



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Klára Horčíčková

Arbelos

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Martina Škorpilová, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Matematika se zaměřením na
vzdělávání v kombinaci
s deskriptivní geometrií

Praha 2021

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Děkuji všem, kteří mne při studiu a psaní této práce podporovali. Mé největší poděkování patří RNDr. Martině Škorpilové, Ph.D., za odborné vedení, mnoho cenných rad a motivaci k dalšímu studiu.

Název práce: Arbelos

Autor: Klára Horčíčková

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Martina Škorpilová, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt:

Bakalářská práce představuje několik zajímavých rovinných útvarů a jejich využití při středoškolské výuce. Úvodní část textu je věnována především historickému původu pojmu arbelos, jeho definici a základním vlastnostem. Následně jsou prezentovány pojmy Archimédova dvojčata a Archimédovy kruhy, které jsou s arbelem úzce spjaty. Uvedeny jsou rovněž rozmanité konstrukce Archimédových kružnic, které jsou řazeny od nejstarších po nejnovější. Práce seznamuje čtenáře také s Pappovým řetězcem a s jeho konstrukcí pomocí kruhové inverze. V závěrečné části je uvedeno zadání konkrétních úloh, které vycházejí z problematiky prezentované v předchozím textu.

Klíčová slova: arbelos, půlkružnice, vepsaná kružnice, Archimédova kružnice, konstrukce

Title: Arbelos

Author: Klára Horčíčková

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Martina Škorpilová, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract:

The present bachelor thesis proposes several captivating planar objects and their utilization in high school mathematics education. The introductory part of the text is foremostly dedicated to the origin of the term Arbelos, its definition and general characteristics. Subsequently, the terms Archimedean twins and Archimedean circles are presented, as they are closely connected to the Arbelos. In the following part, the reader is introduced to various constructions of Archimedean circles ordered from oldest to youngest. The thesis acquaints the readers with the construction of the Pappus chain and its construction using circle inversion. The conclusion constitutes of specific problems that arise from the problematics that was dealt with in the text.

Keywords: arbelos, semicircle, inscribed circle, Archimedean circle, construction

Obsah

Úvod	2
1 Základní vlastnosti arbelu	3
1.1 Definice arbelu a příslušné značení	3
1.2 Obsah arbelu	4
1.3 Obdélník příslušný arbelu	7
2 Archimédova dvojčata	9
2.1 Definice Archimédových dvojčat	9
2.2 Vlastnosti Archimédových dvojčat	10
3 Archimédovy kružnice	14
3.1 Definice Archimédovy kružnice	14
3.2 Nejznámější konstrukce Archimédových kružnic	14
3.3 Nové konstrukce Archimédových kružnic	16
4 Pappův řetězec	25
4.1 Definice Pappova řetězce	25
4.2 Konstrukce kružnic Pappova řetězce	27
4.3 Základní vlastnosti Pappova řetězce	29
5 Příklady	32
Závěr	36
Seznam použité literatury	37
Seznam obrázků	38

Úvod

V této bakalářské práci se čtenář seznámí s nepříliš známým geometrickým útvarem nazývaným arbelos a dále s jemu blízkými pojmy Archimédova dvojčata, Archimédovy kružnice a Pappův řetězec. Ač historie této problematiky sahá do 3. století před naším letopočtem, jsou uvedené pojmy stále studovány a je jim i v současné době věnováno nemálo odborných článků. Publikovány jsou převážně v anglickém jazyce. Jedním z podnětů k vytvoření této práce bylo jejich přehledné zpracování v jazyce českém.

Práce je určena jak čtenářům, kteří se s arbelem doposud neseťkali, tak dalším zájemcům, kteří si chtějí své znalosti o tomto pojmu rozšířit. Text je psán tak, aby většina pasáží byla pochopitelná pro studenty střední školy. Jedinou výjimkou je konstrukce, v níž jsou využity základní vlastnosti kruhové inverze, tj. zobrazení, se kterým se studenti seznamují převážně až na škole vysoké. Věříme, že práci mohou využít středoškolští pedagogové k nalezení zajímavých témat, motivací a příkladů pro výuku ve svých hodinách.

Práce je systematicky rozdělena do pěti kapitol rozčleněných na menší podkapitoly. V první kapitole je uveden historický původ pojmu (a také termínu) arbelos, je představena jeho definice a základní vlastnosti. Podstatné je rovněž zavedení symbolického značení, které je jednotně využíváno v celém dalším textu.

V nejobsáhlejších kapitolách, tj. v kapitole druhé a třetí, se čtenář seznámí s Archimédovými dvojčaty a Archimédovými kružnicemi, což jsou – z uvažované problematiky – v současnosti nejvíce studované pojmy. Prezentovány jsou také jejich nejzajímavější a nejznámější konstrukce, od nejstarších po nejnovější. Poznátka jsou ilustrovány názornými, v některých případech krokovanými obrázky. Veškerá tvrzení jsou dokázána, a to pokud možno tou nejjednodušší formou. Ve většině případů k odůvodnění postačují znalosti středoškolské látky (podobnost trojúhelníků atd.).

V předposlední, čtvrté kapitole je přiblížen pojem Pappův řetězec a je podrobně představena jeho elegantní konstrukce pomocí kruhové inverze. V závěru jsou zformulovány věty o vlastnostech řetězce. K lepšímu pochopení látky slouží relativně velké množství působivých obrázků.

Poslední kapitola se od ostatních odlišuje. Neobsahuje totiž teoretické poznatky, ale je tvořena sadou příkladů, pomocí nichž si čtenář může ověřit pochopení dané tematiky a které mohou být využity při výuce na střední (případně i vysoké) škole.

Práce je vysázena pomocí systému L^AT_EX. Veškeré obrázky byly vytvořeny v 3D grafickém a CAD softwaru Rhinoceros.

1. Základní vlastnosti arbelu

V úvodní kapitole definujeme pojem *arbelos*, seznámíme se s původem tohoto termínu, zavedeme příslušná značení a odvodíme základní vlastnosti *arbelu*. Arbelos je rovinný útvar, kterým se zabýval již Archimédés ze Syrakus (asi 287 až 212 př. Kr.) ve svém díle *Knihy lemmat*. O Archimédově životě a díle se lze více dozvědět v [1]. Původem řecké slovo arbelos v překladu znamená *ševcovský nůž*, jenž svým tvarem tento geometrický útvar připomíná (viz obrázek 1.1)¹.



Obrázek 1.1: Ševcovský nůž

Kapitola je zpracována na základě literatury [2], [3].

1.1 Definice arbelu a příslušné značení

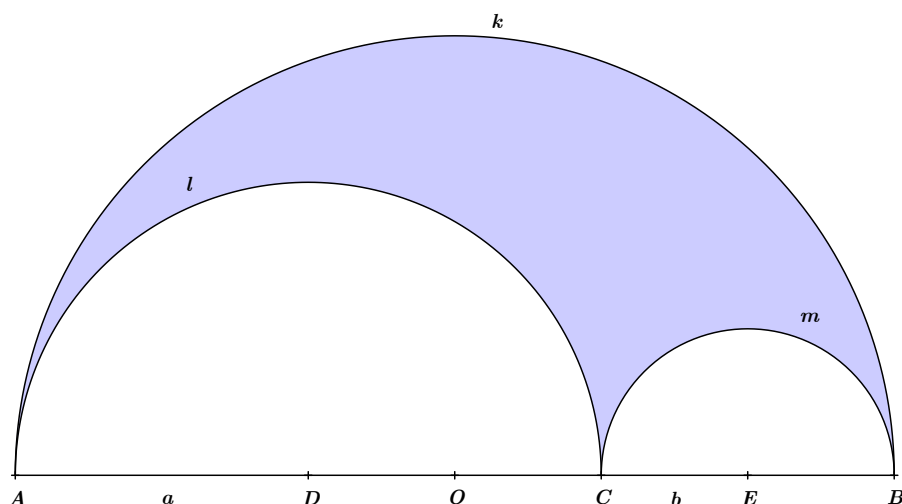
Definice 1. *Mějme úsečku AB a její vnitřní bod C (viz obrázek 1.2). Označme O střed úsečky AB , D střed úsečky AC a E střed úsečky CB . Sestrojme půlkružnici l se středem D a poloměrem $a = |AD|$, půlkružnici m se středem E a poloměrem $b = |CE|$ a půlkružnici k se středem O a poloměrem $|AO|$ tak, aby půlkružnice k, l, m ležely ve stejné polorovině s hraniční přímkou AB . Rovinný útvar vymezený půlkružnicemi k, l, m budeme nazývat **arbelos** a budeme ho značit \mathcal{A}_{ABC} .*

Poznámka 1. *Značení zavedené v definici 1 (a uvedené na obrázku 1.2) budeme používat v celé této práci, aniž bychom ho znovu zaváděli či připomínali.*

Poznámka 2. *Text práce je bohatě ilustrován obrázky, které hrají při výkladu významnou roli. Pokud bude slovnímu popisu odpovídat více rovinných útvarů, bude z nich vždy myšlen pouze ten, který je uveden na příslušném obrázku.*

¹Obrázek je přejat z webové stránky:

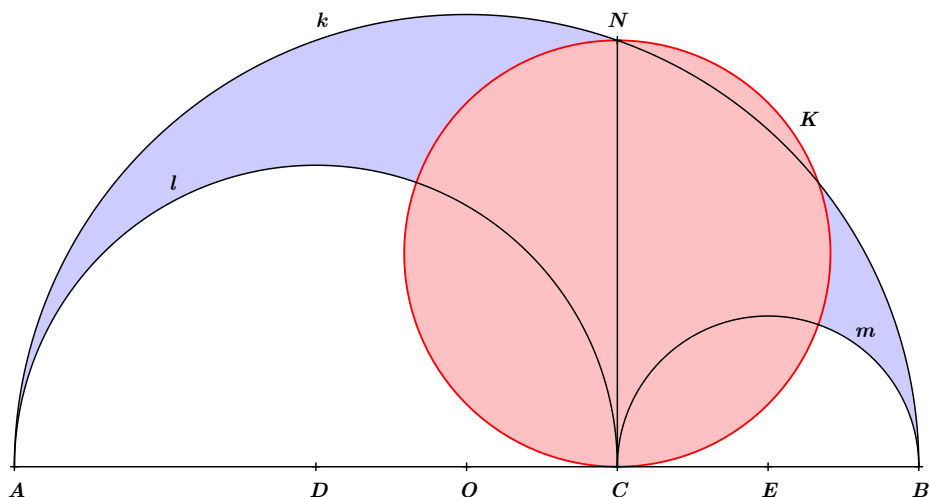
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Arbelos_Shoemakers_Knife.jpg



Obrázek 1.2: Arbelos a jeho značení

1.2 Obsah arbelu

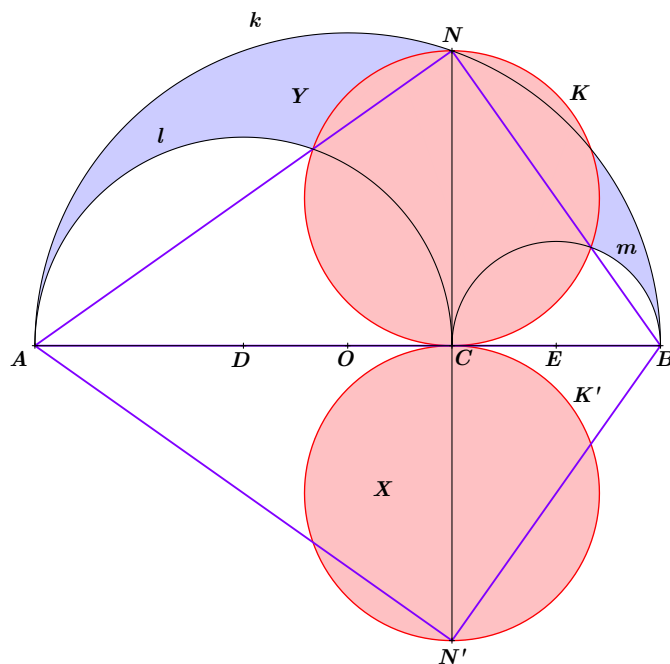
Věta 1. *Mějme dán arbelos \mathcal{A}_{ABC} (viz obrázek 1.3). Bodem C vedme kolmici na úsečku AB a její průsečík s půlkružnicí k označme N . Je-li K kruh sestrojený nad průměrem CN , pak obsah kruhu K je roven obsahu arbelu \mathcal{A}_{ABC} .*



Obrázek 1.3: Ilustrace Věty 1

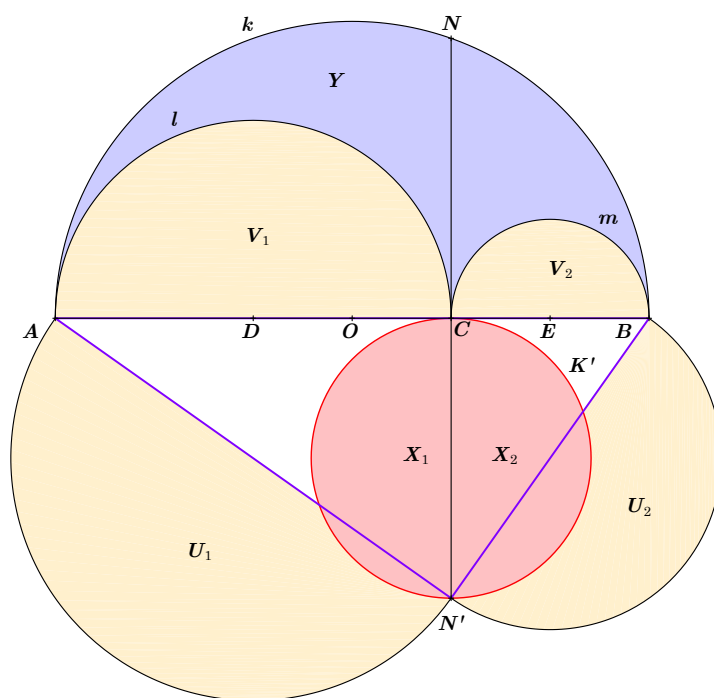
Důkaz. Označme X obsah kruhu K a dále Y obsah arbelu \mathcal{A}_{ABC} . Uvažujme trojúhelník ABN (viz obrázek 1.4). Pro přehlednější obrázek sestrojme obraz ABN'

trojúhelníku ABN a obraz K' kruhu K v osové souměrnosti s osou AB . Uvědomme si, že obsah kruhu K' je též roven X .



Obrázek 1.4: Ilustrace důkazu Věty 1

Úsečka CN' rozdělí kruh K' na dva shodné půlkruhy, jejichž obsahy označme X_1, X_2 (viz obrázek 1.5). Je patrné, že $X = X_1 + X_2$.



Obrázek 1.5: Ilustrace důkazu Věty 1 – obsahy útvarů

Dále sestrojme půlkruhy nad úsečkami AN' a BN' a obsahy těchto půlkruhů označme U_1, U_2 . Obsah půlkruhu, který je vymezen půlkružnicí l a úsečkou AC , resp. půlkružnicí m a úsečkou CB , označme V_1 , resp. V_2 . Nyní využijme zobecnění Pýthagorovy věty pro půlkruhy: obsah půlkruhu sestrojeného nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku je roven součtu obsahů půlkruhů sestrojených nad oběma odvěsnami (důkaz viz [2]). Aplikujeme-li větu postupně na trojúhelníky $N'BA$, $N'CA$, $N'BC$, získáme následující rovnosti:

$$Y + V_1 + V_2 = U_1 + U_2, \quad (1.1)$$

$$U_1 = X_2 + V_1, \quad (1.2)$$

$$U_2 = X_1 + V_2. \quad (1.3)$$

Dosazením vztahů (1.2), (1.3) do rovnosti (1.1) dostáváme

$$Y + V_1 + V_2 = X_2 + V_1 + X_1 + V_2,$$

$$Y = X_2 + X_1,$$

$$Y = X.$$

Obsah kruhu K je tedy roven obsahu arbelu \mathcal{A}_{ABC} . □

Nyní pro zajímavost vypočítáme obsahy arbelu \mathcal{A}_{ABC} a kruhu K . Podle Věty 1 se musí rovnat. Obsah arbelu \mathcal{A}_{ABC} je roven

$$Y = \frac{\pi|AO|^2}{2} - \frac{\pi|AD|^2}{2} - \frac{\pi|CE|^2}{2},$$

$$Y = \frac{\pi}{2} \left(\frac{2a + 2b}{2} \right)^2 - \frac{\pi}{2} a^2 - \frac{\pi}{2} b^2,$$

$$Y = \frac{\pi}{2} (a^2 + 2ab + b^2 - a^2 - b^2),$$

$$Y = ab\pi.$$

Pro výpočet obsahu kruhu K nejprve vyjádříme $|CN|^2$. Z Eukleidovy věty o výšce pro pravoúhlý trojúhelník ABN dostáváme

$$|CN|^2 = |AC| \cdot |CB|,$$

$$|CN|^2 = 2a \cdot 2b,$$

$$|CN|^2 = 4ab.$$

Obsah X kruhu K je roven

$$X = \left(\frac{|CN|}{2} \right)^2 \pi,$$

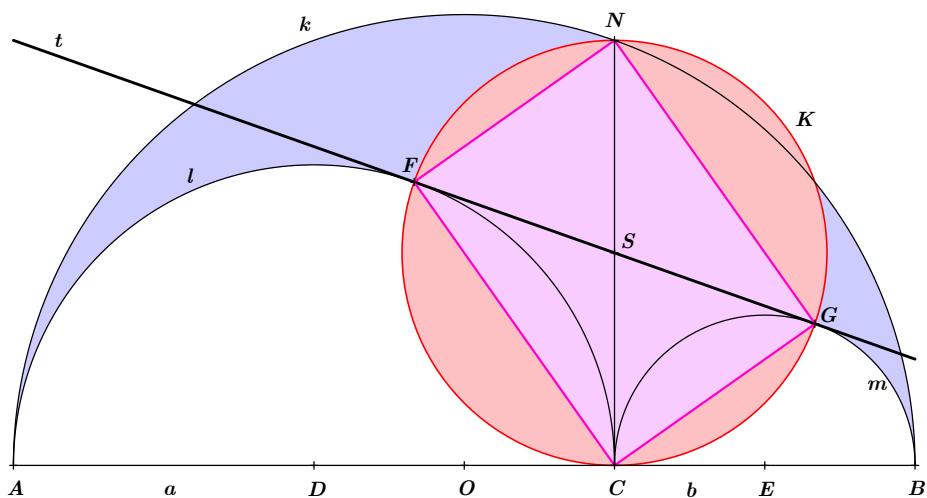
$$X = \frac{4ab}{4} \pi,$$

$$X = ab\pi.$$

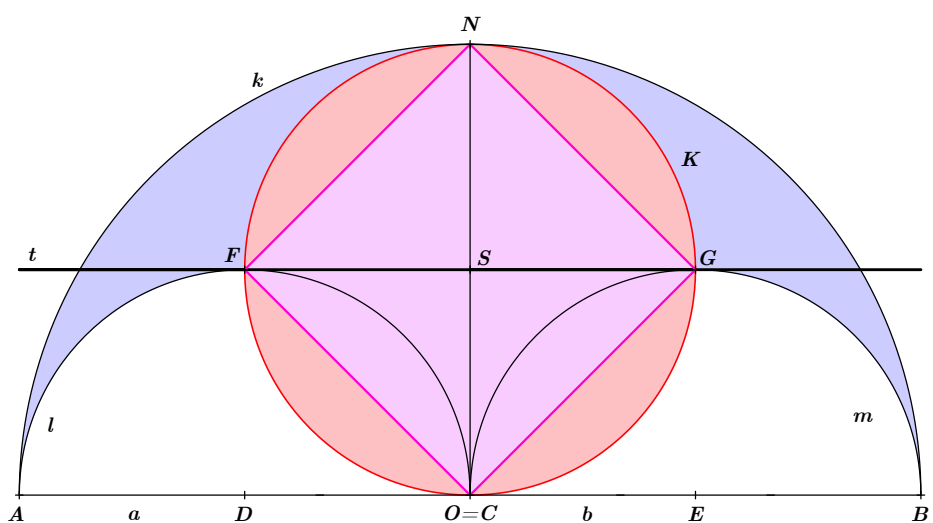
Určením obsahu arbelu \mathcal{A}_{ABC} a obsahu kruhu K jsme současně 2. způsobem dokázali Větu 1.

1.3 Obdélník příslušný arbelu

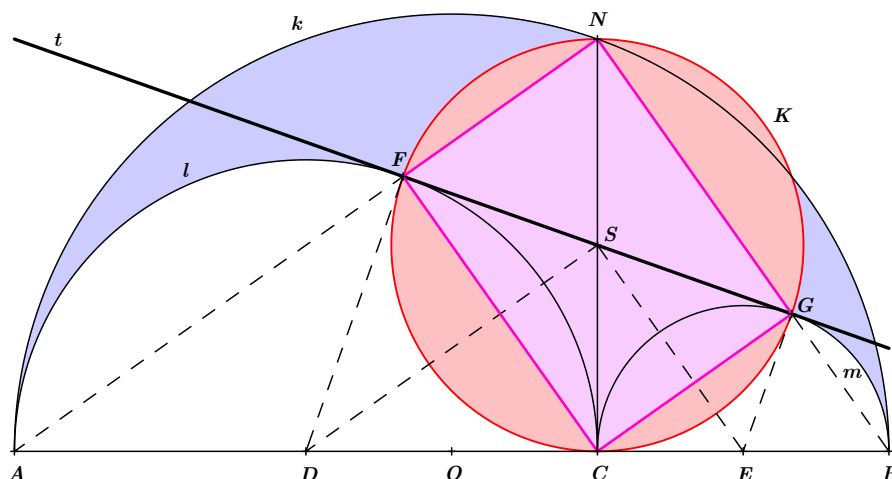
Věta 2. Mějme dán arbelos \mathcal{A}_{ABC} a kruh K popsáný ve Větě 1 (viz obrázek 1.3). Označme F průsečík hraniční kružnice kruhu K a půlkružnice l a dále G průsečík téže kružnice a půlkružnice m (viz obrázek 1.6). Pokud jsou poloměry a, b půlkružnic l, m různé, je čtyřúhelník $CGNF$ obdélník. Pokud jsou poloměry a, b shodné (viz obrázek 1.7), je čtyřúhelník $CGNF$ čtverec. Přímka $t = FG$ je v obou případech tečnou půlkružnic l a m .



Obrázek 1.6: Ilustrace Věty 2 ($a \neq b$)



Obrázek 1.7: Ilustrace Věty 2 ($a = b$)



Obrázek 1.8: Ilustrace důkazu Věty 2

Důkaz. Body F, G leží na kružnici sestrojené nad průměrem CN , proto jsou úhly CGN a NFC pravé (viz obrázek 1.8). Bod F leží na půlkružnici l sestrojené nad průměrem AC , tudíž je pravý i úhel AFC . Součet velikostí úhlů AFC a NFC je proto roven 180° , z čehož plyne, že přímka FN prochází bodem A (přímky FN a AN jsou totožné). Protože bod G leží na půlkružnici m sestrojené nad průměrem CB , je rovněž úhel CGB pravý a součet velikostí úhlů CGB, CGN je 180° . Bod B tudíž leží na přímce GN . Jelikož bod N leží na půlkružnici k sestrojené nad průměrem AB , je také úhel $ANB = FNG$ pravý. Čtyřúhelník $CGNF$ se třemi pravými úhly (CGN, NFC a FNG) je proto pravoúhelník. V případě, že jsou poloměry a, b půlkružnic l, m shodné (viz obrázek 1.7), je navíc čtyřúhelník $CGNF$ osově souměrný podle přímky CN . Strany FN a GN , resp. FC a CG jsou proto stejně dlouhé a pravoúhelník $CGNF$ je čtverec. V případě, že jsou poloměry a, b různé, není čtyřúhelník $CGNF$ osově souměrný podle přímky CN a jedná se o obdélník.

Nyní dokažme, že přímka t je tečnou půlkružnice l . Označme S střed kruhu K . Jelikož je čtyřúhelník $CGNF$ obdélník (speciálně čtverec), prochází přímka $t=FG$ bodem S . Stačí proto dokázat, že přímky DF a FS jsou na sebe kolmé. Body F, C leží současně na hraniční kružnici kruhu K a na půlkružnici l , jsou tedy stejně vzdáleny od bodu S i od bodu D . Proto je čtyřúhelník $DCSF$ osově souměrný s osou souměrnosti DS . Jelikož je úhel DCS pravý, vyplývá z osově souměrnosti, že i úhel DFS je pravý. Tedy přímka DF je kolmá na přímku FS a přímka $t = FG$ je tečnou půlkružnice l .

Pro půlkružnici m je důkaz analogický. Využijeme čtyřúhelník $CEGS$ s osou souměrnosti SE a shodnosti úhlu EGS s pravým úhlem SCE . Přímka $t = FG$ je proto kolmá na přímku EG , a tudíž je i tečnou půlkružnice m .

□

2. Archimédova dvojčata

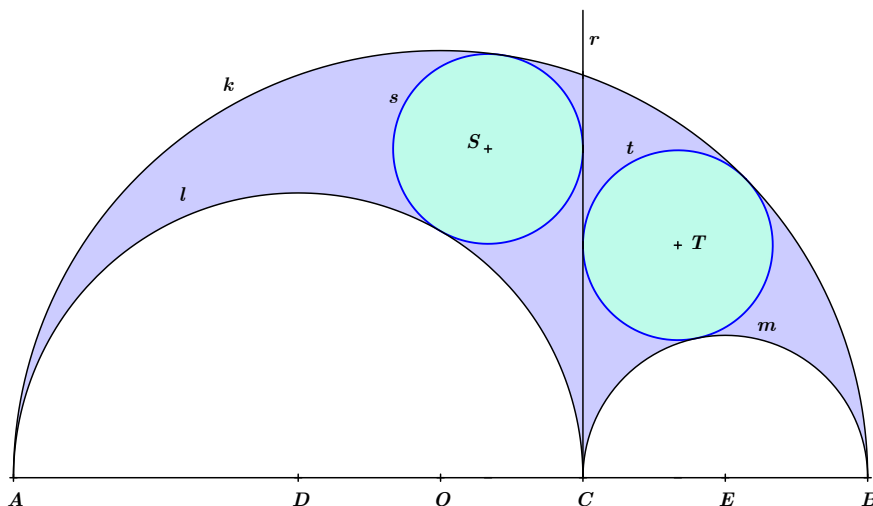
Pojmem úzce spojeným s arbelem jsou tzv. *Archimédova dvojčata*. Také tímto tématem se zabýval již Archimédés, po němž jsou pojmenována. Termín dvojčata bude objasněn ve druhé kapitole, v níž nejprve Archimédova dvojčata zavedeme a poté dokážeme některé z jejich zajímavých vlastností.

Připomeňme, že v práci využíváme pravidlo uvedené v Poznámce 2 (str. 3). V druhé kapitole budeme často studovat kružnice, které se dotýkají daných rovinných útvarů. Ze všech existujících kružnic uvedených vlastností budeme vždy uvažovat takovou, která je znázorněna na odpovídajícím obrázku. Tím se vyhneme obsáhlejšímu vyjádření, což přispěje k plynulosti textu

Tato kapitola byla zpracována na základě webové stránky [4].

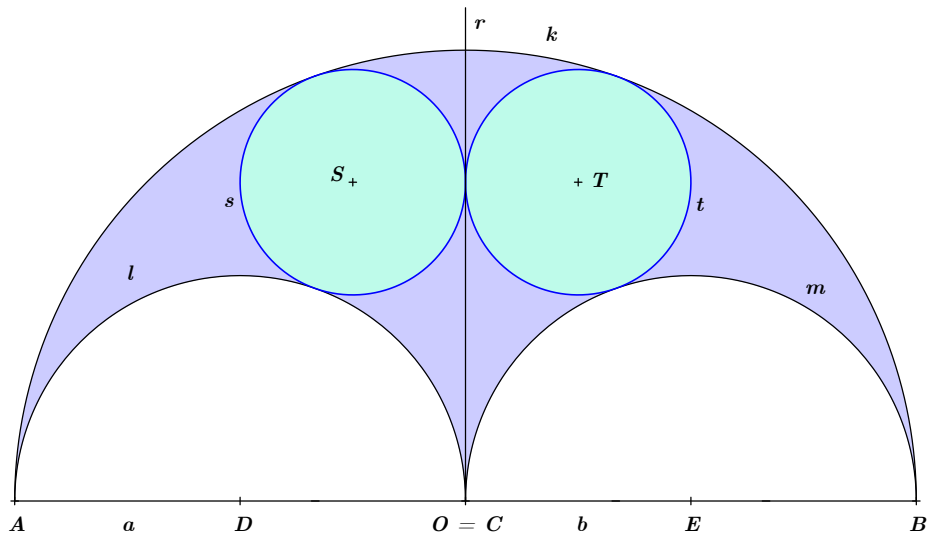
2.1 Definice Archimédových dvojčat

Definice 2. Mějme dán arbelos \mathcal{A}_{ABC} (viz obrázek 2.1). Bodem C vedme přímkou r kolmou na úsečku AB . Je-li s kružnice dotýkající se půlkružnic k, l a přímky r a dále je-li t kružnice dotýkající se půlkružnic m, k a přímky r , pak kružnice s, t nazýváme **Archimédova dvojčata**.

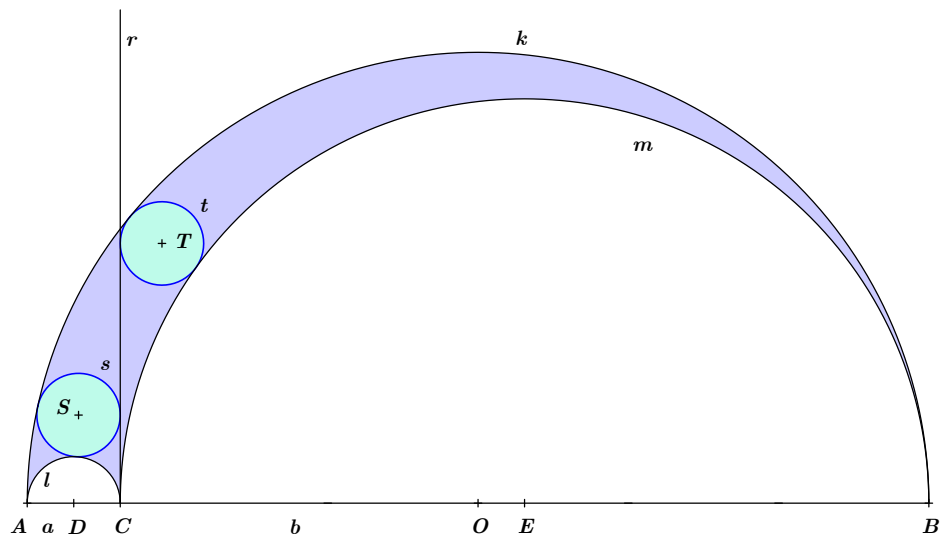


Obrázek 2.1: Archimédova dvojčata

Na obrázku 2.2 jsou znázorněna Archimédova dvojčata pro případ shodných poloměrů kružnic l, m (tj. $a = b$). V tomto případě splývá bod C s bodem O a arbelos je osově souměrný podle přímky r . Na obrázku 2.3 jsou pak Archimédova dvojčata pro případ, v němž je poloměr a půlkružnice l několikanásobně menší než poloměr b půlkružnice m .



Obrázek 2.2: Archimédova dvojčata ($a = b$)

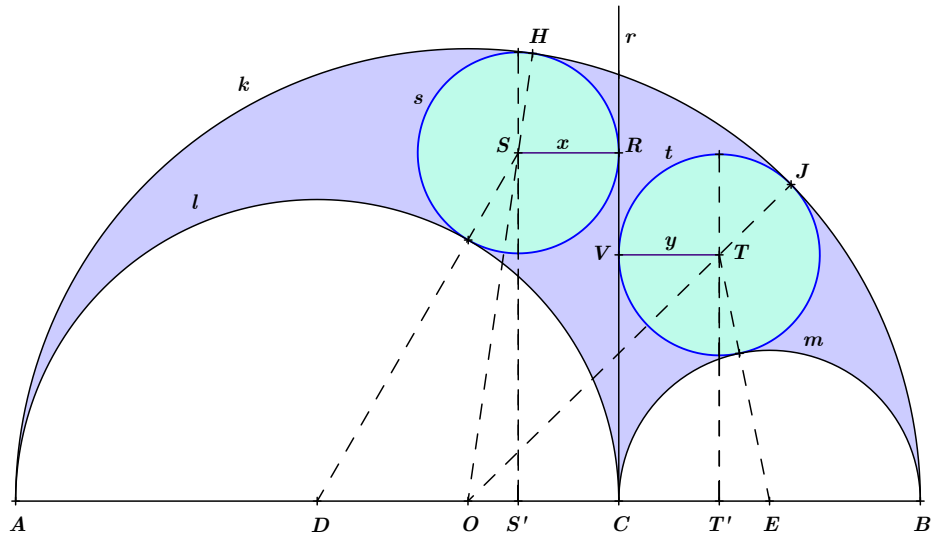


Obrázek 2.3: Archimédova dvojčata (výrazný rozdíl poloměrů a, b)

2.2 Vlastnosti Archimédových dvojčat

Termín dvojčata je zřejmý z následující věty.

Věta 3. *Mějme dán arbelos \mathcal{A}_{ABC} . Poloměry Archimédových dvojčat příslušných arbelu \mathcal{A}_{ABC} jsou shodné a jsou rovny $\frac{ab}{a+b}$. Archimédova dvojčata jsou tedy shodné kružnice.*



Obrázek 2.4: Ilustrace důkazu Věty 3

Důkaz. Necht s, t jsou Archimédova dvojčata, která přísluší arbelu \mathcal{A}_{ABC} (viz obrázek 2.4), a necht r je kolmice k úsečce AB procházející bodem C . Označme S střed kružnice s , T střed kružnice t , R bod dotyku kružnice s a přímky r , V bod dotyku kružnice t a přímky r , H bod dotyku kružnic s a k a konečně J bod dotyku kružnic t a k . Sestrojme pravoúhlý průmět S' bodu S na úsečku AB a pravoúhlý průmět T' bodu T na tutéž úsečku. Necht x je poloměr kružnice s a dále y poloměr kružnice t . Nejprve vyjádříme poloměr x kružnice s v závislosti na poloměrech a a b .

Bod O je středem úsečky AB , pro jejíž velikost platí $|AB| = 2a + 2b$, a tedy půlkružnice k má poloměr $a + b$. Čtyřúhelník $S'CRS$ je obdélník, z čehož plyne $|S'C| = |SR| = x$, a pro velikost úsečky OC platí

$$|OC| = |OB| - |CB|,$$

$$|OC| = a + b - 2b,$$

$$|OC| = a - b.$$

Uvažujme nyní trojúhelníky $DS'S$, $OS'S$ a vyjádříme velikosti jejich stran DS' , DS , OS a OS' .

$$|DS'| = |DC| - |S'C|,$$

$$|DS'| = a - x, \tag{2.1}$$

$$|DS| = a + x, \tag{2.2}$$

$$|OS| = |OH| - |SH|,$$

$$|OS| = a + b - x, \quad (2.3)$$

$$|OS'| = |OC| - |S'C|,$$

$$|OS'| = a - b - x. \quad (2.4)$$

Trojúhelník $DS'S$ je pravoúhlý. S pomocí Pýthagorovy věty, vztahů (2.1), (2.2) a elementárních úprav získáme druhou mocninu velikosti jeho strany $S'S$:

$$|DS'|^2 + |S'S|^2 = |DS|^2,$$

$$(a - x)^2 + |S'S|^2 = (a + x)^2,$$

$$a^2 - 2ax + x^2 + |S'S|^2 = a^2 + 2ax + x^2,$$

$$|S'S|^2 = 4ax. \quad (2.5)$$

Trojúhelník $OS'S$ je také pravoúhlý, můžeme tedy opět užít Pýthagorovu větu a následně pomocí rovností (2.3), (2.4), (2.5) vyjádřit poloměr x :

$$|OS'|^2 + |S'S|^2 = |OS|^2,$$

$$(a - b - x)^2 + 4ax = (a + b - x)^2,$$

$$(a - (b + x))^2 + 4ax = (a + (b - x))^2,$$

$$a^2 - 2a(b + x) + (b + x)^2 + 4ax = a^2 + 2a(b - x) + (b - x)^2,$$

$$a^2 - 2ab - 2ax + b^2 + 2bx + x^2 + 4ax = a^2 + 2ab - 2ax + b^2 - 2bx + x^2,$$

$$4ax + 4bx = 4ab,$$

$$x(a + b) = ab,$$

$$x = \frac{ab}{a + b}.$$

Dokázali jsme část věty pro poloměr x kružnice s . Pro poloměr y kružnice t je důkaz obdobný. Tentokrát ale využíváme obdélník $CT'TV$, tedy vztah $|CT'| = |VT| = y$, a dále trojúhelníky $T'ET$ a $OT'T$. Nejprve vyjádříme velikosti stran $ET, T'E, OT$ a OT' :

$$|ET| = b + y, \quad (2.6)$$

$$|T'E| = |CE| - |CT'|,$$

$$|T'E| = b - y, \quad (2.7)$$

$$|OT| = |OJ| - |TJ|,$$

$$|OT| = a + b - y, \quad (2.8)$$

$$|OT'| = |OC| + |CT'|,$$

$$|OT'| = a - b + y. \quad (2.9)$$

Nyní aplikujeme Pýthagorovu větu na trojúhelníky $T'ET$ a $OT'T$:

$$|ET|^2 = |T'E|^2 + |T'T|^2, \quad (2.10)$$

$$|OT|^2 = |OT'|^2 + |T'T|^2. \quad (2.11)$$

Dosazením (2.6) a (2.7) do vztahu (2.10) získáme rovnost

$$(b + y)^2 = (b - y)^2 + |T'T|^2,$$

$$|T'T|^2 = 4by. \quad (2.12)$$

Po dosazení (2.8), (2.9) a (2.12) do rovnosti (2.11) dostáváme:

$$(a + b - y)^2 = (a - b + y)^2 + 4by,$$

$$(a + (b - y))^2 = (a - (b - y))^2 + 4by,$$

$$a^2 + 2a(b - y) + (b - y)^2 = a^2 - 2a(b - y) + (b - y)^2 + 4by,$$

$$a^2 + 2ab - 2ay + b^2 - 2by + y^2 = a^2 - 2ab + 2ay + b^2 - 2by + y^2 + 4by,$$

$$4ab = 4ay + 4by,$$

$$y = \frac{ab}{a + b}.$$

Věta tedy platí i pro poloměr y kružnice t a oba poloměry x, y , resp. obě kružnice s, t jsou shodné¹. \square

¹Důkaz Věty 3 byl zpracován na základě webové stránky http://www.gogeometry.com/problem/p295_archimedes_twins_harmonic_mean_radius.htm

3. Archimédovy kružnice

V této kapitole se budeme zabírat tematikou *Archimédových kružnic*, které úzce souvisí s již studovanými Archimédovými dvojčaty. Zdefinujeme tento pojem a seznámíme se jak se staršími konstrukcemi Archimédových kružnic, tak i s poměrně novými.

3.1 Definice Archimédovy kružnice

Definice 3. *Mějme dán arbelos \mathcal{A}_{ABC} . Kružnice, jejíž poloměr je roven poloměru Archimédových dvojčat příslušných arbelu \mathcal{A}_{ABC} , nazýváme **Archimédovou kružnicí** příslušnou arbelu \mathcal{A}_{ABC} .*

Poznámka 3. *Speciálním případem Archimédových kružnic jsou samozřejmě Archimédova dvojčata.*

Poznámka 4. *Bude-li zřejmé, ke kterému arbelu Archimédovy kružnice přísluší, nebudeme tento údaj v dalším textu uvádět.*

3.2 Nejznámější konstrukce Archimédových kružnic

Na následujících stranách představíme několik z mnoha známých konstrukcí Archimédových kružnic. Nejprve uvedeme postupy, které se vyskytují v odborných literaturách nejčastěji. Abychom dokázali, že problematika Archimédových kružnic je stále studována, představíme v následující kapitole i tři konstrukce, které byly publikovány roku 2019.

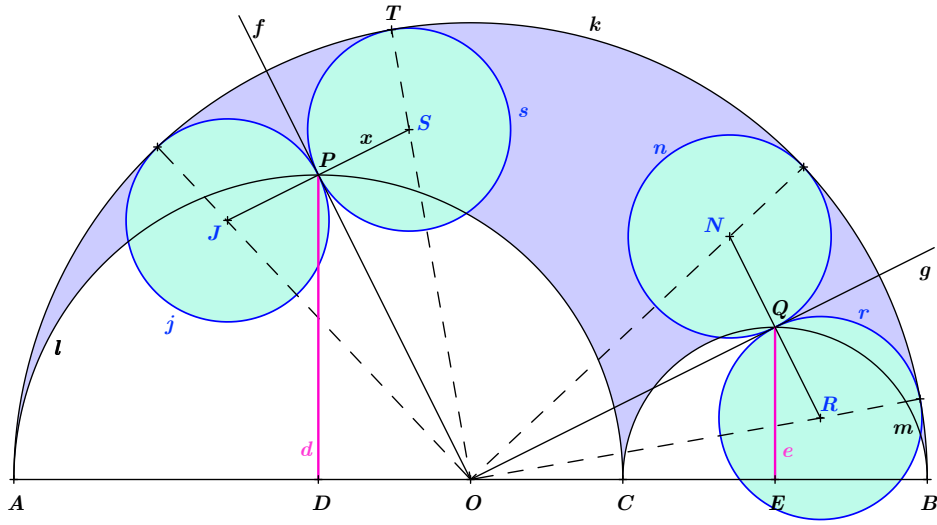
Tato podkapitola byla zpracována na základě článků [5], [6] a webové stránky [7]. Pro zájemce uvádíme literaturu [8] zabývající se dalšími známými konstrukcemi Archimédových kružnic.

Jedním z postupů, kterému se budeme věnovat, je konstrukce tzv. *Archimédových čtyřčat*, které jsou příkladem Archimédových kružnic. Touto tematikou se zabýval Frank Power v roce 1998. V některé cizojazyčné literatuře jsou proto na jeho počest označovány namísto *Archimedes' quadruplets* jako *Powerian pairs in the Arbelos*.

Věta 4 (Archimédova čtyřčata). *Mějme dán arbelos \mathcal{A}_{ABC} (viz obrázek 3.1). Bodem D , resp. E vedme kolmici d , resp. e na úsečku AB . Označme P průsečík půlkružnice l a přímky d a dále Q průsečík půlkružnice m a přímky e . Sestrojme přímky $f = OP$ a $g = OQ$. Zkonstruujeme-li kružnice j , s , resp. n , r , které se dotýkají přímky f , resp. g v bodě P , resp. Q a dále se dotýkají půlkružnice k , pak jsou tyto čtyři kružnice j, s, n, r tzv. Archimédova čtyřčata, tj. jejich poloměr je roven poloměru Archimédových dvojčat příslušných arbelu \mathcal{A}_{ABC} .*

Důkaz. Nejprve důkaz provedeme pro kružnici s . Označme S střed a x poloměr této kružnice. S využitím Pýthagorovy věty pro pravoúhlý trojúhelník DOP dostáváme

$$|PO|^2 = |DP|^2 + |DO|^2. \quad (3.1)$$



Obrázek 3.1: Archimédova čtyřčata

Velikost strany DP je rovna poloměru a půlkružnice l a pro velikost strany DO platí $|DO| = |AO| - |AD| = a + b - a = b$. Po dosazení do vztahu (3.1) získáme rovnost

$$|PO|^2 = a^2 + b^2.$$

Trojúhelník POS je též pravoúhlý, jelikož P je bodem dotyku kružnice s a její tečny f vedené bodem O . Tedy

$$|SO|^2 = |PS|^2 + |PO|^2,$$

$$|SO|^2 = x^2 + a^2 + b^2. \quad (3.2)$$

Označíme-li T průsečík přímky SO s půlkružnicí k , pak dále platí:

$$|SO| = |TO| - |TS|,$$

$$|SO| = a + b - x,$$

$$|SO|^2 = (a + b - x)^2. \quad (3.3)$$

Dosadíme-li vztah (3.2) do rovnosti (3.3) dostáváme

$$(a + b - x)^2 = x^2 + a^2 + b^2,$$

$$a^2 + 2a(b - x) + (b - x)^2 = x^2 + a^2 + b^2,$$

$$a^2 + 2ab - 2ax + b^2 - 2bx + x^2 = x^2 + a^2 + b^2,$$

$$ax + bx = ab,$$

$$x(a + b) = ab,$$

$$x = \frac{ab}{a + b}.$$

Kružnice s je tedy Archimédova. Pro kružnice j, n, r je důkaz analogický. Shodnost kružnic s, j (a tedy i jejich poloměrů) navíc vyplývá z jejich osové souměrnosti podle přímky f . \square

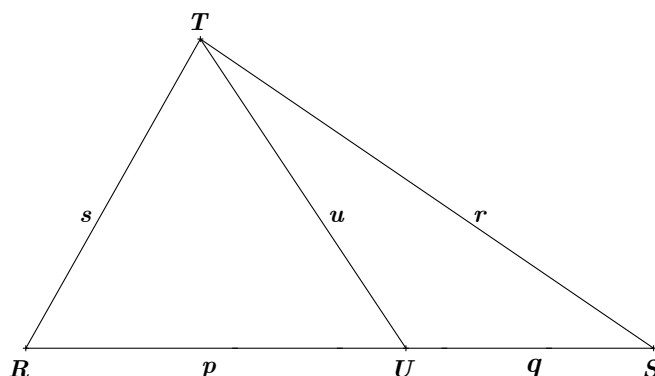
3.3 Nové konstrukce Archimédových kružnic

Tato podkapitola je zpracována na základě článku [9].

Nyní se věnujme třem konstrukcím publikovaným v posledních letech. Postupy jsou uvedeny ve Větách 6, 7 a 8. Abychom mohli interpretovat důkaz první z nich, potřebujeme znát následující Větu 5. Cílem této práce není její ověřování. Zájemce o důkaz odkazujeme na článek [10].

Věta 5 (Stewartova věta). *Mějme dán trojúhelník RST . Necht U je libovolným vnitřním bodem jeho strany RS (viz obrázek 3.2). Označíme-li $|TR| = s$, $|TS| = r$, $|TU| = u$, $|RU| = p$, $|US| = q$, pak platí*

$$r^2p + s^2q = (p + q)(pq + u^2).$$

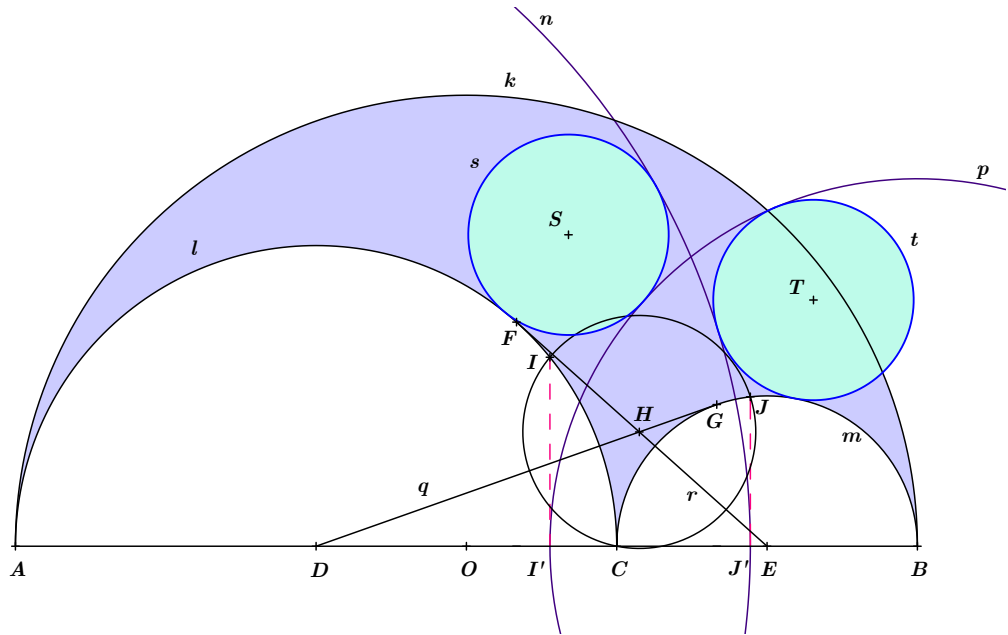


Obrázek 3.2: Ilustrace Věty 5

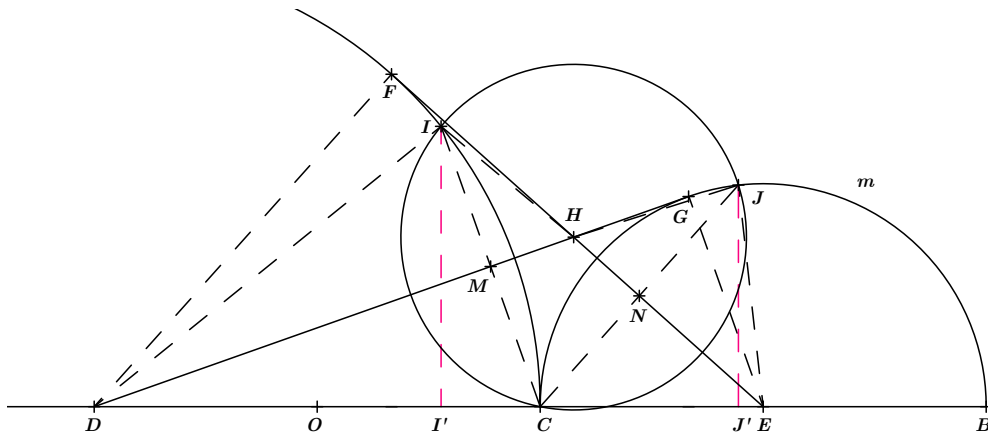
Věta 6. *Mějme dán arbelos \mathcal{A}_{ABC} (viz obrázek 3.3). Sestrojme tečnu r z bodu E k půlkružnici l a bod dotyku označme F . Dále sestrojme tečnu q z bodu D k půlkružnici m a bod dotyku označme G . Průsečík tečen r a q označme H . Kružnice se středem H a poloměrem $|HC|$ necht protne půlkružnici l v bodě I a půlkružnici m v bodě J . Pravoúhlé průměty bodů I, J na úsečku AB označme I', J' . Dále sestrojme kružnici n se středem A a poloměrem $|AJ'|$ a také kružnici p se středem B a poloměrem $|BI'|$. Kružnice s , která se dotýká půlkružnice l a kružnic n a p , a také kružnice t , která se dotýká půlkružnice m a kružnic n a p , jsou Archimédovy kružnice.*

Důkaz. Označme M průsečík úseček IC, DG a dále N průsečík úseček CJ, FE (viz obrázek 3.4). Jelikož je čtyřúhelník $DCHI$ deltoid, svírají jeho úhlopříčky pravý úhel. Úsečka MC je proto kolmá na úsečku DH . Jelikož jsou úsečky MC a GE kolmé na přímkou $DG = DH$, jsou navzájem rovnoběžné. Odtud plyne, že trojúhelníky DCM a DEG jsou podobné, a protože velikost úsečky GE je rovna b , vyplývají ze zmíněné podobnosti rovnosti

$$\frac{|GE|}{|MC|} = \frac{|DE|}{|DC|},$$



Obrázek 3.3: Ilustrace Věty 6



Obrázek 3.4: Ilustrace důkazu Věty 6

$$\frac{b}{\frac{|IC|}{2}} = \frac{a+b}{a},$$

$$|IC| = \frac{2ab}{a+b}. \quad (3.4)$$

Velikost úsečky IC je tedy rovna průměru Archimédových dvojčat. Z rovnoběžnosti úseček IC a GE plyne, že s přímkou DB svírají úhel stejné velikosti. Trojúhelníky $I'I'C$ a DGE jsou proto podobné, neboť dvě dvojice jejich vnitřních úhlů jsou stejně velké. A tedy s využitím rovnosti (3.4) máme následující vztahy:

$$\frac{|I'C|}{|GE|} = \frac{|IC|}{|DE|},$$

$$\begin{aligned}
\frac{|I'C|}{b} &= \frac{|IC|}{a+b}, \\
\frac{|I'C|}{b} &= \frac{\frac{2ab}{a+b}}{a+b}, \\
|I'C| &= \frac{2ab^2}{(a+b)^2}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Rovněž trojúhelníky CEN a DEF jsou podobné, neboť mají společný vnitřní úhel DEF a neboť úhly DFE a CNE jsou oba pravé. Proto platí

$$\begin{aligned}
\frac{|DF|}{|CN|} &= \frac{|DE|}{|CE|}, \\
\frac{a}{|CN|} &= \frac{a+b}{b}, \\
|CN| &= \frac{ab}{a+b}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Trojúhelníky CEN a CJJ' jsou také podobné, neboť úhly CNE a $CJ'J$ jsou oba pravé a úhel NCE je vnitřním úhlem obou trojúhelníků. Tudíž s využitím vztahu (3.6) platí

$$\begin{aligned}
\frac{|CJ'|}{|CN|} &= \frac{|CJ|}{|CE|}, \\
|CJ'| &= \frac{2|CN|^2}{|CE|}, \\
|CJ'| &= \frac{2\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2}{b}, \\
|CJ'| &= \frac{2a^2b}{(a+b)^2}.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Označme S střed a x poloměr kružnice s . Uvažujme trojúhelník ABS a úsečku DS (viz obrázek 3.5). S využitím Stewartovy věty máme

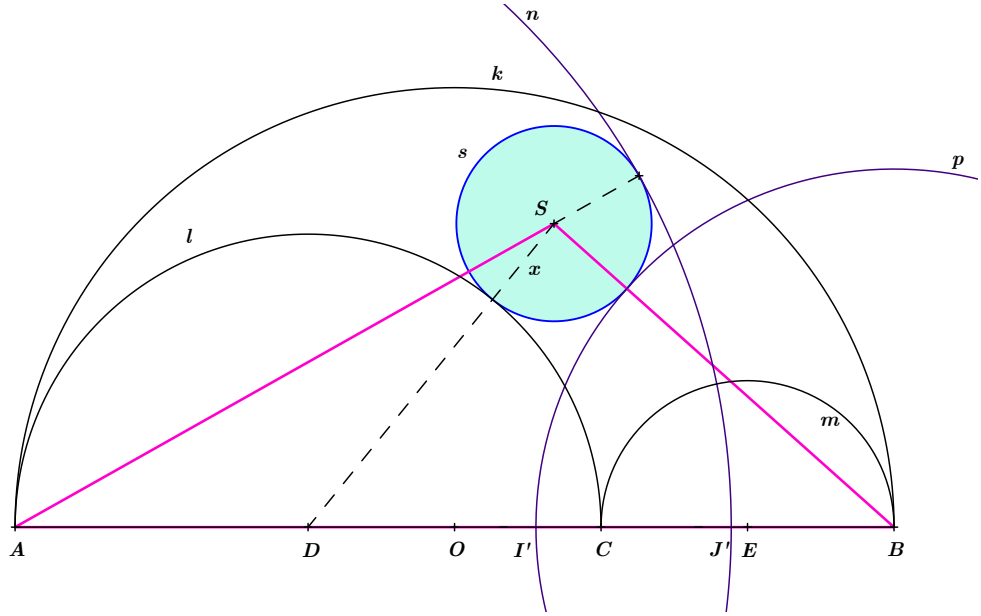
$$|AS|^2 \cdot |DB| + |BS|^2 \cdot |AD| = |AB| \cdot (|AD| \cdot |DB| + |DS|^2),$$

$$(|AJ'| - x)^2(a + 2b) + (|BI'| + x)^2a = (2a + 2b)[a(a + 2b) + (a + x)^2],$$

$$(|AC| + |CJ'| - x)^2(a + 2b) + (|BC| + |CI'| + x)^2a = 2(a + b)[a(a + 2b) + (a + x)^2].$$

Pomocí vztahů (3.5), (3.7) dále dostáváme

$$\left[2a + \frac{2a^2b}{(a+b)^2} - x\right]^2 (a + 2b) + \left[2b + \frac{2ab^2}{(a+b)^2} + x\right]^2 a = 2(a + b)[a(a + 2b) + (a + x)^2],$$



Obrázek 3.5: Ilustrace důkazu Věty 6, aplikace Stewartovy věty.

$$\left[4a^2 + 4a \left(\frac{2a^2b}{(a+b)^2} - x \right) + \left(\frac{2a^2b}{(a+b)^2} - x \right)^2 \right] (a+2b) +$$

$$+ \left[4b^2 + 4b \left(\frac{2ab^2}{(a+b)^2} + x \right) + \left(\frac{2ab^2}{(a+b)^2} + x \right)^2 \right] a = 2(a+b)[a(a+2b) + (a+x)^2],$$

$$\left[4a^2 + \frac{8a^3b}{(a+b)^2} - 4ax + \frac{4a^4b^2}{(a+b)^4} - \frac{4a^2bx}{(a+b)^2} + x^2 \right] (a+2b) +$$

$$+ \left[4b^2 + \frac{8ab^3}{(a+b)^2} + 4bx + \frac{4a^2b^4}{(a+b)^4} + \frac{4ab^2x}{(a+b)^2} + x^2 \right] a =$$

$$= 2(a+b)(a^2 + 2ab + a^2 + 2ax + x^2),$$

$$\frac{8ab}{(a+b)^2}(a^3 + 2a^2b + ab^2) + \frac{4a^2b^2}{(a+b)^4}(a^3 + 2a^2b + ab^2) + \frac{4abx}{(a+b)^2}(-a^2 - 2ab + ab) +$$

$$+ (4a^2 - 4ax + x^2)(a+2b) + (4b^2 + 4bx + x^2)a = 2(a+b)(2a^2 + 2ab + 2ax + x^2),$$

$$(a^3 + 2a^2b + ab^2) \left[\frac{8ab(a+b)^2 + 4a^2b^2}{(a+b)^4} \right] - \frac{4a^2bx}{(a+b)^2} (a+b) + 4a^3 - 4a^2x + 2ax^2 + \\ + 8a^2b - 4abx + 2bx^2 + 4ab^2 = 4a^3 + 4a^2b + 4a^2x + 2ax^2 + 4a^2b + 4ab^2 + 4abx + 2bx^2,$$

$$a(a+b)^2 \frac{4ab [2(a+b)^2 + ab]}{(a+b)^4} - \frac{4a^2bx}{a+b} = 8a^2x + 8abx,$$

$$\frac{4a^2b [2(a+b)^2 + ab]}{(a+b)^2} = x \frac{8a(a+b)^2 + 4a^2b}{a+b},$$

$$x = \frac{4a^2b [2(a+b)^2 + ab]}{(a+b) 4a [2(a+b)^2 + ab]},$$

$$x = \frac{ab}{a+b}.$$

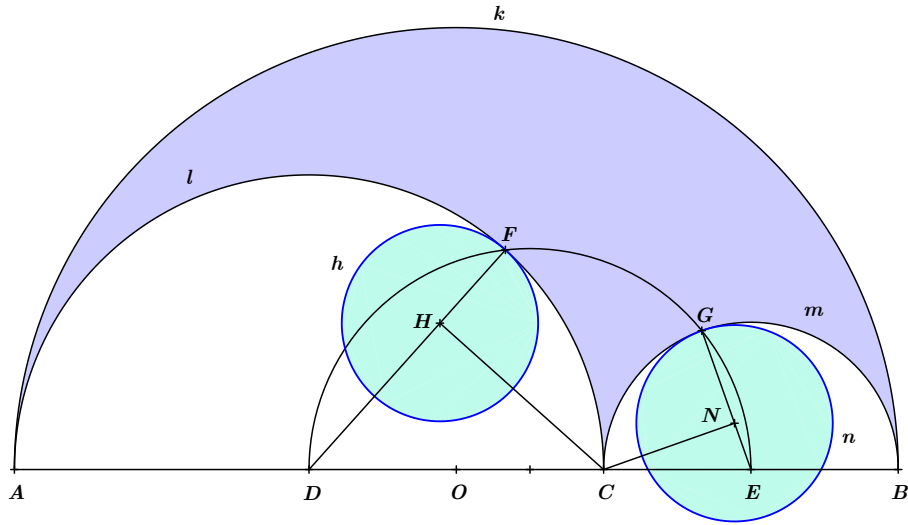
Tedy vidíme, že kružnice s je Archimédova. Pro kružnici t je důkaz analogický. \square

Poznámka 5. V průběhu důkazu jsme odvodili vztahy (3.4) a (3.6). Z nich vyplývá, že rovněž kružnice se středem M a poloměrem $|CM| = \frac{|IC|}{2}$ a také kružnice se středem N a poloměrem $|CN|$ jsou Archimédovy.

Věta 7. Mějme dán arbelos \mathcal{A}_{ABC} (viz obrázek 3.6). Necht kružnice sestavená nad úsečkou DE protne půlkružnici l v bodě F a půlkružnici m v bodě G . Dále sestrojme přímkou procházející bodem C kolmou na úsečku DF , resp. GE a patu kolmice označme H , resp. N . Kružnice h se středem H a poloměrem $|HF|$ a rovněž kružnice n se středem N a poloměrem $|NG|$ jsou Archimédovy kružnice.

Důkaz. Nejprve dokážeme, že tato věta platí pro kružnici h . Trojúhelníky DCH a DEF jsou podobné, neboť úhly DHC a DFE jsou pravé a velikost úhlu HDC je rovna velikosti úhlu FDE (viz obrázek 3.6). Tedy platí následující rovnosti:

$$\frac{|DC|}{|DH|} = \frac{|DE|}{|DF|}, \\ \frac{a}{|DH|} = \frac{a+b}{a}, \\ |DH| = \frac{a^2}{a+b}. \tag{3.8}$$



Obrázek 3.6: Ilustrace Věty 7

Chceme zjistit poloměr kružnice h , tedy velikost úsečky HF . Jelikož zřejmě platí $|HF| = |DF| - |DH| = a - |DH|$, přičemž velikost úsečky DH známe (viz rovnost (3.8)), po dosazení dostáváme:

$$|HF| = a - \frac{a^2}{a+b},$$

$$|HF| = \frac{a^2 + ab - a^2}{a+b},$$

$$|HF| = \frac{ab}{a+b}.$$

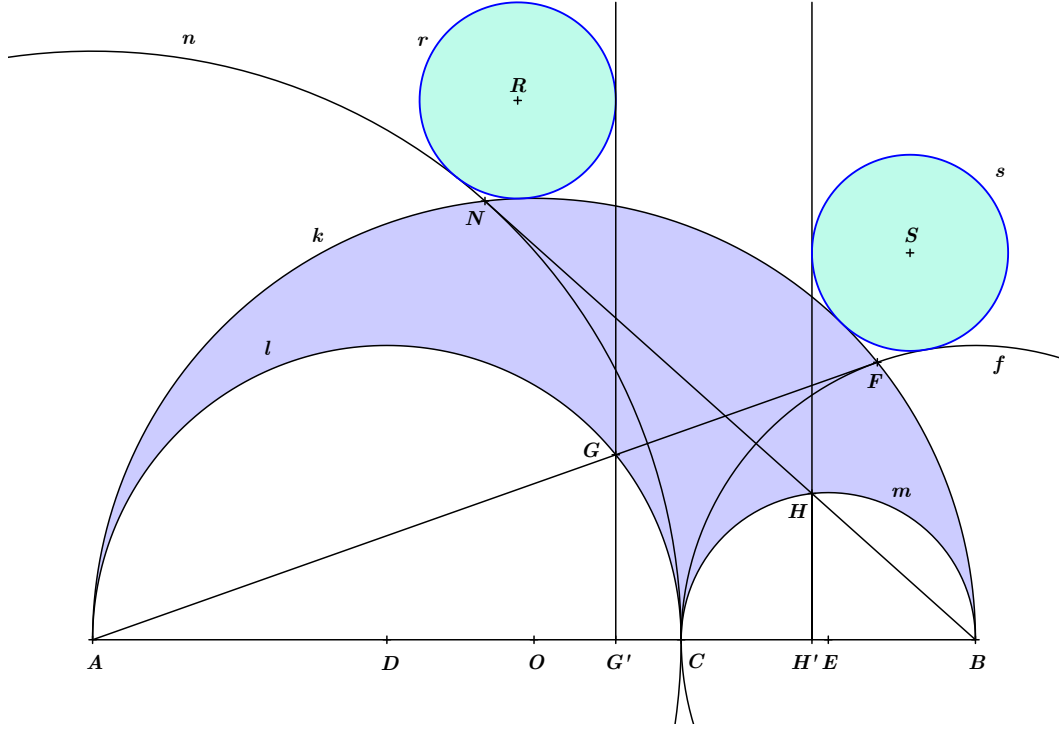
Poloměr kružnice h je proto roven poloměru Archimédových dvojčat.

Důkaz pro kružnici n je analogický. Kružnice n má také poloměr roven poloměru Archimédových dvojčat. Kružnice h, n jsou proto Archimédovy. \square

Věta 8. Mějme dán arbelos \mathcal{A}_{ABC} (viz obrázek 3.7). Sestrojme kružnici n o středu A a poloměru $|AC|$ a dále kružnici f o středu B a poloměru $|BC|$. Označme N průsečík kružnice n a půlkružnice k a dále F průsečík kružnice f a půlkružnice k . Nechť úsečka AF protne půlkružnici l v bodě G a úsečka BN protne půlkružnici m v bodě H . Sestrojme přímky GG' a HH' , kde bod G' , resp. H je pravoúhlý průmět bodu G , resp. H na úsečku AB . Kružnice r dotýkající se kružnice n , půlkružnice k a přímky GG' a také kružnice s dotýkající se kružnice f , půlkružnice k a přímky HH' jsou Archimédovy kružnice.

Důkaz. Důkaz provedeme pro kružnici r . Uvažujme trojúhelník ABF , který je pravoúhlý, neboť bod F leží na půlkružnici k sestrojené nad průměrem AB . Pro výpočet velikosti jeho strany AF využijeme Pýthagorovu větu, přičemž známe velikosti zbývajících stran BF a AB .

$$|AF|^2 = |AB|^2 - |BF|^2,$$



Obrázek 3.7: Ilustrace Věty 8

$$\begin{aligned}
 |AF|^2 &= (2a + 2b)^2 - 4b^2, \\
 |AF| &= \sqrt{4a^2 + 8ab + 4b^2 - 4b^2}, \\
 |AF| &= \sqrt{4(a^2 + 2ab)}, \\
 |AF| &= 2\sqrt{a^2 + 2ab}.
 \end{aligned}$$

Bod G leží na půlkružici l sestrojené nad průměrem AC , proto je úhel AGC pravý. Trojúhelníky ACG a ABF jsou oba pravoúhlé a mají společný vnitřní úhel při vrcholu A . Jsou proto podobné, z čehož plyne:

$$\frac{|AF|}{|AG|} = \frac{|AB|}{|AC|},$$

$$\frac{2\sqrt{a^2 + 2ab}}{|AG|} = \frac{2a + 2b}{2a},$$

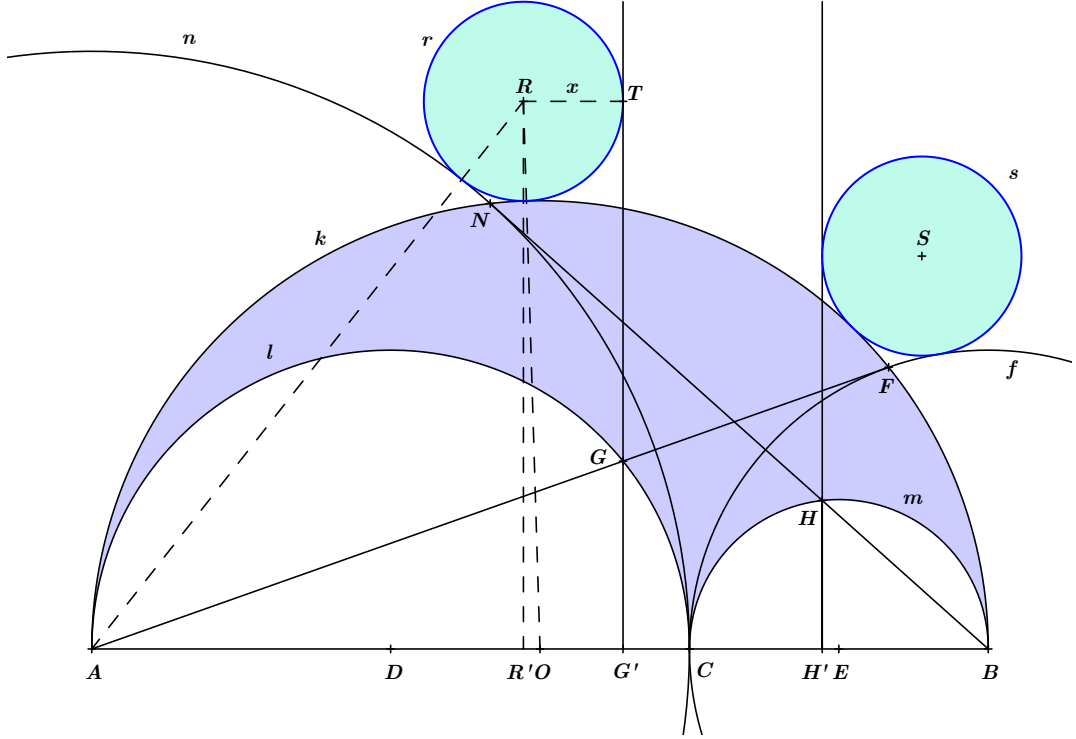
$$|AG| = \frac{2a\sqrt{a^2 + 2ab}}{a + b}.$$

Trojúhelníky $AG'G$ a AGC jsou také podobné, neboť mají společný vnitřní úhel při vrcholu A a každý z nich má jeden vnitřní úhel pravý. Proto

$$\frac{|AG'|}{|AG|} = \frac{|AG|}{|AC|},$$

$$|AG'| = \frac{\left(\frac{2a\sqrt{a^2+2ab}}{a+b}\right)^2}{2a}, \quad (3.9)$$

$$|AG'| = \frac{2a(a^2 + 2ab)}{(a + b)^2}. \quad (3.10)$$



Obrázek 3.8: Ilustrace důkazu Věty 8

Označme T bod dotyku kružnice r a přímky GG' , dále R' pravouhloú projekcí středu R kružnice r na úsečku AB a x poloměr této kružnice (viz obrázek 3.8). Z Pýthagorovy věty pro pravouhlý trojúhelník $AR'R$ dostáváme vztah

$$|RR'|^2 = |AR|^2 - |AR'|^2 \quad (3.11)$$

a z téže věty pro pravouhlý trojúhelník $R'OR$ získáme rovnost

$$|R'O|^2 + |RR'|^2 = |OR|^2. \quad (3.12)$$

Do rovnosti (3.12) dosadíme vztah (3.11). Dále využijeme skutečnosti, že velikost strany $R'O$ je rovna $|AO| - |AR'|$, přičemž $|AR'| = |AG'| - x$, a také vztahu (3.10). Tím postupně dostaneme následující rovnosti:

$$\begin{aligned} |R'O|^2 + (|AR|^2 - |AR'|^2) &= |OR|^2, \\ (|AO| - |AR'|)^2 + |AR|^2 - |AR'|^2 &= |OR|^2, \end{aligned}$$

$$|AO|^2 - 2 \cdot |AO| \cdot (|AG'| - x) + |AR|^2 = |OR|^2,$$

$$(a+b)^2 - 2(a+b) \left(\frac{2a(a^2+2ab)}{(a+b)^2} - x \right) + (2a+x)^2 = (a+b+x)^2,$$

$$(a+b)^2 - \frac{4a(a^2+2ab)}{a+b} + 2(a+b)x + 4a^2 + 4ax + x^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)x + x^2,$$

$$4ax = \frac{4a(a^2+2ab)}{a+b} - 4a^2,$$

$$x = \frac{a^2+2ab-a(a+b)}{a+b},$$

$$x = \frac{ab}{a+b}.$$

Poloměr x kružnice r je tedy roven poloměru Archimédových dvojčat, a tato kružnice je proto Archimédova. Pro kružnici s je důkaz analogický. \square

4. Pappův řetězec

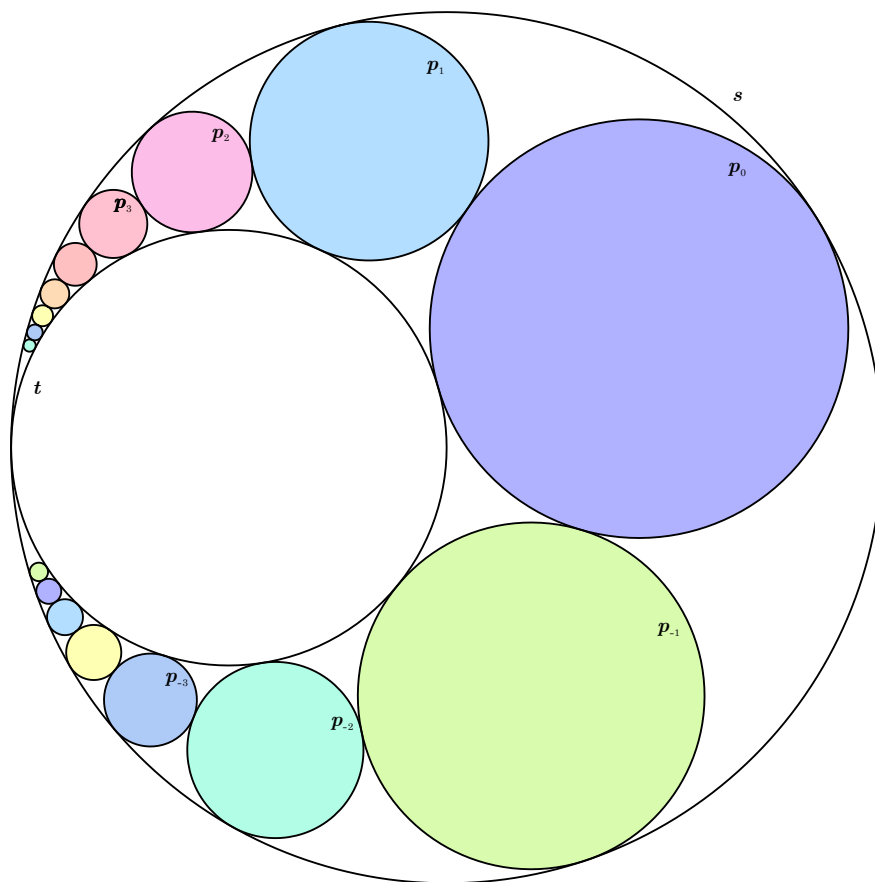
V této kapitole definujeme další rovinný útvar, a to *Pappův řetězec*. Představíme jeho souvislost s arbelem, naučíme se ho zkonstruovat a uvedeme jeho základní vlastnosti.

Pojmenování pojmu odkazuje na řeckého geometra a astronoma Pappa z Alexandrie (asi 290 až 350), který se obrazcem zabýval ve svém díle *Synagóge* (česky *Sbírka*). V tomto osmidílném textu interpretoval poznatky svých předchůdců a dále představil nové výsledky, mezi které zřejmě patří i Pappův řetězec a jeho vlastnosti.

Tato kapitola je zpracována na základě literatury [11], [12].

4.1 Definice Pappova řetězce

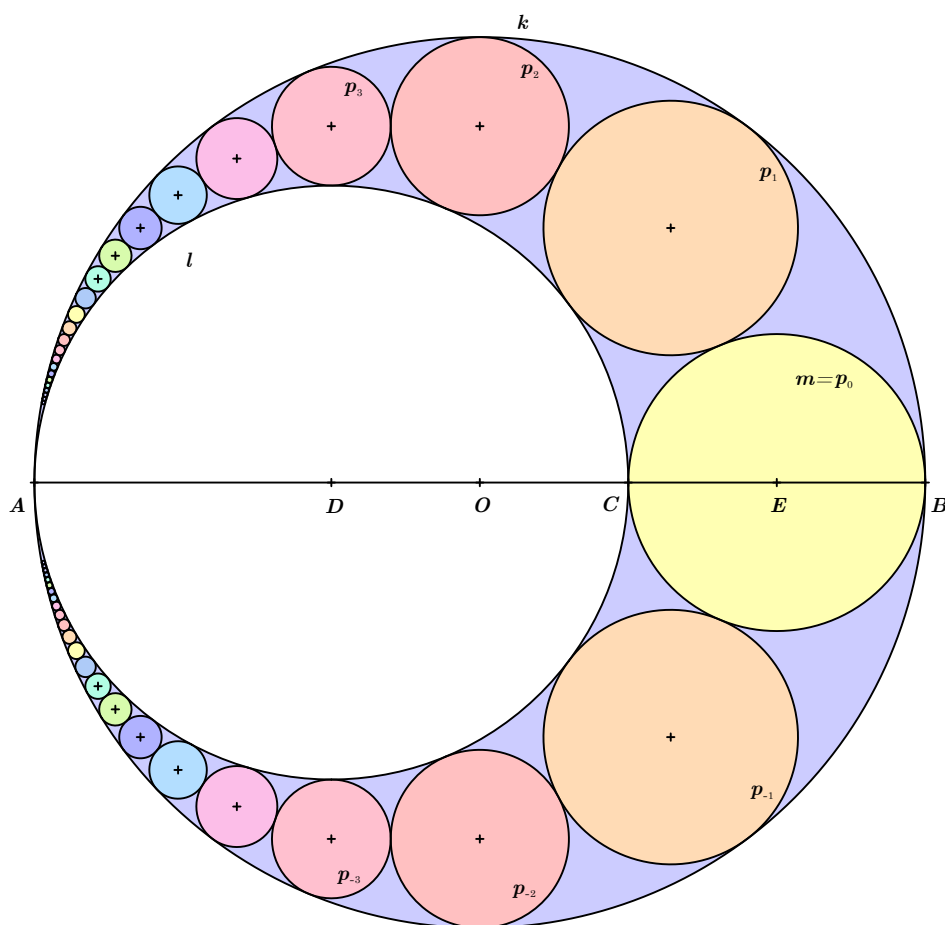
Definice 4. *Mějme dány dvě kružnice s a t mající vnitřní dotyk, přičemž poloměr kružnice s je větší než poloměr kružnice t . Označme p_0 kružnici, která má vnější dotyk s kružnicí t a současně vnitřní dotyk s kružnicí s . Soustavu kružnic $p_{-n}, \dots, p_{-2}, p_{-1}, p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$, kde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, nazýváme **Pappův řetězec**, jestliže každá kružnice p_i , pro $i = 1, 2, \dots, n$, se dotýká kružnic s , t a dále kružnice p_{i-1} a každá kružnice p_i , pro $i = -1, -2, \dots, -n$, se dotýká kružnic s , t a dále kružnice p_{i+1} .*



Obrázek 4.1: Pappův řetězec

Poznámka 6. Mějme dán arbelos \mathcal{A}_{ABC} (připomínáme, že značení určujících prvků arbelu stále přejímáme z obrázku 1.2). Sestrojíme-li Pappův řetězec (jednoznačně určený výchozími kružnicemi s , t , p_0) tak, že půlkružnice l leží na kružnici t , půlkružnice k leží na kružnici s a půlkružnice m leží na kružnici p_0 (tj. střed kružnice p_0 Pappova řetězce leží na spojnici středů kružnic t , s), dostáváme Pappův řetězec příslušný arbelu \mathcal{A}_{ABC} (viz obrázek 4.2). V nejedné literatuře je Pappovým řetězcem rozuměn pouze tento speciální případ, který má řadu zajímavých vlastností. Také my se dále budeme zabývat pouze takto úžeji definovaným pojmem.

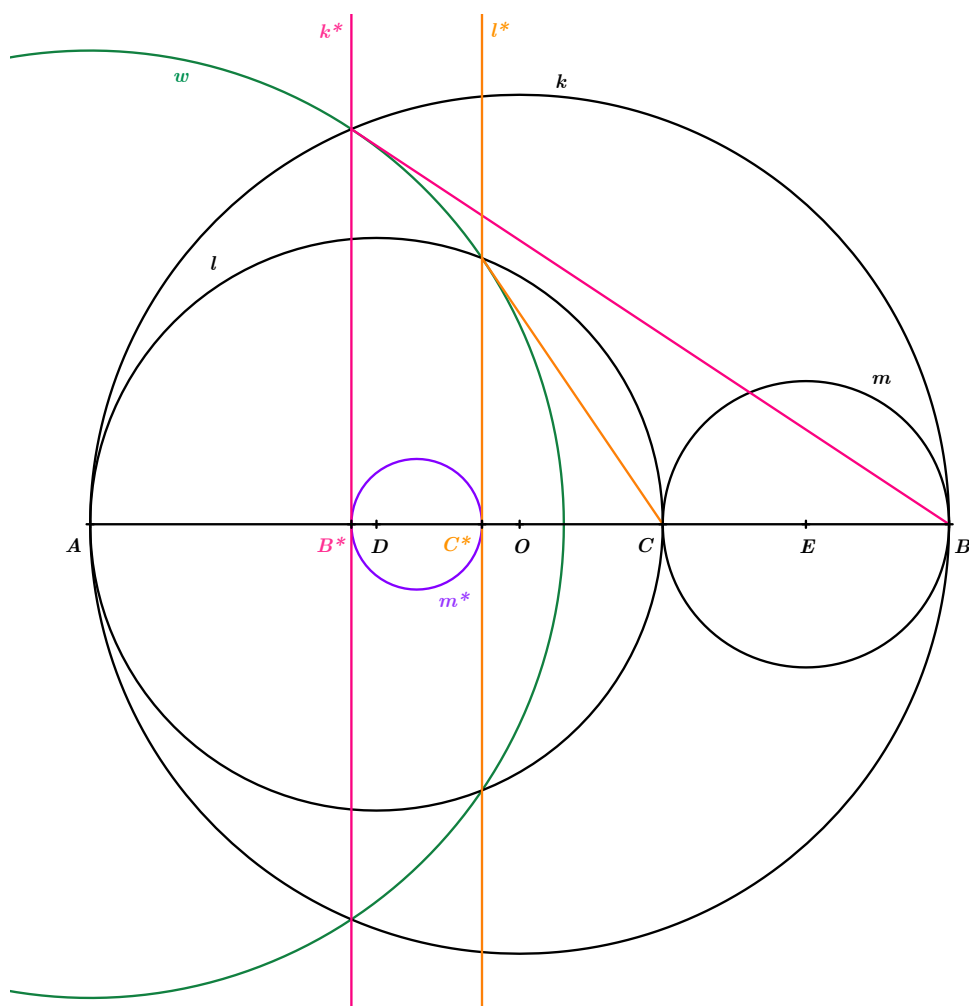
Dodejme, že v některých publikacích je Pappův řetězec (zřejmě vzhledem k jeho osové souměrnosti) zaveden ještě striktněji. Pappův řetězec tvoří pouze kružnice p_1, p_2, \dots, p_n , jejichž středy leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou AB , na níž leží středy půlkružnic k , l , m .



Obrázek 4.2: Pappův řetězec příslušný arbelu

4.2 Konstrukce kružnic Pappova řetězce

Ukažme nyní, jak Pappův řetězec příslušný arbelu \mathcal{A}_{ABC} zkonstruovat. Mějme tedy dány tři výchozí kružnice, které označíme k , l a m (viz obrázek 4.3). Konstrukce kružnice, která se dotýká tří daných kružnic, není zcela triviální. Umíme však sestrojít kružnici, která se dotýká kružnice a dvou přímek. Hledáme tedy vhodné zobrazení, v němž se tři výchozí kružnice zobrazí na kružnici a dvě přímky. Poté sestrojíme kružnici dotýkající se těchto obrazů a nakonec nalezneme vzor zkonstruované kružnice.

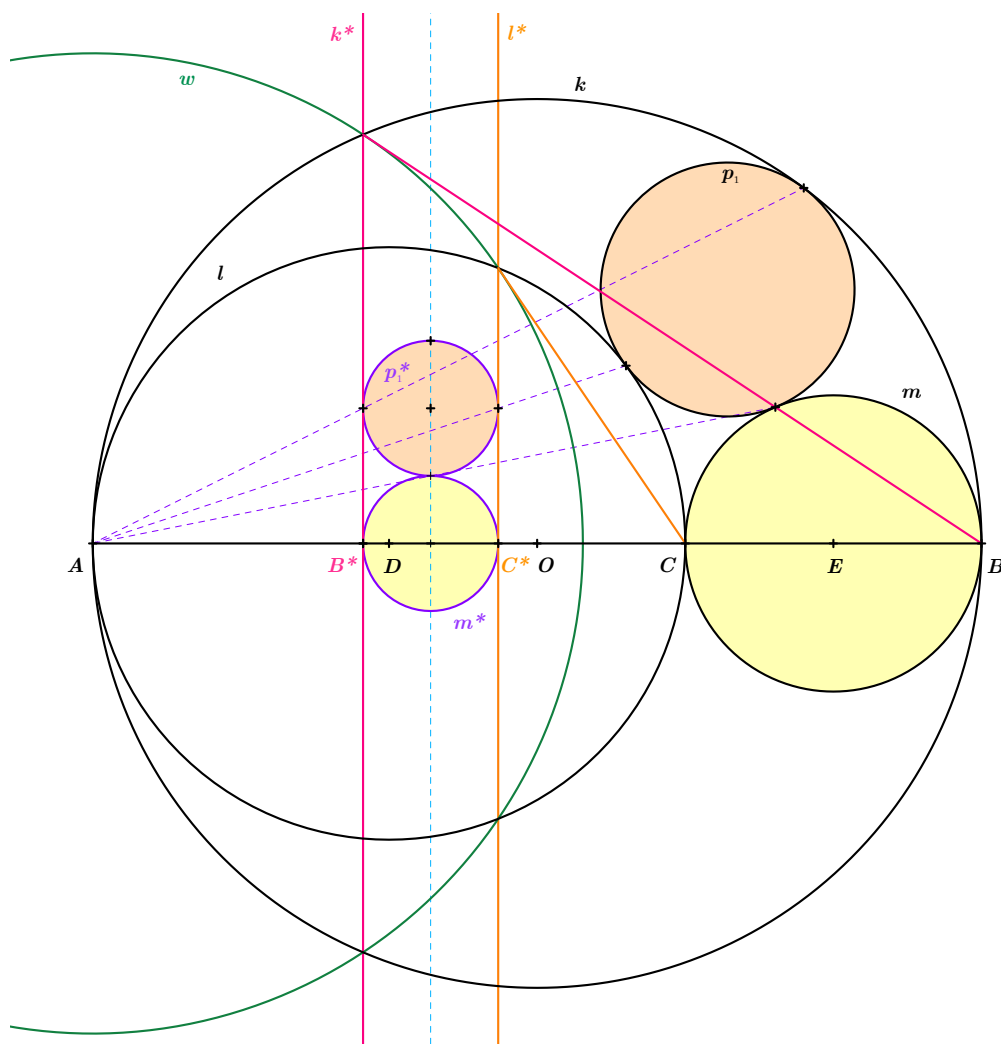


Obrázek 4.3: Konstrukce Pappova řetězce – 1. krok

Zmíněným vhodným zobrazením je kruhová inverze (bližší informace o kruhové inverzi viz [13]). Aby se kružnice k , l zobrazily na přímky a kružnice m na kružnici, zvolíme střed řídicí kružnice ω kruhové inverze v bodě dotyku A kružnic k a l . Poloměr kružnice ω můžeme zvolit libovolně, ale konstrukce je snazší, pokud kružnice ω protíná kružnice k a l (průsečíky budou totiž samodružnými body). Kružnice k , l procházející bodem A se poté zobrazí na dvě rovnoběžky k^* , l^* a kružnice m neprocházející bodem A se zobrazí na kružnici m^* . Bod dotyku C kružnic l , m se přitom zobrazí na bod dotyku C^* přímky l^* a kružnice m^* . Obdobně se bod dotyku B kružnic k , m zobrazí na bod dotyku B^* přímky k^* a kružnice m^* .

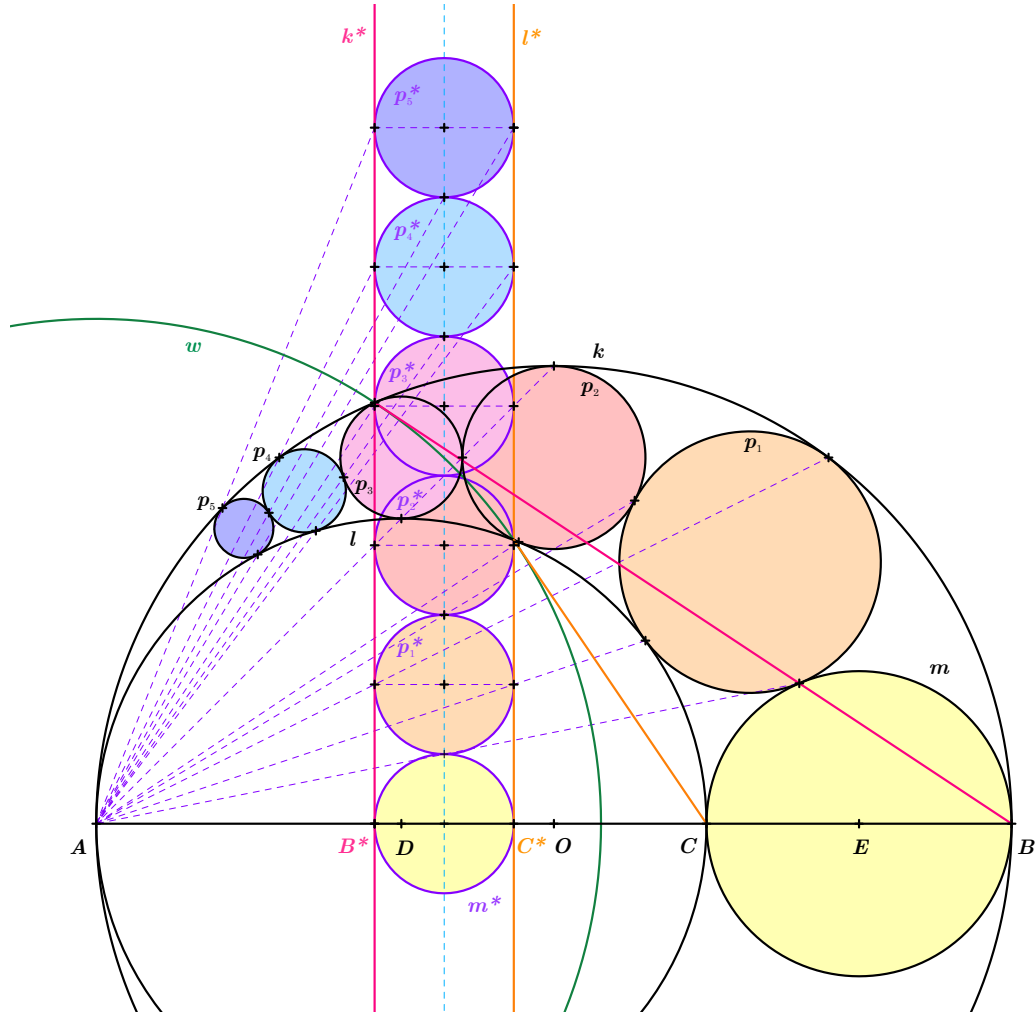
Sestrojíme tedy nejprve obrazy B^* , C^* bodů B , C . Obraz k^* , resp. l^* kružnice k , resp. l je přímka procházející jednak bodem B^* , resp. C^* a dále samodružným průsečíkem kružnic ω a k , resp. ω a l . (Obrazy k^* , l^* jsou přímky kolmé na přímku AB .) Dále sestrojíme obraz kružnice m , což je kružnice m^* dotýkající se přímek k^* , l^* v bodech B^* , C^* .

Nyní sestrojíme obraz p_1^* hledané kružnice p_1 Pappova řetězce (viz obrázek 4.4). Jedná se o kružnici p_1^* dotýkající se kružnice m^* a přímek k^* , l^* . Dále uvažujme body dotyku kružnice p_1^* s kružnicí m^* a s přímkami k^* , l^* . Vzory těchto bodů dotyku jsou tři body, které jednoznačně určují hledanou kružnici p_1 (bod dotyku kružnic p_1 a k leží na spojnici středu A řídicí kružnice ω a bodu dotyku kružnice p_1^* s přímkou k^* ; obdobné platí pro zbývající dva body dotyku).



Obrázek 4.4: Konstrukce Pappova řetězce – 2. krok

Pro ostatní kružnice Pappova řetězce příslušného arbelu postupujeme zcela analogicky (viz obrázek 4.5).



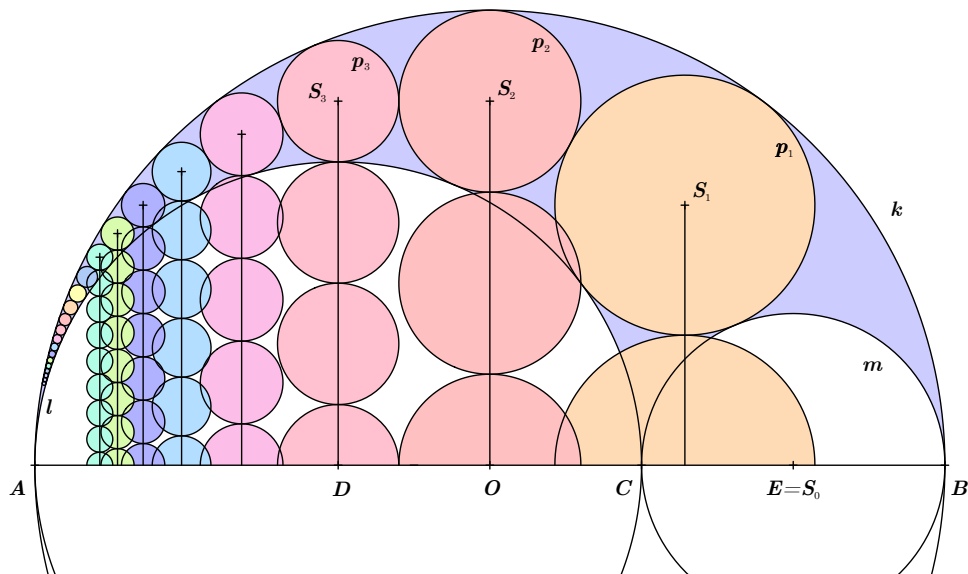
Obrázek 4.5: Konstrukce Pappova řetězce – 3. krok

4.3 Základní vlastnosti Pappova řetězce

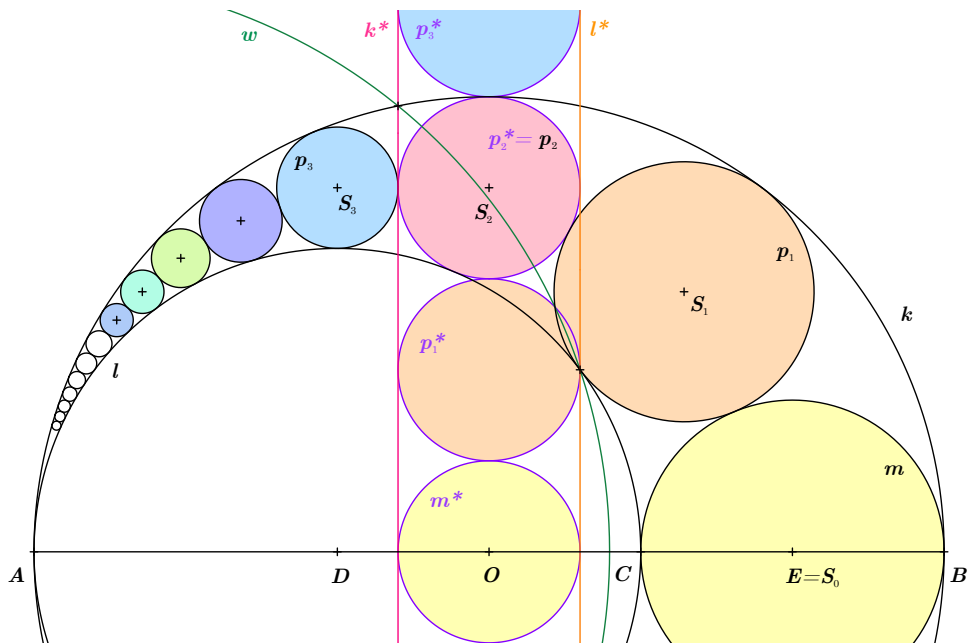
V závěrečné části 4. kapitoly vyslovíme dvě věty popisující vlastnosti kružnic Pappova řetězce příslušného arbelu. Důkaz Věty 9 byl zpracován na základě článku [14].

Věta 9. Označíme-li S_i , r_i a d_i po řadě střed, poloměr a průměr kružnice p_i , $i = 0, 1, \dots, n$, Pappova řetězce příslušného arbelu \mathcal{A}_{ABC} , potom je vzdálenost v_i bodu S_i od přímky AB rovna $2ir_i = id_i$ (viz obrázek 4.6).

Důkaz. Pro kružnici $p_0 = m$ je platnost vztahu zřejmá. Předpokládejme dále, že $i \neq 0$. V důkazu využijeme opět kruhovou inverzi. Uvažujme kružnici p_i Pappova řetězce příslušného arbelu \mathcal{A}_{ABC} a kruhovou inverzi, jejíž řídicí kružnice ω má střed A a takový poloměr, aby kružnice p_i a ω_i byly ortogonální, tj. aby tečny kružnic p_i a ω_i v každém z jejich dvou průsečíků byly k sobě kolmé. Při této volbě kruhové inverze je kružnice p_i samodružná. Obrazy k^* , l^* kružnic k , l (viz obrázek 4.7) jsou hraniční přímky rovinného pásu, kterých se dotýkají obrazy všech kružnic Pappova řetězce. Protože jsou tyto obrazy navzájem shodné a po dvou se dotýkající kružnice, přičemž $p_i = p_i^*$ a obraz p_0^* kružnice p_0 má střed na



Obrázek 4.6: Vzdálenost středů kružnic Pappova řetězce



Obrázek 4.7: Ilustrace důkazu Věty 9

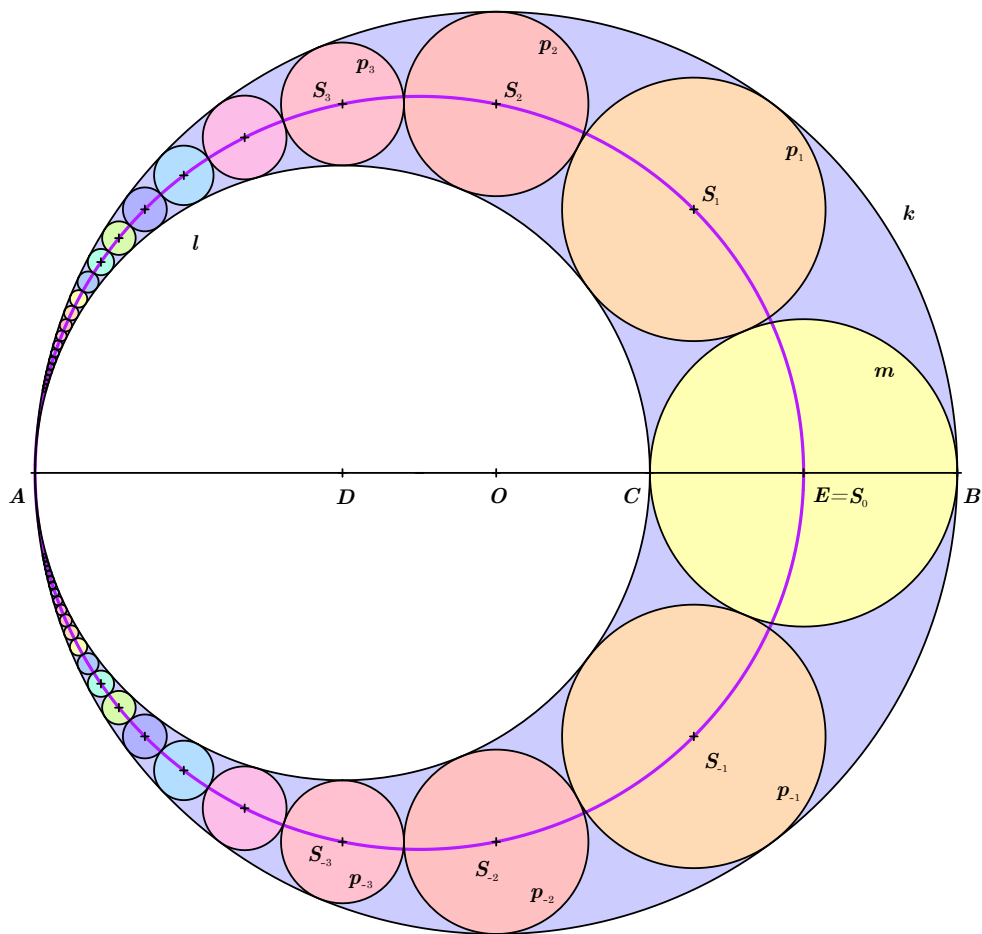
přímce AB , platí $v_i = 2ir_i = id_i$ (v_i je součet poloměrů kružnic p_0^* , p_i^* a dále průměrů kružnic p_1^* , p_2^* až p_{i-1}^* , tj. $v_i = r_i + r_i + (i-1)2r_i = 2ir_i = id_i$).

Uvědomme si, že vzhledem k požadované ortogonalitě kružnic ω_i a p_i musíme pro jednotlivé kružnice řetězce volit různé kruhové inverze, přesněji řečeno různé poloměry jejich řídicích kružnic ω_i . \square

Poznámka 7. Dodejme, že původní Pappův důkaz věty 9 je interpretován v česky psaném článku [12], podrobně je komentován také v anglicky psané monografii [15].

Další zajímavá vlastnost středů Pappova řetězce je popsána v následující, poslední větě, kterou uvedeme bez důkazu.

Věta 10. *Středů kružnic Pappova řetězce leží na elipse s hlavními vrcholy A, E a ohnisky D, O (viz obrázek 4.8).*



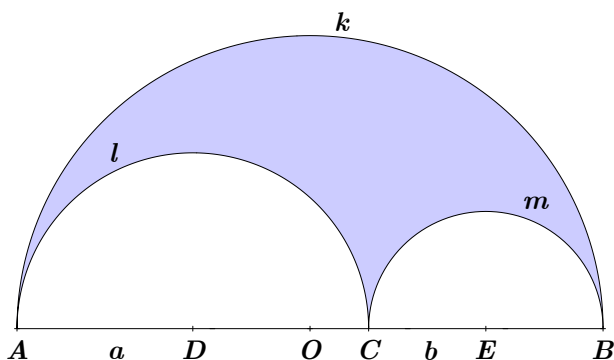
Obrázek 4.8: Středů kružnic Pappova řetězce

5. Příklady

Závěrečná kapitola přináší seznam několika příkladů ověřujících znalosti získané v předešlém textu. Příklady jsou pro lepší názornost doplněny obrázky, které se příliš neliší od obrázků z předchozích kapitol, přesto jsou zde uvedeny pro větší celistvost této kapitoly. Výsledky jsou zaznamenány v hranatých závorkách spolu s odkazy na jednotlivé stránky, na nichž lze nalézt nápovědu pro řešení příslušného příkladu.

Příklad 1. *Nechť je dán arbelos \mathcal{A}_{ABC} (viz obrázek 5.1). Určete jeho obsah v závislosti na poloměrech a , b půlkružnic l , m .*

[$ab\pi$, viz str. 6]



Obrázek 5.1: Ilustrace Příkladů 1, 2

Příklad 2. *Nechť je dán arbelos \mathcal{A}_{ABC} (viz obrázek 5.1). Určete jeho obsah, je-li $a = 6$ cm poloměr půlkružnice l a $b = \frac{2}{3}a$ poloměr půlkružnice m .*

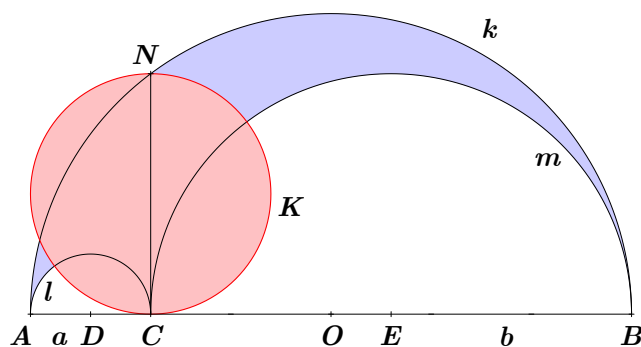
[24π cm², viz str. 6]

Příklad 3. *Nechť je dán arbelos \mathcal{A}_{ABC} (viz obrázek 5.2). Bod N je průsečík půlkružnice k a kolmice vedené bodem C na úsečku AB . Určete obsah kruhu K sestrojeného nad průměrem CN v závislosti na poloměrech a , b půlkružnic l , m .*

[$ab\pi$, viz str. 6]

Příklad 4. *Nechť je dán arbelos \mathcal{A}_{ABC} (viz obrázek 5.2). Bod N je průsečík půlkružnice k a kolmice vedené bodem C na úsečku AB . Určete poloměr a půlkružnice l , je-li $b = 10$ cm poloměr půlkružnice m a je-li obsah kruhu K sestrojeného nad průměrem CN roven 25π cm².*

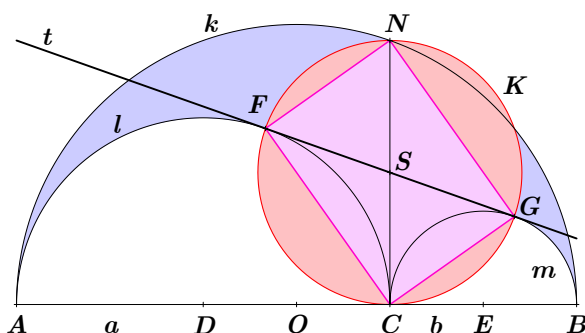
[2,5 cm, viz str. 6]



Obrázek 5.2: Ilustrace Příkladů 3, 4

Příklad 5. Necht' je dán arbelos \mathcal{A}_{ABC} (viz obrázek 5.3). Bod N je průsečík půlkružnice k a kolmice vedené bodem C na úsečku AB . Bod F , resp. G je průsečíkem hraniční kružnice kruhu K sestrojeného nad průměrem CN s půlkružnicí l , resp. m . Dokažte, že čtyřúhelník $CGNF$ je obdélník.

[viz str. 8]



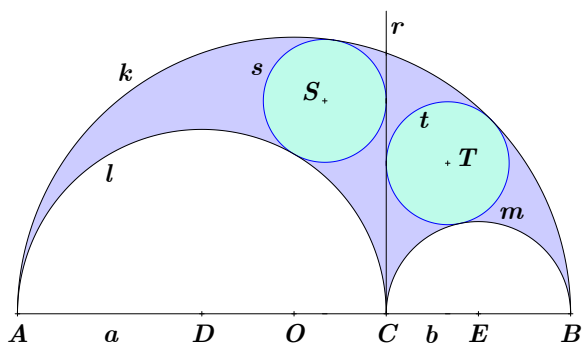
Obrázek 5.3: Ilustrace Příkladů 5, 6

Příklad 6. Necht' je dán arbelos \mathcal{A}_{ABC} (viz obrázek 5.3). Bod N je průsečík půlkružnice k a kolmice vedené bodem C na úsečku AB . Bod F , resp. G je průsečíkem hraniční kružnice kruhu K sestrojeného nad průměrem CN s půlkružnicí l , resp. m . Určete, v jakém případě je čtyřúhelník $CGNF$ čtverec.

[v případě shodnosti poloměrů a, b půlkružnic l, m , viz str. 7]

Příklad 7. Necht' je dán arbelos \mathcal{A}_{ABC} (viz obrázek 5.4) a Archimédova dvojčata s, t . Vyjádřete poloměry kružnic s, t v závislosti na poloměrech a, b půlkružnic l, m .

[oba poloměry: $\frac{ab}{a+b}$, viz str. 11–13]



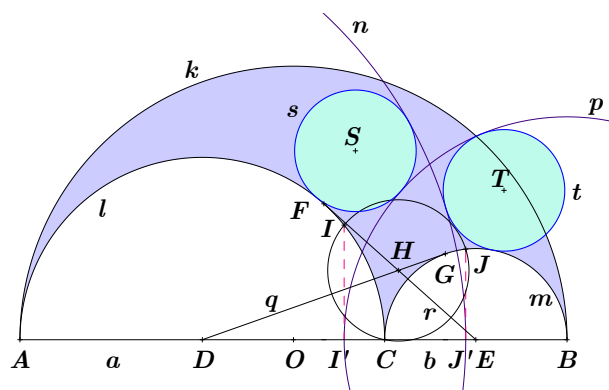
Obrázek 5.4: Ilustrace Příkladů 7, 8

Příklad 8. Necht je dán arbelos \mathcal{A}_{ABC} (viz obrázek 5.4) a Archimédova dvojčata s, t . Rozhodněte, kdy poloměry kružnic s, t nabývají nejvyšších hodnot.

[viz str. 10]

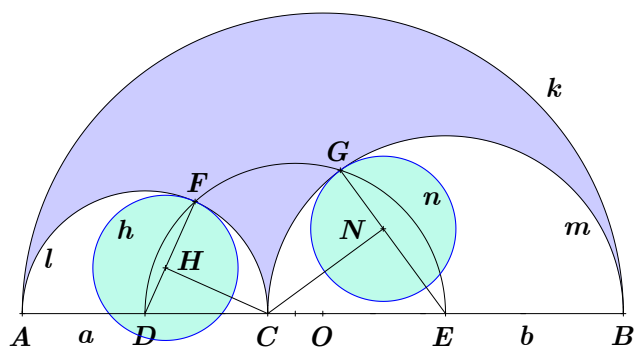
Příklad 9. Necht je dán arbelos \mathcal{A}_{ABC} (viz obrázek 5.5). Bod F , resp. G je bod dotyku tečny r , resp. q vedené z bodu E , resp. D k půlkružnici l , resp. m . Kružnice se středem v bodě H a poloměrem $|HC|$, kde H je průsečíkem tečen r a q , protíná půlkružnici m , resp. l v bodě J , resp. I . Bod J' , resp. I' je pravoúhlým průmětem bodu J , resp. I na úsečku AB . Kružnice n , resp. p je kružnice se středem A , resp. B a poloměrem $|AJ'|$, resp. $|BI'|$. Dokažte, že kružnice s , resp. t , která se dotýká kružnic n, p a půlkružnice l , resp. m je Archimédova kružnice.

[viz str. 16–20]



Obrázek 5.5: Ilustrace Příkladu 9

Příklad 10. Necht je dán arbelos \mathcal{A}_{ABC} (viz obrázek 5.6). Thaletova kružnice sestavená nad průměrem DE protne půlkružnici l a m v bodech F a G . Bod H , resp. N je patou kolmice vedené z bodu C na úsečku DF , resp. GE . Vypočítejte obvod kružnice h , resp. n se středem v bodě H , resp. N a poloměrem $|HF|$, resp. $|NG|$, jsou-li $a = 10$ cm, $b = 15$ cm poloměry půlkružnic l, m .

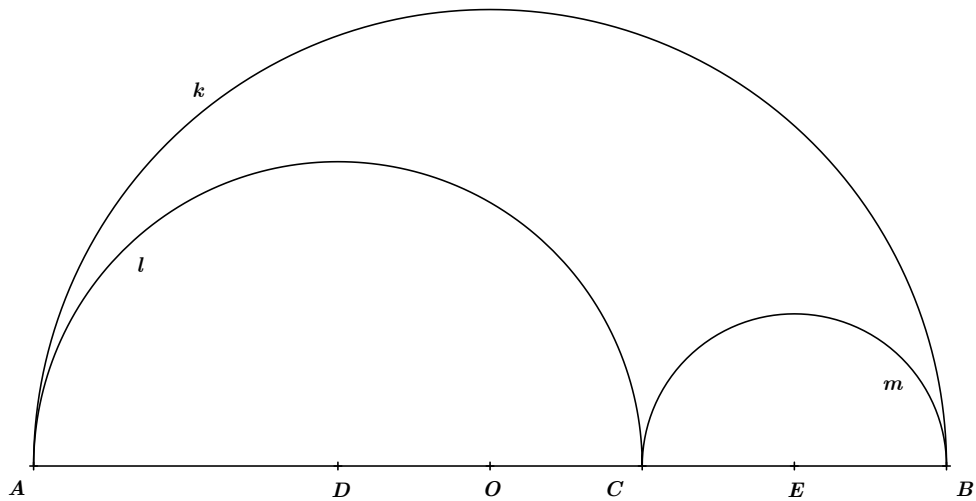


Obrázek 5.6: Ilustrace Příkladu 10

[12π cm, viz str. 20–21]

Příklad 11. Necht' je dán arbelos \mathcal{A}_{ABC} (viz obrázek 5.7). Sestrojte kružnici, která se dotýká půlkružnic k, l a m .

[viz str. 27–29]



Obrázek 5.7: Ilustrace Příkladu 11

Závěr

Problematika arbelu, resp. příbuzných témat (Archimédovy kružnice apod.) není touto bakalářskou prací zdaleka vyčerpána. Existuje mnoho dalších zajímavých vět a konstrukcí, které však svou složitostí přesahují úroveň znalostí, které jsou po čtenáři požadovány. Jisté odborné články dokonce rozšiřují definici arbelu, který považují za prostorový útvar a dále ho zkoumají. Pochopení velkého množství vět například vyžaduje znalost matematické analýzy. Přestože práce na relativně malém rozsahu obsahuje pasáže o řadě geometrických útvarů přidružených arbelu, jedná se opět pouze o část pojmů, kterými se lze zabývat. Zájemcům o rozšíření obzorů doporučujeme například následující literaturu: [4], [16], [17].

Seznam použité literatury

- [1] Edmund F. Robertson, John J. O'Connor. Archimedes of Syracuse. *MacTutor History of Mathematics*, <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Archimedes/>.
- [2] Claudi Alsina, Roger B. Nelsen. *Charming proofs: a journey into elegant mathematics*. The Mathematical Association of America, Washington, 2010.
- [3] Thomas Little Heath et al. *The works of Archimedes*. Dover Publications, Mineola, New York, 2002.
- [4] Floor M. Van Lamoen. Online catalogue of Archimedean circles. <http://home.kpn.nl/lamoen/wiskunde/Arbelos/Catalogue.htm>.
- [5] Frank Power. Some more Archimedean circles in the arbelos. *Forum Geometricorum*, 5:133–134, 2005.
- [6] Floor M. Van Lamoen. Some Powerian pairs in the arbelos. *Forum Geometricorum*, 7:111–113, 2007.
- [7] Alexander Bogomolny. <https://www.cut-the-knot.org/curriculum/geometry/archimedesquadruplets.shtml>.
- [8] Hiroshi Okumura, Masayuki Watanabe. The Archimedean circles of Schoch and Woo. *Forum Geometricorum*, 4:27–34, 2004.
- [9] Le Viet An, Emmanuel A. J. Garcia. Some Archimedean circles in an arbelos. *Forum Geometricorum*, 19:53–58, 2019.
- [10] Emil Calda. Stewartova věta a příčky v trojúhelníku. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, 86(2):1–5, 2011.
- [11] Edmund F. Robertson, John J. O'Connor. Pappus of Alexandria. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pappus/>.
- [12] Pavel Leischner. Polibky kružnic: Pappos z Alexandrie. *MATEMATIKA–FYZIKA–INFORMATIKA*, 25(1):1–11, 2016.
- [13] Naděžda Guseva, Anastasia Ivakina, Marie Chodorová. Kruhová inverze a její aplikace. *MATEMATIKA–FYZIKA–INFORMATIKA*, 25(2):84–89, 2016.
- [14] Pavel Leischner. Polibky kružnic: Archimedes. *MATEMATIKA–FYZIKA–INFORMATIKA*, 24(2):87–94, 2015.
- [15] Heike Sefrin-Weis. *Pappus of Alexandria: Book 4 of the Collection: Edited With Translation and Commentary by Heike Sefrin-Weis*. Springer Science & Business Media, London, 2010.
- [16] Dao Thanh Oai. Two pairs of Archimedean circles in the arbelos. *Forum Geometricorum*, 14:201–202, 2014.
- [17] Antonio M. Oller-Marcén. Archimedes' arbelos to the n -th dimension. *Forum Geometricorum*, 16:51–56, 2016.

Seznam obrázků

1.1	Ševcovský nůž	3
1.2	Arbelos a jeho značení	4
1.3	Ilustrace Věty 1	4
1.4	Ilustrace důkazu Věty 1	5
1.5	Ilustrace důkazu Věty 1 – obsahy útvarů	5
1.6	Ilustrace Věty 2 ($a \neq b$)	7
1.7	Ilustrace Věty 2 ($a = b$)	7
1.8	Ilustrace důkazu Věty 2	8
2.1	Archimédova dvojčata	9
2.2	Archimédova dvojčata ($a = b$)	10
2.3	Archimédova dvojčata (výrazný rozdíl poloměrů a, b)	10
2.4	Ilustrace důkazu Věty 3	11
3.1	Archimédova čtyřčata	15
3.2	Ilustrace Věty 5	16
3.3	Ilustrace Věty 6	17
3.4	Ilustrace důkazu Věty 6	17
3.5	Ilustrace důkazu Věty 6, aplikace Stewartovy věty.	19
3.6	Ilustrace Věty 7	21
3.7	Ilustrace Věty 8	22
3.8	Ilustrace důkazu Věty 8	23
4.1	Pappův řetězec	25
4.2	Pappův řetězec příslušný arbelu	26
4.3	Konstrukce Pappova řetězce – 1. krok	27
4.4	Konstrukce Pappova řetězce – 2. krok	28
4.5	Konstrukce Pappova řetězce – 3. krok	29
4.6	Vzdálenost středů kružnic Pappova řetězce	30
4.7	Ilustrace důkazu Věty 9	30
4.8	Středy kružnic Pappova řetězce	31
5.1	Ilustrace Příkladů 1, 2	32
5.2	Ilustrace Příkladů 3, 4	33
5.3	Ilustrace Příkladů 5, 6	33
5.4	Ilustrace Příkladů 7, 8	34
5.5	Ilustrace Příkladu 9	34
5.6	Ilustrace Příkladu 10	35
5.7	Ilustrace Příkladu 11	35