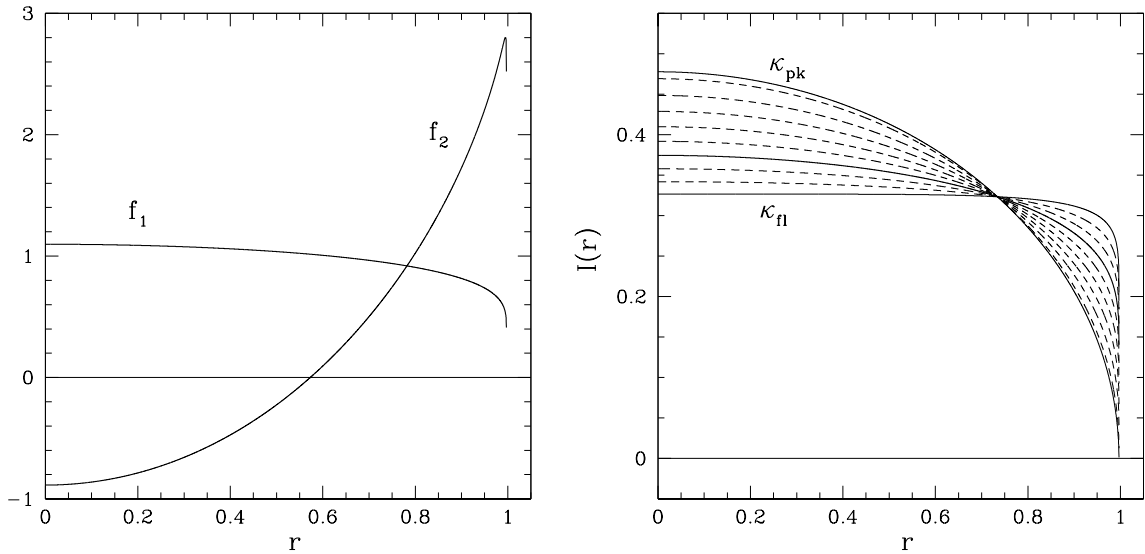
V gravitačním mikročočkování popisuje parametry zdroje plošná jasnost $B(\mathbf{y}')$. Jako zdroj v galaktickém mikročočkování fungují hvězdy, o nichž předpokládáme, že jejich kotouček je kruh se středem v \mathbf{y}_c a že plošná jasnost je kruhově symetrická vůči středu zdroje. Definujeme tedy $B(\mathbf{y}') = I(r)$, kde $r = |\mathbf{y}'|/\rho_*$ je vzdálenost od středu zdroje a ρ_* je poloměr kotoučku v jednotkách θ_E .

Funkci $I(r)$ se někdy říká též *okrajové ztemnění* (angl. limb darkening), protože z okrajů kotoučku hvězdy k nám přichází záření z oblastí s nižší teplotou, které má tedy i nižší intenzitu. Ve většině případů je funkce $I(r)$ s rostoucím r neklesající, ale pro některé vlnové délky příslušející určitým spektrálním čarám se může stát, že funkce $I(r)$ není monotónní.

Produktem teoretických modelů hvězdných atmosfér bývá závislost $I(r)$ tabulovaná v několika málo hodnotách r_i , $i = 0 \dots N$, respektive kosinech směrových úhlů $\mu_i = \sqrt{1 - r_i^2}$. Hodnotu $I(r)$ v libovolném r získáme interpolací z kubického splinu proloženého body $I(r_i)$, respektive $I(\mu_i)$

$$I(r) = C_i^0 + C_i^1 r + C_i^2 r^2 + C_i^3 r^3, \quad (19)$$

přičemž $r \in (r_i, r_{i+1})$ a C_i^0 , C_i^1 , C_i^2 a C_i^3 jsou koeficienty kubického splinu v tomto intervalu.



Obrázek 4: Modely okrajového ztemnění použité v této práci. V levém panelu jsou vyneseny funkce $f_1(r)$ a $f_2(r)$, zatímco v pravém panelu celkový rozsah okrajových ztemnění popsatelných pomocí rovnice (21). Vnitřní tlustá křivka odpovídá profilu $\kappa = 0$, zatímco čárkované křivky přísluší $\kappa = 0,03p$, kde p je celé číslo. Extrémní přípustné hodnoty okrajového ztemnění jsou dosaženy pro κ_{pk} a κ_{fl} . Všechny modely jsou normalizované ve smyslu $2\pi \int_0^1 I(r)r dr = 1$. Obrázek byl převzatý z PH08.

Postup naznačený v předchozím odstavci se ale většinou považuje za zbytečně složitý, a proto se používají parametrické modely okrajového ztemnění, z nichž nejjednodušší je *lineární okrajové ztemnění* definované vztahem

$$I(r) = I(0)[1 - v(1 - \sqrt{1 - r^2})]. \quad (20)$$

Parametr lineárního okrajového ztemnění nabývá hodnot od $v = 0$, pro niž je plošná jasnost všude na povrchu stejná, až po $v = 1$, kdy je intenzita na okraji kotoučku nulová. Tabulky koeficientů lineárního okrajového ztemnění pro hvězdy různých teplot a povrchových zrychlení publikovali například Van Hamme (1993) a Claret (2000). Heyrovský (2007) porovnal různé metody určování koeficientů okrajových ztemnění a spočítal nové hodnoty v , které lépe aproximují skutečný tvar $I(r)$ a lépe zachovávají celkový světelný tok od hvězdy.

Ukazuje se, že funkce (20) často neaproximuje skutečný tvar okrajového ztemnění dostatečně dobře. Proto se používají komplikovanější modely tvořené lineární kombinací mocnin $\sqrt{1 - r^2}$. Tento přístup není příliš vhodný v situacích, kdy se snažíme určit koeficienty tohoto rozvoje z pozorování, protože mocniny $\sqrt{1 - r^2}$ nejsou ortogonální funkce a naitované parametry bývají často silně korelované.

Zde proto používáme model okrajového ztemnění ve tvaru

$$I(r) = c_1 f_1(r) + c_2 f_2(r) = c_1 [f_1(r) + \kappa f_2(r)]. \quad (21)$$

Funkce $f_1(r)$ a $f_2(r)$ získal Heyrovský (2003) analýzou hlavních komponent⁵ modelů hvězdných atmosfér ATLAS (Kurucz, 1993) a jsou ortonormální ve smyslu $\int_0^1 f_i(r) f_j(r) dr = \delta_{ij}$. Na Obrázku 4 jsou vyneseny v levém panelu funkce $f_1(r)$ a $f_2(r)$, zatímco v pravém panelu celkový rozsah okrajových ztemnění $I(r)$, který je popsatečný pomocí rovnice (21). Nejstrmější profil dostaneme pro $\kappa_{\text{pk}} = -0,1620$, zatímco nejvíce ploché okrajové ztemnění popisuje hodnota $\kappa_{\text{fl}} = 0,0902$. Funkce $f_1(r)$ a $f_2(r)$ jsou tabelovány v 5001 ekvidistantních bodech.

⁵PCA - Principal Component Analysis

Kapitola 3

Citlivost na rozlišený zdroj

V této kapitole prozkoumáme citlivost různých míst v geometrii dvojité gravitační čočky na efekt rozlišeného zdroje, rozsah těchto oblastí a analytické odhady. Pokud explicitně neuvedeme jinak, uvažujeme okrajové ztemnění zdroje dané vztahem (21) s $\kappa = 0$.

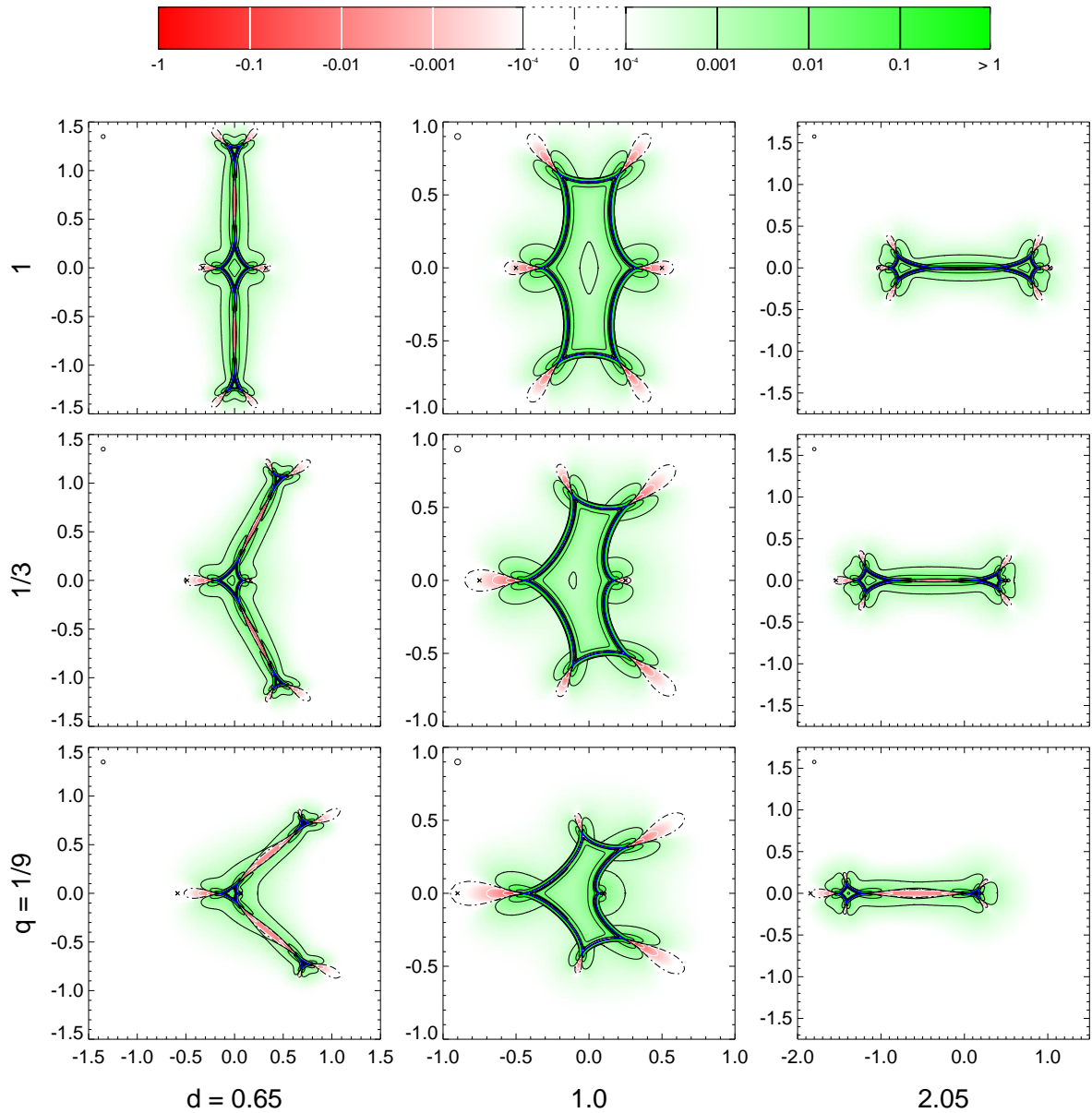
3.1 Oblasti citlivosti

Citlivost na rozlišený zdroj definujeme jako relativní rozdíl mezi zjasněním plošného zdroje se středem v \mathbf{y}_c a bodového zdroje ve stejném místě

$$\delta_{\text{ex}}(\mathbf{y}_c) \equiv \frac{A_*(\mathbf{y}_c) - A_0(\mathbf{y}_c)}{A_0(\mathbf{y}_c)}. \quad (22)$$

Na Obrázku 5 jsou graficky vyneseny hodnoty δ_{ex} pro stejných devět geometrií jako v Obrázku 2 a pro zdroj s poloměrem $\rho_* = 0,02$ odpovídající mikročočkovanému obru ve výduti Galaxie.

Z Obrázku 5 je vidět, že dle očekávání se nejsilnější efekt koncentruje poblíž kaustických křivek. Na druhou stranu kontury odpovídající $|\delta_{\text{ex}}| = 0,01$ a $0,001$ se od kaustických křivek zřetelně vzdalují. Čerchovanou čarou je zaznačena kontura $\delta_{\text{ex}} = 0$, která odděluje oblasti kladné a záporné citlivosti označené zelenou a červenou barvou. Převažují zelené oblasti, v nichž je zjasnění plošného zdroje vyšší než zjasnění bodového zdroje. To je pochopitelné, protože zjasnění bodového zdroje je konvexní daleko od kaustik i uvnitř nich (viz Obrázek 2) a část okraje plošného zdroje vždy leží blíž kaustice než střed. Menší červené oblasti se nacházejí poblíž hrotů a při postupu v ose směrem od hrotu přecházejí do kladných hodnot δ_{ex} . Konvexní pokles zjasnění v ose hrotu je zpočátku menší než konkávní pokles v kolmé ose. Části zdroje mimo osu jsou zjasněny méně než střed a to v oblastech poblíž hrotu převažuje konvexitu poklesu na ose hrotu, což vede k $\delta_{\text{ex}} < 0$. Dále od hrotu už je konvexní pokles silnější a tedy $\delta_{\text{ex}} > 0$. Červené oblasti jsou nejmenší u hrotu směřujícího k těžšímu hmotnému bodu, což je způsobeno



Obrázek 5: Konturový graf citlivosti na efekt plošného zdroje δ_{ex} pro stejných devět geometrií jako v Obrázku 2, zdroj o poloměru $\rho_* = 0,02$ a okrajové ztemnění $\kappa = 0$. Plné čáry jsou kontury pro $\delta_{\text{ex}} = \pm 0,1$, $\pm 0,01$ a $\pm 0,001$; černá barva přísluší kladným hodnotám a bílá záporným hodnotám δ_{ex} . Čerchovaná čára odpovídá nulovému efektu $\delta_{\text{ex}} = 0$. Kromě kontur je citlivost znázorněna i odstíny zelené pro $\delta_{\text{ex}} > 0$ a odstíny červené pro $\delta_{\text{ex}} < 0$, jak je vidět i v legendě v horní části obrázku. Hodnoty $|\delta_{\text{ex}}| \leq 10^{-4}$ jsou vyneseny bílou barvou. Kroužek v levé horní části panelu označuje velikost zdroje. Kaustické křivky jsou označeny modrou čarou a polohy hmotných bodů křížky.

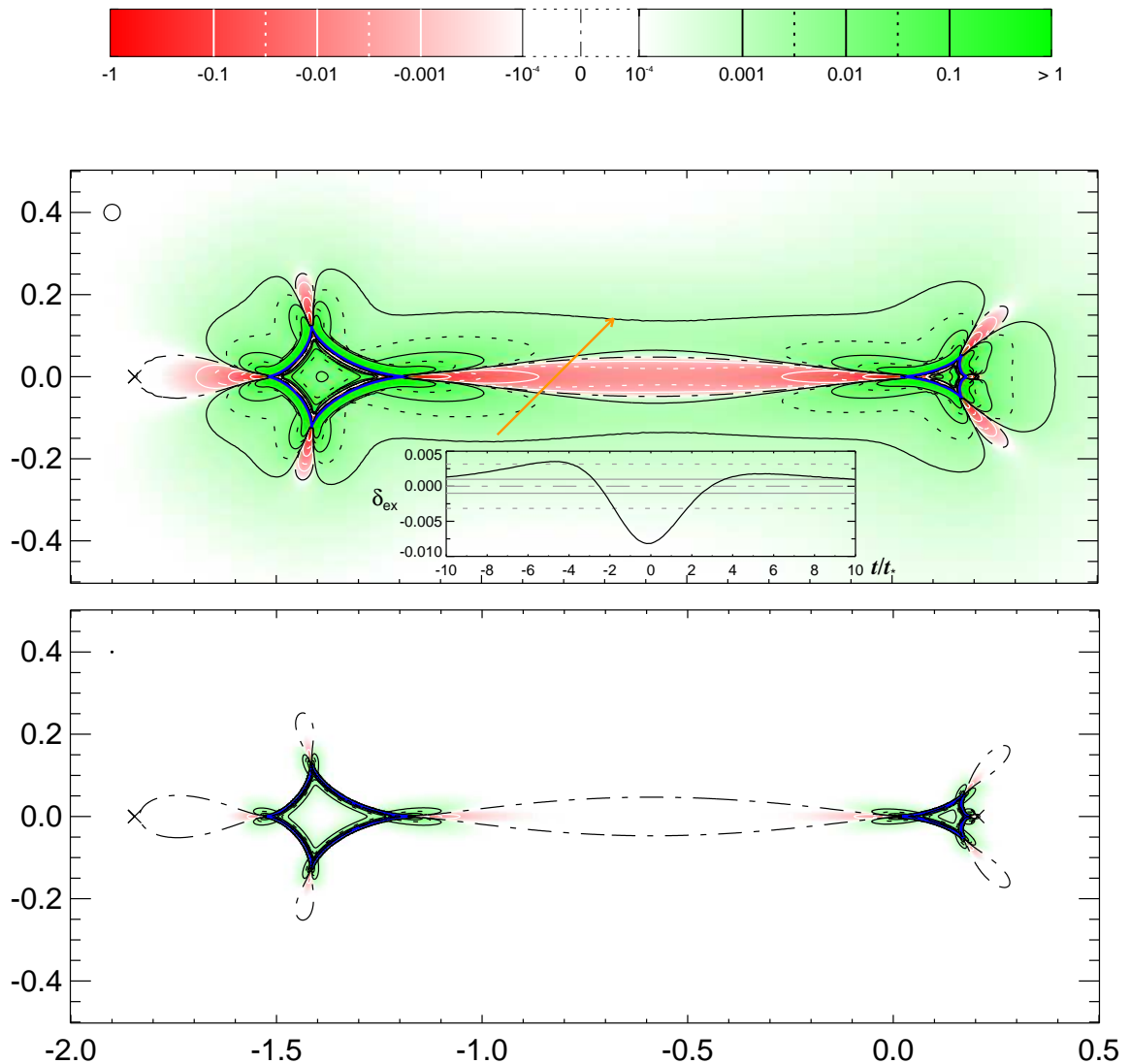
mnohem „kulatějším“ tvarem kontur zjasnění bodového zdroje v těchto místech, jak je vidět na Obrázku 2.

Z levého a pravého sloupce Obrázku 5 vidíme, že mezi hroty dvou částí kaustických křivek došlo k propojení červených oblastí záporného efektu plošného zdroje. Velikost efektu může v této nečekaně velké oblasti dosáhnout až několika procent a efekt je tudíž významný pro pozorování. Z Obrázku 5 můžeme usoudit, jak se tato citlivá oblast mění v závislosti na konfiguraci čočky. Pro konstantní d a zmenšující se q se dvě kaustiky nacházející se daleko od těžiště⁶ zmenšují a zároveň se vzdalují od centrální kaustiky. Současně s tím se citlivá oblast rozplývá a minimální hodnota δ_{ex} stoupá k nule. Na druhou stranu pro fixovanou hodnotu q závisí přítomnost oblasti na vzdálenosti složek d . Pro $q = 1/9$ se oblast rozpojí na dvě samostatné části pro $d \lesssim 0,46$ a $d \gtrsim 3,00$, zatímco pro $q = 1/3$ se oblast rozdělí pro $d \lesssim 0,41$ a $d \gtrsim 3,55$. Pro $q = 1$ dochází k rozpojení nejpozději ze všech studovaných poměrů hmot – pro $d \lesssim 0,39$ a $d \gtrsim 3,94$.

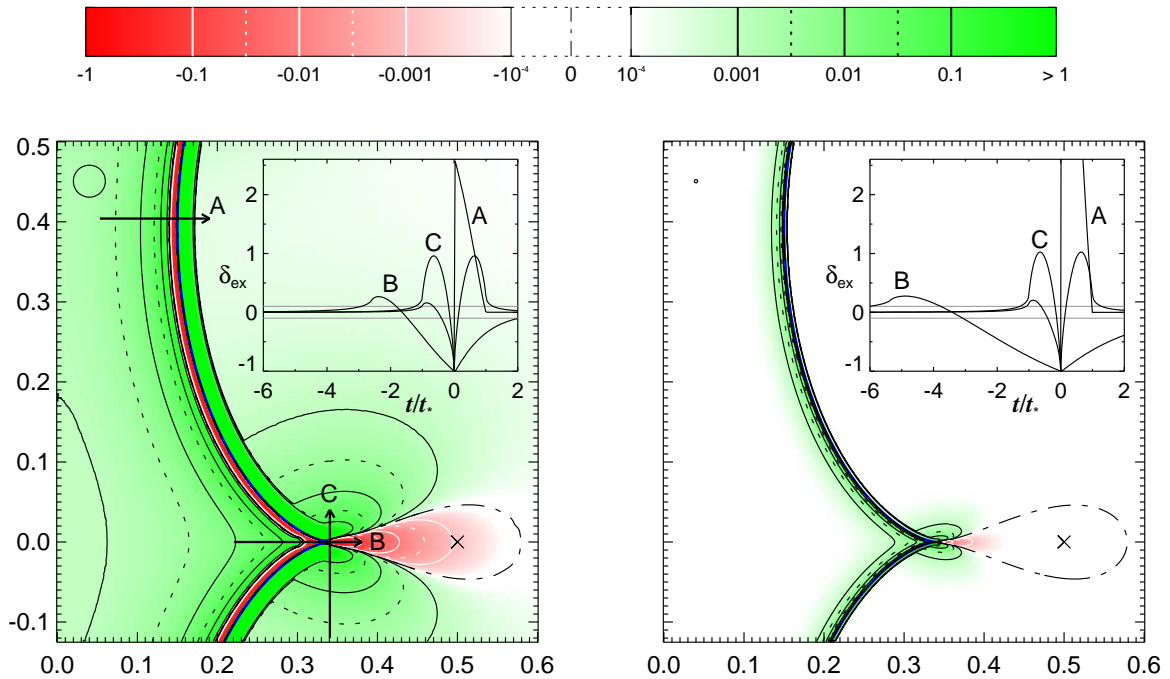
Obrázek 6 ukazuje ve větším detailu citlivost pro jednu z konfigurací čočky. V horním panelu je citlivost vynesena pro zdroj o poloměru $\rho_* = 0,02$ a vložený graf ukazuje řez jdoucí citlivou oblastí mezi hroty kaustik. Přestože řez protíná osu dvojčočky ve vzdálenosti $17,6 \rho_*$ od kaustiky, dosahuje relativní rozdíl mezi zjasněním plošného a bodového zdroje téměř -1% . Kontura $\delta_{\text{ex}} = -0,01$ dosahuje $16,2 \rho_*$ doprava od hrotu. Z horního panelu rovněž vidíme, že kontura $|\delta_{\text{ex}}| = 0,001$ zahrnuje nejen obě kaustické křivky, ale i jejich poměrně široké okolí. Oblast pokrytá konturami $|\delta_{\text{ex}}| \leq 0,01$ je pochopitelně menší, ale vidíme, že se z vnější strany dotýkají kaustik pouze v hrotech. K záhybům se tyto kontury přibližují nejbližší na vzdálenost přibližně rovnou poloměru zdroje. To je pochopitelné, protože zjasnění plošného zdroje se výrazně zvýší, když se jeho okraj dotkne záhybu, zatímco bodový zdroj nacházející se v místě jeho středu blízkost záhybu „necítí“. Na vnitřní straně kaustik můžeme tušit červený pruh záporného efektu plošného zdroje. V této oblasti se zjasnění bodového zdroje začíná prudce zvyšovat až k formálně nekonečné hodnotě na kaustice, ale zjasnění plošného zdroje je sice vysoké, avšak konečné. Přímo na kaustice je pak dosažena minimální hodnota citlivosti $\delta_{\text{ex}} = -1$. V dolním panelu Obrázku 6 je pak vyneseno totéž pro zdroj s desetkrát menším poloměrem $\rho_* = 0,002$, což odpovídá mikročočkované hvězdě hlavní posloupnosti ve výduti Galaxie. Dle očekávání se všechny kontury nacházejí blízko kaustik a jejich velikost je tedy úměrná poloměru zdroje. Úměra ale není lineární, protože kontura $\delta_{\text{ex}} = -1 \%$ sahá na ose symetrie až $28 \rho_*$ doprava od hrotu levé kaustiky.

Tuto zajímavou skutečnost podrobněji demonstruje Obrázek 7. Zde je vynesena detail okolí hrotu a záhybu pro jednu z geometrií z Obrázku 5 pro dva poloměry zdroje. Řezy označené šipkami a písmeny A, B a C jsou vyneseny ve vložených grafech a jejich délka je stejná v jednotkách poloměru zdroje ρ_* . Můžeme je chá-

⁶Tyto dvě kaustiky se často pro malé q nazývají *planetární*. Jejich vlastnosti studoval například Han (2006).



Obrázek 6: Konturový graf citlivosti k efektu plošného zdroje pro čočku s $d = 2,05$ a $q = 1/9$ a zdroj s poloměrem $\rho_* = 0,02$ (horní panel) a $\rho_* = 0,002$ (dolní panel). Význam symbolů je stejný jako v Obrázku 5, ale navíc jsou tečkovaně vyneseny kontury pro $\delta_{\text{ex}} = \pm 10^{-1,5}$ a $\pm 10^{-2,5}$. V horním panelu je oranžovou orientovanou úsečkou naznačen řez, který je pak vynesěn ve vloženém grafu. Řez je parametrizován časem t , jenž je na vodorovné ose vloženého grafu vynesěn v jednotkách t_* odpovídajících času nutnému k překonání vzdálenosti ρ_* . Okamžik $t = 0$ odpovídá poloze středu zdroje na ose symetrie čočky. Úrovně $\delta_{\text{ex}} = 0, \pm 10^{-3}$ a $\pm 10^{-2,5}$ jsou vyneseny šedivými čarami.



Obrázek 7: Detailní konturový graf citlivosti na efekt plošného zdroje pro čočku s $d = 1$ a $q = 1$ a zdroje s poloměrem $\rho_* = 0,02$ (levý panel) a $\rho_* = 0,002$ (pravý panel). Význam symbolů je stejný jako v Obrázku 6. Polohy řezů jsou v levém panelu označeny šipkami a písmeny A, B a C. Délka řezů je konstantní v jednotkách ρ_* , a proto nejsou pro přehlednost šipky vyneseny v pravém panelu. Příslušné hodnoty $\delta_{\text{ex}}(\mathbf{y}_c)$ jsou vyneseny ve vložených panelech, přičemž parametrizace vodorovné osy je stejná jako v Obrázku 6. V $t = 0$ se střed zdroje nachází na kaustice, resp. hrotu.

pat jako trajektorie středu zdroje. Řezy umožňují studovat škálování struktur δ_{ex} v závislosti na poloměru zdroje. Řez A vychází téměř kolmo ze záhybu v relativně velké vzdálenosti od hrotu. Zde se nejprve δ_{ex} zvyšuje, protože zjasnění směrem ke hrotu roste konvexně. Ve vzdálenosti přibližně ρ_* od kaustiky nastává maximum, ale pak převáží růst zjasnění bodového zdroje a pro střed zdroje umístěný na kaustice nastane minimum $\delta_{\text{ex}} = -1$. Výška maxima δ_{ex} z vnější strany záhybu je pro oba poloměry odlišná. Pro zdroj vzdálený více než $1 \rho_*$ od záhybu už je δ_{ex} téměř nulové. Oblast, pro niž $|\delta_{\text{ex}}| \geq 0,01$, sahá od $2,4 \rho_*$ uvnitř kaustiky do $1 \rho_*$ vně kaustiky. Pro oblast $|\delta_{\text{ex}}| \geq 0,001$ je vnější hranice v podstatě totožná, ale vnitřní závisí na poloměru. Zatímco pro menší zdroj je vnitřní hranice $7,8 \rho_*$, pro větší zdroj je kaustika široká pouze $15 \rho_*$ a δ_{ex} nikdy neklesne pod $0,001$.

Zdroj pohybující se po trajektorii B vystupuje z kaustiky přímo po ose hrotu. Chování uvnitř kaustiky je podobné řezu A, ale maximum δ_{ex} uvnitř kaustiky je vyšší. Pro větší zdroj nastává ve vzdálenosti $2,4 \rho_*$ od hrotu, kdy se okraje

zdroje začnou dotýkat kaustiky. Kvůli zakřivení kaustiky nastává maximum pro malý zdroj už ve vzdálenosti $4,9 \rho_*$ od hrotu. Vně kaustiky se δ_{ex} přibližuje nule, přičemž hodnoty $\delta_{\text{ex}} = -0,1$ dosahuje ve vzdálenosti $2 \rho_*$, $\delta_{\text{ex}} = -0,01$ u $4,4 \rho_*$ a konečně $\delta_{\text{ex}} = -0,001$ u $7,6 \rho_*$ od hrotu. Vzestup je pomalejší pro menší zdroj. Pro něj zasahuje kontura $\delta_{\text{ex}} = -0,1$ k $4,6 \rho_*$ od hrotu, kontura $\delta_{\text{ex}} = -0,01$ k $11 \rho_*$ a konečně kontura $\delta_{\text{ex}} = -0,001$ do vzdálenosti $23 \rho_*$ od hrotu. Uvnitř kaustiky prochází větší zdroj konturou $\delta_{\text{ex}} = -0,01$ a $\delta_{\text{ex}} = -0,001$ ve vzdálenostech $5,9 \rho_*$ a $14 \rho_*$ od hrotu. Gaudi & Petters (2002b) zkoumali efekt plošného zdroje u generického hrotu a dospěli k závěru, že pro dostatečně malý zdroj je pouze funkcí vzdálenosti od zdroje vyjádřené v jednotkách poloměru zdroje. To je v rozporu s výsledky v tomto odstavci. Podrobněji se tímto rozporem zabývá sekce 3.2.

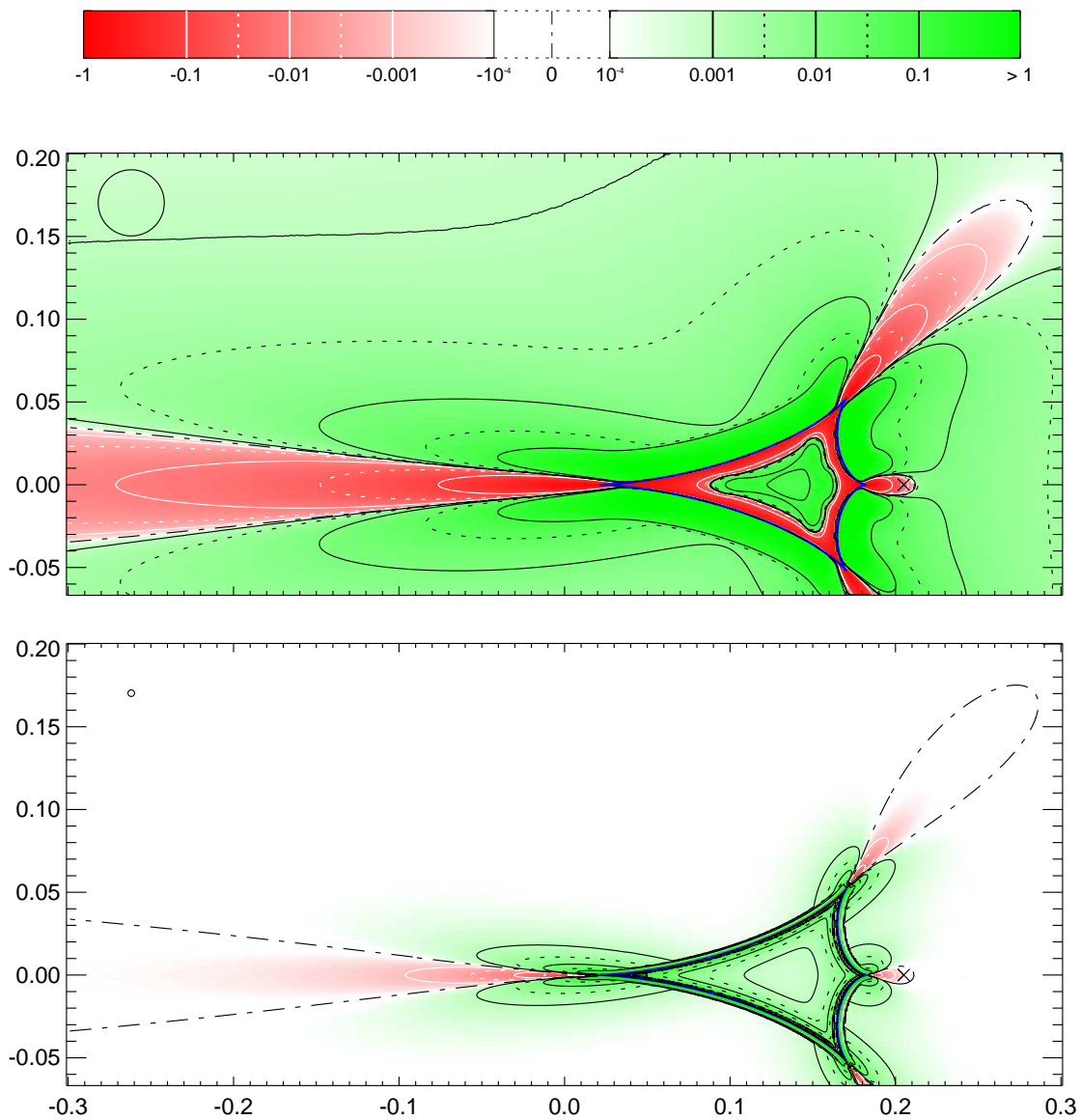
Zdroj pohybující se po trajektorii C prochází přes hrot kolmo na jeho osu, která je v tomto případě zároveň osou symetrie celé čočky. Proto je řez C symetrický vůči $t = 0$. Až na malou oblast okolo $t = 0$ je $\delta_{\text{ex}} > 0$ s maximy $\delta_{\text{ex}} \approx 1$ ve vzdálenosti $0,65 \rho_*$ od hrotu. Citlivost poklesne na $\delta_{\text{ex}} = 0,1$ u $1,2 \rho_*$, na $0,01$ u $3,1 \rho_*$ a na $0,001$ u $8,2 \rho_*$. Tvar řezu se pro dvě velikosti zdroje liší pouze nepatrně ve výšce maxim.

Obrázek 8 znázorňuje detail okolí menší ze dvou kaustik čočky s $d = 2,05$ a $q = 1/9$. Celkový pohled ukazuje pravý dolní panel Obrázku 5. Větší zdroj v horním panelu Obrázku 8 už je srovnatelný s velikostí celé kaustiky, a proto nelze oddělit vliv záhybů a hrotů. Uvnitř kaustiky jsou kontury citlivosti mírně deformované, zatímco pro malý zdroj v dolním panelu už mají kontury tvar více podobný tomu z Obrázku 7. V levé části panelů kolem osy čočky vidíme rozsáhlou oblast záporné citlivosti. Pro větší zdroj sahá kontura $\delta_{\text{ex}} = -0,01$ $14,6 \rho_*$ od levého hrotu, zatímco pouze $1,29 \rho_*$ od pravého hrotu na ose čočky. Pro malý zdroj je dosah $26,2 \rho_*$ vlevo a $4,8 \rho_*$ vpravo.

3.2 Analytické odhady

V této části prezentujeme výpočty publikované v PH08, které sice nejsou součástí této diplomové práce, ale jsou relevantní pro interpretaci výsledků v této a další kapitole. Předpokládejme, že střed zdroje \mathbf{y}_c se nachází alespoň $1 \rho_*$ od kaustiky. Pak můžeme rovnici (14) rozvinout v Taylorovu řadu

$$\begin{aligned}
 A_*(\mathbf{y}_c) &= A_0(\mathbf{y}_c) + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial A_0}{\partial y_j}(\mathbf{y}_c) \frac{\int_{\Sigma_S} y'_j B(\mathbf{y}') d^2 \mathbf{y}'}{\int_{\Sigma_S} B(\mathbf{y}') d^2 \mathbf{y}'} + \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2 A_0}{\partial y_j \partial y_k}(\mathbf{y}_c) \frac{\int_{\Sigma_S} y'_j y'_k B(\mathbf{y}') d^2 \mathbf{y}'}{\int_{\Sigma_S} B(\mathbf{y}') d^2 \mathbf{y}'} + O(\rho_*^3). \quad (23)
 \end{aligned}$$



Obrázek 8: Detailní konturový graf citlivosti na efekt plošného zdroje pro čočku $d = 2,05$ a $q = 1/9$ a velikosti zdroje $\rho_* = 0,02$ (horní panel) a $\rho_* = 0,002$ (dolní panel). Význam symbolů je stejný jako na Obrázku 6.

Je-li funkce $B(\mathbf{y}')$ středově symetrická, liché členy v rozvoji se vynulují a dostáváme

$$A_*(\mathbf{y}_c) = A_0(\mathbf{y}_c) + \frac{1}{4} \Delta A_0(\mathbf{y}_c) \rho_*^2 \frac{\int_0^1 I(r) r^3 dr}{\int_0^1 I(r) r dr} + \frac{1}{64} \Delta^2 A_0(\mathbf{y}_c) \rho_*^4 \frac{\int_0^1 I(r) r^5 dr}{\int_0^1 I(r) r dr} + O(\rho_*^6), \quad (24)$$

kde Δ je Laplaceův operátor a $\Delta^2 = \Delta\Delta$ biharmonický operátor. Citlivost na efekt plošného zdroje definovanou rovnicí (22) pak můžeme do prvního řádu aproximovat vztahem

$$\delta_{\text{ex}}(\mathbf{y}_c) \approx \frac{\Delta A_0(\mathbf{y}_c)}{4 A_0(\mathbf{y}_c)} \rho_*^2 \frac{\int_0^1 I(r) r^3 dr}{\int_0^1 I(r) r dr}. \quad (25)$$

Citlivost tak můžeme odhadnout pouze na základě výpočtu Laplaciánu zjasnění bodového zdroje, který lze snadno numericky získat z dat Obrázku 2. Vidíme také, že δ_{ex} závisí kvadraticky na druhé mocnině poloměru zdroje ρ_* a na poměru momentů plošné jasnosti zdroje Ω , který se pro dva modely okrajového ztemnění použité v této práci rovná

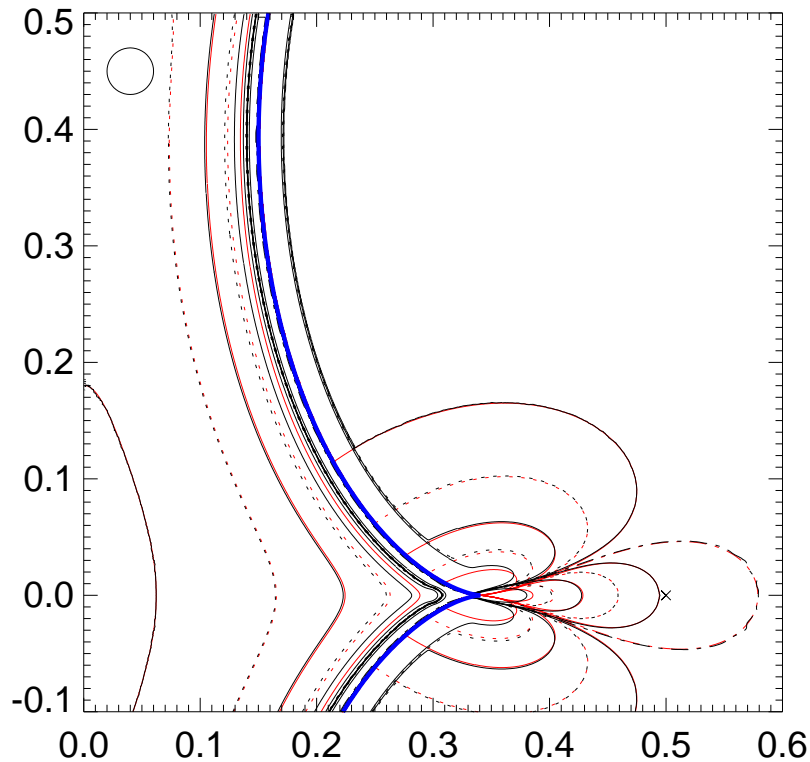
$$\Omega \equiv \frac{\int_0^1 I(r) r^3 dr}{\int_0^1 I(r) r dr} = \frac{1,5 - 0,7v}{3 - v} = \frac{0,2155 + 0,3097\kappa}{0,4665 + 0,3272\kappa}. \quad (26)$$

Na Obrázku 9 je vyneseno porovnání aproximace dané rovnicí (25) a skutečného průběhu, z něhož vidíme, že dále než jeden poloměr zdroje od kaustiky se oba výsledky téměř perfektně shodují. Aproximativní kontury vbíhají přímo do hrotu, zatímco skutečné kontury protnou kaustiku kousek vedle. Přibližné kontury také vbíhají do záhybů, zatímco ty skutečné vedou se záhybem paralelně ve vzdálenosti přibližně jednoho poloměru zdroje. Pokud bychom do rovnice (25) zahrnuli i člen úměrný $\Delta^2 A_0$, dostali bychom ještě lepší shodu u vzdálenějších kontur, ale tvar přibližných kontur v bezprostřední blízkosti hrotu by byl výrazně odlišný. To ovšem podivné není, protože tak blízko kaustikám už rozvoj (24) neplatí.

Nulový efekt plošného zdroje nastává mimo kaustiku v místech, kde $\Delta A_0 = 0$ nezávisle na použitém okrajovém ztemnění, což vysvětluje podobnost nulových kontur v obou panelech Obrázků 7 a 8. Ve skutečnosti byly některé části nulových kontur v Obrázcích 6, 7 a 8 spočítány jako místa s $\Delta A_0 = 0$, protože numerický šum byl příliš velký.

S pomocí vztahu (25) a výsledků části 2.1.4 bylo v PH08 vysvětleno nelineární škálování rozsahu δ_{ex} na ose hrotu. Použijeme zjasnění bodového zdroje mimo hrot dané rovnicí (18), spočítáme jeho Laplacián a dosazením do rovnice (25) dostáváme pro zdroj na vnější ose hrotu přesný výsledek

$$\delta_{\text{ex}}(y_{\perp} = 0) = \frac{\rho_*^2}{2} \left(\frac{4K}{9y_{\parallel}^3} + \frac{1}{y_{\parallel}^2} \right) \Omega. \quad (27)$$



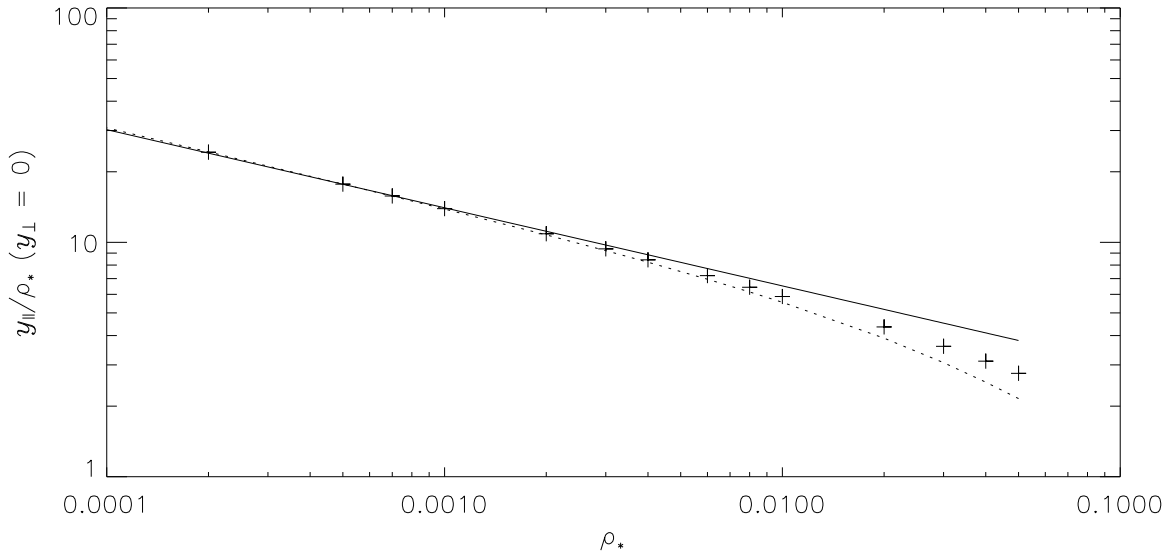
Obrázek 9: Porovnání citlivosti na efekt plošného zdroje $\delta_{\text{ex}}(\mathbf{y}_c)$ a její aproximace dané rovnicí (25) pro čočku a zdroj z levého panelu Obrázku 7. Kaustická křivka je vynesena modrou čarou, skutečný průběh kontur $\delta_{\text{ex}}(\mathbf{y}_c)$ černě a aproximace červeně.

V PH08 byl pro další výpočty ponechán v členu pocházejícím z Laplaceanu pouze výraz úměrný y_{\parallel}^{-3} . Inverzí vzniklé rovnice byla získána vzdálenost hrotu od kontury δ_{ex} podél osy y_{\parallel} vyjádřená v jednotkách poloměru zdroje

$$\frac{y_{\parallel}}{\rho_*}(y_{\perp} = 0) \approx \left[\frac{2K\Omega}{9\rho_*\delta_{\text{ex}}} \right]^{1/3}. \quad (28)$$

Odtud plyne, že zatímco v Einsteinových úhlech se s klesajícím ρ_* velikost negativní citlivé oblasti u hrotů zmenšuje jako $\rho_*^{2/3}$, v relativních jednotkách poloměru zdroje se naopak zvětšuje úměrně $\rho_*^{-1/3}$, což vysvětluje pozorování učiněná v části 3.1.

Zde přímo ověříme, nakolik přesně vztah (28) popisuje rozsah kontury pro dané δ_{ex} . Porovnáme také, nakolik se projevilo zanedbání členu $\propto y_{\parallel}^{-2}$ při odvození rovnice (28). Inverze celé rovnice (27) vede na hledání kořenů redukované kubické



Obrázek 10: Závislost vzdálenosti $y_{||}/\rho_*$ ($y_{\perp} = 0$) na poloměru zdroje ρ_* pro konturu $\delta_{\text{ex}} = -0,01$ a hrot z Obrázku 7. Křížky označují měření z numerických výpočtů, plná čára proložení rovnicí (28) a tečkovaná čára nafitovaný tvar závislosti (29).

rovnice. Zvolíme reálný kořen, jenž v limitním případě přejde na rovnici (28)

$$\frac{y_{||}}{\rho_*}(y_{\perp} = 0) = D^{1/3} - \frac{\Omega}{6\delta_{\text{ex}}}D^{-1/3}. \quad (29)$$

Zde D představuje kombinaci parametrů hrotu a zdroje

$$D = \frac{K\Omega}{9\delta_{\text{ex}}\rho_*} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{3}{8} \frac{\rho_*^2 \Omega}{\delta_{\text{ex}} K^2}} \right). \quad (30)$$

Pro porovnání rovnic (28) a (29) jsme pro několik poloměrů zdroje změřili vzdálenost kontury $\delta_{\text{ex}} = -0,01$ od hrotu pro čočku a hrot z Obrázku 7. V tomto případě je osa hrotu totožná se spojnicí dvou hmotných bodů. Výsledná měření $y_{||}/\rho_*$ ($y_{\perp} = 0$) jsou znázorněna na Obrázku 10. Na tato data jsou nafitovány závislosti (28) a (29), přičemž jediným fitovaným parametrem je v obou případech K . Hodnotu parametru K jsme hledali pomocí minimalizace sumy čtverců odchylek pro pět bodů s nejmenším poloměrem⁷ a to lineárními nejmenšími čtverci v případě rovnice (28) (výsledné $K = -0,27$) a gradientovou metodou pro rovnici (29) (výsledné $K = -0,29$). Z Obrázku 10 vidíme, že pro malá ρ_* je závislost v podstatě čistě mocinná a dobře popsána oběma rovnicemi. Pro poloměry $\rho_* \gtrsim 0,004$

⁷Předpokládáme, že v limitě $\rho_* \searrow 0$ obě rovnice platí přesně. Pro malá ρ_* tedy fitováním určíme K a studujeme, jak se pro větší ρ_* naměřené body odchylují od teoretických závislostí.

se ale body od přímky dané rovnicí (28) odklánějí směrem dolů. Toto sice kvalitativně lépe vystihuje rovnice (29), ale i zde je odchylka téměř stejně velká jako od závislosti (28). To může být způsobené jednak tím, že pro zdroje $\rho_* \gtrsim 0,01$ už není možné v této geometrii celou kaustickou křivku aproximovat pouze generickým hrotem⁸, nebo zanedbáním vyšších členů v rozvoji (24). Druhou hypotézu lze snadno otestovat přidáním členu úměrného $\Delta^2 A_0$ do rovnice (25). To ale vyprodukuje členy až do řádu y_{\parallel}^{-6} a pro vytvoření vztahu podobného rovnici (29) bychom museli invertovat polynom šestého stupně.

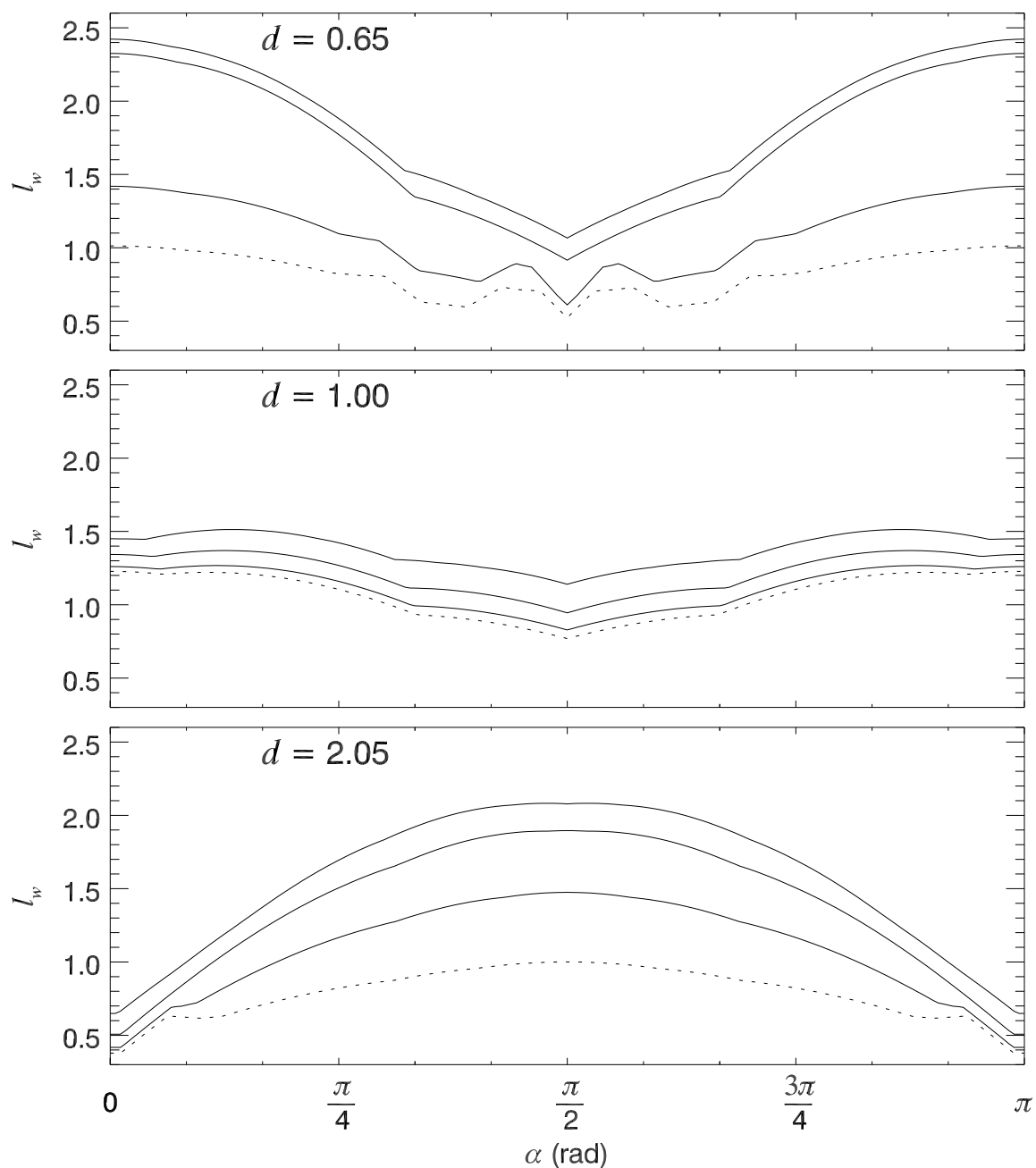
Podobným postupem jako výše bylo v PH08 zjištěno, že v ose kolmé na osu hrotu se rozsah efektu plošného zdroje škáluje lineárně s poloměrem ρ_* , což souhlasí s numerickými výsledky zastoupenými především řezem C v Obrázku 7. Podobně bylo ukázáno, že vztah (28) platí i uvnitř hrotu, ovšem zde je $\delta_{\text{ex}} \geq 0$.

3.3 Pravděpodobnost efektu plošného zdroje

V této části odhadneme nakolik je efekt plošného zdroje rozebraný v předchozích částech významný z hlediska pozorování a modelování mikročočkových událostí, obzvláště jakou roli hrají nové citlivé oblasti mezi protilehlými hroty kaustických křivek. Správně bychom měli pravděpodobnost pozorování efektu plošného zdroje charakterizovat srovnáním světelné křivky pro plošný zdroj a na ní naitované světelné křivky pro bodový zdroj. Zde pro jednoduchost použijeme podobný postup jako Mao & Paczyński (1991) s vědomím, že skutečná pravděpodobnost detekce bude nižší. Předpokládáme, že střed zdroje se vůči těžišti čočky pohybuje rovnoměrně po přímce svírající s osou y_1 úhel α . Jako druhý parametr popisující přímku se nejčastěji bere minimální vzdálenost trajektorie od těžiště $u_0 = \min |y_c|$. Pravděpodobnost efektu plošného zdroje je úměrná průmětu plochy $l_w(\alpha)$, kterou zabírá kontura $|\delta_{\text{ex}}| = w$. Jinak řečeno, $l_w(\alpha)$ je kolmá šířka kontury pro všechny trajektorie s úhlem α , přičemž překrývající se části kontur se počítají jenom jednou. Podobně definujeme i $l_{\text{cc}}(\alpha)$ jako kolmou šířku kaustických křivek zvětšených o ρ_* . Naše veličina l_{cc} je podobná Δp z článku Mao & Paczyński (1991) a s_{cc} z práce Night a kol. (2007), ale tyto dvě veličiny měří čistě kolmou šířku kaustiky nezvětšenou o poloměr zdroje. Nezahrnují tedy situace, kdy přes kaustiku nepřešel střed zdroje, ale pouze jeho okraj. Pro malé zdroje je samozřejmě rozdíl zanedbatelný, ale pro zdroj $\rho_* = 0,02$ může být rozdíl mezi s_{cc} a l_{cc} až 15 % (šest poloměrů zdroje).

Vzorové funkce l_w a l_{cc} jsou vyneseny v Obrázku 11 pro čočky s $q = 1/3$ a zdroj s $\rho_* = 0,02$. Největších hodnot l_w v porovnání s l_{cc} se dosahuje pro trajektorie kolmé k největšímu rozsahu kontur. To vidíme například pro $\alpha = 0$ a $d = 0,65$ (trojdílná kaustika), kde šířka 1% efektu je 2,3krát větší než šířka kaustik, a podobně pro $\alpha = \pi/2$ a $d = 2,05$ (dvojdílná kaustika), kde šířka 10% efektu je 1,5krát větší než šířka kaustiky.

⁸Tedy zanedbání toho, že zdroj vně kaustiky má ve skutečnosti tři obrazy, zatímco v případě generického hrotu pouze jeden.



Obrázek 11: Kolmé šířky $l_w(\alpha)$ a $l_{cc}(\alpha)$ pro čočky s $q = 1/3$ a zdroj s $\rho_* = 0,02$. Hodnoty parametru d jsou označeny v každém z panelů. Plné křivky označují v každém panelu $l_w(\alpha)$ pro $w = 0,001$, $0,01$ a $0,1$ vždy od shora dolů a tečkované křivky označují $l_{cc}(\alpha)$. Zrcadlovou symetrii okolo $\alpha = \pi/2$ způsobuje osová symetrie geometrie čočky.

Tabulka 1: Pravděpodobnost P_w pozorování efektu plošného zdroje o velikosti w pro různé geometrie čoček.

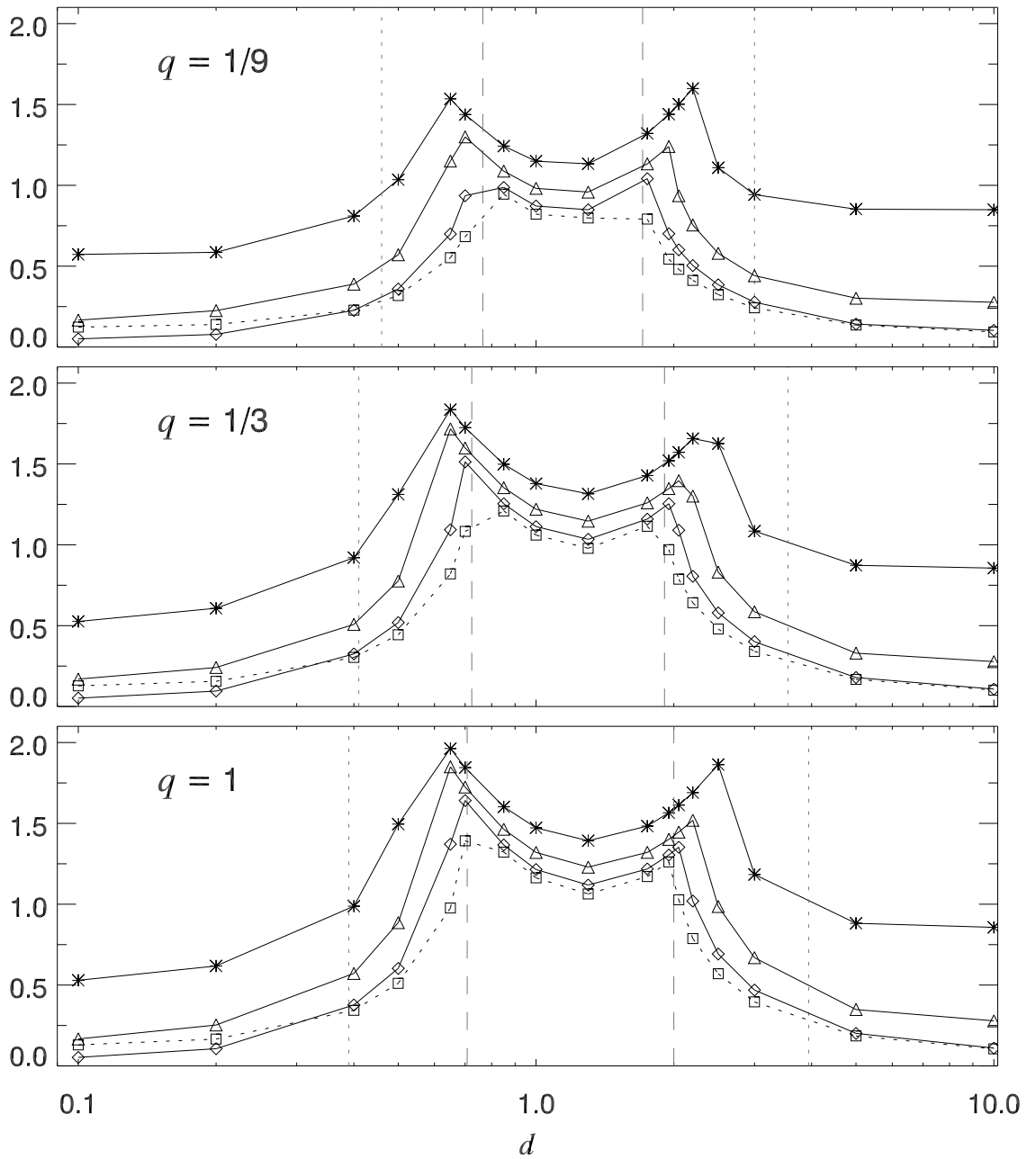
q	d								
	0,65			1,0			2,05		
	$P_{0,001}$	$P_{0,01}$	$P_{0,1}$	$P_{0,001}$	$P_{0,01}$	$P_{0,1}$	$P_{0,001}$	$P_{0,01}$	$P_{0,1}$
$\rho_* = 0,02$									
1	2,01	1,89	1,40	1,27	1,14	1,04	1,57	1,41	1,32
1/3	2,24	2,09	1,33	1,30	1,15	1,05	2,00	1,77	1,38
1/9	2,78	2,08	1,27	1,40	1,19	1,06	3,13	1,95	1,25
$\rho_* = 0,002$									
1	1,76	1,27	1,07	1,09	1,04	1,01	1,42	1,37	1,11
1/3	1,65	1,27	1,09	1,10	1,05	1,02	1,68	1,23	1,08
1/9	1,67	1,30	1,10	1,13	1,06	1,02	1,55	1,24	1,08

Relativní pravděpodobnost toho, že se pro náhodnou trajektorii dosáhne efektu plošného zdroje alespoň $|\delta_{\text{ex}}| = w$ vůči pravděpodobnosti přechodu kaustiky, je daná poměrem středních hodnot

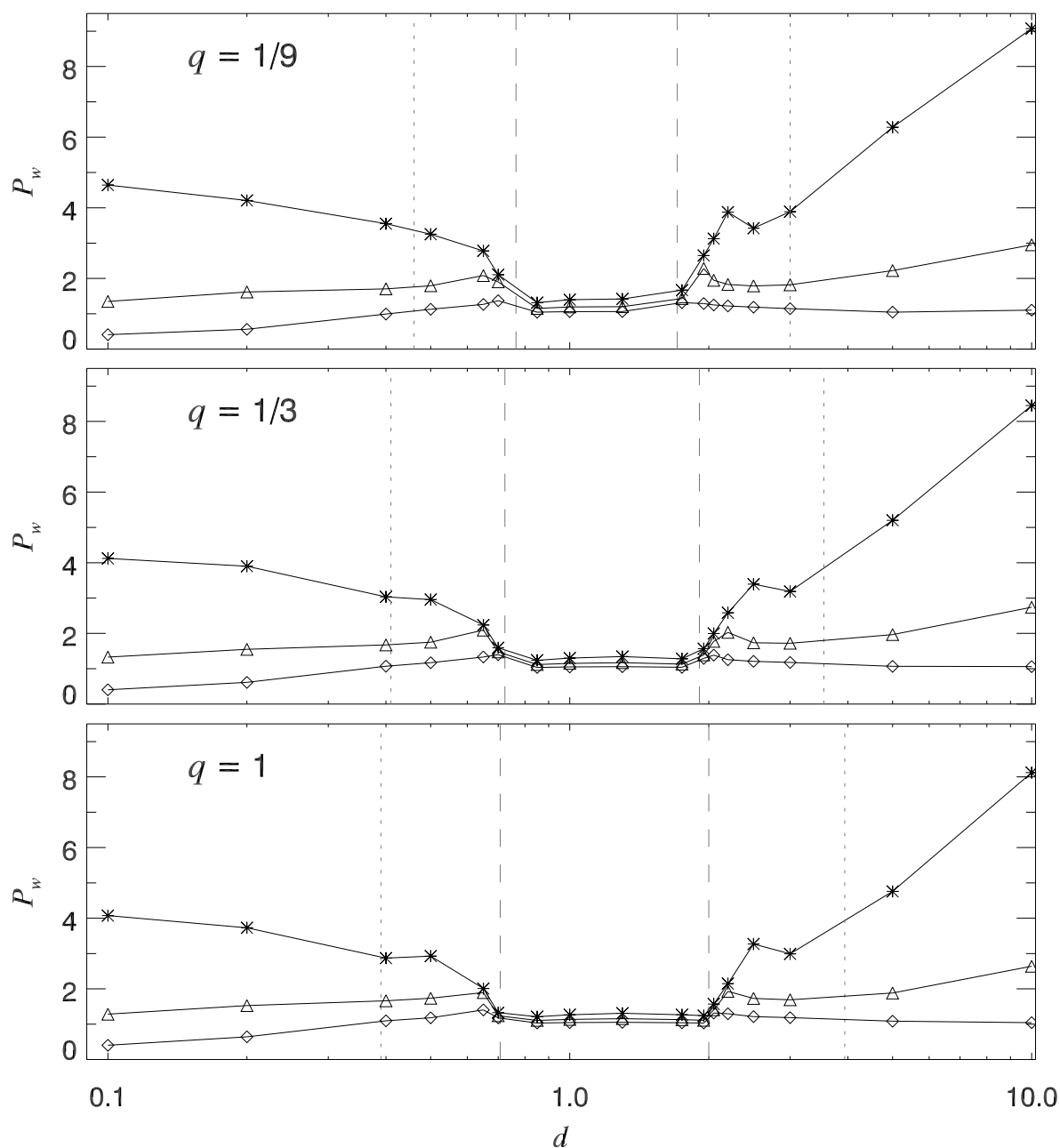
$$P_w = \frac{\langle l_w \rangle}{\langle l_{\text{cc}} \rangle} = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} l_w(\alpha) d\alpha}{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} l_{\text{cc}}(\alpha) d\alpha}. \quad (31)$$

Tabulka 1 uvádí hodnoty P_w pro čočkové geometrie z Obrázku 5 a dvě velikosti zdroje. Vidíme, že pro velký zdroj $\rho_* = 0,02$ je 1% efekt až dvojnásobně pravděpodobnější než pouhý přechod kaustiky – nejmenší pravděpodobnost je 1,14 ($d = 1$, $q = 1$) a největší 2,09 ($d = 0,65$, $q = 1/3$). Pro malý zdroj $\rho_* = 0,002$ je 1% efekt stále až o několik desítek procent pravděpodobnější než přechod kaustiky – pravděpodobnost sahá od 1,04 ($d = 1$, $q = 1$) do 1,37 ($d = 2,05$, $q = 1$). Pro slabší efekt plošného zdroje dosahují pravděpodobnosti samozřejmě vyšších hodnot. Všimněme si též, že rovnice (25) předpovídá, že se $\langle l_w \rangle$ pro malé hodnoty w bude škálovat jako ρ_*^2 . Například pro konstantní q a d a zdroj s $\rho_* = 0,02$ by mělo být $\langle l_{0,01} \rangle$ totožné s $\langle l_{0,0001} \rangle$ pro zdroj s $\rho_* = 0,002$. Toto škálování ovšem nefunguje pro $\langle l_{0,1} \rangle$, protože příslušná kontura leží ke kaustice blíže, než platí aproximace rovnice (25). V každém případě ale P_w obsahuje další dodatečné změny způsobené závislostí $\langle l_{\text{cc}} \rangle$ na poloměru zdroje ρ_* .

Pro studium vlivu parametrů q a d jsme do Obrázku 12 vynesli $\langle l_w \rangle$ a $\langle l_{\text{cc}} \rangle$ a do Obrázku 13 P_w pro několik hodnot vzdálenosti d , zdroj s $\rho_* = 0,02$ a tři používané poměry hmotnosti q . Svislými šedými čarami jsou označeny i hodnoty d , pro něž se mění počet částí kaustiky (viz část 2.1.3) a také d , při nichž se kontura $\delta_{\text{ex}} = 0$ mezi protilehlými hroty rozděluje na dvě (viz část 3.1). Z Obrázku 12 vidíme, že nejvyšší kolmé promítnuté šířky jak kaustik tak kontur nastávají pro d uvnitř svislých tečkovaných čar. V těchto oblastech máme buď jednoduché kaustiky



Obrázek 12: Závislost kolmé šířky kontur $\langle l_w \rangle$ a kaustických křivek $\langle l_{cc} \rangle$ na vzdálenosti d pro zdroj s $\rho_* = 0,02$ a tři poměry hmotností q , jež jsou označeny v každém panelu. Hodnoty $\langle l_w \rangle$ jsou vyneseny pro $w = 0,001$ (hvězdičky), $w = 0,01$ (trojúhelníky) a $w = 0,1$ (kosočtverce) a jsou vždy spojené plnou černou čarou. Čtveřky a tečkovanou čarou je vyneseno $\langle l_{cc} \rangle$. Svislé čárkované šedé čáry označují hodnoty d , pro něž se mění počet částí kaustických křivek a svislé šedé tečkované čáry označují místa, kde se rozpojuje kontura $\delta_{ex} = 0$ mezi dvěma protilehlými hroty, jak bylo změřeno v části 3.1.



Obrázek 13: Závislost pravděpodobnosti efektu plošného zdroje P_w na vzdálenosti d pro zdroj s $\rho_* = 0,02$ a tři poměry hmotností q , jež jsou označeny v každém panelu. Zjištěné hodnoty pravděpodobnosti P_w jsou vyneseny pro $w = 0,001$ (hvězdičky), $w = 0,01$ (trojúhelníky) a $w = 0,1$ (kosočtverce) a jsou vždy spojené plnou černou čarou. Svislé čáry mají stejný význam jako na Obrázku 12.

nebo vícedílné kaustiky se spojenými nulovými konturami mezi protilehlými hroty. Vidíme ale také, že pro geometrie s jednoduchou kaustikou je poměr P_w mezi kolmou šířkou kontur a kaustiky malý, proto se v těchto oblastech bude nacházet naopak „údolí“ malých P_w , jak je vidět z Obrázku 13. To je pochopitelné, protože jednoduché kaustiky mají málo vyčnívajících hrotů, které by zvyšovaly $\langle l_w \rangle$. Šířka tohoto údolí se s klesajícím q zmenšuje, protože se zmenšuje i rozsah hodnot d , pro něž je kaustika jednoduchá.

V limitě $d \nearrow \infty$ se bude dvojčočka chovat jako dvě oddělené čočky o hmotnostech $\mu_A M$ a $\mu_B M$, každá s bodovou kaustikou. Einsteinův úhel každé z těchto čoček bude nižší než pro čočku s hmotností M , ale zároveň pro danou absolutní velikost zdroje vzroste stejnou měrou ρ_* . Proto budou kontury pro malé δ_{ex} v našich jednotkách přibližně stejně velké u obou hmotných bodů. Výpočet pomocí A_0 bodové čočky a rovnice (25) potom vede na limitní hodnoty $\langle l_{0,001} \rangle \approx 0,8$ a $\langle l_{0,01} \rangle \approx 0,27$, respektive $P_{0,001} \approx 10$ a $P_{0,01} \approx 3,4$, jichž ale ve všech použitých hodnotách d dosaženo nebylo. V limitě $d \searrow 0$ máme jednu bodovou čočku, ale vždy tři téměř bodové kaustiky. Kontury efektu plošného zdroje kolem dvou planetárních kaustik se budou zmenšovat s velikostí kaustik⁹ až budou zanedbatelně malé. Přibližné limitní hodnoty jsou v tomto případě $\langle l_{0,001} \rangle \approx 0,4$ a $\langle l_{0,01} \rangle \approx 0,13$, respektive $P_{0,001} \approx 3,6$ a $P_{0,01} \approx 1,1$. Pro použité hodnoty d už se zjištěné $P_{0,01}$ blíží limitnímu, ale u $P_{0,001}$ ještě očekáváme u $d \lesssim 0,1$ pokles k limitní hodnotě.

⁹Přesně na kaustice bude vždy samozřejmě $\delta_{\text{ex}} = -1$.

Kapitola 4

Chromaticita

V této kapitole prozkoumáme vliv konkrétního tvaru okrajového ztemnění na zjasnění plošného zdroje v dvojitém gravitačním mikročočkování. Na konkrétním příkladě porovnáme lineární okrajové ztemnění s PCA modelem.

4.1 Oblasti citlivosti

Skutečný tvar okrajového ztemnění závisí na vlnové délce. Při pozorování v různých fotometrických filtrech tedy můžeme vidět změny barvy, mikročočková událost s rozlišeným zdrojem je *chromatická*. V rámci PCA modelu okrajového ztemnění daného rovnicí (21) definujeme chromaticitu $\delta_{\text{chr}}(\mathbf{y}_c)$ jako relativní rozdíl zjasnění dvou zdrojů s extrémními okrajovými ztemněními

$$\delta_{\text{chr}}(\mathbf{y}_c) \equiv \frac{A_*(\mathbf{y}_c, \kappa_{\text{pk}}) - A_*(\mathbf{y}_c, \kappa_{\text{fl}})}{A_*(\mathbf{y}_c, 0)}. \quad (32)$$

Jak bylo ukázáno v PH08, rozvoj takto definované chromaticity umožňuje separovat geometrickou část úměrnou derivacím A_0 a část závislou pouze na okrajovém ztemnění. Podobným postupem jako v části 3.2 byl v PH08 odvozen vztah pro δ_{chr} v oblastech daleko od kaustických křivek

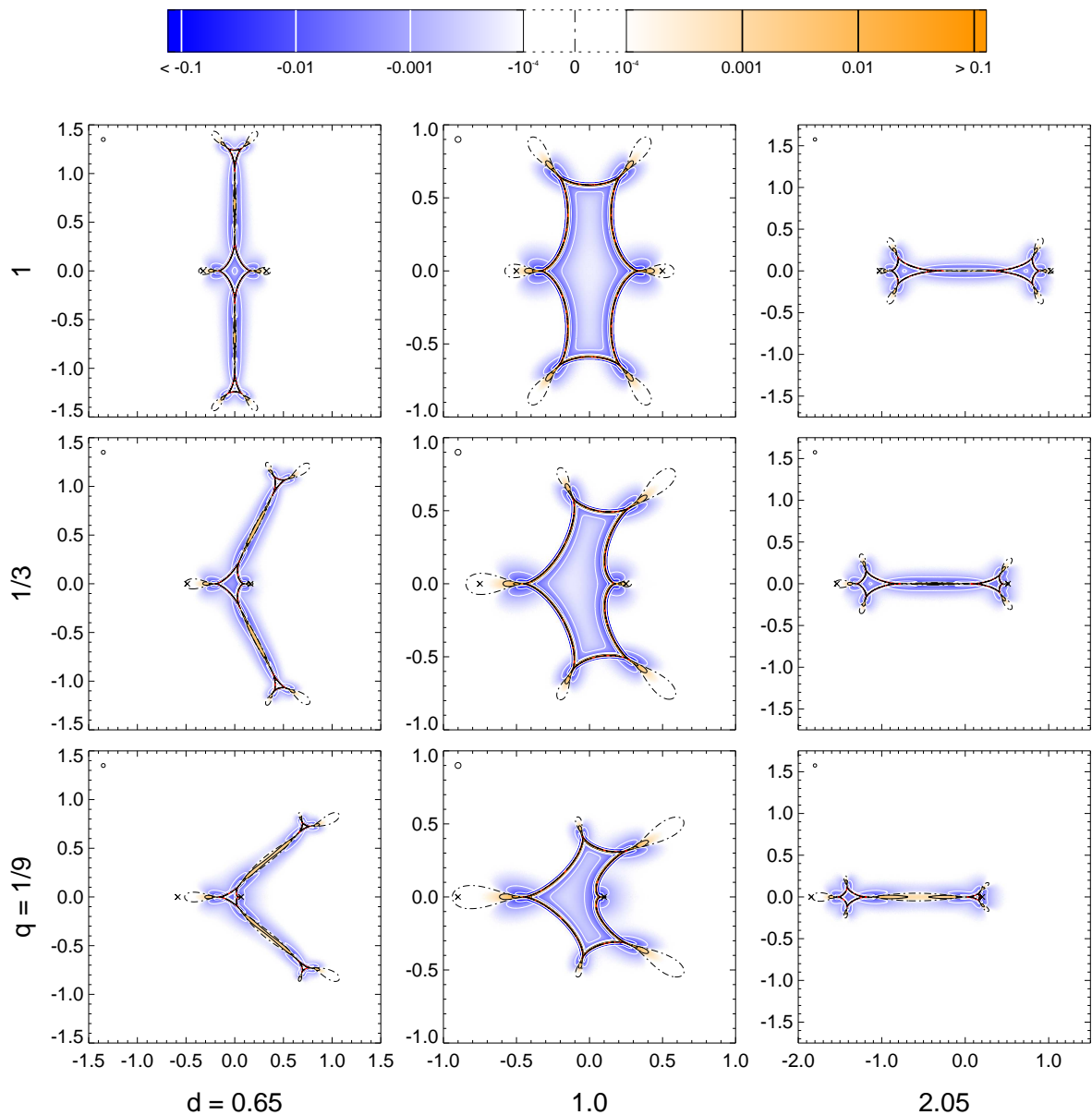
$$\delta_{\text{chr}}(\mathbf{y}_c) \approx h(\kappa_{\text{pk}}, \kappa_{\text{fl}}) \left[\frac{\int_0^1 f_2(r) r^3 dr \int_0^1 f_1(r) r dr}{\int_0^1 f_2(r) r dr \int_0^1 f_1(r) r^3 dr} - 1 \right] \delta_{\text{ex}}(\mathbf{y}_c), \quad (33)$$

kde $h(\kappa_{\text{pk}}, \kappa_{\text{fl}})$ je faktor závislý pouze na použitém modelu okrajového ztemnění

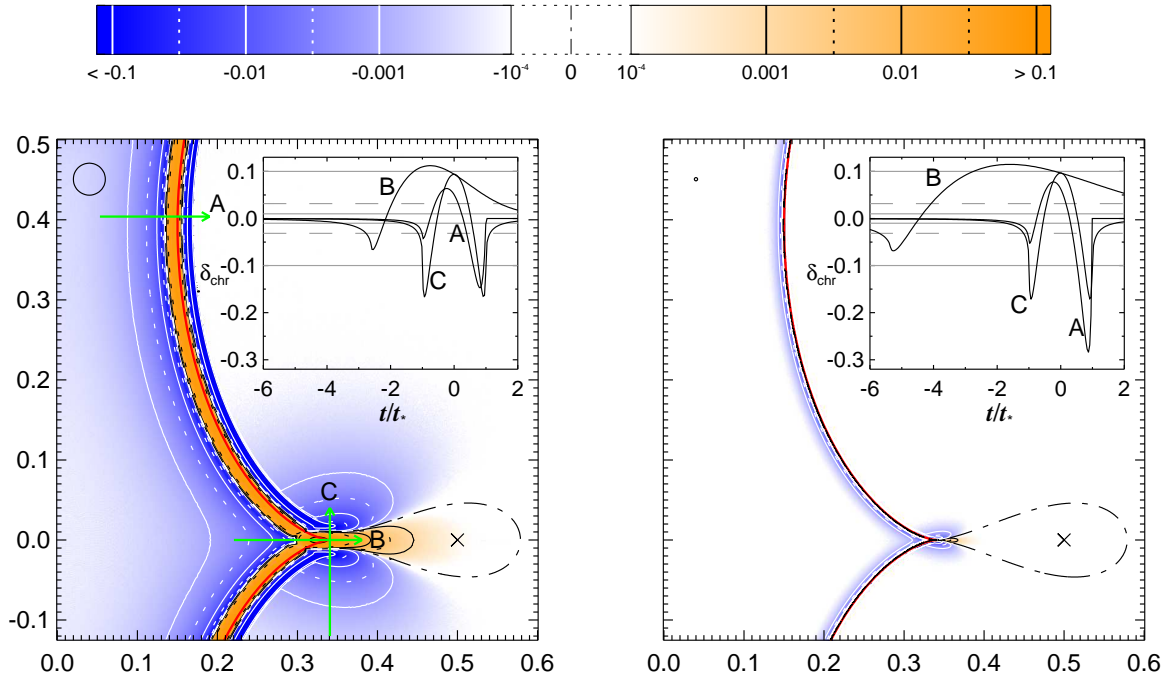
$$h(\kappa_{\text{pk}}, \kappa_{\text{fl}}) = \frac{(\kappa_{\text{pk}} - \kappa_{\text{fl}}) \int_0^1 f_1(r) r dr \int_0^1 f_2(r) r dr}{\int_0^1 [f_1(r) + \kappa_{\text{pk}} f_2(r)] r dr \int_0^1 [f_1(r) + \kappa_{\text{fl}} f_2(r)] r dr}. \quad (34)$$

Přepoččet $h(\kappa_{\text{pk}}, \kappa_{\text{fl}})$ na obecně jiné hodnoty κ_1 a κ_2 je uveden v PH08.

Z rovnice (33) vidíme, že daleko od kaustických křivek je tvar kontur stejný jako u citlivosti na efekt plošného zdroje δ_{ex} přenásobené konstantou, po vyčíslení



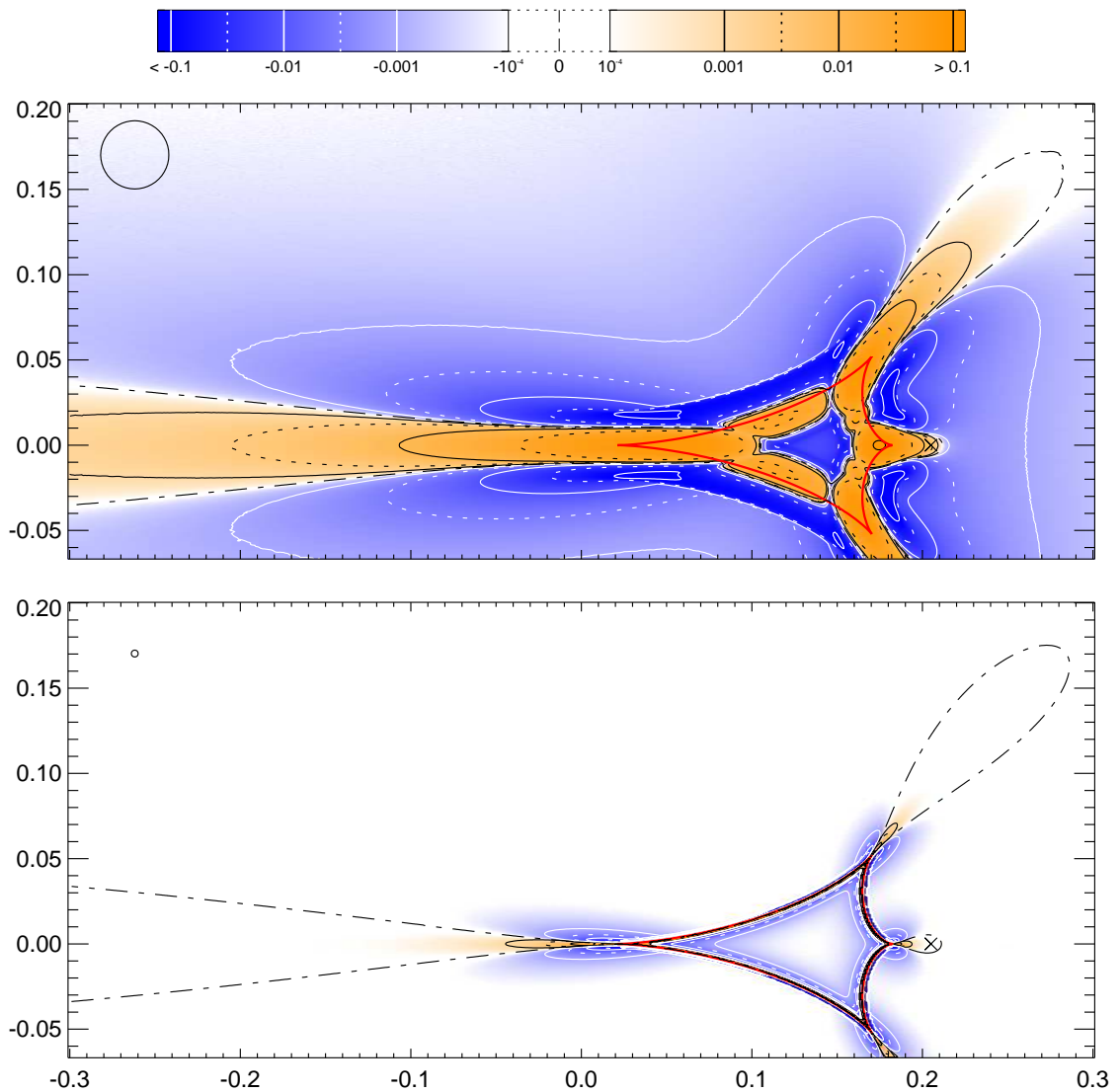
Obrázek 14: Konturový graf chromaticity $\delta_{\text{chr}}(\mathbf{y}_c)$ pro stejných devět geometrií jako v Obrázku 2 a zdroj o poloměru $\rho_* = 0,02$. Plné čáry jsou kontury pro $\delta_{\text{chr}} = \pm 0,1, \pm 0,01$ a $\pm 0,001$; černá barva přísluší kladným hodnotám a bílá záporným hodnotám δ_{chr} . Čerchovaná čára odpovídá nulovému efektu $\delta_{\text{chr}} = 0$. Kromě kontur je chromaticita znázorněna i odstíny oranžové pro $\delta_{\text{chr}} > 0$ a odstíny modré pro $\delta_{\text{chr}} < 0$, jak je vidět i v legendě v horní části obrázku. Hodnoty $|\delta_{\text{chr}}| \leq 10^{-4}$ jsou vyneseny bílou barvou. Kroužek v levé horní části panelu označuje velikost zdroje. Kaustické křivky jsou označeny červenou čarou a polohy hmotných bodů křížky.



Obrázek 15: Detailní konturový graf chromaticity pro čočku s $d = 1$ a $q = 1$ a zdroje s poloměrem $\rho_* = 0,02$ (levý panel) a $\rho_* = 0,002$ (pravý panel). Význam symbolů je stejný jako na Obrázku 14, ale přidány byly navíc dvě tečkované kontury $\delta_{\text{chr}} = \pm 10^{-2,5}$ a $\pm 10^{-1,5}$. Řezy označené šipkami stejně jako vložené grafy jsou stejné jako pro Obrázek 7, ale ve vložených grafech jsou šedými horizontálními čarami zaznačeny hodnoty $\delta_{\text{chr}} = \pm 10^{-2}$, $\pm 10^{-1,5}$ a $\pm 10^{-1}$.

tedy platí $\delta_{\text{chr}} \approx -0,197 \delta_{\text{ex}}$. Obrázek 14 ukazuje chromaticitu jako funkci polohy středu zdroje pro stejných devět geometrií jako na Obrázku 5. Nulové kontury daleko od kaustik byly kvůli numerickému šumu spočítány opět jako místa s $\Delta A_0 = 0$ a nacházejí se tak ve stejných místech jako na Obrázku 5. Převažující oblasti záporné chromaticity se vyskytují v místech, kde jsme dříve popsali kladný efekt plošného zdroje. Vysvětlení je podobné jako v části 3.1. Špičatý profil okrajového ztemnění dává větší váhu středu zdroje a tedy nižší celkové zjasnění než plochý profil. Podobně jako na Obrázku 5 můžeme identifikovat oblasti zvýšené chromaticity mezi protilehlými hroty dvou oddělených kaustických křivek, zde je ovšem absolutní hodnota efektu nižší.

Obrázek 15 odpovídá stejnému výřezu z geometrie čočky $d = q = 1$ jako Obrázek 7. Zde vidíme, že průběh chromaticity v okolí kaustik je odlišný od efektu plošného zdroje. Předně z definice chromaticity v rovnici (32) je vidět, že δ_{chr} závisí pouze na zjasněních plošného zdroje A_* , která u kaustik nedivergují, a tedy δ_{chr} je v okolí kaustiky hladká.



Obrázek 16: Detailní konturový graf chromaticity pro čočku $d = 2,05$ a $q = 1/9$ a velikosti zdroje $\rho_* = 0,02$ (horní panel) a $\rho_* = 0,002$ (dolní panel). Význam symbolů je stejný jako na Obrázku 15.

Postupujeme-li ven z kaustické křivky skrze záhyb, jak ukazuje řez A, procházíme nejprve oblastí záporné chromaticity. Zde je zjasnění zdroje se špičatým profilem okrajového ztemnění nižší než u zdroje s plochým profilem, jak už jsme diskutovali v předchozích odstavcích. Hodnoty $\delta_{\text{chr}} = -1\%$ je dosaženo přibližně $1,3\rho_*$ vlevo od kaustiky a minimum o hloubce $\delta_{\text{chr}} \approx -0,04$ ve vzdálenosti $1\rho_*$, kdy se okraj zdroje dotýká kaustiky. Kladné oblasti chromaticity najdeme v místech, kde je zjasnění středu zdroje nejvyšší, přičemž maximum $\delta_{\text{chr}} \approx 0,06$ se dosahuje asi $0,03\rho_*$ od kaustiky. Vně kaustiky pak vidíme pokles do druhého minima, je-

hož hloubka rozdílu od předchozích údajů závisí na velikosti zdroje. Pro zdroj $\rho_* = 0,02$ dosahuje minimum k $\delta_{\text{chr}} \approx -0,14$, zatímco pro menší zdroj $\rho_* = 0,002$ až k $\delta_{\text{chr}} \approx -0,28$. Ve vzdálenosti větší než $1 \rho_*$ od kaustiky už je chromaticita zanedbatelná.

Okolo hrotu vidíme další výrazný rozdíl mezi chromaticitou a citlivostí na efekt plošného zdroje. V Obrázku 7 vstupovaly nulové kontury téměř přesně do hrotu, zatímco na Obrázku 15 obklopuje hrot oblast kladné chromaticity. Trajektorie řezu B prochází po ose hrotu a podobně jako na Obrázku 7 můžeme vidět nelineární škálování s poloměrem zdroje ρ_* . Hranici $\delta_{\text{chr}} = 1\%$ dosáhne větší zdroj ve vzdálenosti $3,5 \rho_*$ od hrotu, zatímco menší zdroj ve vzdálenosti $7,3 \rho_*$. Vně hrotu protne zdroj konturu $\delta_{\text{chr}} = 1\%$ ve vzdálenosti $2,6 \rho_*$ v případě většího poloměru, respektive $6,0 \rho_*$ pro malý zdroj. Minimum o hloubce $\delta_{\text{chr}} \approx -0,065$ se nachází ve vzdálenosti $2,6 \rho_*$ od hrotu pro větší zdroj, respektive $5,3 \rho_*$ pro menší zdroj. Poloha širokého maxima $\delta_{\text{chr}} \approx 0,11$ se též mění v závislosti na velikosti zdroje: $0,75 \rho_*$ pro větší zdroj, zatímco malý zdroj má maximum až $1,6 \rho_*$ od hrotu.

Trajektorie řezu C vede kolmo na osu hrotu a je symetrická okolo $t = 0$. Maximálních hodnot $\delta_{\text{chr}} \approx 0,09$ se dosahuje pro střed zdroje přímo na hrotu, zatímco minima $\delta_{\text{chr}} = -0,16$ nastávají ve vzdálenosti $0,95 \rho_*$ do hrotu, když se okraj zdroje nachází v místech s největším zjasněním.

Obrázek 16 ukazuje stejný detail geometrie čočky s $d = 2,05$ a $q = 1/9$ jako Obrázek 8. Vidíme opět, že podobně jako u citlivosti na efekt plošného zdroje, chromaticita dosahuje v levé části panelů daleko od hrotu. Konkrétně pro velký zdroj $\rho_* = 0,02$ sahá kontura $\delta_{\text{chr}} = 1\%$ na ose $6,4 \rho_*$ od levého hrotu ($0,95 \rho_*$ od hrotu vpravo), ale pro malý zdroj $\rho_* = 0,002$ je to už $13,8 \rho_*$ od hrotu vlevo ($2,6 \rho_*$ od pravého hrotu). Na obrázku vidíme také přerušení oblasti kladné chromaticity kolem kaustiky přibližně v místech $y_c = (0,145; \pm 0,03)$. V těchto místech je střed zdroje silně zjasněn, protože se nachází na kaustice, ale okrajové části jsou zjasněné ještě více, protože se jejich značná část nachází poblíž hrotu a dalších částí kaustiky. Těmito místy by tedy mohl střed zdroje projít z horní části obrázku do dolní aniž by opustil oblast záporné chromaticity. Náznaky podobných oblastí vidíme jako „zářezy“ poblíž hrotů i v panelech Obrázku 14.

Barevné změny během mikročočkování byly studovány v několika pracích, z nichž zde zmíníme dvě. Wambsganss & Paczyński (1991) studovali změny barevného indexu $\Delta(B-R)$ kvazaru během jeho přechodu přes záhyb a získali závislosti podobné našemu řezu A na Obrázku 15. Barevné změny ale v tomto případě nastaly kvůli různé velikosti kvazaru na jednotlivých vlnových délkách. Han & Park (2001) demonstrovali chromaticitu na konturových grafech změny barevného indexu $\Delta(B-I)$ pro čočku se stejnými parametry jako na našem Obrázku 15, ale poloměr zdroje byl pětikrát větší. Oblasti záporného $\Delta(B-I)$ přísluší našemu $\delta_{\text{chr}} > 0$ a naopak.

4.2 Porovnání modelů okrajového ztemnění

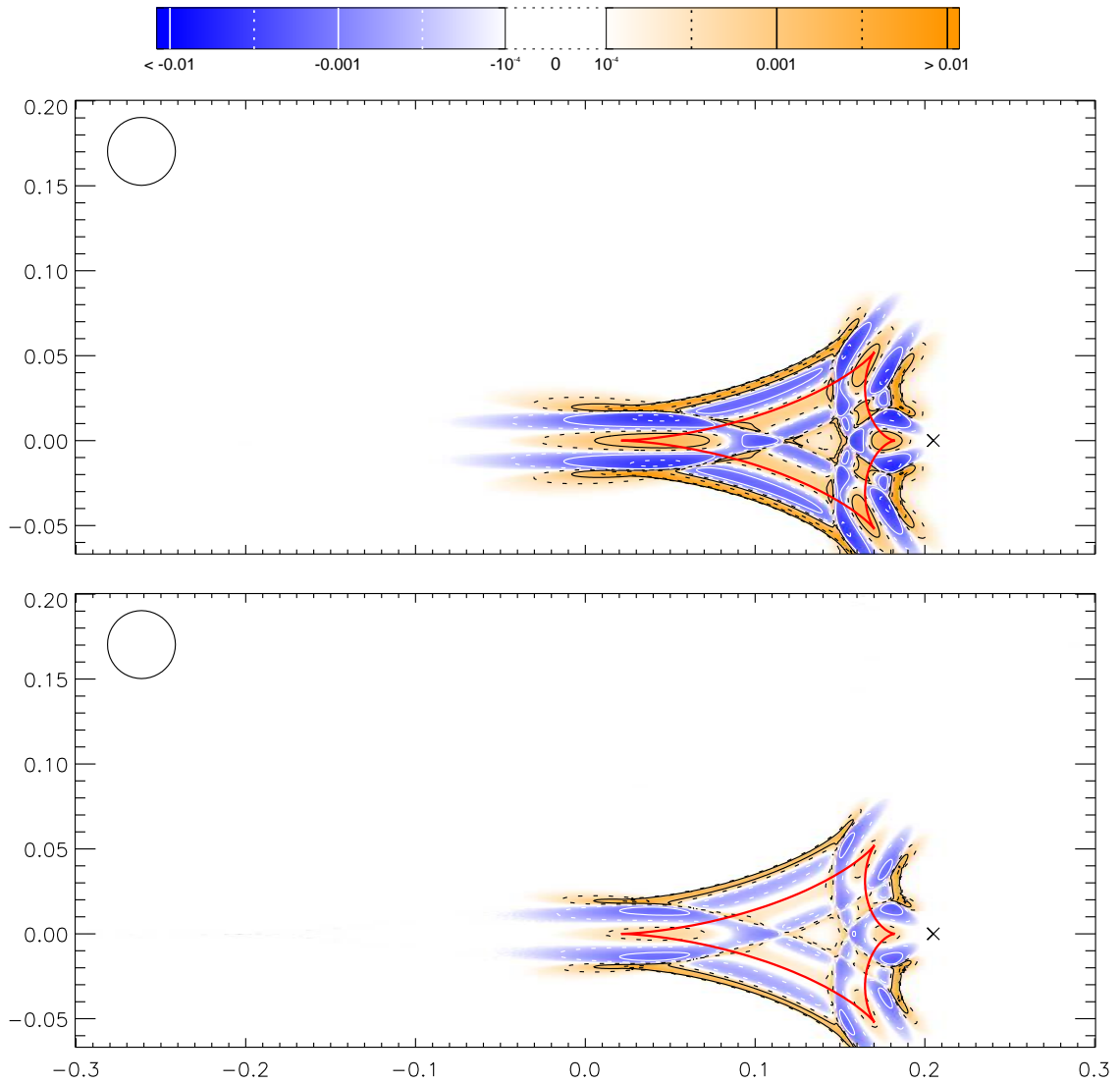
Vyvstává otázka, nakolik se ve dvojitým gravitačním mikročočkování projeví rozdíly mezi modely okrajového ztemnění popsanými v části 2.3, tedy lineárním modelem (rovnice [20]) a PCA modelem (rovnice [21]). Rozdíly mezi těmito modely zde ilustrujeme pro stejný detail jako na Obrázku 16 ($d = 2,05$, $q = 1/9$) a pro hvězdu s poloměrem $\rho_* = 0,02$, efektivní teplotou $T_{\text{eff}} = 3750$ K, povrchovým tíhovým zrychlením $\log g = 3,5$, zastoupením kovů $[\text{Fe}/\text{H}] = -3,5$ a fotometrický filtr I . Koeficienty přesného tvaru okrajového ztemnění (rovnice [19]) jsme použili k výpočtu zjasnění $A_*^{\text{spline}}(\mathbf{y}_c)$. Pro stejné parametry hvězdy jsme vypočetli také zjasnění $A_*^{\text{lin}}(\mathbf{y}_c)$ pro lineární model okrajového ztemnění s $v = 0,336$ a zjasnění $A_*^{\text{PCA}}(\mathbf{y}_c)$ pro PCA model okrajového ztemnění s $\kappa = 0,037$, které nejlépe odpovídají skutečnému tvaru okrajového ztemnění (Heyrovský, 2007). Relativní rozdíly mezi lineárním (resp. PCA) modelem a skutečným okrajovým ztemněním

$$\delta_{\text{lin}}(\mathbf{y}_c) \equiv \frac{A_*^{\text{lin}}(\mathbf{y}_c)}{A_*^{\text{spline}}(\mathbf{y}_c)} - 1, \quad (35)$$

$$\delta_{\text{PCA}}(\mathbf{y}_c) \equiv \frac{A_*^{\text{PCA}}(\mathbf{y}_c)}{A_*^{\text{spline}}(\mathbf{y}_c)} - 1 \quad (36)$$

jsme vynesli do Obrázku 17.

Z Obrázku 17 ihned vidíme, že tvary kontury δ_{lin} a δ_{PCA} se vzájemně dosti podobají, ale zároveň se výrazně liší od kontur chromaticity, jaké jsou například na Obrázku 16. Zatímco PCA profily odpovídající κ_{pk} a κ_{fl} se protínají jenom v jednom bodě, skutečný profil se se svou PCA a lineární aproximací protíná ve více bodech, čímž vznikají relativně složité struktury na Obrázku 17. Maximální hodnota reziduí je pro lineární ztemnění $\delta_{\text{lin}} \approx 1,5\%$ a minimální hodnota $\delta_{\text{lin}} \approx -0,46\%$, což dává rozsah reziduí téměř 2%. Pro PCA model okrajového ztemnění jsou maximální hodnoty $\delta_{\text{PCA}} \approx 0,68\%$ a minimální $\delta_{\text{PCA}} \approx -0,88\%$, rozsah je tedy asi 1,5%. V obou případech se extrémních hodnot dosahuje mimo osu čočky poblíž pravého hrotu. Pro lineární model je maximální hodnota skoro dvakrát vyšší než u PCA modelu. Směrodatná odchylka počítaná ze všech bodů v Obrázku 17 činí pro δ_{lin} asi $1,6 \cdot 10^{-3}$, zatímco pro δ_{PCA} asi $7,4 \cdot 10^{-4}$. To vyjadřuje, že odchylky lineárního modelu od skutečného profilu dosahují celkově vyšších hodnot a pokrývají větší plochu než pro PCA model. Kdybychom porovnávali nikoli zjasnění, ale přímo světelné toky, mohlo by se projevit horší zachování celkového světelného toku od hvězdy pro lineární model okrajového ztemnění. Takové porovnání ale spadá mimo záběr této diplomové práce.



Obrázek 17: Porovnání dvou modelů okrajového ztemnění pro čočku $d = 2,05$ a $q = 1/9$ a zdroj s $\rho_* = 0,02$. V horním panelu je vyneseno $\delta_{\text{lin}}(\mathbf{y}_c)$, zatímco v dolním panelu $\delta_{\text{PCA}}(\mathbf{y}_c)$. Význam ostatních symbolů je stejný jako na Obrázku 16, pouze není v obou případech vynesena čerchovaná kontura nulového efektu.

Kapitola 5

Spektrum během mikročočkování

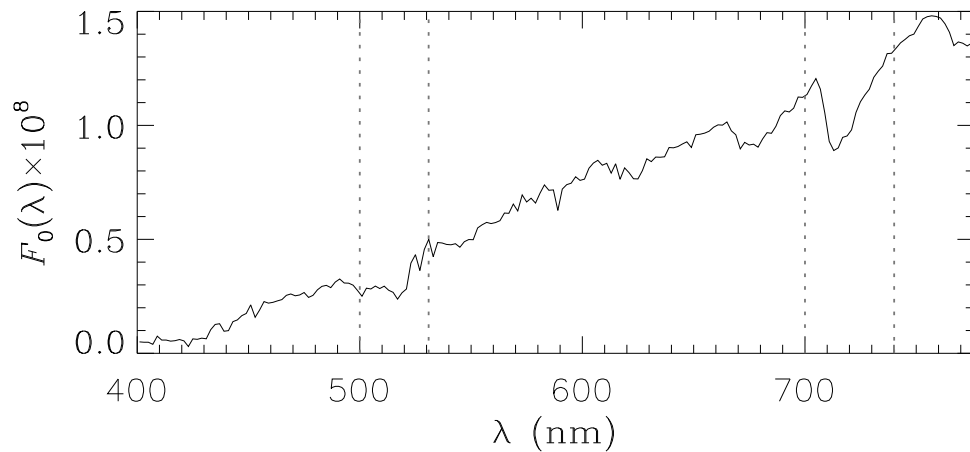
Jak bylo ukázáno v Kapitole 4, gravitační mikročočky umožňují experimentálně určit tvar okrajového ztemnění v některém z fotometrických filtrů. Pozorujeme-li vhodnou mikročočkovou událost spektroskopicky, zaznamenáme ze stejné příčiny změny ve tvaru spektra. Tyto změny postihují spektrum jako celek, ale také detaily jednotlivých spektrálních čar. V této Kapitole ilustrujeme spektrální změny způsobené dvojitými gravitačními mikročočkami podobným způsobem jako Heyrovský a kol. (2000) pro bodové mikročočky. U bodových mikročoček situace závisí pouze na jednom parametru vzdálenosti, zatímco u dvojčoček jsou všechny veličiny závislé na dvourozměrné poloze středu zdroje \mathbf{y}_c .

Nechť hvězda vysílá do prostorového úhlu na vlnové délce λ světelný tok $F_0(\lambda)$. Výsledný světelný tok $F(\lambda)$ po zobrazení mikročočkou bude

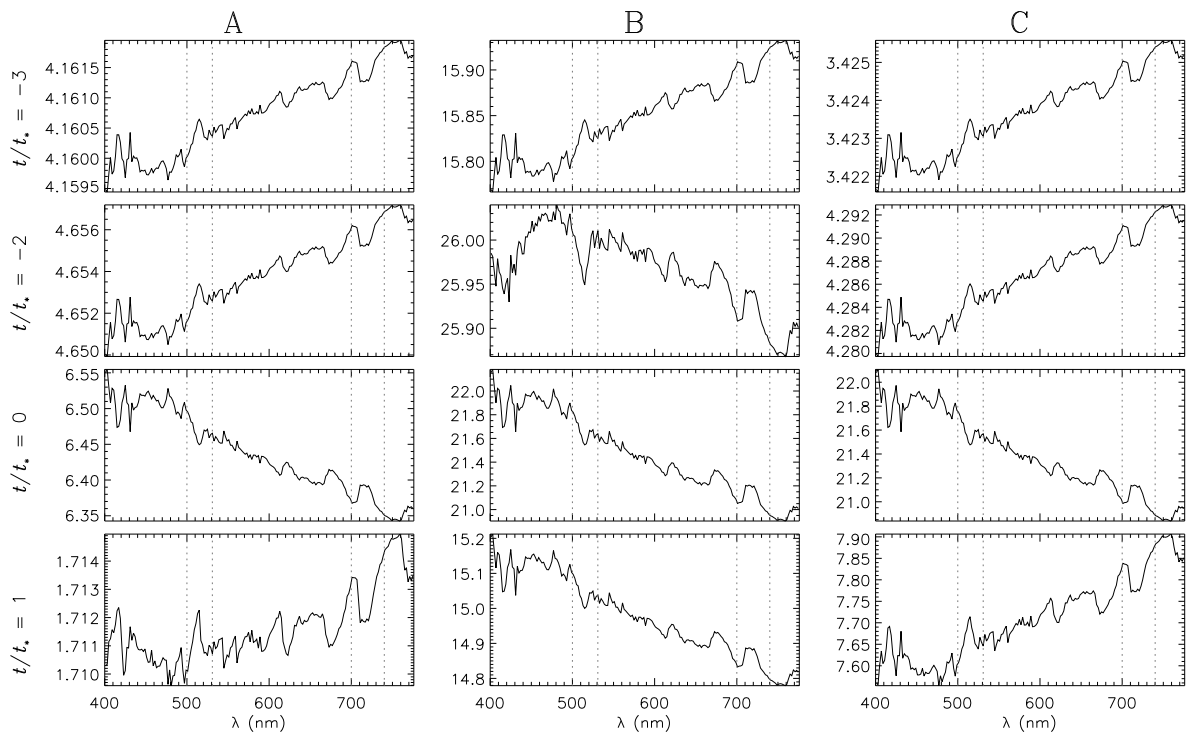
$$F(\mathbf{y}_c, \lambda) = A_*(\mathbf{y}_c, \lambda)F_0(\lambda). \quad (37)$$

Světelný tok kontinua na vlnové délce λ po ovlivnění mikročočkou označíme $F_c(\mathbf{y}_c, \lambda)$.

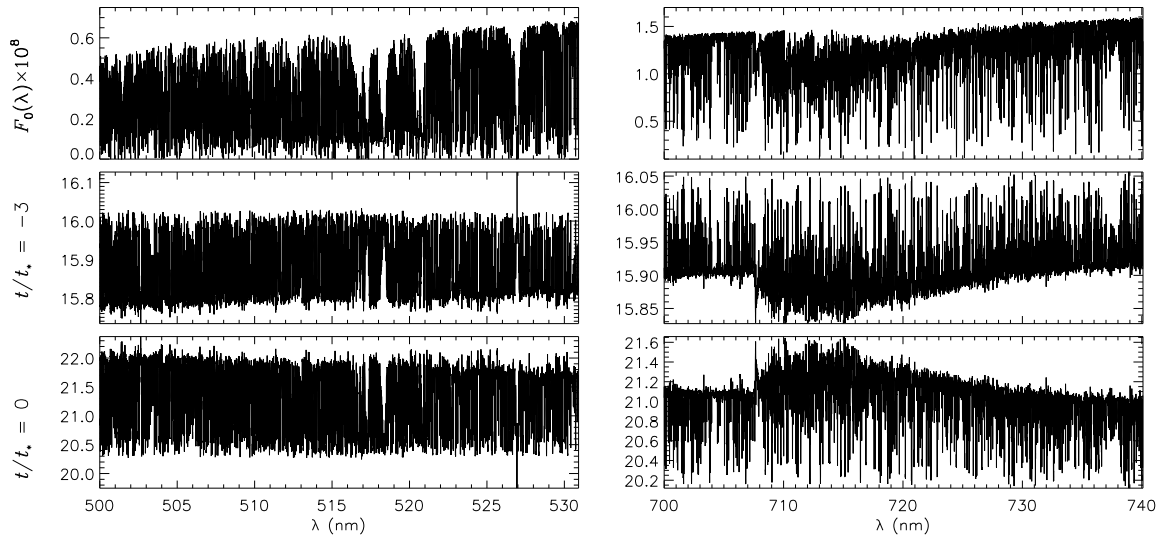
Na Obrázku 18 je vyneseno modelové spektrum s nízkým rozlišením pro hvězdu s $T_{\text{eff}} = 3750 \text{ K}$ a $\log g = 0,5$ (Kurucz, 1993), na němž si můžeme povšimnout širokých absorpčních pásů způsobených především molekulou TiO. Na Obrázku 19 je pak vynesena závislost $A_*(\mathbf{y}_c, \lambda)$ na vlnové délce pro několik poloh středu zdroje s $\rho_* = 0,02$ v geometrii čočky s $d = q = 1$, která je znázorněna také na Obrázku 15. Na první pohled vidíme, že sklon $A_*(\mathbf{y}_c, \lambda)$ se výrazně mění. Například pro řez A a $t/t_* = 0$ se bude spektrum jevit modřejší než pro třeba $t/t_* = -2$. Všimněme si rovněž, jak se mění hodnoty zjasnění a jejich rozsah. Zatímco pro řez A jsou dosahované hodnoty zjasnění relativně nízké $A_* \lesssim 10$, pro řez B dosahuje zjasnění až asi 25. Pro řez C procházející kolmo na osu hrotu se zjasnění zvýší přes $A_* = 10$ jenom ve velmi malém okolí hrotu. Důležitým parametrem je také relativní změna zjasnění pro různé vlnové délky. Například tvar křivek zjasnění $A_*(\mathbf{y}_c, \lambda)$ pro řez C a body $t/t_* = -3$ a 1 je téměř identický, ale v prvním případě se zjasnění změní na celém studovaném rozsahu jenom o 0,12 %, zatímco ve druhém o 4,6 %. Tento fakt prostudujeme podrobněji později.



Obrázek 18: Modelové spektrum hvězdy s $T_{\text{eff}} = 3750$ K a $\log g = 0,5$. Světelný tok $F_0(\lambda)$ je vyneseno v jednotkách $\text{W m}^{-2} \text{Hz}^{-1}$. Svislé šedé tečkované čáry označují spektrální pásy, jejichž detaily jsou vyneseny na Obrázku 20. Data byla převzata z Kurucz (1993).



Obrázek 19: Závislost zjasnění $A_*(\mathbf{y}_c, \lambda)$ na vlnové délce λ pro modelové spektrum z Obrázku 18. Křivky jsou vyneseny pro čočku s $d = q = 1$ a polohy středu zdroje s $\rho_* = 0,02$ odpovídající $t/t_* = -3, -2, 0$ a 1 pro řezy A, B a C z levého panelu Obrázku 15.



Obrázek 20: Detail dvou oblastí spektra označených v Obrázku 19 ve vyšším rozlišení. V horním řádku je nečočkované spektrum $F_0(\lambda)$ převzaté z Heyrovský a kol. (2000) a ve zbývajících zjasnění $A_*(\mathbf{y}_c, \lambda)$ pro řez B a $t/t_* = -3$ a 0.

Šedými tečkovanými čarami jsou v Obrázku 19 zaznačeny dva absorpční pásy TiO, které se při mikročočkování chovají přesně opačně: zatímco pás u 516 nm je například u řezu C a $t/t_* = -3$ zjasněn vůči okolnímu kontinuu, pás TiO na 710 nm je naopak zeslaben. Pro $t/t_* = 0$ se situace přesně otočí.

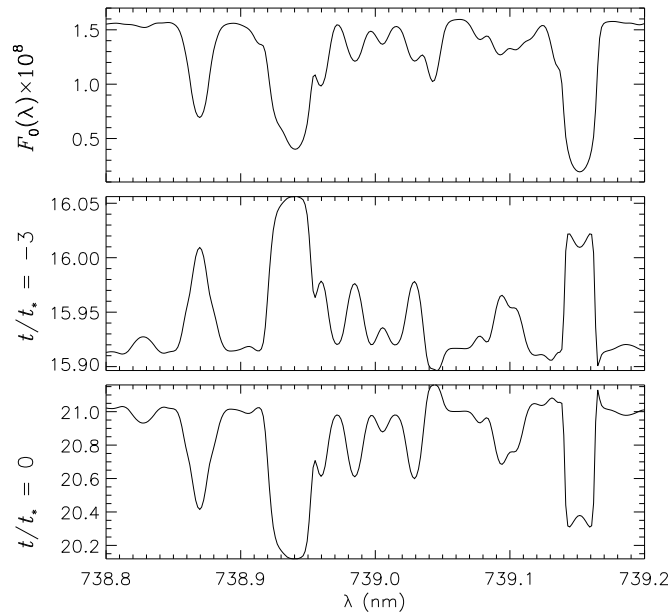
Tyto dva absorpční pásy jsou zobrazeny ve vyšším rozlišení na Obrázku 20. V horním řádku si nejprve všimněme nečočkovaného spektra, které ukazuje velké množství hlubokých spektrálních čar a pásů. Ve zbývajících dvou řádcích se v rozmazanosti zjasnění $A_*(\mathbf{y}_c, \lambda)$ projevuje fakt, že každá z těchto čar se vůči mikročočkování chová jiným způsobem. Detailní výřezy potvrzují pozorování učiněná ze spekter s nízkým rozlišením, totiž že obě oblasti vykazují vzájemně opačné chování zjasnění.

Na Obrázku 21 je pak vynesena detail ukazující úzký rozsah vlnových délek a umožňující rozlišit jednotlivé spektrální čáry. Zajímavá je především oblast u 739,04 nm, která ukazuje dvě sousední absorpční čáry s přesně opačnou korelací zjasnění. Ve spektrech je možné najít i složitější případy chování, které popisují a vysvětlují Heyrovský a kol. (2000).

Studium spektroskopických změn během dvojitých mikročočkových událostí se dosud omezovalo na zkoumání změn *ekvivalentní šířky* čar, především vodíkové čáry $H\alpha$ (Cassan a kol., 2004; Castro a kol., 2001). Ekvivalentní šířka W spektrální čáry se středem na λ_0 je definována vztahem

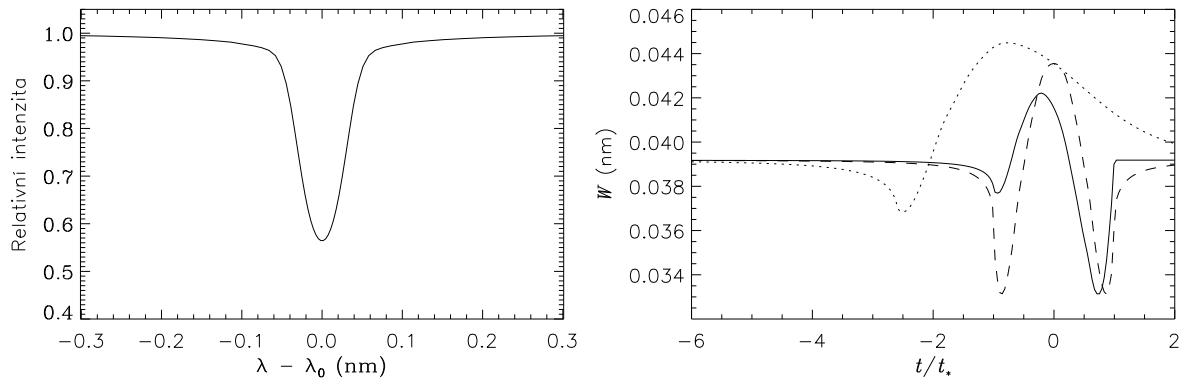
$$W(\mathbf{y}_c) \equiv \Delta\lambda \left(1 - \frac{\int F(\mathbf{y}_c, \lambda) d\lambda}{\int F_c(\mathbf{y}_c, \lambda) d\lambda} \right), \quad (38)$$

kde se integruje přes interval vlnových délek o šířce $\Delta\lambda$. Na Obrázku 22 je vy-

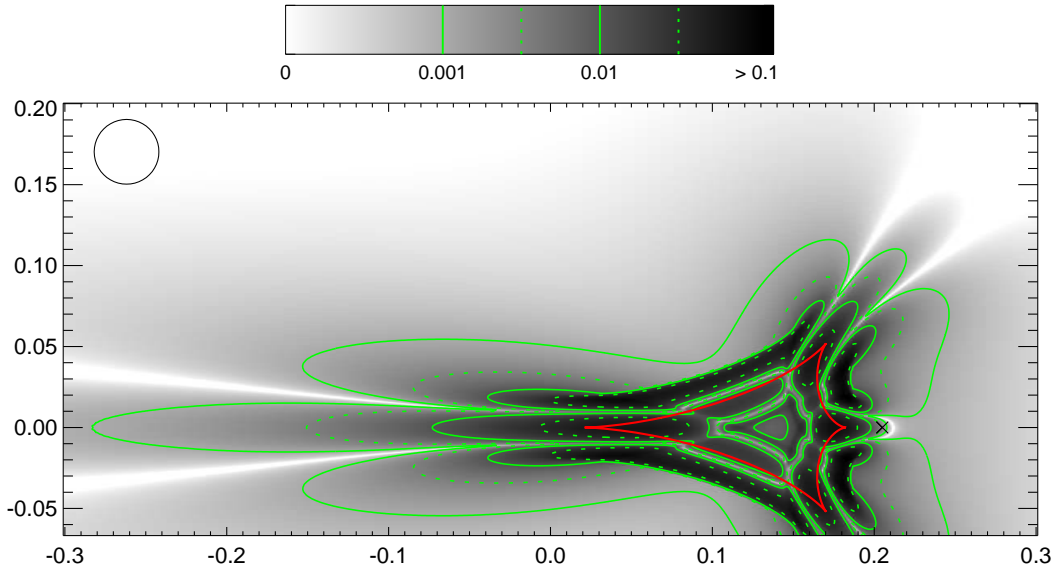


Obrázek 21: Detail oblasti z pravého sloupce Obrázku 20 umožňující rozlišit individuální spektrální čáry. V horním panelu nečočkované spektrum $F_0(\lambda)$, ve zbývajících panelech $A_*(\mathbf{y}_c, \lambda)$ pro řez B a $t/t_* = -3$ a 0.

nesen profil čáry $H\alpha$ pro stejnou hvězdu jako výše s $T_{\text{eff}} = 3750$ K a $\log g = 0,5$ (Heyrovský a kol., 2000). V levém panelu je vynesena nečočkovaná spektrální čára, zatímco v pravém panelu změny ekvivalentní šířky pro řezy A, B a C. Závislosti mají velmi podobný průběh jako u chromaticity (viz Obrázek 15), což je pochopitelné. Když jsou více zjasněné okraje zdroje, kde je čára $H\alpha$ slabá,



Obrázek 22: Změny čára $H\alpha$ během mikročočkování. Levý panel ukazuje nečočkovaný průběh intenzity čáry. V pravém panelu jsou vyneseny změny ekvivalentní šířky pro řezy A (plná čára), B (tečkovaně) a C (čárkovaně) a zdroj s $\rho_* = 0,02$.



Obrázek 23: Konturový graf spektrální chromaticity δ_{sp} pro výřez z geometrie čočky s $d = 2,05$, $q = 1/9$ a zdroj s $\rho_* = 0,02$ a modelem spektra z Obrázku 18. Kontury jsou vyneseny zelenými čarami pro $\delta_{\text{sp}} = 0,001$ a $0,01$ (plně) a pro $\delta_{\text{sp}} = 10^{-2,5}$ a $10^{-1,5}$ (tečkovaně). Spektrální chromaticita je vynesena také ve stupních šedi, jak je vidět z legendy v horní části obrázku. Tlustá červená čara znázorňuje kaustickou křivku, křížek polohu jednoho z hmotných bodů a kroužek velikost zdroje.

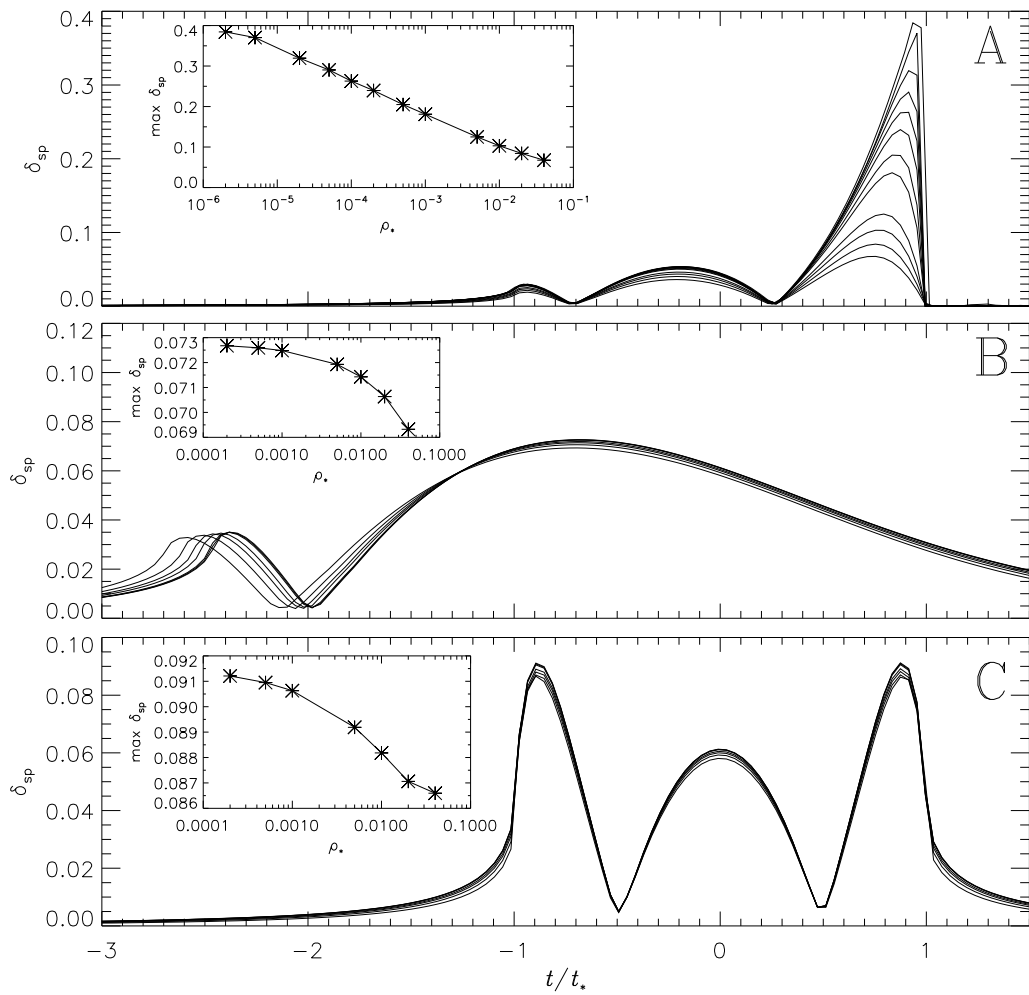
poklesne ekvivalentní šířka. Je-li naopak zjasněn více střed zdroje, pozorujeme zvětšení W . Kdybychom vynesli relativní změny $W(\mathbf{y}_c)$ jako funkci polohy středu zdroje, dostali bychom obrázky podobající se grafům chromaticity v Kapitole 4. Stejně výsledky změn ekvivalentní šířky jsme dostali i pro čáru $H\beta$.

Výše uvedené výsledky změn spektra během dvojitého gravitačního mikročočkování nejsou kvalitativně odlišné od výsledků pro jednoduchou čočku, kterou zkoumali Heyrovský a kol. (2000). Vystává ale otázka, zda jsou změny ve spektru vyvolané dvojitou čočkou silnější nebo slabší než u jednoduché čočky a jak ovlivňuje velikost zdroje sílu efektu.

Celkový rozsah změn ve spektru mikročočkováného zdroje budeme charakterizovat po vzoru Heyrovský a kol. (2000) spektrální chromaticitou, kterou definujeme jako rozdíl mezi maximálním a minimálním zjasněním na daném úseku spektra dělený průměrnou hodnotou zjasnění

$$\delta_{\text{sp}}(\mathbf{y}_c) \equiv \frac{\max_{\lambda} A_*(\mathbf{y}_c, \lambda) - \min_{\lambda} A_*(\mathbf{y}_c, \lambda)}{\langle A_*(\mathbf{y}_c, \lambda) \rangle}. \quad (39)$$

Na Obrázku 23 jsou vyneseny kontury δ_{sp} pro detail čočky s $d = 2,05$ a $q = 1/9$ a zdroj s $\rho_* = 0,02$ a model atmosféry z Obrázku 18. Vidíme, že kontury δ_{sp}



Obrázek 24: Spektrální chromaticita δ_{sp} pro řezy A, B a C (odshora). V každém panelu je δ_{sp} vynesena pro několik poloměrů zdroje. Ve vložených grafech jsou pak přímo vyneseny hodnoty maxima δ_{sp} pro daný řez v závislosti na poloměru zdroje ρ_* . Abychom kompenzovali nelineární škálování řezu B s poloměrem zdroje, definujeme pro tento řez $t_* = (\rho_*/0,02)^{2/3} t_{*,0,02}$, kde $t_{*,0,02}$ je čas, za který zdroj s $\rho_* = 0,02$ projde svůj poloměr.

se podobají konturám chromaticity pro čočku se stejnými parametry v horním panelu Obrázku 16. To je pochopitelné, protože největšího rozdílu ve zjasnění se většinou případů dosahuje pro dva extrémní profily okrajového ztemnění. Maximální hodnota spektrální chromaticity v Obrázku 23 je $\delta_{\text{sp}} \approx 0,10$ a tedy asi o 0,01 přesahuje maximální hodnotu spektrální chromaticity pro tento model atmosféry z práce Heyrovský a kol. (2000, Obrázek 6).

Tím se dostáváme k vlivu velikosti zdroje na δ_{sp} . Heyrovský a kol. (2000) zkoumali velikost spektrální chromaticity pro různě velké zdroje (resp. různě silné

bodové čočky) a našli limitní křivku, kterou nelze pro daný model atmosféry překročit. Existenci takových limitních křivek očekáváme i u dvojitých čoček, protože v limitě malého zdroje se poloměr zdroje ρ_* ve vyjádření zjasnění faktorizuje a v definici δ_{sp} pomocí podílu zjasnění dvou plošných zdrojů se pak vykrátí.

Obrázek 24 znázorňuje δ_{sp} pro tři řezy z Obrázku 15 a několik poloměrů zdroje. Pro řez C jdoucí kolmo k ose hrotu vidíme, že limitní maximální hodnoty $\max \delta_{\text{sp}} \approx 0,092$ je téměř dosaženo pro zdroj s $\rho_* = 2 \cdot 10^{-4}$. Křivky pro řez B se i přes provedenou kompenzaci jejich nelineárního škálování s poloměrem zdroje protínají (viz část 3.2). To ale nemá vliv na zkoumání maxim δ_{sp} , která se, jak vidíme z obrázku, pro nejmenší poloměry blíží své limitní maximální hodnotě $\max \delta_{\text{sp}} \approx 0,073$. U těchto dvou řezů můžeme limitní chování snadno sledovat, ale pro řez A jdoucí kolmo na záhyb jsme zachytili náznak přibližování se k limitě až pro nejmenší poloměr $\rho_* = 2 \cdot 10^{-6}$. Omezení výpočetní techniky nám nedovolila vypočítat δ_{sp} pro $\rho_* < 2 \cdot 10^{-6}$. Z vypočtených výsledků také vidíme, že $\delta_{\text{sp}} \gtrsim 0,10$ pro poloměry $\rho_* \lesssim 0,01$. U záhybu je tedy ve velkém rozsahu poloměrů spektrální chromaticita větší než u jednoduché čočky. Podobný obrázek pro okolí záhybu a tři poloměry zdroje vykreslili také Gaudi & Petters (2002a), ale závislost na velikosti zdroje nediskutovali.

Kapitola 6

Platnost aproximace v okolí záhybu

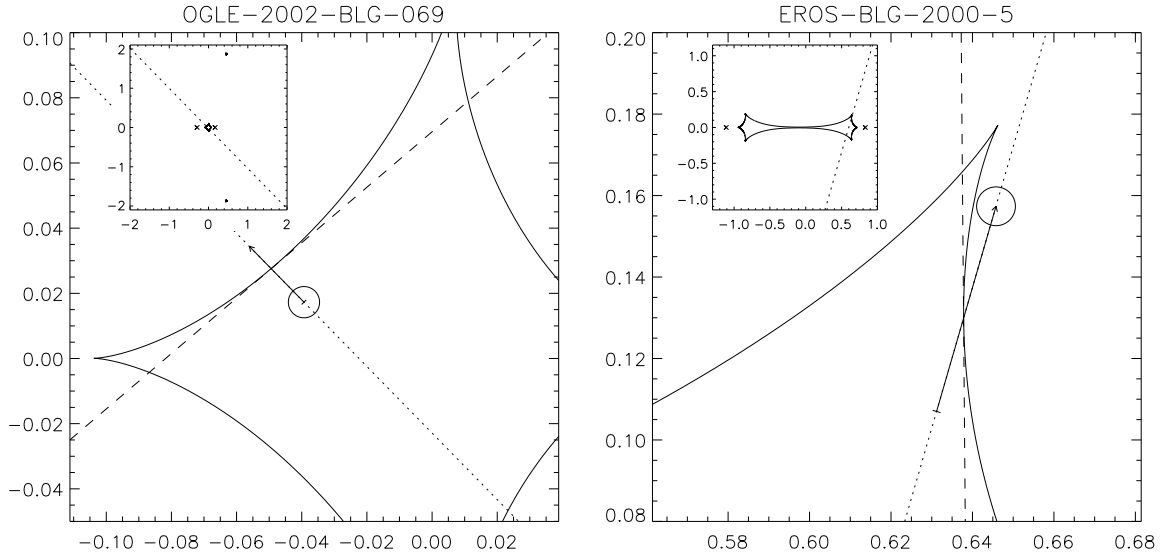
Analýza dvojitých mikročočkových událostí s přechodem záhybu je vzhledem ke složitosti prostoru parametrů výpočetně značně náročná, a proto se často používá přibližná metoda, kterou navrhli Albrow a kol. (1999b) a která se často nazývá aproximací lineárního záhybu. Postup spočívá v oddělení fitování bodů v okolí záhybu, kde se uvažuje efekt plošného zdroje, od ostatních bodů, ve kterých se zdroj považuje za bodový. Fitování v okolí záhybu dostatečně omezí prostor parametrů a ten se pak prohledává jinými způsoby. Metoda byla použita jak pro analýzu statických událostí (Afonso a kol., 2000; Albrow a kol., 2001a), tak po mírných modifikacích pro události s rotací dvojčočky (Albrow a kol., 2000) a efektem paralaxy (Kubas a kol., 2005).

V částech 2.1.3 a 2.1.4 jsme ukázali, že počet obrazů u zdroje přecházejícího kaustickou křivku se mění o dva. V případě bodového zdroje vevnitř kaustiky diverguje zjasnění těchto dvou obrazů v závislosti na vzdálenosti od záhybu, jak ukazuje rovnice (16). Nechť se zdroj pohybuje po přímkové trajektorii popsané parametrem t přes záhyb, který aproximujeme tečnou v místě přechodu. Okamžik, kdy se střed zdroje nachází na záhybu, označíme t_{cc} . Zjasnění zbývajících tří obrazů můžeme považovat za lineární funkci t . Dosazením rovnice (16) do definice zjasnění plošného zdroje dané rovnicí (14) pak dostaneme vztah pro celkové přibližné zjasnění $A_*^{\text{appr}}(t)$ plošného zdroje jako funkci času

$$A_*^{\text{appr}}(t) = U_* G_I \left(\frac{t - t_{cc}}{\Delta t} \right) + A_{cc} + \omega(t - t_{cc}). \quad (40)$$

Konstanta U_* závisí na $\rho_*^{-1/2}$ a na charakteristické škále růstu záhybu U_0 . Parametry A_{cc} a ω popisují lineární změnu zjasnění tří obrazů nesouvisejících se záhybem. Časová škála přechodu kaustiky Δt závisí na úhlu ϕ mezi trajektorií a záhybem v okamžiku přechodu

$$\Delta t = t_* \csc \phi. \quad (41)$$



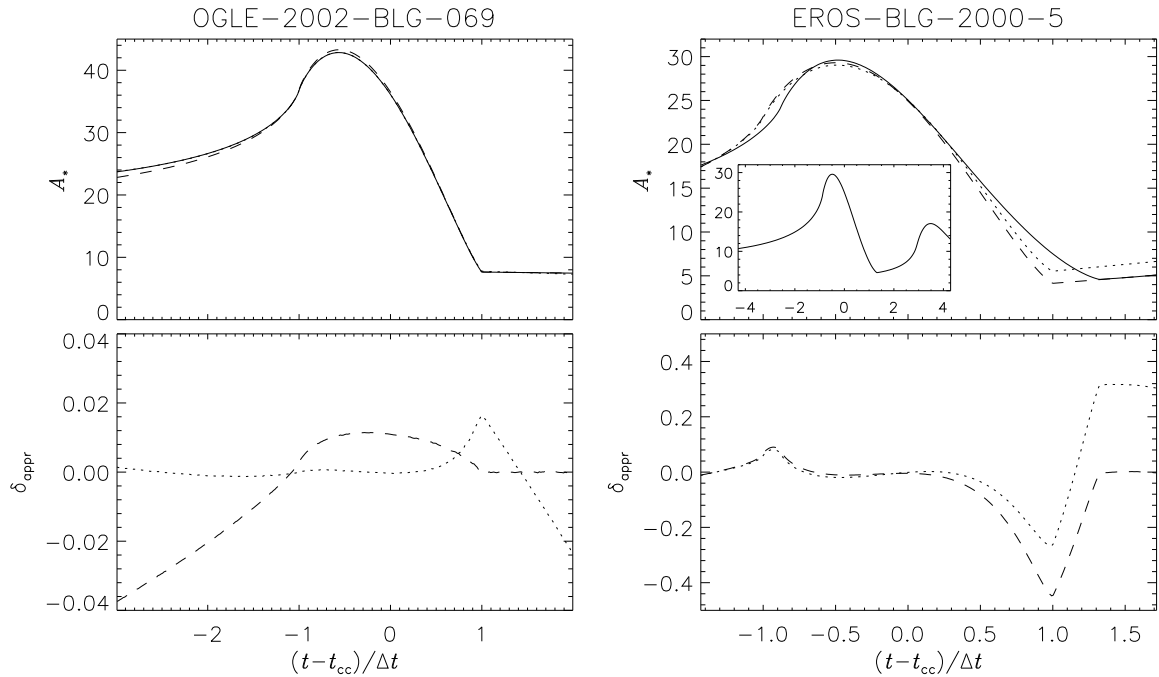
Obrázek 25: Geometrie studovaných přechodů záhybu pro OGLE-2002-BLG-069 (levý panel) a EROS-BLG-2000-5 (pravý panel). Kaustika je zaznačena plnou čarou, trajektorie středu zdroje tečkovaně a studovanou část trajektorie označuje orientovaná úsečka. Tečna ke kaustice v bodě přechodu je vynesena čárkovaně. Vložený graf v levém horním rohu znázorňuje celkovou geometrii.

Funkce $G_I(\eta)$ závisí pouze na vzdálenosti zdroje od záhybu a tvaru jeho okrajového ztemnění. Spočítáme ji pomocí vztahu

$$G_I(\eta) = 2H(1 - \eta) \int_{\max(\eta, -1)}^1 \int_0^{\sqrt{1-r_1^2}} \frac{I(\sqrt{r_1^2 + r_2^2})}{\sqrt{r_1 - \eta}} dr_2 dr_1, \quad (42)$$

kde $H(1 - \eta)$ je Heavisideova skoková funkce a $I(r)$ se buď normalizuje na jednotkový celkový světelný tok nebo se normalizace zahrne do konstanty U_* . Funkce (42) jde pro několik tříd analytických modelů okrajového ztemnění vyjádřit pomocí eliptických integrálů. Význam jednotlivých parametrů detailněji objasňují Albrow a kol. (1999b). Z rovnice (40) vidíme, že přechod zdroje přes záhyb můžeme popsat pomocí pěti parametrů U_* , t_{cc} , Δt , A_{cc} a ω .

Právě popsaná metoda používá několik zanedbání a předpokladů, které mohou v určitých případech ovlivnit výsledné parametry mikročocky. Především jsme v Kapitole 3 ukázali, že efekt plošného zdroje může zasahovat daleko od kaustických křivek (Tabulka 1). Rovněž ne všechny předpoklady použité k získání rovnice (40) jsou nutně oprávněné. Jednak zjasnění tří obrazů nespojených se záhybem nemusí být nutně lineární funkcí t , obzvláště nastává-li přechod záhybu poblíž hrotu. Pro nekolmé přechody se uplatní také zakřivení kaustiky a nerovnoběžnost kontur A_0 se záhybem.



Obrázek 26: Křivky zjasnění a reziduí pro OGLE-2002-BLG-069 (levý sloupec) a EROS-BLG-2000-5 (pravý sloupec). V horním řádku jsou vynesena zjasnění A_* (plná čára) a A_*^{appr} nafitovaná metodami I (tečkovaně) a II (čárkovaně). V dolním řádku jsou pak vynesena rezidua fitu δ_{appr} tečkovaně pro metodu I a čárkovaně pro metodu II. Vložený graf v pravém horním panelu ukazuje širší okolí křivky zjasnění včetně přiblížení k hrotu.

V této kapitole porovnáme přesnost aproximace lineárního záhybu pro dvě mikročočkové události, z nichž je příznivá a druhá nepříznivá pro metodu. Pro každou z těchto událostí jsme vypočetli světelnou křivku v n bodech pokrývajících několik málo Δt v okolí záhybu. Pro jednoduchost určíme parametry t_{cc} a Δt ze známé geometrie soustavy a zbývající tři parametry nafitujeme z vypočtené světelné křivky. To můžeme udělat dvěma způsoby. Buď použijeme standardní lineární metodu nejmenších čtverců na všechny body (metoda I) nebo si uvědomíme, že $G_I(\eta) = 0$ pro $\eta > 1$. Takové body můžeme použít pro určení A_{cc} a ω , zatímco body s $\eta < 1$ pak použijeme k nafitování U_* (metoda II).

OGLE-2002-BLG-069 byla zvolena jako vhodná událost pro použití metody Albrow a kol. (1999b) na základě analýzy v článku Kubas a kol. (2005). Použili jsme jejich parametry pro těsnou dvojitou čočku ($q = 0,58$, $d = 0,46$), ale zanedbáváme efekt roční paralaxy, který během tak krátkého intervalu nemá vliv. Zdroj o poloměru $\rho_* = 0,0048$ a $v = 0,62$ procházel trajektorií popsanou $u_0 = 0,016$ a $\alpha = 134,4^\circ$. Studovaný průsečík trajektorie s kaustikou nastal pod úhlem $\phi \approx 86^\circ$. Geometrie studované oblasti je vynesena na Obrázku 25. Druhou událost EROS-BLG-2000-5 detailně studovali An a kol. (2002) a Fields a kol. (2003) a z jejich

analýzy je zřejmé, že tato událost nespĺňuje hned několik předpokladů metody Albrow a kol. (1999b). Fotometrická data této události sice byla analyzovaná jinými prostředky, ale autoři zabývající se změnami spektra (např. Albrow a kol., 2001b; Castro a kol., 2001) použili aproximaci lineárního záhybu. Zde používáme parametry získané v práci Fields a kol. (2003), konkrétně $d = 1,940$, $q = 0,75$, $\rho_* = 0,00477$, $\alpha = 73,85^\circ$, $u_0 = 0,7096$ a $v = 0,792$. Úhel mezi trajektorií a záhybem v místě přechodu je $\phi \approx 16,6^\circ$ a geometrie přechodu je opět vynesena v Obrázku 25.

Pro studium odchylky metody Albrow a kol. (1999b) od přesného výsledku definujeme veličinu

$$\delta_{\text{appr}} \equiv \frac{A_*^{\text{appr}} - A_*}{A_*}, \quad (43)$$

kteřá je pro obě studované události vynesena na Obrázku 26. I pro příznivý případ OGLE-2002-BLG-069 z Obrázku 26 vidíme, že odchylky dosahují až 2 % u obou použitých metod a jsou pozorovatelné. Pro fitovací metodu I nastává maximální odchylka právě když se okraj zdroje dotýká zvnějšku záhybu, přičemž v tomto místě je také největší citlivost k okrajovému ztemnění (Obrázek 15). U metody II jsou odchylky větší pro zdroj dál než dva poloměry dovnitř kaustiky. Pro EROS-BLG-2000-5 je A_*^{appr} evidentně velice špatným přiblížením, δ_{appr} dosahuje v některých místech až 30 %. Díky zakřivení kaustiky a malé hodnotě ϕ trvá přechod přes záhyb výrazně déle, jak je vidět z horního pravého panelu Obrázku 26. Zdroj dále těsně po opuštění kaustiky prochází poblíž hrotu, takže zjasnění tří obrazů nemůže být považováno za lineární funkci.

Rezidua δ_{appr} pro obě události mají extrémy poblíž $|t - t_{\text{cc}}| = \Delta t$. Zkoušeli jsme fitovat také t_{cc} , ale k výraznějšímu zlepšení nedošlo. Samozřejmě, mohli bychom též fitovat i Δt , ale to bychom už měnili parametry mikročocky, což je mimo záběr této práce. Nicméně je zřejmé, že přidáváním dalších parametrů do fitu bychom spíš než skutečné změny postihovali nedostatky metody Albrow a kol. (1999b).

Podobnou analýzu jako pro dvě výše zmiňované události jsme provedli i pro některé další publikované případy dvojitých mikročockek. MACHO-98-SMC-1 analyzovali Afonso a kol. (2000) a našli možný popis události pomocí těsné dvojčocky (možná rotující), rotující široké dvojčocky a nevhodné řešení pomocí nerotující široké dvojčocky. Pro těsnou a nerotující širokou dvojčocku jsme zjistili extrémní hodnoty $|\delta_{\text{appr}}| \approx 8\%$ opět v místech $|t - t_{\text{cc}}| = \Delta t$. Pro OGLE-1999-BUL-23 (Albrow a kol., 2001a) jsme našli extrémní hodnoty $|\delta_{\text{appr}}| \approx 4\%$ na stejných polohách jako dříve, přičemž většinou zůstávají rezidua pod 2 %. Pro tuto událost našli stejnou 4% neshodu také Albrow a kol. (2001a), ale opravili ji pomocí pretabelovaných korekcí.

Kapitola 7

Diskuse a závěr

V této práci jsme zkoumali mikročočkování plošného zdroje dvěma hmotnými body. Zjasnění plošného zdroje jsme počítali pomocí efektivní metody založené na integraci přes obrazy (Vermaak, 2000) a výsledky jsme interpretovali pomocí teoretického aparátu publikovaného v PH08. Pro hlavní část výpočtů jsme použili plošnou jasnost zdroje získanou PCA metodou z teoretických modelů hvězdných atmosfér. V některých situacích jsme profil popsali pomocí kubického splinu nebo lineárního okrajového ztemnění.

Rozdíly ve zjasněních pro plošný a bodový zdroj jsem zkoumali v Kapitole 3. Na základě numerických výpočtů jsme identifikovali nové oblasti citlivé k efektu plošného zdroje, které dosahují daleko od kaustických křivek mezi dvěma protilehlými hroty. V těchto oblastech mohou relativní rozdíly mezi zjasněním bodového a plošného zdroje překročit 1% a jsou tedy v současnosti používanou technikou detekovatelné. Pro obří hvězdu v galaktické výduti může být pravděpodobnost pozorování jednocentního efektu až dvakrát větší než pravděpodobnost přechodu kaustiky, zatímco pro hvězdu hlavní posloupnosti může být vyšší až o několik desítek procent. Pravděpodobnosti efektu plošného zdroje jsme zkoumali v závislosti na parametrech čočky. Studovali jsme také vliv velikosti plošného zdroje na rozsah citlivé oblasti a našli jsme nelineární škálování rozsahu citlivosti na osách hrotů. Tento jev byl teoreticky vysvětlen v PH08, ale zde jsme ho zkoumali blíže pomocí numerických výpočtů.

Chromaticitu mikročočkových událostí jsme zkoumali pomocí dvou extrémních profilů okrajového ztemnění zkonstruovaných z prvních dvou hlavních funkcí PCA báze. PH08 odvodili, že pro zdroje položené mimo kaustiky je chromaticita rovna citlivosti na efekt plošného zdroje přenásobené konstantou. To jsme potvrdili na základě numerických výpočtů. Diskutovali jsme také odlišnosti kontur chromaticity od citlivosti na efekt plošného zdroje v blízkosti kaustických křivek. Na konkrétním případě jsme demonstrovali rozdíly mezi PCA a lineárním okrajovým ztemněním. PCA model okrajového ztemnění popisuje výsledné zjasnění lépe než lineární okrajové ztemnění, ale výraznější rozdíl by se mohl projevit v celkových světelných tocích.

Změny ve spektru zdroje během mikročočkování jsme studovali na modelu atmosféry stejného červeného obra jako Heyrovský a kol. (2000). Zjistili jsme také kvalitativně stejné změny v celkovém tvaru spektra, síle jednotlivých spektrálních pásů a ekvivalentní šířce čáry $H\alpha$. V oblastech kolem záhybu a hrotu jsme zkoumali vliv velikosti zdroje na spektrální chromaticitu. Na ose hrotu a v kolmém směru jsme pozorovali podobné limitní chování v závislosti na poloměru zdroje jako Heyrovský a kol. (2000) s podobnou limitní hodnotou. V okolí záhybu jsme pro nejmenší zdroj našli náznak limitního chování. Zjistili jsme také, že spektrální chromaticita v okolí záhybu dosahuje až třikrát vyšších hodnot než u jednoduché čočky.

Výsledky týkající se citlivosti na efekt plošného zdroje, chromaticity a spektrální chromaticity představují teoreticky maximálně dosažitelné hodnoty. Ve skutečnosti se parametry čočky a zdroje fitují na základě měření a jisté kombinace parametrů mohou mít na světelnou křivku podobný vliv jako zde zmiňované efekty. V našich rozborech jsme také zanedbali *blending*, což je nerozlišený příspěvek ke světelnému toku zdroje od čočky či dalších hvězd v blízkosti optické osy. Blending snižuje celkovou amplitudu světelné křivky, ale také zmenšuje jemné efekty na světelné křivce. V okolí kaustických křivek se dosahuje velkých zjasnění a blending tedy není až na extrémní případy příliš výrazný. V oblastech mezi protilehlými hroty kaustik je ale zjasnění poměrně nízké, $A_0 \sim 5$, takže blending 80 % sníží amplitudu δ_{ex} na polovinu. Naštěstí je ale snadné blending z fotometrie určit a naše rozbory ukázali, kde hledat efekt plošného zdroje a chromaticitu. Plánované budoucí mikročočkové přehlídky z oběžné dráhy také výrazně omezí vliv blendingu (Han a kol., 2006, Obrázek 3).

Pro několik analyzovaných mikročočkových událostí jsme ukázali, že aproximace lineárního záhybu není dostatečně přesná k popisu zjasnění v blízkém okolí záhybu. I v příznivých případech mohou rozdíly vůči skutečnému tvaru dosáhnout až několika procent, a to v místech, kde chromaticita dosahuje maximálních hodnot. Koeficienty okrajového ztemnění určené pomocí této aproximace mohou být zatíženy značnou chybou.

Plánované monitorovací projekty zaměřené především na hledání extrasolárních planet jak ze Země (Gould a kol., 2007) tak z oběžné dráhy (Bennett a kol., 2007) poskytnou téměř nepřetržitý tok kvalitních měření mikročočkových událostí směrem k výduti Galaxie. To umožní detailní studium okrajového ztemnění a testování modelů hvězdných atmosfér u mnoha hvězd větve obrů i hlavní posloupnosti v galaktické výduti.

Literatura

- Abe, F., a kol. 2003, *Probing the atmosphere of a solar-like star by galactic microlensing at high magnification*, *Astronomy & Astrophysics*, **411**, L493–L496
- Afonso, C., a kol. 2000, *Combined Analysis of the Binary Lens Caustic-crossing Event MACHO 98-SMC-1*, *The Astrophysical Journal*, **532**, 340–352
- Afonso, C., a kol. 2003, *Limits on Galactic Dark Matter with 5 Years of EROS SMC Data*, *Astronomy & Astrophysics*, **400**, 951–956
- Albrow, M. D., a kol. 1999a, *Limb Darkening of a K Giant in the Galactic Bulge: PLANET Photometry of MACHO 97-BLG-28*, *The Astrophysical Journal*, **522**, 1011–1021
- Albrow, M. D., a kol. 1999b, *A Complete Set of Solutions for Caustic Crossing Binary Microlensing Events*, *The Astrophysical Journal*, **522**, 1022–1036
- Albrow, M. D., a kol. 2000, *Detection of Rotation in a Binary Microlens: PLANET Photometry of MACHO 97-BLG-41*, *The Astrophysical Journal*, **534**, 894–906
- Albrow, M. D., a kol. 2001, *PLANET Observations of Microlensing Event OGLE-1999-BUL-23: Limb-darkening Measurement of the Source Star*, *The Astrophysical Journal*, **549**, 759–769
- Albrow, M. D., a kol. 2001, *H α Equivalent Width Variations across the Face of a Microlensed K Giant in the Galactic Bulge*, *The Astrophysical Journal*, **550**, L173–L177
- Alcock, C., a kol. 2000, *Binary Microlensing Events from the MACHO Project*, *The Astrophysical Journal*, **541**, 270–297
- An, J. H., a kol. 2002, *First Microlens Mass Measurement: PLANET Photometry of EROS BLG-2000-5*, *The Astrophysical Journal*, **572**, 521–539
- Beaulieu, J.-P., a kol. 2006, *Discovery of a cool planet of 5.5 Earth masses through gravitational microlensing*, *Nature*, **439**, 437–440
- Bennett, D. P., & Rhie, S. H. 1996, *Detecting Earth-Mass Planets with Gravitational Microlensing*, *The Astrophysical Journal*, **472**, 660–664
- Bennett, D. P., et al. 2007, *An Extrasolar Planet Census with a Space-based Microlensing Survey*, white paper submitted to the NASA/NSF Exoplanet Task Force, arXiv:0704.0454
- Bond, I. A., a kol. 2004, *OGLE 2003-BLG-235/MOA 2003-BLG-53: A Planetary Microlensing Event*, *The Astrophysical Journal*, **606**, L155–L158
- Cassan, A., a kol. 2004, *Probing the atmosphere of the bulge G5III star OGLE-2002-BUL-069 by analysis of microlensed H α line*, *Astronomy & Astrophysics*, **419**, L1–L4

- Castro, S., Pogge, R. W., Rich, R. M., DePoy, D. L., & Gould, A. 2001, *Spatial/spectral resolution of a galactic bulge K3 giant stellar atmosphere via gravitational microlensing*, The Astrophysical Journal, **548**, L197–L200
- Claret, A. 2000, *A new non-linear limb-darkening law for LTE stellar atmosphere models. Calculations for $-5.0 \leq \log[M/H] \leq +1$, $2000 \text{ K} \leq T_{\text{eff}} \leq 50000 \text{ K}$ at several surface gravities*, Astronomy & Astrophysics, **363**, 1081–1190
- Cohen, J. G., Huang, W., Udalski, A., Gould, A., & Johnson, J. 2008, *Clues to the Metallicity Distribution in the Galactic Bulge: Abundances in OGLE-2007-BLG-349S*, The Astrophysical Journal, přijato k publikaci
- Dominik, M. 1998, *A robust and efficient method for calculating the magnification of extended sources caused by gravitational lenses*, Astronomy & Astrophysics, **333**, L79–L82
- Dominik, M. 2007, *Adaptive contouring - an efficient way to calculate microlensing light curves of extended sources*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, **377**, 1679–1688
- Dong, S., a kol. 2006, *Planetary Detection Efficiency of the Magnification 3000 Microlensing Event OGLE-2004-BLG-343*, The Astrophysical Journal, **642**, 842–860
- Einstein, A. 1936, *Lens-like Action of a Star by the Deviation of Light in the Gravitational Field*, Science, **84**, 506–507
- Fields, D. L., a kol. 2003, *High-Precision Limb-Darkening Measurement of a K3 Giant Using Microlensing*, The Astrophysical Journal, **596**, 1305–1319
- Gaudi, B. S., & Petters, A. O. 2002a, *Gravitational microlensing near caustics. I. Folds*, The Astrophysical Journal, **574**, 970–984
- Gaudi, B. S., & Petters, A. O. 2002b, *Gravitational microlensing near caustics. II. Cusps*, The Astrophysical Journal, **580**, 468–489
- Gaudi, B. S., a kol. 2008, *Discovery of a Jupiter/Saturn Analog with Gravitational Microlensing*, Science, **319**, 927–930
- Gould, A., & Gaucherel, C. 1997, *Stokes's Theorem Applied to Microlensing of Finite Sources*, The Astrophysical Journal, **477**, 580–584
- Gould, A., Gaudi, B. S., & Bennett, D. P. 2007, *Ground-based Microlensing Surveys*, white paper submitted to the NASA/NSF Exoplanet Task Force, arXiv:0704.0767
- Gould, A., a kol. 2006, *Microlens OGLE-2005-BLG-169 Implies That Cool Neptune-like Planets Are Common*, The Astrophysical Journal, **644**, L37–L40
- Han, C. 2006, *Properties of Planetary Caustics in Gravitational Microlensing*, The Astrophysical Journal, **638**, 1080–1085
- Han, C., & Park, S. 2001, *Colour change measurements of gravitational microlensing events by using the difference image analysis method*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, **320**, 41–48
- Han, C., Park, B.-G., Kim, H.-I., & Chang, K. 2006, *Blending in Future Space-based Microlensing Surveys*, The Astrophysical Journal, **653**, 963–968

- Heyrovský, D. 2003, *Measuring stellar limb darkening by gravitational microlensing*, The Astrophysical Journal, **594**, 464–482
- Heyrovský, D. 2007, *Computing Limb-darkening Coefficients from Stellar Atmosphere Model*, The Astrophysical Journal, **656**, 483–492
- Heyrovský, D., Sasselov, D., & Loeb, A. 2000, *Probing Red Giant Atmospheres with Gravitational Microlensing*, The Astrophysical Journal, **543**, 406–416
- Chang, K., & Refsdal, S. 1979, *Flux variations of QSO 0957+561 A, B and image splitting by stars near the light path*, Nature, **282**, 561–564
- Jaroszynski, M. 2002, *Binary Lenses in OGLE-II 1997-1999 Database. A Preliminary Study*, Acta Astronomica, **52**, 39–60
- Jaroszynski, M., a kol. 2004, *Binary Lenses in OGLE-III EWS Database. Seasons 2002-2003*, Acta Astronomica, **54**, 103–128
- Jaroszynski, M., a kol. 2006, *Binary Lenses in OGLE-III EWS Database. Season 2004*, Acta Astronomica, **56**, 307–332
- Kubas, D., a kol. 2005, *Full characterization of binary-lens event OGLE-2002-BLG-069 from PLANET observations*, Astronomy & Astrophysics, **435**, 941–948
- Kurucz, R. 1993, *ATLAS9 Stellar Atmosphere Programs and 2 km/s grid*, <http://kurucz.harvard.edu>
- Lynds, R., & Petrosian, V. 1989, *Luminous arcs in clusters of galaxies*, The Astrophysical Journal, **336**, 1–8
- Mao, S., & Paczyński, B. 1991, *Gravitational microlensing by double stars and planetary systems*, The Astrophysical Journal, **374**, L37–L40
- Mollerach, S., & Roulet, E. 2002, *Gravitational Lensing and Microlensing*, World Scientific, Singapore
- Night, C., Di Stefano, R. & Schwamb, M. 2007, *Beyond Caustic Crossings: Properties of Binary Microlensing Light Curves*, The Astrophysical Journal, submitted, (astro-ph/0705.0169)
- Paczynski, B. 1986, *Gravitational microlensing by the galactic halo*, The Astrophysical Journal, **304**, 1–5
- Pejcha, O. 2006, *Dvojité gravitační mikročochky*, bakalářská práce, MFF UK
- Pejcha, O., & Heyrovský, D. 2008, *Extended-source effect and chromaticity in two-point-mass microlensing*, The Astrophysical Journal, submitted
- Rattenbury, N. J., Bond I. A., Skuljan, J., & Yock, P. C. M. 2002, *Planetary microlensing at high magnification*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, **335**, 159–169
- Schneider, P., Ehlers, J., & Falco, E. E. 1992, *Gravitational lenses*, Springer-Verlag, Berlin
- Schneider, P., & Weiß, A. 1986, *The two-point-mass lens: detailed investigation of a special asymmetric gravitational lens*, Astronomy & Astrophysics, **164**, 237–259

- Schneider, P., & Weiß, A. 1992, *The gravitational lens equation near cusps*, *Astronomy & Astrophysics*, **260**, 1–13
- Skowron, J., a kol. 2007, *Binary Lenses in OGLE III EWS Database. Season 2005*, *Acta Astronomica*, **57**, 281–299
- Thomas, C. L., a kol. 2005, *Galactic Bulge Microlensing Events from the MACHO Collaboration*, *The Astrophysical Journal*, **631**, 906–934
- Udalski, A., a kol. 2005, *A Jovian-Mass Planet in Microlensing Event OGLE-2005-BLG-071*, *The Astrophysical Journal*, **628**, L109–L112
- Van Hamme, W. 1993, *New limb-darkening coefficients for modeling binary star light curves*, *The Astronomical Journal*, **106**, 2096–2117
- Vermaak, P. 2000, *The effects of resolved sources and blending on the detection of planets via gravitational microlensing*, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **319**, 1011–1019
- Walsh, D., Carswell, R. F., & Weymann, R. J. 1979, *0957 + 561 A, B - Twin quasistellar objects or gravitational lens*, *Nature*, **279**, 381–384
- Wambsganss, J. 1999, *Gravitational lensing: numerical simulations with a hierarchical tree code*, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **109**, 353–372
- Wambsganss, J., & Paczynski, B. 1991, *Expected color variations of the gravitationally microlensed QSO 2237 + 0305*, *The Astronomical Journal*, **102**, 864–868
- Witt, H. J. 1990, *Investigation of high amplification events in light curves of gravitationally lensed quasars*, *Astronomy & Astrophysics*, **236**, 311–322
- Witt, H. J., & Mao, S. 1995, *On the minimum magnification between caustic crossings for microlensing by binary and multiple stars*, *The Astrophysical Journal*, **447**, L105–L108
- Witt, H. J., & Petters, A. O. 1993, *Singularities of the one- and two-point mass gravitational lens*, *Journal of Mathematical Physics*, **34**, 4093–4111
- Zakharov, A. F. 1995, *On the magnification of gravitational lens images near cusps*, *Astronomy & Astrophysics*, **293**, 1–4
- Zakharov, A. F. 1999, *On the some properties of gravitational lens equation near cusps*, *Astronomical and Astrophysical Transactions*, **18**, 17–25
- Zwicky, F. 1937, *Nebulae as Gravitational Lenses*, *Physical Review*, **51**, 290