



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA**  
Univerzita Karlova

## **DIPLOMOVÁ PRÁCE**

Bc. Martina Chamrová

# **Kyvadlo nejen z pohledu střední školy**

Katedra didaktiky fyziky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Leoš Dvořák, CSc.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Učitelství fyziky - Učitelství  
matematiky

Praha 2021

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 22. července 2021

Martina Chamrová

Na tomto místě bych ráda poděkovala vedoucímu diplomové práce, doc. RNDr. Leoši Dvořákovi, CSc., za veškeré rady, komentáře a konstruktivní kritiku během psaní textu práce, a především obrovskou shovívavost a trpělivost, kterou mi projevil. Dále bych ráda poděkovala Mgr. Matěji Rystonovi, Ing. Davidovi Benešovi a svému tátovi Ing. Michalovi Chamrovi za pomoc při výrobě modelů kyvadel. Díky patří i mé rodině a všem blízkým, kteří mě během celého studia vytrvale podporovali.

Název práce: Kyvadlo nejen z pohledu střední školy

Autor: Bc. Martina Chamrová

Katedra: Katedra didaktiky fyziky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Leoš Dvořák, CSc., Katedra didaktiky fyziky

Abstrakt: Diplomová práce je rozdělena do pěti kapitol. První kapitola je věnována historii a využití kyvadel se zaměřením na vývoj měření času a tíhového zrychlení. Druhá kapitola se zabývá pojetím tématu *kyvadlo* z teoretického hlediska na všech úrovních českého vzdělávacího systému, včetně rešerše učebnic, sbírek úloh a vědeckých článků. Ve třetí kapitole jsou prezentovány výsledky rešerše zdrojů inspirace jednoduchých reálných pokusů, appletů, simulací i laboratorních prací. Čtvrtá kapitola je zaměřena na teoretické pozadí čtyř vybraných modelů kyvadel a poslední kapitola je věnována jednoduchým experimentům s těmito vybranými modely. Ke každému z pokusů je na příloženém DVD dostupný videozáznam. Práce je vhodná pro všechny vyučující fyziky, stejně jako pro vysokoškolské studenty učitelství fyziky. Může však sloužit i jako motivace pro žáky výběrových seminářů fyziky na středních školách.

Klíčová slova: výuka fyziky, matematické kyvadlo, fyzické kyvadlo, sférické kyvadlo, Foucaultovo kyvadlo, Huygensovo kyvadlo, Machovo kyvadlo, Maxwellovo kyvadlo

Title: Pendulum not only from the high school point of view

Author: Bc. Martina Chamrová

Department: Department of Physics Education

Supervisor: doc. RNDr. Leoš Dvořák, CSc., Department of Physics Education

Abstract: The diploma thesis is divided into five chapters. The first chapter is devoted to the history and usage of pendulums with focus on the development of measurement of time and gravitational acceleration. The second chapter deals with the concept of pendulum from a theoretical perspective at all levels of the Czech educational system, including a research in textbooks, collection of questions and problems, and scientific articles. In the third chapter, the results of the research of sources of inspiration for simple real-life experiments, applets and simulations, and laboratory work are presented. The fourth chapter is focused on the theoretical background of the four selected models of pendulums, and the last chapter is devoted to simple experiments with these selected models. For each experiment, a videorecording is available on the enclosed DVD. This thesis is suitable for all physics teachers, as well as for students of teaching physics. However, it may also serve as a motivation for students in optional courses of high school physics.

Keywords: physics education, simple pendulum, compound pendulum, spherical pendulum, Foucault pendulum, Huygens pendulum, Mach pendulum, Maxwell pendulum

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>3</b>
<b>1 Historie kyvadel a jejich využití</b>	<b>4</b>
1.1 Měření času . . . . .	5
1.2 Měření tíhového zrychlení . . . . .	8
<b>2 Zpracování tématu na různých úrovních vzdělávacího systému</b>	<b>11</b>
2.1 Základní školy a víceletá gymnázia . . . . .	11
2.2 Střední školy a gymnázia . . . . .	11
2.2.1 Odvození pohybové rovnice rovinného matematického kyvadla na úrovni SŠ . . . . .	12
2.2.2 Úlohy vhodné k procvičování a inspirace z fyzikálních soutěží . . . . .	15
2.3 Vysoké školy . . . . .	17
2.3.1 Rovinné matematické kyvadlo . . . . .	17
2.3.2 Fyzické kyvadlo . . . . .	31
2.3.3 Sférické kyvadlo . . . . .	33
2.3.4 Sbírky úloh a příkladů pro studenty vysokých škol . . . . .	38
<b>3 Základní experimenty</b>	<b>40</b>
3.1 Reálné demonstrační experimenty a pokusy s jednoduchými pomůckami . . . . .	40
3.2 Applety, animace a vzdálené experimenty . . . . .	44
3.2.1 Applety a animace . . . . .	45
3.2.2 GeoGebra . . . . .	50
3.2.3 Vzdálené experimenty . . . . .	53
3.3 Laboratorní práce . . . . .	53
3.3.1 Základní a střední školy . . . . .	54
3.3.2 Vysokoškolská fyzikální praktika . . . . .	56
<b>4 Teoretické pozadí vybraných modelů kyvadel</b>	<b>57</b>
4.1 Foucaultovo kyvadlo . . . . .	57
4.2 Huygensovo (cykloidální) kyvadlo . . . . .	62
4.3 Machovo kyvadlo . . . . .	67
4.4 Maxwelllovo kyvadlo . . . . .	70
<b>5 Jednoduché pokusy a měření s modely vybraných kyvadel</b>	<b>73</b>
5.1 Foucaultovo kyvadlo . . . . .	73
5.2 Huygensovo (cykloidální) kyvadlo . . . . .	76
5.3 Machovo kyvadlo . . . . .	79
5.3.1 Model z kartonu . . . . .	79
5.3.2 Jednoduchý model . . . . .	82
5.4 Maxwelllovo kyvadlo . . . . .	83
<b>Závěr</b>	<b>89</b>
<b>Seznam použité literatury</b>	<b>91</b>

<b>Seznam obrázků</b>	<b>111</b>
<b>Seznam tabulek</b>	<b>113</b>
<b>A Přílohy</b>	<b>114</b>
A.1 Naměřené hodnoty a zpracování výsledků uvedených a diskutovaných v kapitole 5.2 Huygensovo (cykloidální) kyvadlo . . . . .	114
A.2 Naměřené hodnoty a zpracování výsledků uvedených a diskutovaných v kapitole 5.3 Machovo kyvadlo . . . . .	115
A.3 Naměřené hodnoty a zpracování výsledků uvedených a diskutovaných v kapitole 5.4 Maxwellovo kyvadlo . . . . .	116
<b>B Přílohy na DVD</b>	<b>123</b>
B.1 Videozáznamy k pokusům prezentovaným v kapitole 5.1 Foucaultovo kyvadlo . . . . .	123
B.2 Videozáznamy k pokusům prezentovaným v kapitole 5.2 Huygensovo (cykloidální) kyvadlo . . . . .	124
B.3 Videozáznamy k pokusům prezentovaným v kapitole 5.3 Machovo kyvadlo . . . . .	125
B.4 Videozáznamy k pokusům prezentovaným v kapitole 5.4 Maxwellovo kyvadlo . . . . .	126

# Úvod

Ačkoliv je téma *kyvadlo* všeobecně velmi dobře známé, podrobně popsané a diskutované, myslím si, že mu nebývá (především na úrovni základních a středních škol) věnováno tolik prostoru, kolik by si zasloužilo. Kyvadlu nelze odeprít jeho historický a hlavně didaktický význam (jedná se jednoduchý a snadno realizovatelný příklad mechanického oscilátoru s přibližně harmonickým průběhem). Na druhou stranu uznávám, že toto by bylo možné tvrdit o spoustě dalších zajímavých fyzikálních témat, na která také nezbyvá ve výuce příliš mnoho času (např. *neinerciální vztažné soustavy*, *moment hybnosti*, *Dopplerův efekt*, atd.).

Vzhledem k tomu, že historie kyvadel a jejich využití je poměrně bohatá, je jí věnovaná první kapitola, kde se zaměřuji především na vývoj měření času a tíhového zrychlení s využitím různých modelů kyvadel.

Jedním z cílů této diplomové práce bylo seznámit čtenáře s pojetím tématu *kyvadlo* na všech úrovních českého vzdělávacího systému. V druhé kapitole proto prezentuji výsledky rešerše českých učebnic, sbírek úloh a českých i zahraničních vědeckých prací a článků, ve kterých se můžeme s tématem *kyvadlo* setkat. Třetí kapitola je pak věnována rešerši zdrojů inspirace jednoduchých reálných experimentů, simulací a appletů, laboratorních prací a dalších žákovských měření.

V celku vzato si myslím, že na úrovni základních i středních škol je z tématu možné „vytěžit“ mnohem více než pouhé vztahy pro periodu a frekvenci vlastního kmitání, např. s využitím tzv. *badatelsky orientované* výuky.

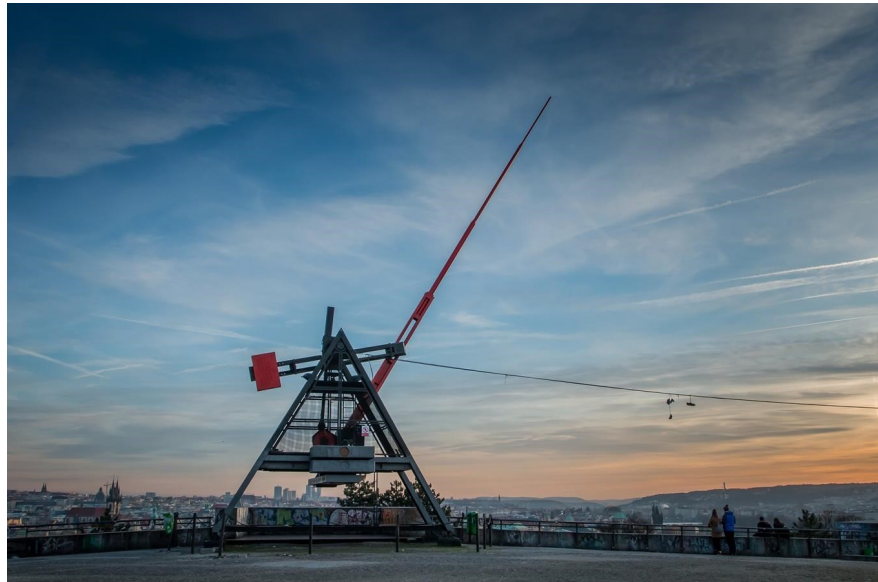
Na úrovni vysokých škol pak může sloužit kyvadlo (resp. matematické kyvadlo) jako perfektní příklad, na kterém je možné demonstrovat různé fyzikální přístupy a pokročilé matematické aparáty. Navíc není nutné se omezovat jen na ideální podmínky a je možné studovat pohyb i v případě obecné výchylky, resp. s tlumením či buzením.

Druhá polovina práce je věnována rozboru čtyř vybraných modelů kyvadel. Jedná se o Foucaultovo, Huygensovo (cykloidální), Machovo a Maxwellovo kyvadlo, z nichž některá sehrála i významnou historickou roli. Ve čtvrté kapitole se zaměřuji na teoretický rozbor daných situací (pohybové rovnice, vztahy pro periodu atd.). Ačkoliv v této části vycházím z řady českých i zahraničních pramenů (prací, učebnic a článků), vždy se snažím prezentovat dostatečně podrobné a srozumitelné odvození. V případě Machova a Maxwellova kyvadla nabízím odvození pomocí Lagrangeových rovnic 2. druhu, která se v literatuře běžně neukazují.

V poslední kapitole pak prezentuji poměrně jednoduché modely vybraných kyvadel vyrobené z běžně dostupných materiálů, které mohou posloužit k demonstraci i hlubšímu studiu pohybu zkoumaných kyvadel. Cílem bylo sestavit takové pomůcky, které by si mohli sestavit sami průměrně zruční vyučující (případně šikovní studenti, např. ve výběrových fyzikálních seminářích). S modely byla provedena řada pokusů a výsledky měření byly porovnávány s teoretickými předpověďmi, které jsou zde podrobně popsány a videozáznamy z pokusů je možné nalézt na přiloženém DVD. (DVD bude také k dispozici na Katedře didaktiky fyziky MFF UK v Praze.)

Práce je vhodná pro všechny vyučující fyziky, stejně jako pro vysokoškolské studenty učitelství fyziky. Může však sloužit i jako motivace pro žáky výběrových seminářů fyziky na středních školách.

# 1. Historie kyvadel a jejich využití



Obrázek 1.1: Pražský metronom na Letné [1]

Kyvadla nás obklopují v běžném životě ve světě všude okolo nás, aniž bychom si to vůbec uvědomovali. Jako kyvadlo totiž můžeme označit jak jednodušší objekty, jako jsou například pohupující se lampy zavěšené ze stropu, tak i složitější konstrukce, mezi které se řadí i metronomy (podobné zařízení se nachází například nedaleko Letenského náměstí v Praze, viz obrázek [1.1]). Zmínit můžeme dokonce i použití ve světě esoteriky a hypnózy [2].

První zmínky o vědeckých měřeních s kyvadly pochází ze starověké Číny, kde sloužila mimo jiné jako seismometr [3]. K podobným měřením se používají i v současnosti, ačkoliv dnešní zařízení jsou mnohem sofistikovanější a těm starověkým se moc nepodobají (viz např. [4]).

Dalším, dnes již spíše historickým, využitím může být tzv. *balistické kyvadlo*, pomocí kterého lze určit hybnost, rychlost či kinetickou energii střely (z pistole nebo pušky) [5]. (Mimoходом, rozbor pohybu tohoto kyvadla je výborným příkladem na procvičení zákonů zachování mechanické energie a hybnosti, proto se o něm zmíním znovu v sekcích věnovaných středoškolským úlohám [2.2.2] i experimentům [3.1].)

Důležitou roli kyvadlo rovněž sehrálo při důkazu rotace Země, který předvedl v roce 1851 Léon Foucault [6]. (Tomuto pokusu bude věnována část [4.1].)

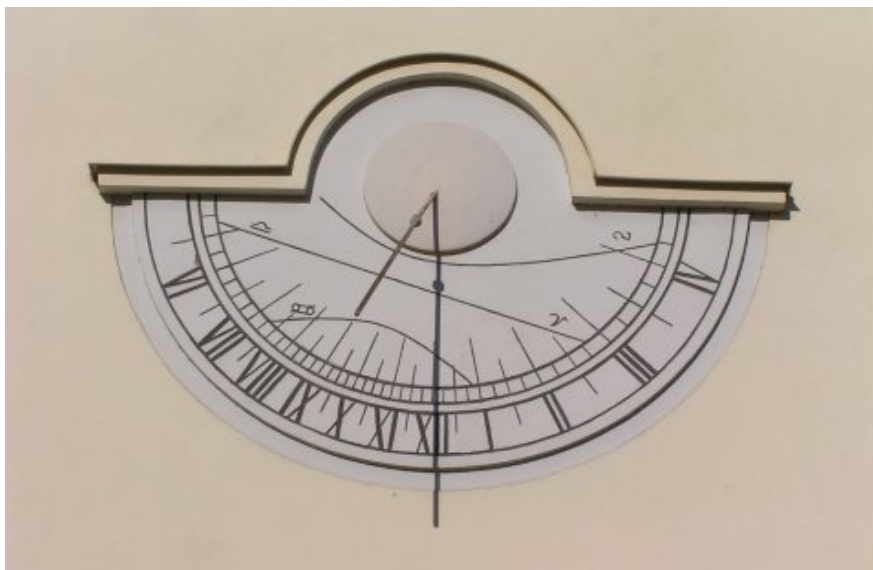
Největší význam však kyvadlo mělo v historii měření dvou (nejen fyzikálně) důležitých veličin, a to času a gravitačního (resp. tíhového) zrychlení.



## 1.1 Měření času

Čas lidé měřili od nepaměti a využívali k tomu vše, co měli k dispozici (kapalinové hodiny, ohňové knotové či doutnákové hodiny, pískové přesýpací hodiny a další). Významné postavení z hlediska historie však mělo využití slunečního svitu [7].

Důkazem popularity slunečních hodin může být fakt, že je lze vidat a obdivovat i dnes, ačkoliv již slouží spíše jako dekorace (obrázek 1.2). Velikou nevýhodou těchto hodin je jejich závislost na svitu slunce, tedy na denní době a počasí, ale i na zeměpisné poloze (především zeměpisné šířce), jinak řečeno, totožné sluneční hodiny nelze obecně použít na více místech na světě.



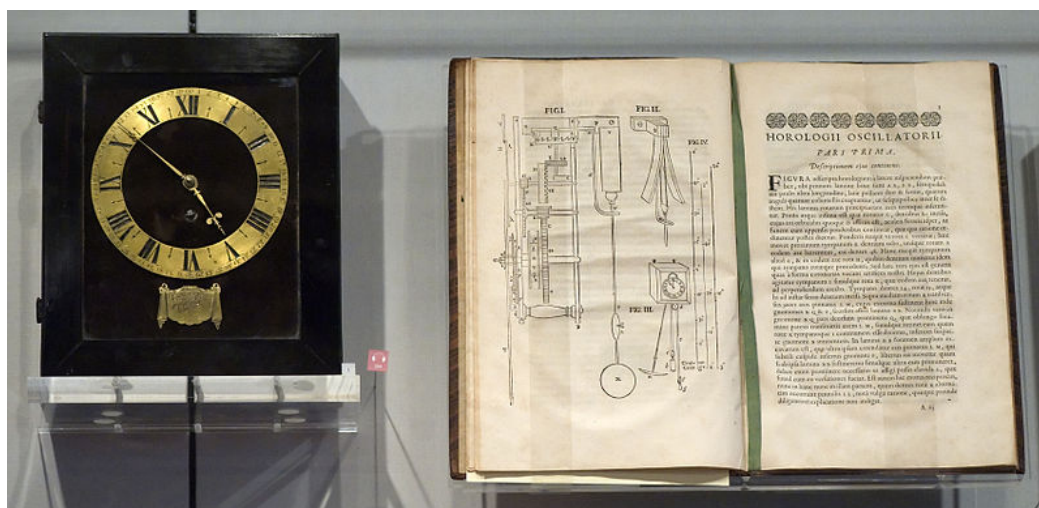
Obrázek 1.2: Sluneční hodiny v Dobřichovicích [8]

Důležité je podotknout i fakt, že sluneční hodiny měří tzv. *pravý sluneční čas*, který odpovídá skutečnému nerovnoměrnému pohybu Slunce po obloze a liší se od času měřeného mechanickými hodinami (ten přibližně odpovídá tzv. *střednímu slunečnímu času*, který plyne rovnoměrně) [9]. Tento rozdíl se v průběhu roku mění a pohybuje se přibližně mezi hodnotami +15 min a −18 min. Nesmíme ani zapomenout, že na území většiny Evropy a Severní Ameriky se stále používá letní čas.

Ačkoliv se první mechanické hodiny objevily již v 13. století [10], k velkému převratu ve způsobu měření času a především k jeho přesnějšímu určení pak došlo v době působení významných matematiků a fyziků jako byli Johannes Kepler, Galileo Galilei či Christiaan Huygens, kdy se objevily první kyvadlové hodiny [11, 12].

Jedním z prvních, kdo systematicky zkoumali vlastnosti kyvadel, byl na přelomu 16. a 17. století právě Galileo Galilei [11]. Galilei během svého zkoumání objevil jednu z nejdůležitějších vlastností kyvadel z hlediska měření času, tzv. *isochronismus*, tedy že perioda kmitů je víceméně nezávislá na počáteční výchylce kyvadla. Nutno však podotknout, že toto platí jen pro malé výchylky, v případě větších amplitud se perioda prodlužuje (více se rozboru kyvadla s většími výchylkami budu věnovat v části 2.3.1). Galilei také zjistil, že perioda pohybu kyvadla není závislá na hmotnosti závaží a je úměrná odmocnině z délky závěsu.

Nejvíce k vývoji kyvadlových hodin však přispěl nizozemský fyzik a matematik Christiaan Huygens, který v roce 1656 sestrojil první kyvadlové hodiny. V roce 1673 pak publikoval své nejvýznamnější dílo *Horologium oscillatorium sive motu pendulorum* [13] (obrázek 1.3), kde shrnul teoretické vlastnosti kyvadla a objevil své kyvadlové hodiny. Kromě níže diskutovaného modelu cykloidálního kyvadla rovněž diskutoval a ukázal, jak určit hmotný střed fyzického kyvadla a jaká je délka matematického kyvadla, které kmitá se stejnou periodou jako dané fyzické kyvadlo [14]. S tím souvisí i jeho práce zabývající se určením periody libovolného fyzického kyvadla.



Obrázek 1.3: Huygensovy kyvadlové hodiny a jeho nejslavnější dílo *Horologium oscillatorium* [15]

Huygens ve své práci však především rozvinul myšlenky Marina Mersenna a Reného Descarta, kteří tvrdili, že pohyb kyvadla není obecně isochronní, přesněji řečeno je přibližně isochronní jen pro malé amplitudy. Zároveň opravil i další Galileův omyl, když dokázal, že *tautochronou* (resp. *isochronou*, křivkou, na které se po ní pohybující hmotné body v homogenním tíhovém poli dostanou do jejího nejnižšího bodu ve stejný okamžik nezávisle na počáteční poloze, jinými slovy, čas, za který se bod dostane do nejnižšího bodu je nezávislý na počáteční poloze) není kružnice ale cykloida [16]. (Více se problému *isochronnosti* a cykloidálního kyvadla budu věnovat v části 4.2.)

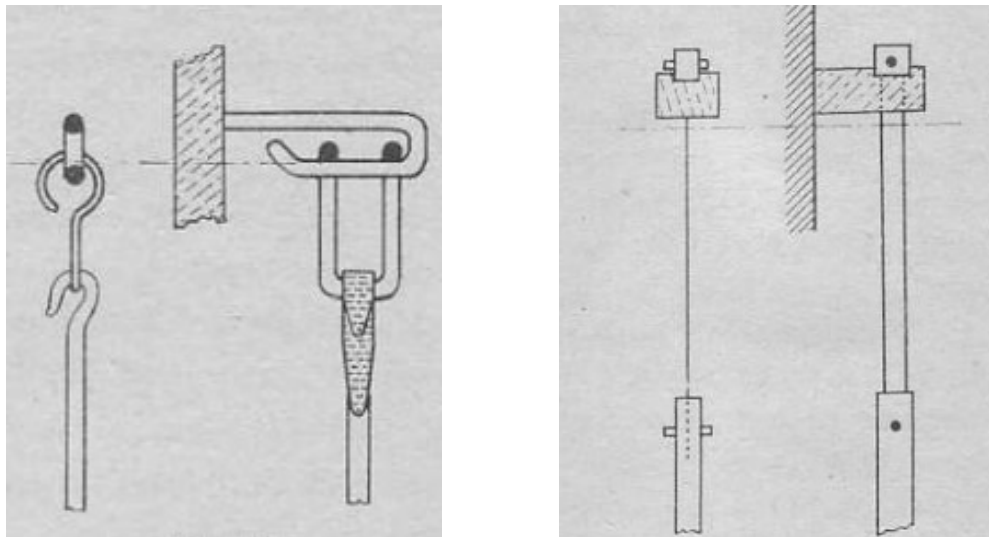
Tím ukázal, že hlavním zdrojem nepřesnosti tehdejších hodin byla právě velká maximální výchylka, která se může kvůli tření a odporu vzduchu během chodu hodin měnit (není-li pohyb kyvadla nijak buzen). Sám pak přišel s návrhem hodin s cykloidálním kyvadlem (kyvadlem se zarážkami ve tvaru cykloidy, které pohyb usměrňovaly) [13].

Nutno však poznamenat, že při konstrukci hodin s cykloidálním kyvadlem se objevily nové problémy (mj. náročná výroba zarážek, větší tření tyče při pohybu okolo cykloidání zarážky, vibrace mezi kyvadlem, regulátorem, krokem a ozubenými převodními kolečky při větších amplitudách atd.). I proto se mnohem praktičtější řešení ukázalo prosté omezení maximální výchylky na hodnotu okolo  $5^\circ$  (i sám Huygens toto řešení navrhl, protože malé kružnicové oblouky se od těch cykloidálních příliš neliší) [17].

Fyzické kyvadlo, které se používá v kyvadlových hodinách, se skládá ze závěsu,

tyče a závaží ve tvaru čočky (kvůli nižšímu odporu vzduchu). Z faktorů, které ovlivňují přesnost chodu hodin, je pravděpodobně nejdůležitější tření v závěsu kyvadla a závislost délky tyče na teplotě. Nejprve se podívejme na několik typů závěsu, které se používaly (či stále používají) [18, 12].

U prvních kyvadlových hodin byla tyč zavěšena na kolébce z drátu (smyčce z vlákna, viz obrázek 1.4a). Tento závěs lze nalézt například u hodin navržených Huygensem. Výhodou tohoto závěsu bylo poměrně malé tření, na druhou stranu však byl vhodný jen pro lehká kyvadla a také docházelo k velmi rychlému opotřebení (jak smyček tak i závěsného drátu).



(a) Smyčkový závěs

(b) Pružinový závěs

Obrázek 1.4: Příklady různých závěsu používaných v kyvadlových hodinách [18]

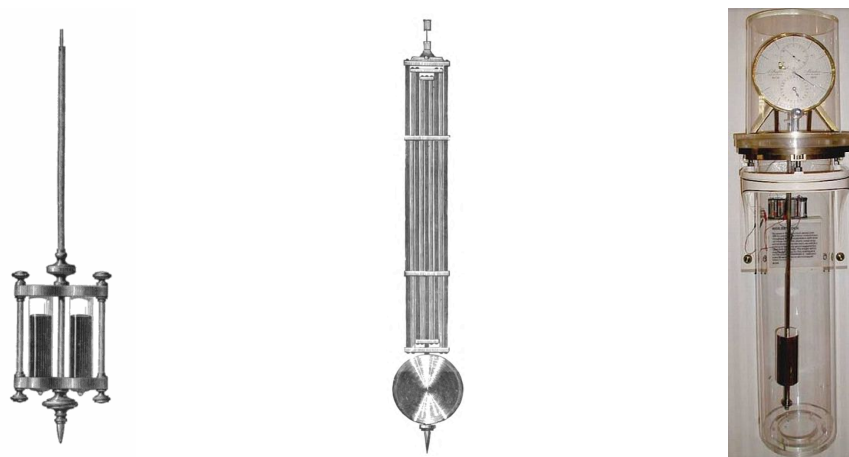
Pro těžší kyvadla se používala konstrukce zavěšení na břitech (původní idea pochází od Galilea). I v tomto případě však docházelo k rychlému opotřebení a otupení břitů.

Nejrozšířenější variantou závěsu, která se používá i dnes, je pak pružinový závěs vynalezený Williamem Clementem v roce 1680 (obrázek 1.4b). Mezi dva páry rovných plechů jsou zanáčovány dva ocelové pásky (sloužící jako pružinový kloub). Jeden z páru plechů slouží k uchycení závěsu, druhý k ukotvení tyče kyvadla. Výhodou tohoto závěsu je, že jej lze vyrobit i v poměrně malých rozměrech, a tedy umožňuje sestavit malé kyvadlové hodiny. Nevýhodou je, že při svém pohybu vyvíjí pružinový kloub určitý směrový moment a tím ovlivňuje pohyb tyče. Například, kyvadlo přestává kmitat v rovině, ale vykonává mírně kruhový pohyb [18].

Druhým problémem, se kterým se snažili výrobci (a další vynálezci) hodin vypořádat, je fakt, že délka tyče kyvadla se vlivem teploty mění. To znamená, že se mění poloha těžiště kyvadla, a tím i doba kyvu. První pokusy spočívaly v nahrazení kovové tyče dřevěnou (dřevo má nízkou teplotní roztažnost) nebo tyčemi z břidlice a skla [19].

V roce 1721 sestrojil George Graham rtuťové kyvadlo, kde byla místo čočky ocelová trubice naplněná rtutí (obrázek 1.5a) [19]. Při zvýšení teploty se sice tyč kyvadla prodloužila, ale stejně tak se zvýšila hladina rtuti v trubici (opačným

směrem), a tím se docílilo toho, že poloha těžiště se víceméně nezměnila. Nevýhodou byl fakt, že v případě snížení teploty rtuť na tuto změnu reagovala mnohem pomaleji.



(a) Rtuťové kyvadlo  
(Graham)

(b) Roštové kyvadlo  
(Harrison)

(c) Invarové kyvadlo  
(Guillaume)

Obrázek 1.5: Příklady různých kyvadel užívaných v kyvadlových hodinách [20]

V roce 1726 pak přišel John Harrison s roštovým kyvadlem (obrázek 1.5b) [19], kde byla čočka zavěšená na systému tyčí ze dvou různých kovů s vhodnými koeficienty tepelné roztažnosti tak, aby se jejich vzájemná tepelná roztažnost kompenzovala.

Poslední významné období vývoje kyvadlových hodin přišlo v roce 1891, kdy Charles Guillaume sestrojil invarové kyvadlo (slitina železa a niklu) [19]. Materiál, ze kterého byla tyč vyrobena, měl nepatrnou tepelnou roztažnost oproti materiálu čočky. Čočka byla opřena o stavící matku, takže se mohla roztahovat pouze směrem nahoru a kompenzovat tak nepatrnou tepelnou roztažnost tyče (obr. 1.5c).

V dnešních kyvadlových hodinách se k regulaci pozice těžiště používá posuvné závažíčko [18].

Před zavedením kyvadlo do časomíry byla nepřesnost určení času okolo 1 000 s za den [21]. Po jeho zavedení okolo roku 1 700 byla stanovená nepřesnost méně než 10 s za den. Postupně se však přesnost kyvadlových hodin zlepšovala a v polovině 20. století byla nepřesnost nejlepších kyvadlových hodin okolo 0,002 s za den [22]. Jen pro srovnání relativní nepřesnost dnešních nejlepších atomových hodin (využívající přeskoky elektronů atomu cesia mezi určitým energetickými hladinami) je na úrovni  $1,4 \cdot 10^{-18} - 8 \cdot 10^{-18}$  [23, 24].

## 1.2 Měření tíhového zrychlení

Neméně významnou fyzikální veličinou je tíhové zrychlení, jehož působení všichni neustále pocítujeme. Když hovoříme o velikosti tíhového zrychlení, většinou hovoříme o tzv. *normálovém tíhovém zrychlení*, což je dohodnutá střední hodnota tíhového zrychlení ( $g = 9,8065 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ) [25]. Ve skutečnosti však tíhové zrychlení není konstanta a závisí na zeměpisné poloze, nadmořské výšce i ne-

rovnoměrném rozložení hmoty pod povrchem Země. Navíc musíme být pozorní a rozlišovat pojmy gravitační a tíhové zrychlení, které bere v potaz ještě odstředivé zrychlení dané rotací Země [26].

Studiem tíhového pole Země se zabývá tzv. *gravimetrie* a k měření se využívají především dva typy kyvadel [12]. Prvním typem je tzv. *matematické kyvadlo*, což je malé hmotné těleso zavěšené na pevném vlákně zanedbatelné hmotnosti a konstantní délky. Zde platí poměrně jednoduchý vztah pro periodu kmitů, ze kterého lze určit velikost tíhového zrychlení ( $g = 4\pi^2 l/T^2$ ), kde  $l$  značí délku závěsu kyvadla. (Rozboru pohybu matematického kyvadla se budu podrobněji věnovat v části 2.3.1. Navíc, vzhledem k tomu, že určení tíhového zrychlení z periody matematického kyvadla není obtížné, často se do výuky zařazuje v rámci žákovských měření. Proto se jím budu zabývat i v sekci 3.3 věnované laboratorním pracím.)

Druhým typem je tzv. *reverzní kyvadlo*, které bylo poprvé k tomuto účelu použito v první polovině 19. století Henry Katerem [27]. Jedná se o dlouhou tyč se dvěma břity obrácenými břity k sobě. Po tyči se mohou posouvat dvě závaží, pomocí kterých lze nastavovat periodu kyvu a z ní následně určit velikost tíhového zrychlení [28]. (Určení tíhového zrychlení pomocí reverzního kyvadla se velmi často objevuje jako úloha v rámci vysokoškolských praktik, viz část 3.3.2.)

Rozboru všech možných vlivů, které ovlivňují periodu kyvadla a je nutné vzít v úvahu při výpočtu velikosti tíhového zrychlení z naměřené periody kmitů se podrobně věnují v článku [29]. Při všech uvedených korekcích (odchylna pohybu od ideálního harmonického průběhu, rozložení hmotnosti, odporové síly prostředí, pružnost závěsu) je uvedena relativní přesnost měření  $10^{-4}$ .

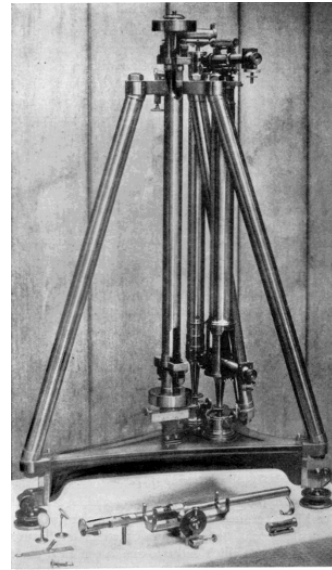
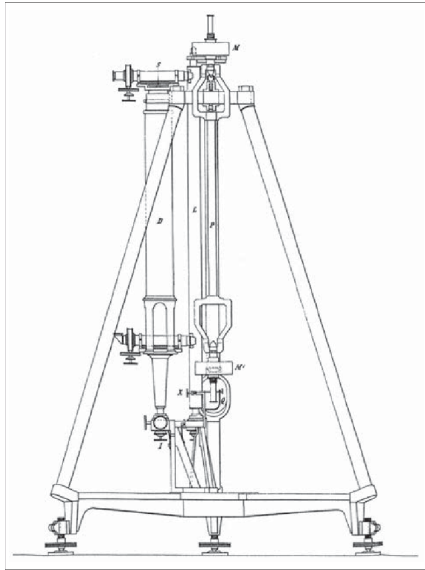
Mezi významné průkopníky v oblasti určování tíhového zrychlení patřil Pierre Bouguer, který v roce 1737 objevil závislost délky tyče kyvadla na teplotě a doby periody na odporu vzduchu [30]. Také určil vztah  $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{g_2}{g_1}$ , kde  $T_1, T_2$  jsou periody kyvu v různých místech a  $g_1, g_2$  jsou odpovídající hodnoty tíhového zrychlení. Dle tohoto vztahu můžeme zjistit velikost tíhového zrychlení z poměru druhých mocnin period a jedné již známé hodnoty tíhového zrychlení. Výhodou tedy je, že není potřeba přesně určovat polohu těžiště kyvadla (délku závěsu kyvadla), což přispívá k větší přesnosti měření.

Systematické mapování povrchu Země a měření velikosti tíhového zrychlení umožnil model reverzního kyvadla s proměnnou délkou tyče, které v roce 1817 sestavil Henry Kater. Sám provedl mnohá měření v Londýně (ale i zbytku Britských ostrovů). Jeho vynález byl následně využíván k měřením na expedicích po celém světě [31].

Dalším velmi významným badatelem v tomto oboru byl Friedrich Bessel, který využíval matematické kyvadlo a s jeho pomocí měřil velikost tíhového zrychlení v Königsbergu a Berlíně [31].

Před svou smrtí v roce 1846 Bessel také vypracoval teorii symetrického fyzického kyvadla s vyměnitelnými nožovými břity. Na základě této teorie později Adolf Repsold sestavil reverzní kyvadlo (kyvadlo bylo postavené na těžkém stativovém stojanu a doplněno dvěma mikroskopy určených k měření vzdáleností mezi hranami břitů, viz obrázek 1.6) [31]. Repsold - Besselovo kyvadlo bylo v druhé polovině 19. století využíváno na observatoři v Ženevě a následně bylo v roce 1874 oficiálně přijato pro měření absolutní velikosti tíhového zrychlení v celé Evropě.

S dalším vylepšením reverzního kyvadla k určování tíhového zrychlení přišel například Robert von Sterneck ke konci 19. století [31].



Obrázek 1.6: Repsoldovo - Besselovo reverzní kyvadlo [31]

Hovoříme-li o využití kyvadel při experimentálním určování velikosti tíhového zrychlení, neměli bychom opomíjet další veličinu související s gravitační silou, a to gravitační konstantu  $G$  (např. Cavendishova měření pomocí torzního kyvadla, resp. torzních vah [32]).

Další významné využití kyvadla a torzních vah v souvislosti s gravitací je ověřování rovnosti setrvačné a gravitační hmotnosti (tzv. *slabý princip ekvivalence* v rámci obecné teorie relativity) [33].

## 2. Zpracování tématu na různých úrovních vzdělávacího systému

Jako kyvadlo se obvykle označuje jakékoliv těleso zavěšené nad těžištěm tak, aby se mohlo volně otáčet okolo vodorovné osy procházející bodem závěsu kolmo k rovině kmitání [34]. Avšak jak si ukážeme v dalších částech této práce, takové vymezení pojmu *kyvadlo* je příliš konkrétní a existují velice zajímavé příklady, které se vůči němu vymezují.

Co se týče zařazení samotného tématu *kyvadlo*, v hodinách fyziky bývá většinou uváděno jako příklad mechanického harmonického kmitání (periodického kývání). Pojďme se podívat, jak je toto téma pojato na jednotlivých úrovních školního vzdělávacího systému v České republice.

### 2.1 Základní školy a víceletá gymnázia

Základním dokumentem, který musí respektovat veškerá výuka fyziky na základních školách a odpovídající ročníky víceletých gymnázií, je RVP pro ZŠ [35]. Ten je však velmi obecný a se samotným pojmem *kyvadlo* se zde nesetkáme. Proto bude lepší podívat se do učebnic pro základní školy (a odpovídající ročníky víceletých gymnázií). Ani zde toho však bohužel mnoho nenalezneme.

V těchto učebnicích se setkáme s kyvadlem pouze jakožto s kyvadlovými hodinami v kapitolách věnovaných měření času (např. [36, 37, 38, 39]). Více prostoru tomuto tématu ve výše uvedených učebnicích pro základní školy věnováno není. Avšak našla jsem jednu zmínku ve starším pracovním sešitě pro deváté ročníky [40], kde je diskutováno, na čem závisí perioda pohybu, a následně je tento vztah i uveden.

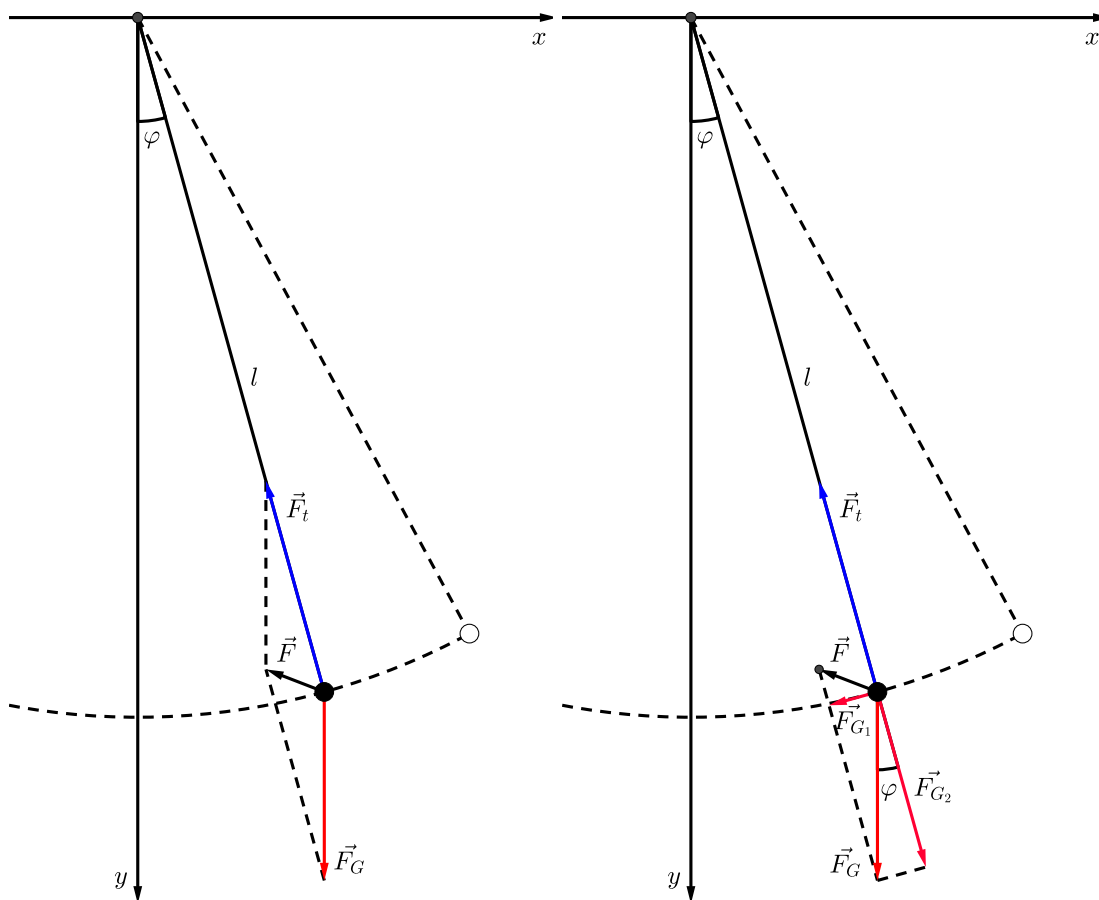
Na druhou stranu, neomezíme-li se pouze na učebnice, na internetu se nachází mnoho materiálů popisujících laboratorní práce s kyvadlem pro žáky základních škol. Možnými provedeními laboratorních prací (nejen) na úrovni základní školy se budu zabývat v kapitole 3 věnované vhodným experimentům a žákovským měřením.

### 2.2 Střední školy a gymnázia

Základními dokumenty, které musí respektovat veškerá výuka fyziky na gymnáziích a středních odborných školách, jsou RVP pro gymnázia [41] a RVP pro SOŠ [42]. I tyto dokumenty jsou však velmi obecné a není zde pojem *kyvadlo* explicitně uveden. Pravděpodobně však spadá do části *Pohyb těles a jejich vzájemné působení*, kam patří téma *Mechanické kmitání a vlnění*. Opět bude jistě lepší se podívat do učebnic pro gymnázia a střední školy, kde bývá kyvadlo většinou rozebíráno a zařazeno právě do části zabývající se mechanickým kmitáním a vlnění (např. [34, 43, 44, 45]).

Hlavní pozornost bývá věnována tzv. *matematickému kyvadlu*, což je nejjednodušší příklad kyvadla, přesněji řečeno jeho idealizovaný model. Jedná se o malé hmotné těleso (hmotný bod) zavěšené na pevném vlákně o zanedbatelné hmot-

nosti a konstantní délce (viz obrázek 2.1). Zároveň se neuvažuje tření v závěsu ani žádné další odporové síly okolí.



Obrázek 2.1: Náčrtek matematického kyvadla a rozbor sil působících na závaží kyvadla

## 2.2.1 Odvození pohybové rovnice rovinného matematického kyvadla na úrovni SŠ

Ve středoškolských učebnicích se harmonické kmitání zavádí jako přímočarý pohyb, proto je možné se omezit pouze na velmi malé výchylky. Pak lze oblouk, po kterém se těleso pohybuje, aproximovat úsečkou. Obvykle se uvádí, že to je dostatečně splněno, je-li maximální úhel  $\varphi$ , který vlákno (tyč) kyvadla svírá se svislým směrem, menší než  $5^\circ$ . Pro výchylky v tomto rozmezí také platí přibližná aproximace  $\sin \varphi \approx \tan \varphi \approx \varphi$ , zde však už musíme pracovat s úhly v radiánech, na což se v učebnicích často neupozorňuje [46].

Odůvodnění uvedené „magické“ hranice  $5^\circ$  pro maximální výchylku bude věnována pasáž na konci této části. Pohyb kyvadla s většími výchylkami pak bude diskutován v samostatné podkapitole 2.3.1 s vysokoškolským zpracováním této tematiky.

Příčinou kmitavého pohybu kyvadla je síla  $\vec{F}$  (obrázek 2.1), která je výslednicí tíhové síly  $\vec{F}_G$  a tahové síly  $\vec{F}_t$ , kterou působí vlákno závěsu na zavěšené těleso.



Avšak největší význam pro náš popis pohybu a zejména odvození vztahu pro periodu kyvadla má tečná složka výsledné síly působící ve směru pohybu kyvadla, která je shodná s tečnou složkou tíhové síly  $\vec{F}_{G_1}$ . Pro malou výchylku tělesa tedy platí

$$\varphi \approx \sin \varphi = \frac{F_{G_1}}{F_G} = \frac{F_{G_1}}{mg} = \frac{x}{l}, \quad (2.1)$$

kde  $x$  značí výchylku kyvadla ve vodorovném směru a  $l$  délku vlákna kyvadla (viz obrázek 2.1). Z tohoto vztahu lze vyjádřit velikost tečné složky výsledné síly ve směru pohybu, resp. tíhové síly  $F_{G_1}$

$$F_{G_1} = -m \frac{g}{l} x$$

Vzhledem k tomu, že kyvadlo je příkladem mechanického oscilátoru, můžeme využít obecný vztah mezi silou a výchylkou u lineárního harmonického oscilátoru (tento vztah vychází z pohybové rovnice pro lineární harmonický oscilátor)

$$F_{G_1} = -m\omega_0^2 x,$$

kde  $\omega_0$  značí úhlovou frekvenci vlastního kmitání kyvadla, a po dosazení do tohoto vztahu dostaneme rovnost

$$-m\omega_0^2 x = -m \frac{g}{l} x.$$

Pro úhlovou frekvenci vlastního kmitání kyvadla  $\omega_0$  platí vztah

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (2.2)$$

a pro periodu vlastního kmitání kyvadla  $T_0$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (2.3)$$

Snadno nahlédneme, že perioda kmitání kyvadla nezávisí ani na hmotnosti závaží ani na počáteční výchylce z rovnovážné polohy. Poněvadž velikost tíhového zrychlení  $g$  je v daném místě konstantní, je perioda kmitání určena jen délkou závěsu kyvadla  $l$ .

## Časté miskoncepce a kritika silových diagramů v učebnicích

Ačkoliv je matematické kyvadlo téma, které je tradičně zařazované do hodin fyziky na středních školách a gymnáziích a je velmi dobře a podrobně popsáno, často se mezi studenty a absolventy (nejen středoškolskými, ale dokonce i vysokoškolskými) objevují různé zkreslené představy o pohybu závaží kyvadla a o silách na něj působících [47].

Jedna z typických chybných představ spočívá v tom, že by při průchodu rovnovážnou polohou na závaží měla působit nenulová síla ve směru tečny, přičemž ve skutečnosti má výsledná síla působící na závaží pouze dostředivý směr. S tím souvisí i druhá chybná představa, že by tahová síla vlákna měla být stejně veliká nebo dokonce menší normálová složka tíhové síly. Pokud by to byla pravda,

pak by se nemohlo jednat o pohyb po kružnici, jelikož by výsledná síla působící na závaží neměla nenulovou dostředivou složku.

Na problémy fyzikální (ne)správnosti výkladu (nejen) v souvislosti s matematickým kyvadlem bylo upozorněno také například v článcích [48, 49] i již citované práci [46], kde je uveden jeden z typických nepřesných silových diagramů objevujících se v českých učebnicích. Ze zahraničních článků zabývajících se podobnou tematikou lze ještě zmínit například [50, 51].

Podrobněji pak byly nedostatky v česky psaných učebnicích pro střední školy diskutovány v článku [52], kde je podán přehled diagramů sil působících na závaží matematického kyvadla a diskuze jejich adekvátnosti a fyzikální správnosti. Z článku vyplývá, že se v českých učebnicích objevuje řada různých diagramů sil působících na závaží kyvadla, většinou však bývají buď neúplné (chybí výsledná síla nebo tahová síla vlákna) nebo nebývají fyzikálně správné (nezachovávají správný směr výslednice a poměry velikostí působících sil)

Následně autor článku prezentoval návrh jiného silového diagramu, který by měl lépe reflektovat fyzikální podstatu jevu. Vzhledem k tomu, že se závaží kyvadla po uvolnění z krajní polohy pohybuje po části kružnice, musí mít nenulové dostředivé zrychlení. Dále musí mít závaží i nenulové zrychlení ve směru pohybu s výjimkou rovnovážné polohy, protože se velikost jeho rychlosti při pohybu z krajní polohy do rovnovážné zvětšuje (a následně se při pohybu z rovnovážné polohy do druhé krajní zmenšuje atd.). V obecné poloze tedy výslednice sil působících na závaží musí směřovat do „vnitřní oblasti kružnice“ (viz obrázek 2.1).

Samozřejmě je nasnadě položit si otázku, zda tento diagram není příliš komplikovaný a zda je nutné tímto rozbořením žáky zatěžovat. Například je nutné zohlednit fakt, že rozkladu zrychlení na radiální a tečnou složku se v hodinách na středních školách a gymnáziích nevěnuje příliš mnoho prostoru.

Příspěvek do této diskuze lze nalézt například v článku [53], který vznikl jako přímá odpověď na předchozí článek. Autor zde mimojiné odůvodňuje zařazení tématu na středních školách, především vyzdvihuje jeho didaktický význam; jedná se o jednoduchý a snadno realizovatelný příklad mechanického oscilátoru, jehož perioda vlastního kmitání závisí na jednom parametru, a kromě objasnění kmitavého pohybu a jeho harmonického průběhu umožňuje zkoumat i periodické přeměny potenciální a kinetické mechanické energie. Následně vysvětluje, proč jsou v učebnicích, na kterých se podílel (např. [34, 43, 45]), používány méně komplikované diagramy. Rozbořením dalších argumentů se však dále zabývat nebudu, to ponechám v případě zájmu na čtenáři samotném.

Závěrem lze říct, že téma kyvadlo má velmi významné místo ve výuce fyziky, jak z didaktického, tak i historického hlediska, a při výkladu (byť i zjednodušeném, a v této otázce se mohou různí autoři lišit) by se nemělo zapomínat na jeho fyzikální přesnost.

## „Magická“ hranice $5^\circ$

V souvislosti s nepřesnostmi ve středoškolském přístupu a výkladu kyvadla je určitě vhodné okomentovat i „magickou“ hranici  $5^\circ$ , která bývá uváděna, jako hranice aproximace při odvozování vztahů pro kyvadla. Jelikož se pohybu kyvadla s většími výchylkami budu věnovat podrobněji v další podkapitole 2.3.1, zde uvedu jen několik argumentů podporující tuto hranici.

V prezentovaném výkladu se omezujeme pouze na malou amplitudu výchylky, při které platí  $\sin \varphi \approx \tan \varphi \approx \varphi$ . Jen v tomto případě má diferenciální rovnice popisující pohyb kyvadla jednoduché řešení (rovnice harmonického pohybu). Jestliže je amplituda výchylky větší, prodlužuje se i perioda a kmitání se již začíná více odchýlovat od harmonického průběhu.

Pro amplitudu výchylky  $5^\circ$  je relativní odchylka od vlastní periody kmitání přibližně 0,05 %, relativní odchylka je tedy stále jen řádu  $10^{-2}$  %. To je velmi dobrá přesnost.

Pro amplitudu  $10^\circ$  je relativní odchylka cca 0,19 % a pro  $20^\circ$  je tato hodnota rovna přibližně 0,77 % (stále menší než 1 %, tato hranice je překonána asi při  $23^\circ$ ). I proto můžeme v reálném experimentu provádět měření při větších výchylkách než  $5^\circ$  (nepřesnost není až tak velká, chyba měření může hrát větší roli). Pro větší maximální výchylky však relativní odchylka roste čím dál rychleji.

Pokud bychom si položili otázku, proč právě  $5^\circ$  a ne třeba  $4^\circ$  nebo  $6^\circ$ , napadá mne jedno vysvětlení z běžné každodenní komunikace, kdy odhadované počty často zaokrouhlujeme na násobky pěti. Například, mnohem častěji řekneme, že se někam dostavíme za 5 či 10 minut, spíše než za 4 či 7 minut. Ale zde hovořím pouze o své vlastní zkušenosti.

## 2.2.2 Úlohy vhodné k procvičování a inspirace z fyzikálních soutěží

Stejně významnou pozici jako samotný teoretický výklad fyzikální podstaty zkoumaných jevů má i řešení úloh, ve kterých lze probranou teorii aplikovat v praxi. Fyzikální úloha je nějaká situace předložená žákovi k řešení, diskuzi či hlubšímu zkoumání. Během řešení těchto úloh mají žáci možnost upevňovat své znalosti a prohlubovat celkové pochopení dané látky. Úlohy také mohou sloužit k ověření znalosti nebo naopak k povzbuzení tvořivosti a kritického myšlení žáků [54].

Zdrojů inspirace, ze kterých mohou vyučující čerpat, je mnoho. Ve většině dříve zmíněných učebnic se na koncích kapitol objevuje několik typových úloh (nejen) k procvičení probrané látky. Mnohem více úloh a příkladů pak lze nalézt v tištěných sbírkách (např. [55, 56, 57, 58, 59, 60]). Samozřejmě, existují i velmi dobré internetové sbírky úloh (např. *Sbírka řešených příkladů* [61], kde nalezneme úlohy nejen pro studenty středních škol, ale i vysokých škol, nebo server *realisticky.cz* [62]).

Vzhledem k tomu, že kyvadlu není v učebnicích pro základní školy věnován téměř žádný prostor, zaměřila jsem se ve své rešerši sbírek úloh na ty určené pro střední školy. Sbírkou příkladů pro studenty vysokých škol stručně okomentuji v části 2.3.4 věnované vysokoškolskému přístupu. Na druhou stranu, některé z náročnějších úloh je pravděpodobně možné zařadit i do výuky na vysokých školách. To se týká především úloh z různých soutěží, kterými se zde také budu zabývat.

Ve výše uvedených sbírkách se setkáme s poměrně širokou paletou úloh od kvalitativních, které se zaměřují na diskuzi závislosti periody kmitů na různých parametrech (délce závěsu, hmotnosti závaží, poloze těžiště závaží či tíhovém zrychlení) bez počítání s konkrétními hodnotami, přes jednodušší kvantitativní úlohy, ve kterých stačí pouze dosadit známé veličiny do správně upraveného vzorečku pro periodu kmitů, až po mnohem složitější kvantitativní úlohy, které buď vyža-

dují větší algebraické dovednosti žáků nebo je k jejich vyřešení nutné zkombinovat více fyzikálních zákonitostí a vztahů.

Z kvalitativních úloh bych ráda vyzdvihla ty, které připomínají, že délka tyče závěsu kyvadla (ale i dalších částí) je ovlivňována měnící se teplotou ve svém okolí. Ostatně proto jsou závaží v kyvadlových hodinách pohyblivá a hodiny je možné tímto způsobem kalibrovat.

Složitější kvantitativní úlohy se pak většinou opírají o algebraické operace (např. vyjadřování veličin ze vztahů a zkoumání, jak se změní v závislosti na změně jiné veličiny, nebo vyjadřování poměru neznámých veličin bez znalosti jejich konkrétních hodnot). Z vlastní zkušenosti vím, že nemají-li studenti k dispozici všechny hodnoty a chceme po nich „jen“ takovéto matematické úpravy vztahů, mají s úlohami mnohem větší problémy.

Řešení dalších náročnějších kvantitativních úloh pak vychází z kombinace několika fyzikálních vztahů a zákonitostí (např. zákona zachování mechanické energie, zákona zachování hybnosti, Newtonova gravitačního zákona, vztahu pro tíhové zrychlení, vztahu pro pružinový oscilátor atd.). I zde vím z vlastní zkušenosti, že tyto úlohy jsou pro žáky složitější, protože si aktuálně probíranou látku dost často nespojují s tím, co už znají, nebo si prostě jednoduše potřebné vztahy nepamatují. Mezi složitější kvantitativní úlohy pak zajisté patří i úloha, kde je pod bodem závěsu umístěn hřebík a spojnice těchto dvou bodů rozděluje rovinu kmitů na dvě poloroviny s různými periodami pohybu kyvadla.

U úloh opírajících se o zákony zachování mechanické energie a hybnosti bych se ráda na chvíli zastavila, protože právě sem patří příklady s tzv. *balistickým kyvadlem*. Jak již bylo zmíněno v první kapitole věnované historii a využití kyvadel, balistické kyvadlo bývalo využíváno k zjištění rychlosti střely (z pistole či pušky). Dnes se však s balistickým kyvadlem setkáme spíše ve výuce fyziky jakožto demonstračním pokusem [63] (proto se mu také budu věnovat v kapitole věnované experimentům [3.1]), početní úlohou k procvičení [64, 65] nebo na vysokých školách v rámci fyzikálních praktik [66]. Největší výhodou této úlohy je právě její komplexnost a možnost připomenutí obou zákonů zachování.

Nemusíme se však omezovat jen na klasické sbírky fyzikálních úloh, protože inspiraci lze čerpat i v zadáních a materiálech pro různé fyzikální soutěže jako je *Fyzikální olympiáda* [67] nebo *Fyzikální korespondenční seminář FYKOS* [68]. Nutno však poznamenat, že tyto úlohy jsou vhodnější pro šikovnější žáky nebo pro žáky ve výběrových rozšiřujících fyzikálních seminářích.

Zadáme-li termín *kyvadlo* do vyhledávače na oficiálních stránkách *Fyzikální olympiády*, vyskočí nám přes 180 výsledků, což hovoří o tom, že toto téma se v zadáních objevuje poměrně často (ať už jako početní příklad nebo jako laboratorní práce). Velmi oceňuji, že kromě samotných úloh jsou na těchto stránkách k dispozici i texty vysvětlující fyzikální jevy a odvození teoretických vztahů [69, 70].

Nejčastěji je úloha s kyvadlem určena pro kategorii B, což jsou třetí ročníky středních škol. V minulých zadáních se objevily např. příklady s balistickým kyvadlem [71] (v kategorii D se naopak objevila úloha, kde kyvadlo rozpohybovalo svým nárazem vozík [72], což je úloha založená na obdobném principu). V dřívějších ročnících se také objevila úloha s *Machovým kyvadlem* [73], kapajícím kyvadlem, které pod sebou zanechává stopu [74], nebo s porovnáním dvou kyvadel, z nichž jedno bylo matematické a druhé sférické [75]. Nejvíce mne však zaujala úloha, ve které se objevila myšlenka nehomogenity tíhového pole, a tedy závislosti

periody kmitů na nadmořské výšce (v úloze se však řeší i závislost na měnící se teplotě) [76].

Z jednodušších úloh ještě můžu uvést jednu, ve které je úkolem zakreslit síly působící na závaží kyvadla, jejich výslednici, rychlost a zrychlení závaží v různých fázích pohybu [77], což si myslím, že umožňuje žákům lépe pochopit, jak to s těmi silami během pohybu vlastně je. Naopak pro nejvyšší ročníky středních škol jsou určeny následující úlohy s fyzickým kyvadlem [78] nebo trojúhelníkovým kyvadlem [79].

Nutno podotknout, že ačkoliv je většina těchto úloh složitější než klasické úlohy ze sbírek pro střední školy a vyžadují pečlivější analýzu situace a hlubší znalosti fyzikálních zákonitostí, z matematických aparátů si vystačíme s derivacemi, popřípadě jednoduchými diferenciálními rovnicemi. To je rozdíl oproti úlohám z *fyzikálního korespondenčního semináře*.

V archivu *Fyzikálního korespondenčního semináře* se nachází okolo 20 úloh, které souvisí s tématem *kyvadlo*. Nalezneme zde jednodušší úlohy, které lze řešit jen úvahou (např. *Problém liftboye* [80], kde se řeší závislost periody kmitů na proměnném zrychlení), složitější úlohy, které však víceméně vystačí se znalostmi studentů středních škol (např. ... *už mě nehoupej* [81], kde se řeší změna maximální výchylky houpačky), ale i ty, které vyžadují hlubší fyzikální a především matematické znalosti na úrovni vysoké školy (např. ...*kukačky na lanech* [82], kde se řeší pohyb kyvadla na zavěšených hodinách a k výsledku se dochází pomocí diferenciální rovnice, a nebo ... *Merkur, jáma a kyvadlo* [83], kde jsou k řešení pohybu dvojitelného kyvadla použity Lagrangeovy rovnice 2. druhu).

## 2.3 Vysoké školy

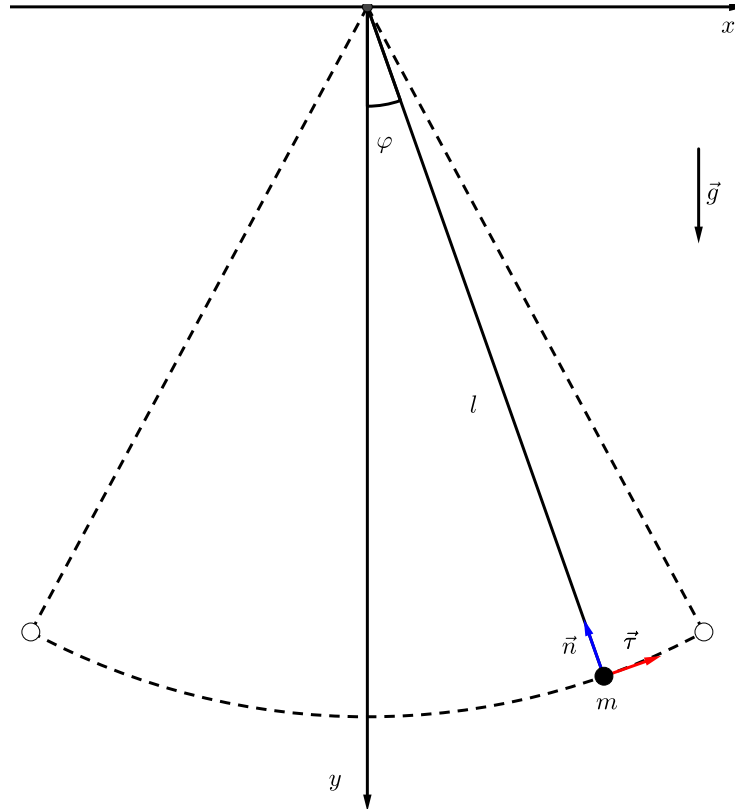
Na vysokých školách se s tématem *kyvadlo* setkáme nejčastěji v kurzech klasické nebo teoretické mechaniky. Paleta možností, jak dojít k pohybové rovnici kyvadla, je zde pak mnohem širší než na středních školách. Navíc se nemusíme omezovat jen na idealizovaný model rovinného matematického kyvadla a můžeme zkoumat pohyb například fyzického či sférického kyvadla. Co se týče podmínek, můžeme řešit kyvadla s většími amplitudami, případně pohyb kyvadla s tlumením a buzením.

### 2.3.1 Rovinné matematické kyvadlo

Začněme s nejjednodušším příkladem, kterým je rovinné matematické kyvadlo, a různými postupy vedoucími k výsledné pohybové rovnici. Možností je opravdu mnoho, takže se jedná i o jistou příležitost demonstrovat různé fyzikální přístupy a matematické metody a aparáty využívané ve fyzice.

Ve všech případech uvažujme stejný model kyvadla se závažím v podobě hmotného bodu o hmotnosti  $m$  na pevné tyči o konstantní délce  $l$  a zanedbatelné hmotnosti v homogenním tíhovém poli se zrychlením  $g$  (obrázek 2.2). Na druhou stranu neuvážujeme žádné tření ani další odporové síly.

Pohyb kyvadla popíšeme pomocí orientované úhlové výchylky  $\varphi$  (kladný směr je proti směru hodinových ručiček od rovnovážné polohy). Rovněž se nám bude hodit dvojice jednotkových vektorů  $\vec{\tau}$  v tečném směru k trajektorii - kružnici (obrázek 2.2) a  $\vec{n}$ , který je na něj kolmý a směřuje do bodu závěsu.



Obrázek 2.2: Model rovinného matematického kyvadla

## Odvození pomocí 2. Newtonova zákona

První z postupů je pravděpodobně ten nejzákladnější a právě z něj vychází i dříve uvedené a diskutované středoškolské odvození. Obdobný postup je prezentován např. v [84, 85, 86] (ve všech případech je však popsán poměrně zkratkovitě, proto jsem nejvíce vycházela z poznámek od vedoucího práce).

Na závaží kyvadla působí tahová síla tyče závěsu  $\vec{F}_t$  a tíhová síla  $\vec{F}_G$ , jejichž výslednice  $\vec{F}$  je příčinou kmitavého pohybu kyvadla (obrázek 2.3). Tíhovou sílu můžeme rozložit na tečnou složku  $\vec{F}_{G_1}$  (ve směru tečny k trajektorii hmotného bodu - kružnici) a normálovou  $\vec{F}_{G_2}$ , která je na ni kolmá a zároveň rovnoběžná s tyčí závěsu kyvadla. S využitím jednotkových vektorů v tečném a normálovém směru můžeme uvedené síly rozepsat

$$\begin{aligned}\vec{F}_G &= F_{G_1}\vec{\tau} + F_{G_2}\vec{n} = -mg \sin \varphi \vec{\tau} - mg \cos \varphi \vec{n}, \\ \vec{F}_t &= F_t\vec{n}.\end{aligned}$$

Druhý Newtonův zákon pro pohyb závaží kyvadla nám říká

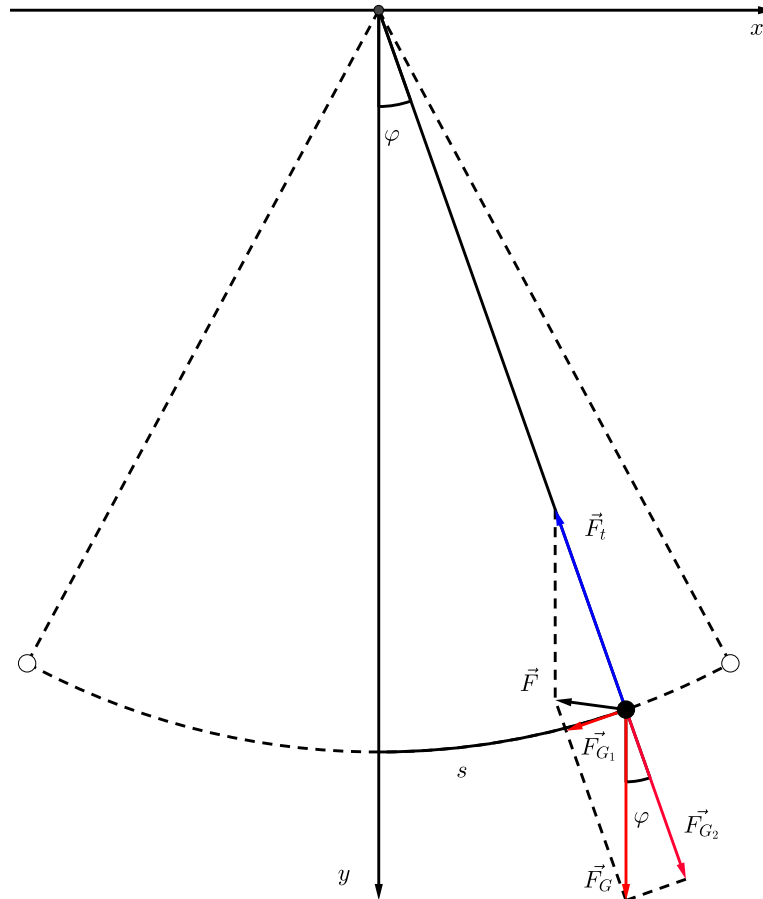
$$m\vec{a} = \vec{F} = \vec{F}_G + \vec{F}_t,$$

kde  $\vec{a}$  je okamžité zrychlení závaží kyvadla, které rovněž můžeme rozložit na složky (průmět do tečného a normálového směru)

$$\vec{a} = a_\tau\vec{\tau} + a_n\vec{n}.$$

Podrobným rozepsáním 2. Newtonova zákona dostaneme

$$m(a_\tau\vec{\tau} + a_n\vec{n}) = -mg \sin \varphi \vec{\tau} - mg \cos \varphi \vec{n} + F_t\vec{n}.$$



Obrázek 2.3: Náčrtek matematického kyvadla a rozbor sil na něj působících

Vynásobíme-li celou rovnici skalárně s vektorem  $\vec{\tau}$  (čímž získáme průmět do tečného směru), dojdeme k rovnici

$$ma_{\tau} = -mg \sin \varphi. \quad (2.4)$$

Pro průmět zrychlení do tečného směru  $a_{\tau}$  platí

$$a_{\tau} = \frac{d}{dt}v_{\tau} = \frac{d}{dt} \left( l \frac{d\varphi}{dt} \right) = l \frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

kde  $v_{\tau}$  značí průmět rychlosti do tečného směru ( $v_{\tau} = \vec{v} \cdot \vec{\tau}$ ). Zároveň  $v_{\tau}$  odpovídá obvodové rychlosti, takže jsme mohli využít vztah mezi úhlovou a obvodovou rychlostí ( $v_{\tau} = l \, d\varphi/dt$ ).

Dosazením za  $a_{\tau}$  do rovnice (2.4) dostaneme

$$ml \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg \sin \varphi. \quad (2.5)$$

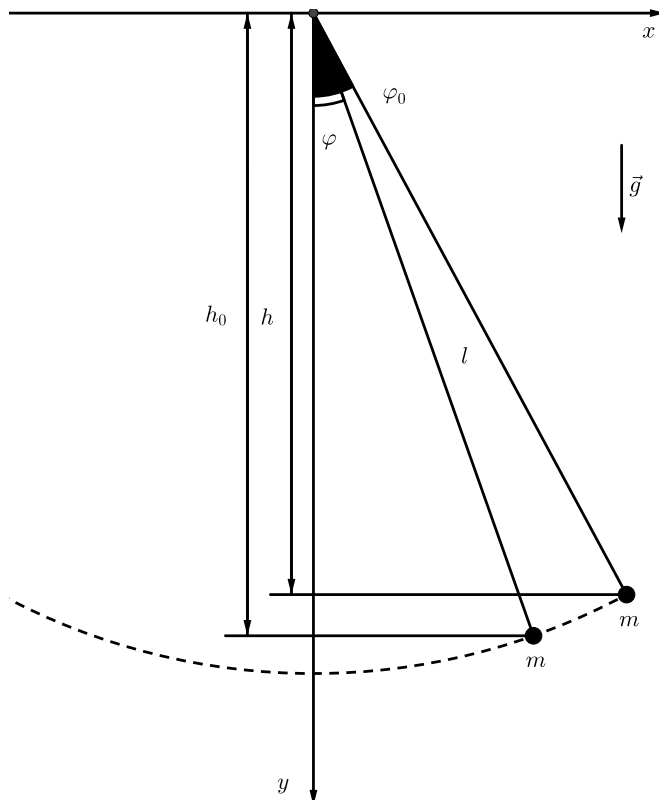
Provedeme-li jednoduché algebraické úpravy vztahu a označíme-li konstantu  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ , získáme pohybovou rovnici matematického kyvadla

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0. \quad (2.6)$$

Konstantu  $\omega_0$  nazýváme vlastní úhlová frekvence kyvadla.

## Odvození pomocí zákona zachování mechanické energie

Druhým způsobem, jak můžeme dojít k pohybové rovnici pro rovinné matematické kyvadlo, který si zde ukážeme, je využití zákona zachování mechanické energie (resp. periodických přeměn potenciální energie na kinetickou a opačně). Následující postup je inspirován [85, 86].



Obrázek 2.4: Náčrtek matematického kyvadla a rozbor situace pro porovnání mechanické energie v krajní poloze s výchylkou  $\varphi_0$  a obecné poloze s výchylkou  $\varphi$

Porovnáme celkovou mechanickou energii v krajní (počáteční) poloze s výchylkou  $\varphi_0$  a obecné poloze s výchylkou  $\varphi$  (obrázek 2.4). Nulovou hladinu potenciální energie uvažujme na úrovni bodu závěsu tyče kyvadla.

V krajní poloze s výchylkou  $\varphi_0$  (resp. ve výšce  $h_0 = l \cos \varphi_0$ ) má hmotný bod nulovou rychlost, a tak je jeho celková energie  $E_0$  rovna jeho potenciální energii  $E_{p_0}$  dané vztahem

$$E_0 = E_{p_0} = -mgl \cos \varphi_0.$$

V obecné poloze s výchylkou  $\varphi$  (resp. ve výšce  $h = l \cos \varphi$ ) je celková energie závaží kyvadla  $E$  dána součtem jeho potenciální energie  $E_p$  a kinetické  $E_k$ . S využitím vztahu mezi úhlovou a obvodovou rychlostí  $\vec{v}$

$$\vec{v} = l \, d\varphi/dt \, \vec{\tau}$$

pro energii  $E$  dostaneme

$$E = E_p + E_k = -mgl \cos \varphi + \frac{1}{2} m l^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2.$$



Dosazením do zákona zachování mechanické energie

$$E_0 = E,$$

$$-mgl \cos \varphi_0 = -mgl \cos \varphi + \frac{1}{2}ml^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2$$

a následnými jednoduchými algebraickými úpravami dojdeme k rovnici

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{g}{l} (\cos \varphi - \cos \varphi_0). \quad (2.7)$$

Zderivováním této rovnice dle času  $t$  dostaneme

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{g}{l} \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt}.$$

Následným převedením všech členů na jednu stranu a vytknutím členu  $d\varphi/dt$  získáme rovnici

$$\frac{d\varphi}{dt} \left( \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \varphi \right) = 0.$$

Vzhledem k tomu, že člen  $d\varphi/dt$  je obecně nenulový (roven nule je pouze v krajních polohách), pak musí platit

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

a po označení  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$  získáme výslednou rovnici

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0, \quad (2.8)$$

která je shodná s rovnicí (2.6), kterou jsme získali v předchozí části.

## Odvození pomocí 2. věty impulzové

Rovinné matematické kyvadlo může sloužit i jako příklad aplikace 2. věty impulzové v praxi. Následující postup je inspirován [87, 88], nejvíce však vychází z poznámek vedoucího diplomové práce.

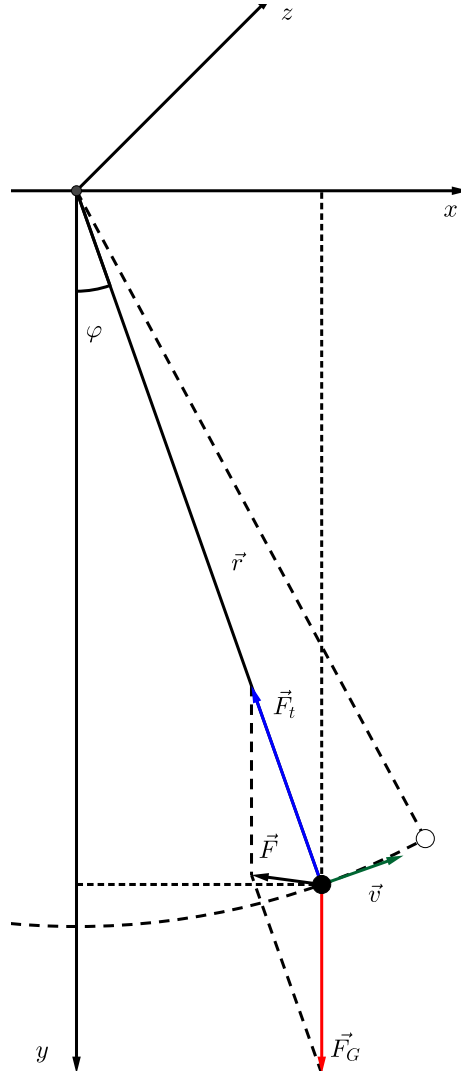
Ačkoliv stále řešíme pohyb kyvadla v rovině, tentokrát musíme uvažovat model matematického kyvadla v trojrozměrném prostoru se souřadnicemi  $(x, y, z)$  (obrázek 2.5), protože se v následujícím postupu objevuje vektorový součin, který je definován pouze v trojrozměrném případě.

Polohový vektor spojující hmotný bod (závaží kyvadla) s počátkem soustavy souřadnic označíme  $\vec{r}$  (jeho délka je shodná s délkou závěsu kyvadla  $|\vec{r}| = l$ ). Pro složky polohového vektoru  $\vec{r}$  v námi uvažované soustavě souřadnic platí

$$\vec{r} = (l \sin \varphi, l \cos \varphi, 0),$$

a tedy vektor okamžité rychlosti  $\vec{v}$  je

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left( l \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt}, -l \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt}, 0 \right).$$



Obrázek 2.5: Náčrtek matematického kyvadla a rozbor sil na něj působících

Pojďme se opět podívat na rozbor sil působících na závaží kyvadla. Na závaží působí tíhová síla  $\vec{F}_G$  (o velikosti  $mg$ ) a tahová síla vlákna  $\vec{F}_t$ , jejichž součtem získáme výslednou sílu  $\vec{F}$ . Pro složky výslednice  $\vec{F}$  platí

$$\vec{F} = (-F_t l \sin \varphi, mg - F_t l \cos \varphi, 0).$$

Moment hybnosti  $\vec{L}$  v našem konkrétním případě vychází

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \left(0, 0, -ml^2 \frac{d\varphi}{dt}\right)$$

a celkový moment sil působících na závaží kyvadla  $\vec{M}$  je dán vztahem

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = (0, 0, mgl \sin \varphi).$$

Druhá věta impulzová nám říká

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}.$$

Pro složku ve směru osy  $z$  (rovnoběžnou s osou otáčení) pak získáme

$$-ml^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = mgl \sin \varphi. \quad (2.9)$$

Následnými algebraickými úpravami a použitím značení pro vlastní úhlovou frekvenci  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$  dojdeme k rovnici

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0, \quad (2.10)$$

která je shodná s rovnicemi (2.6) a (2.8) uvedenými v předchozích částech.

## Odvození pomocí Lagrangeových rovnic 2. druhu

Další způsob, jak odvodit pohybovou rovnici matematického kyvadla, je založen na využití Lagrangeových rovnic 2. druhu a Lagrangeovy funkce (lagrangiánu)  $L$ . S tímto postupem je možné se setkat např. ve vysokoškolských kurzech teoretické mechaniky, Následující postup je inspirován [89, 90, 91, 85, 92].

Jako zobecněnou souřadnici zde zvolíme úhel  $\varphi$  a zobecněnou rychlostí bude její časová derivace označená jako  $\dot{\varphi}$  (odpovídá úhlové rychlosti). Nulovou hladinu potenciální energie opět volíme na úrovni bodu závěsu tyče kyvadla.

Kinetická energie závaží kyvadla  $E_k$  je dána vztahem

$$E_k = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2,$$

kde jsme opět využili vztah mezi obvodovou a úhlovou rychlostí ( $\vec{v} = l\dot{\varphi} \vec{\tau}$ ). Jeho potenciální energie  $E_p$  je dána výrazem

$$E_p = -mgl \cos \varphi$$

Následně obojí dosadíme do langrangiánu

$$L = E_k - E_p = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi. \quad (2.11)$$

V navazujícím postupu budeme potřebovat první derivace lagrangiánu  $L$  podle zobecněné souřadnice  $\varphi$  a zobecněné rychlosti  $\dot{\varphi}$ , které vypadají následovně

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= ml^2 \dot{\varphi}, \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -mgl \sin \varphi. \end{aligned}$$

V našem případě máme jeden stupeň volnosti, a Lagrangeova rovnice tedy vypadá obecně

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$

což nám po konkrétním dosazení dává

$$\frac{d}{dt} (ml^2 \dot{\varphi}) + mgl \sin \varphi = 0. \quad (2.12)$$

Po provedení naznačené derivace, vydělení členy  $ml^2$ , označení  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$  a přeznačení časové derivace  $\dot{\varphi} = d\varphi/dt$  získáme finální tvar rovnice

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0, \quad (2.13)$$

který je opět shodný s výslednými rovnicemi předchozích částech.

K pohybové rovnici rovinného matematického kyvadla by samozřejmě bylo možné dojít i pomocí Lagrangeových rovnic 1. druhu. Tento postup zde prezentovat nebudu, ale je možné jej nalézt např. v [90, 92, 93].

## Odvození pomocí Hamiltonových kanonických rovnic

Následující postup, který je rovněž typičtější pro vysokoškolské kurzy teoretické mechaniky, obsahuje Hamiltonovu funkci (hamiltonián)  $H$  a Hamiltonovy kanonické rovnice. Obdobný postup je prezentován např. v [85, 94].

Vzhledem k tomu, že začátek tohoto postupu je shodný s předchozím, část převezmu a začneme od již vyjádřeného lagrangiánu  $L$  (opět využíváme k popisu zobecněnou souřadnici  $\varphi$  a zobecněnou rychlost  $\dot{\varphi}$ ).

Lagrangián pro závaží kyvadla  $L$  je popsán rovností (2.11)

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi.$$

Zkoumané kyvadlo má pouze jeden stupeň volnosti, a proto pro hamiltonián  $H$  platí

$$H = p_\varphi\dot{\varphi} - L,$$

kde  $p_\varphi$  představuje zobecněnou hybnost (sdruženou s obecnou souřadnicí  $\varphi$ ), kterou můžeme určit pomocí vztahu

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi}.$$

Dosazením do hamiltoniánu  $H$  pak dostáváme

$$H = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mgl \cos \varphi.$$

Přirozenými proměnnými hamiltoniánu  $H$  jsou jeho zobecněná souřadnice  $\varphi$  a zobecněná hybnost  $p_\varphi$ , proto je vhodné výsledek upravit tak, aby v něm vystupovala zobecněná hybnost  $p_\varphi$  místo zobecněné rychlosti  $\dot{\varphi}$

$$H = \frac{p_\varphi^2}{2ml^2} - mgl \cos \varphi. \quad (2.14)$$

Jak vidíme, hamiltonián vychází jako celková mechanická energie, což odpovídá tomu, že lagrangián není explicitně závislý na čase.

Hamiltonovy kanonické rovnice vypadají v našem případě následovně

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\varphi}, \\ \dot{p}_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

a po provedení naznačených derivací dostáváme pohybové rovnice ve tvaru soustavy dvou diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \frac{p_\varphi}{ml^2}, \\ \dot{p}_\varphi &= -mgl \sin \varphi.\end{aligned}\tag{2.15}$$

Po dosazení první rovnice do druhé, označení  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$  a přeznačení časové derivace  $\dot{\varphi} = d\varphi/dt$ , dojdeme k tvaru, který je shodný s výsledkem v předchozích částech

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0.\tag{2.16}$$

Zde by bylo dobré ještě podotknout, že je možné řešit rovnou soustavu pohybových rovnic (2.15). V aproximaci pro malé výchylky  $|\varphi| \ll 1$ , kdy  $\varphi \approx \sin \varphi$ , to jde poměrně jednoduše.

### Řešení rovnice v aproximaci pro malé odchylky $\varphi$

Vzhledem k tomu, že diferenciální rovnice (2.6) není jednoduše řešitelná pomocí elementárních funkcí, často se omezujeme pouze na linearizovaný případ pro velmi malé výchylky  $|\varphi| \ll 1$  (viz např. [85, 87, 95, 86]). Za tohoto předpokladu platí aproximace  $\sin \varphi \approx \varphi$ , čímž se rovnice (2.6) zjednoduší na lineární diferenciální rovnici 2. řádu s konstantními koeficienty

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi = 0.\tag{2.17}$$

Její obecné řešení má tvar

$$\varphi(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t),$$

kde  $A$  a  $B$  jsou konstanty (tento fakt lze ověřit například zderivováním a zpětným dosazením).

Při konkrétních počátečních podmínkách  $\varphi(0) = \varphi_0$  a  $\frac{d\varphi}{dt}(0) = 0$  vypadá řešení následovně

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega_0 t), \quad |\varphi_0| \ll 1\tag{2.18}$$

a vztah pro periodu vlastního kmitání  $T_0$  je

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.\tag{2.19}$$

### Pohyb rovinného matematického kyvadla při velkých amplitudách

V případě větších výchylek se pohyb kyvadla více odchyluje od harmonického průběhu a perioda kmitů se se zvětšující amplitudou prodlužuje. Pojďme se proto podívat na celý problém podívat obecněji. Následující postup vychází z [89, 96, 97, 98]. Při pohybu kyvadla uvažujme počáteční podmínky  $\varphi(0) = \varphi_0$  a  $\frac{d\varphi}{dt}(0) = 0$ .

Začátek je stejný jako v případě odvození pohybové rovnice pomocí zákona zachování mechanické energie, kde jsme porovnávali celkovou mechanickou energii

v krajní poloze s výchylkou  $\varphi_0$  s energií v obecné poloze s výchylkou  $\varphi$  (nulovou hladinu potenciální energie opět uvažujeme na úrovni bodu závěsu kyvadla). Proto přeskochím dosazení do zákona zachování mechanické energie a rovnou využiji vztah (2.7), který byl pomocí něj odvozen

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{g}{l} (\cos \varphi - \cos \varphi_0).$$

Následnými algebraickými úpravami a s využitím označení pro úhlovou frekvenci vlastního kmitání matematického kyvadla při malých výchylkách  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$  dostaneme

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2\omega_0}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}}.$$

Je dobré podotknout, že tento vztah platí v případě, kde se úhlová výchylka  $\varphi$  s časem zvětšuje. Vzhledem k tomu, že budeme počítat první čtvrtinu periody kmitů (odpovídá době pohybu z krajní polohy s výchylkou  $\varphi_0$  do nejnižší polohy s  $\varphi = 0$ ), kdy se výchylka zmenšuje, musíme brát celý výraz se záporným znaménkem. Řešením této diferenciální rovnice jsme schopni získat vztah pro první čtvrtinu periody kmitů

$$T_{\text{čtvrť}} = -\frac{1}{\sqrt{2\omega_0}} \int_{\varphi_0}^0 \frac{1}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} d\varphi.$$

Po využití známého vztahu pro sinus polovičního úhlu  $\cos \varphi = 1 - 2 \sin^2(\varphi/2)$  a „prohození“ mezi integrálem (čímž se „zbavíme“ záporného znaménka) získáme

$$T_{\text{čtvrť}} = \frac{1}{2\omega_0} \int_0^{\varphi_0} \frac{1}{\sqrt{\sin^2(\varphi_0/2) - \sin^2(\varphi/2)}} d\varphi.$$

Označme  $k = \sin(\varphi_0/2)$  (příčemž  $|k| < 1$ , resp.  $|\varphi_0| < \pi$ ) a zavedme substituci

$$\begin{aligned} k \sin \vartheta &= \sin(\varphi/2), \\ \varphi &= 2 \arcsin(k \sin \vartheta), \\ d\varphi &= \frac{2k \cos \vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}}, \end{aligned}$$

s novými mezemi integrálu

$$\begin{aligned} 0 &\Rightarrow \sin \vartheta = 0 \Rightarrow \vartheta = 0, \\ \varphi_0 &\Rightarrow \sin \vartheta = 1 \Rightarrow \vartheta = \pi/2. \end{aligned}$$

Postupnými úpravami a dosazením za substituci

$$T_{\text{čtvrť}} = \frac{1}{2\omega_0} \int_0^{\varphi_0} \frac{1}{\sqrt{k^2 - \sin^2 \vartheta}} d\varphi = \frac{1}{2\omega_0} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{k\sqrt{1 - \sin^2 \vartheta}} \frac{2k \cos \vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}} d\vartheta$$

a dále s využitím vztahu  $\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta = 1$  dostaneme tvar

$$T_{\text{čtvrť}} = \frac{1}{\omega_0} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}} d\vartheta = \frac{1}{\omega_0} K(k), \quad (2.20)$$

kde integrál  $K(k)$

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}} d\vartheta$$

je úplný eliptický integrál prvního druhu.

Úplné eliptické integrály jsou tabelovány. Avšak výpočet našeho integrálu  $K(k) = K(\sin(\varphi_0/2))$  je možné provést i rozvinutím integrované funkce pomocí Taylorovy řady

$$K(\sin(\varphi_0/2)) = \frac{\pi}{2} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 \sin^{2n} \frac{\varphi_0}{2} \right].$$

Vzhledem k tomu, že získaný vztah (2.20) odpovídá době jedné čtvrtiny periody kmitů (pohyb hmotného bodu z počáteční polohy do nejnižší polohy), pro délku periody kmitů  $T$  platí

$$T = T_0 \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 \sin^{2n} \frac{\varphi_0}{2} \right], \quad (2.21)$$

kde  $T_0$  odpovídá periodě vlastního kmitání při malých amplitudách ( $T_0 = \pi/2\omega_0$ ).

Podíváme-li se na první členy Taylorova rozvoje

$$T = T_0 \left( 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \dots \right),$$

vidíme, že při aproximaci malých výchylek (linearizovaný případ obecného řešení) je perioda kyvadla opravdu přibližně rovna  $T \approx T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$ .

Alternativní přístupy k dosažení přibližných hodnot periody kyvadla s obecnou maximální výchylkou (např. s využitím geometrického průměru) jsou prezentovány v již zmíněných článcích [96, 97] a také v práci [99]. V práci [86] pak lze nalézt řešení nelinearizovaných případů pomocí fázových portrétů.

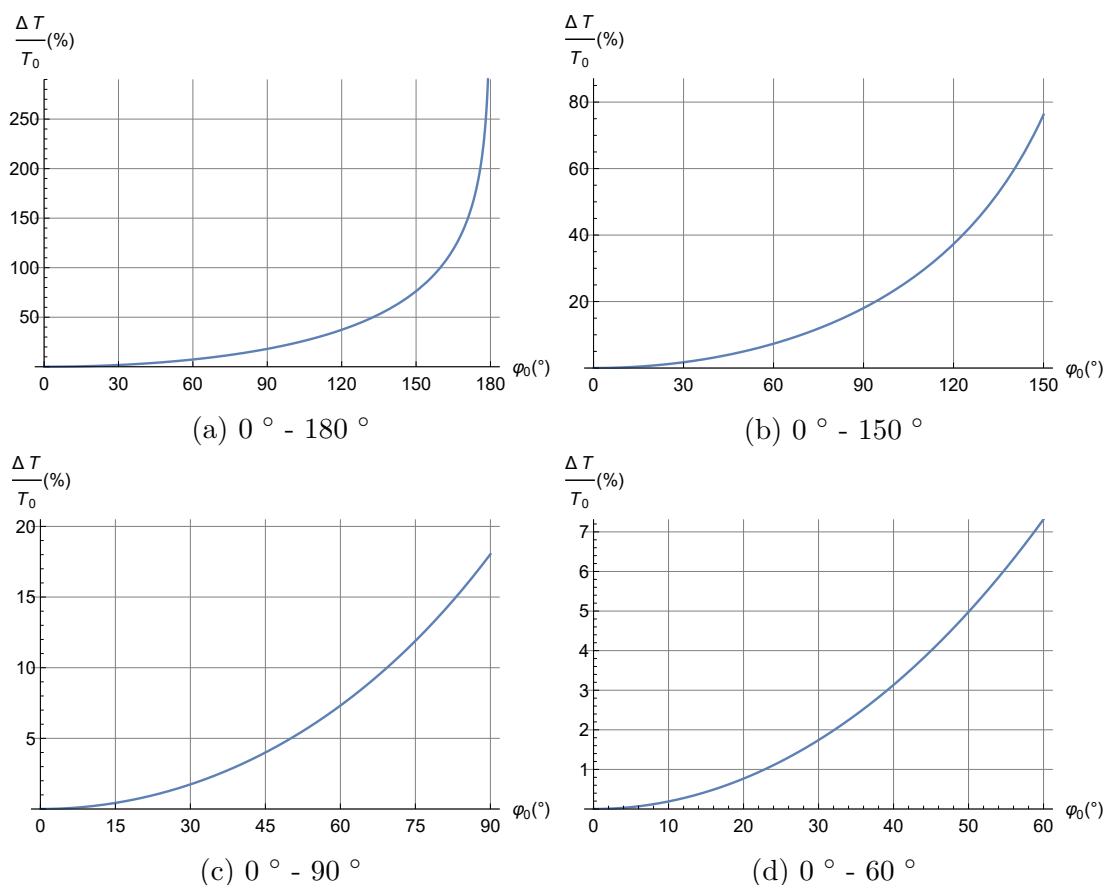
Zde by bylo dobré poznamenat, že eliptický integrál je možné spočítat pomocí nějakého matematického softwaru jako např. *Wolfram Mathematica* [100] nebo i pomocí volně dostupné aplikace na internetu *WolframAlpha* [101]. (Příslušná funkce se jmenuje *EllipticK(m)*. Je však nutné upozornit na rozdílné značení, zde totiž platí  $m = k^2$ , a tedy  $K(k) = \text{EllipticK}(k^2)$ . Tento postup je okomentován např. v [102].)

V tabulce 2.1 jsou uvedeny teoretické hodnoty relativního prodloužení skutečné periody kyvadla  $T$  (určené pomocí vztahu (2.20)) vůči  $T_0$  v závislosti na maximální výchylce  $\varphi_0$ . Teoretické hodnoty relativního prodloužení skutečné periody kyvadla  $T$  vůči  $T_0$  v závislosti na maximální výchylce  $\varphi_0$  pro různá rozmezí jsou pak znázorněny i v grafech 2.6a až 2.6d (vykresleno v programu *Wolfram Mathematica*).

$\varphi_0$ [°]	5	10	15	20	30	45	60	90
$\frac{\Delta T}{T_0}$ [%]	0,05	0,19	0,43	0,77	1,74	4,00	7,32	18,03

Tabulka 2.1: Relativní prodloužení periody v závislosti na maximální výchylce  $\varphi_0$

Z hodnot uvedených v tabulce 2.1 i v grafu 2.6d je vidět, že relativní odchylka period (prodloužení) je menší než 5 % i pro velikosti amplitud  $\varphi_0 < 50^\circ$  a menší než 1 % až pro amplitudy o velikosti  $\varphi_0 < 23^\circ$ .



Obrázek 2.6: Relativní prodloužení periody v závislosti na max. výchylce  $\varphi_0$

## Pohyb rovinného matematického kyvadla s tlumením

Nemusíme se však omezovat jen na pohyb kyvadla bez tření a odporových sil, můžeme se podívat i na případ s tlumením. V následujícím postupu vycházím z [84, 95, 103].

Pro jednoduchost budeme uvažovat tzv. *viskózní* tlumení  $F_{tlum}$  úměrné rychlosti kyvadla ( $l \, d\varphi/dt$ ) s konstantou úměrnosti  $b > 0$  dané vztahem

$$F_{tlum} = bl \frac{d\varphi}{dt}.$$

K odvození pohybové rovnice využijeme 2. Newtonův zákon (resp. použijeme modifikovanou rovnici (2.5), kde na druhou stranu přidáme tlumící sílu  $F_{tlum}$ )

$$ml \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg \sin \varphi - bl \frac{d\varphi}{dt}. \quad (2.22)$$

Po provedení jednoduchých algebraických úprav, využití označení  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$



a zavedení značení pro tlumení  $2\delta = \sqrt{b/m}$  dojdeme k tvaru

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\delta\frac{d\varphi}{dt} + \omega^2 \sin \varphi = 0. \quad (2.23)$$

Omezíme-li se na malé amplitudy kyvadla  $|\varphi| \ll 1$ , kdy  $\varphi \approx \sin \varphi$  (zájemce o řešení pohybu kyvadla s obecnou amplitudou odkazují na články [104, 105]), pohybová rovnice se zjednoduší na

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\delta\frac{d\varphi}{dt} + \omega_0^2\varphi = 0, \quad (2.24)$$

což je lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty. Její řešení je běžný problém řešený v učebnicích např. [106].

Obecné řešení této rovnice vypadá

$$\varphi(t) = e^{-\delta t} \left( Ae^{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} + Be^{-\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} \right), \quad (2.25)$$

kde  $A$  a  $B$  jsou konstanty (lze ověřit např. zderivováním a zpětným dosazením).

V závislosti na vzájemném poměru koeficientů  $\delta$  a  $\omega_0$  můžeme rozlišit tři případy

- i) *slabé tlumení*, kdy  $\delta < \omega_0$ ,
- ii) *kritické tlumení*, kdy  $\delta = \omega_0$
- iii) a *silné tlumení*, kdy  $\delta > \omega_0$ .

Úpravy pohybové rovnice (2.25) ve všech třech případech jsou podrobně popsány v již zmíněných zdrojích [84, 95, 106], zde uvedu jen výsledné tvary.

*Slabé tlumení* ( $\delta < \omega_0$ )

V případě slabého tlumení je možné rovnici (2.25) přepsat na

$$\varphi(t) = Ee^{-\delta t} \cos(\omega t - \varphi_0), \quad (2.26)$$

kde  $\omega = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ . Konstanty  $E$  a  $\varphi_0$  lze určit z počátečních podmínek.

Snadno nahlédneme, že ačkoliv je pohyb i nadále periodický, amplituda kmitů klesá exponenciálně s rostoucím časem (viz obrázek 2.7).

*Kritické tlumení* ( $\delta = \omega_0$ )

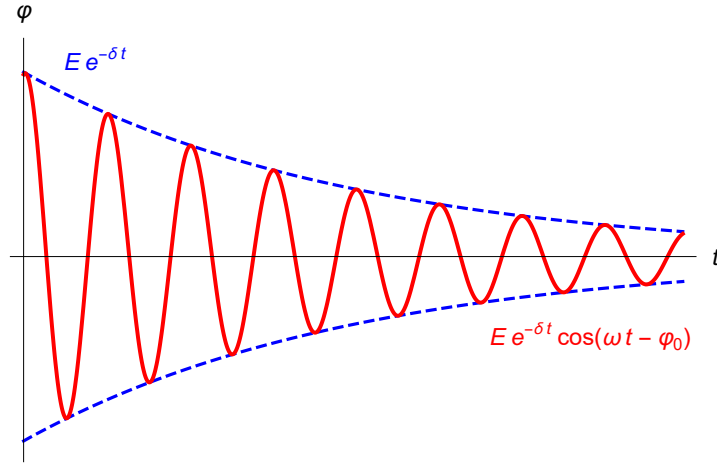
V případě kritického tlumení je obecné řešení ve tvaru

$$\varphi(t) = (A + Bt)e^{-\delta t}, \quad (2.27)$$

kde  $A$  a  $B$  jsou konstanty, které lze určit z počátečních podmínek.

*Silné tlumení* ( $\delta > \omega_0$ )

V případě silného tlumení můžeme pohyb kyvadla popsat přímo rovnicí (2.25).



Obrázek 2.7: Slabě tlumené kmity

### Pohyb rovinného matematického kyvadla s tlumením a buzením

V další části budeme předpokládat, že krom *viskózního* tlumení (které bylo diskutováno v předchozí části) na kyvadlo působí vnější „síla“ (buzení), která má harmonický průběh s amplitudou  $A_0$  a úhlovou frekvencí  $\Omega$ . Následující postup opět vychází z [84, 95, 106]. Pro jednoduchost rovnou uvažujme malé výchylky  $|\varphi| \ll 1$ , kdy  $\varphi \approx \sin \varphi$ .

Pohybová rovnice závaží kyvadla (2.24) se pak změni na

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\delta\frac{d\varphi}{dt} + \omega_0^2\varphi = A_0 \cos \Omega t, \quad (2.28)$$

kde  $\omega_0$  je úhlová frekvence vlastního kmitání a  $\delta$  je koeficient tlumení.

Tato rovnice již není homogenní, proto je její obecné řešení dáno jako součet obecného řešení homogenní rovnice (kdy je pravá strana položena rovno nule) a partikulárního řešení nehomogenní rovnice  $\varphi_0(t)$

$$\varphi(t) = A\varphi_1(t) + B\varphi_2(t) + \varphi_0(t), \quad (2.29)$$

kde  $A\varphi_1(t) + B\varphi_2(t)$  je obecné řešení homogenní rovnice s integračními konstantami  $A$  a  $B$  (toto řešení odpovídá výsledkům v předchozí části bez buzení).

Výsledný tvar pro partikulární řešení je

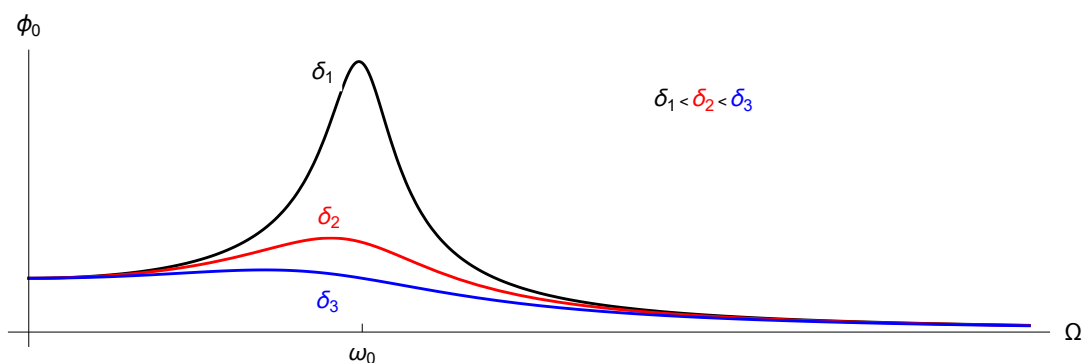
$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= \Phi_0 \cos(\Omega t - \vartheta), \\ \Phi_0 &= \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}, \\ \tan \vartheta &= \frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

kde  $\Phi_0$  odpovídá amplitudě nucených kmitů.

Při  $\Omega \approx \omega_0$  a malém tlumení  $\delta$  dochází k tzv. *rezonanci*, kdy amplituda nucených kmitů může dosahovat mnohonásobně vyšších hodnot (viz obrázek 2.8).

Přesná hodnota rezonanční frekvence  $\Omega_{rez}$  je dána výrazem (např. [106])

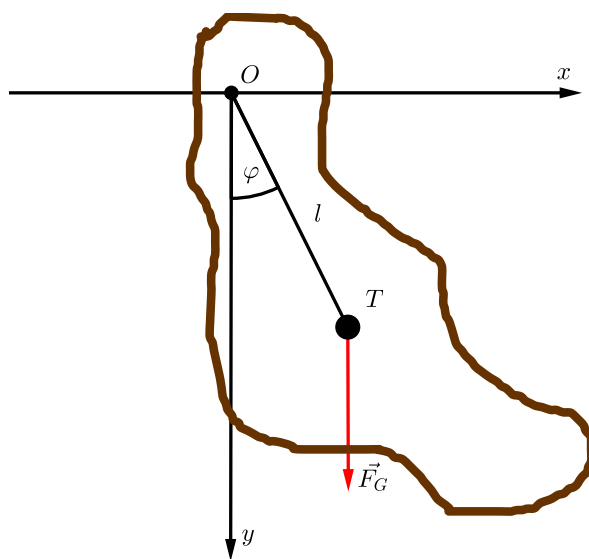
$$\Omega_{rez} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}. \quad (2.31)$$



Obrázek 2.8: Amplituda nucených kmitů  $\Phi_0$  v závislosti na frekvenci buzení  $\Omega$  pro různé hodnoty tlumení  $\delta_1 < \delta_2 < \delta_3$

### 2.3.2 Fyzické kyvadlo

Matematické kyvadlo je velmi idealizovaným modelem a malé těleso zavěšené na dlouhém vlákně je jen přiblížením matematického kyvadla (resp. naopak). Modelem, který je blíže realitě, je fyzické kyvadlo, což je tuhé těleso zavěšené tak, aby se mohlo kývat kolem osy procházející mimo těžiště (viz obrázek [2.9](#)).



Obrázek 2.9: Model fyzického kyvadla s těžištěm  $T$ , které se otáčí okolo osy  $O$

Možností, jak odvodit pohybovou rovnici pro fyzické kyvadlo, je opět více. Můžeme vyjít ze zákona zachování mechanické energie, což je postup, který by bylo možno zařadit i do výběrových fyzikálních seminářů na středních školách a gymnáziích, za předpokladu, že je téma *Moment setrvačnosti* důkladně probráno (viz např. [69](#)).

K pohybové rovnici bychom mohli opět dojít i pomocí Lagrangeových rovnic 2. druhu (např. [107](#)). Tentokrát však využijeme postup, který spadá do úvodních vysokoškolských kurzů mechaniky a zakládá se na 2. větě impulzové [87](#), [88](#), [69](#).

Fyzické kyvadlo popíšeme pomocí jeho hmotnosti  $m$ , vzdálenosti těžiště od osy otáčení  $l$  a momentu setrvačnosti vzhledem k ose otáčení  $J_o$  (obrázek [2.9](#)). Dále uvažujeme pohyb v tíhovém poli se zrychlením  $g$  a zanedbáváme veškeré tření a odporové síly.

Pohyb kyvadla popíšeme podobně jako v případě matematického kyvadla pomocí okamžité úhlové výchylky  $\varphi$  a úhlové rychlosti  $d\varphi/dt$ .

Samozřejmě bychom mohli počítat i s momentem setrvačnosti vůči ose procházející těžištěm tělesa  $J_s$ . Vztah mezi oběma zmiňovanými momenty setrvačnosti popisuje tzv. *Steinerova věta* [87]

$$J_o = J_s + ml^2.$$

Druhá věta impulsová nám říká

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M},$$

kde  $\vec{L}$  označuje moment hybnosti tělesa a  $\vec{M}$  celkový moment sil působících na těleso. Konkrétně pro složky ve směru osy otáčení platí (s využitím vztahu  $L_o = J_o d\varphi/dt$ )

$$J_o \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl \sin \varphi. \quad (2.32)$$

Jednoduchými algebraickými úpravami a po zavedení označení pro úhlovou frekvenci vlastního kmitání  $\omega_0 = \sqrt{mgl/J_o}$  dostaneme pohybovou rovnici pro fyzické kyvadlo

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0. \quad (2.33)$$

Při aproximaci pro malé kmity kyvadla  $|\varphi| \ll 1$ , kdy  $\varphi \approx \sin \varphi$ , se pohybová rovnice zjednoduší na

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi = 0. \quad (2.34)$$

Řešení této rovnice při počátečních podmínkách  $\varphi(0) = \varphi_0$  a  $\frac{d\varphi}{dt}(0) = 0$  je

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega_0 t), \quad |\varphi_0| \ll 1 \quad (2.35)$$

a pro periodu vlastního kmitání fyzického kyvadla  $T_0$  platí

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J_o}{mgl}}. \quad (2.36)$$

Nutno ještě dodat poznámku ke „vztahu“ mezi fyzickým a matematickým kyvadlem. Ke každému fyzickému kyvadlu totiž můžeme přiřadit tzv. *redukovanou délku*  $l'$ , která se zavádí jako délka závěsu matematického kyvadla se stejnou periodou kmitů [69].

Úpravami rovnosti

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_o}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{l'}{g}}$$

a pomocí *Steinerovy věty* ( $J_o = J_s + ml^2$ ) získáme vztah pro *redukovanou délku*  $l'$

$$l' = \frac{J_o}{ml} = \frac{J_s + ml^2}{ml} = l + \frac{J_s}{ml} > l. \quad (2.37)$$

Například pro kyvadlo, které tvoří malá kulička o poloměru  $r = 0.5$  cm (moment setrvačnosti vůči ose procházející těžištěm je dán vztahem  $J_s = 2mr^2/5$ ) na závěsu o zanedbatelné hmotnosti a délce  $l = 1$  m (odpovídá vzdálenosti těžiště od osy otáčení), vychází relativní prodloužení *redukované délky*  $l'$  vůči vzdálenosti těžiště od osy otáčení  $l$

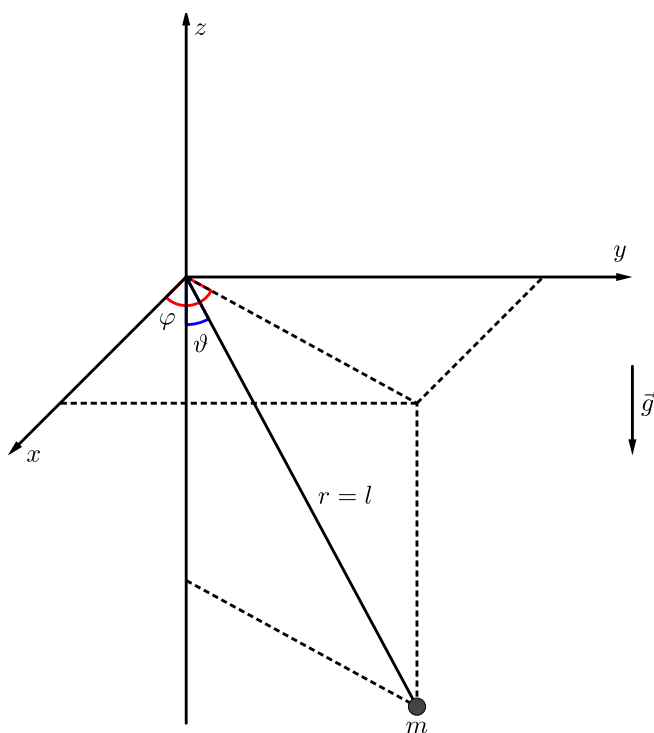
$$\frac{l' - l}{l} = \frac{J_s}{ml^2} = \frac{\frac{2mr^2}{5}}{ml^2} = \frac{2r^2}{5l^2} = 10^{-6}.$$

V druhém případě uvažujme fyzické kyvadlo, které tvoří homogenní tyčka o délce  $d$  otáčející se kolem osy procházející jedním jejím koncem (vzdálenost mezi osou a těžištěm je rovna polovině její délky  $l = d/2$ ). Moment setrvačnosti vůči ose otáčení je dán vztahem  $J_o = md^2/3 = 4ml^2/3$ . Tentokrát vychází relativní prodloužení *redukované délky*  $l'$  vůči vzdálenosti těžiště od osy otáčení  $l$

$$\frac{l' - l}{l} = \frac{J_o - ml^2}{ml^2} = \frac{\frac{4ml^2}{3} - ml^2}{ml^2} = \frac{1}{3}.$$

### 2.3.3 Sférické kyvadlo

U obou výše diskutovaných kyvadel jsme se omezili na pohyb pouze v rovině, avšak svět okolo nás má tři rozměry a ani kyvadlo se nemusí pohybovat jen v rovině. Pojďme se podívat na pohyb sférického kyvadla, jehož závaží se pohybuje po kulové ploše (jinými slovy jeho pohyb je vázaný na sféru).



Obrázek 2.10: Model sférického kyvadla

Budeme pracovat s kyvadlem, které je třírozměrnou analogií rovinného matematického kyvadla se závažím v podobě hmotného bodu o hmotnosti  $m$  zavěšeného na pevné tyči o konstantní délce  $l$  a zanedbatelné hmotnosti v homogenním

tíhovém poli se zrychlením  $g$  (viz obrázek 2.10). Stejně jako v případě předchozích kyvadel neuvažujeme žádné tření ani odporové síly.

Pohybové rovnice sférického kyvadla odvodíme pomocí Lagrangeovy funkce  $L$  (lagrangiánu) a integrálů pohybu. Tento přístup je použit např. v [89, 106, 109, 108].

Pohyb kyvadla v trojrozměrném prostoru je omezen vazební podmínkou  $r = l$ , kde  $r$  značí poloměr kulové plochy, po které se pohybuje závaží kyvadla. Proto je vhodné k popisu pohybu kyvadla využít sférické souřadnice  $(r, \vartheta, \varphi)$ , resp. především úhlové souřadnice  $\vartheta$  a  $\varphi$ , protože radiální vzdálenost  $r$  je konstantní.

Od kartézských souřadnic s počátkem v bodě závěsu můžeme přejít ke sférickým souřadnicím se stejným počátkem (viz obrázek 2.10) pomocí rovnic

$$\begin{aligned}x &= l \sin \vartheta \cos \varphi, \\y &= l \sin \vartheta \sin \varphi, \\z &= -l \cos \vartheta.\end{aligned}$$

Potenciální energie závaží kyvadla  $E_p$  je dána vztahem (nulovou hladinu potenciální energie uvažujeme na úrovni bodu závěsu kyvadla  $z = 0$ )

$$E_p = mgz = -mgl \cos \vartheta$$

a pro jeho kinetickou energii  $E_k$  platí

$$E_k = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2),$$

kde tečky značí časové derivace.

Dosazením do lagrangiánu  $L$  získáme rovnici

$$L = E_k - E_p = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) + mgl \cos \vartheta. \quad (2.38)$$

Snadno nahlédneme, že lagrangián  $L = L(\vartheta, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi})$ , jinými slovy nezávisí na souřadnici  $\varphi$ . Říkáme, že souřadnice  $\varphi$  je cyklická a jí příslušející zobecněná hybnost  $p_\varphi$  je integrálem pohybu

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} = \text{konst.} \quad (2.39)$$

Vzhledem k tomu, že Lagrangián  $L$  explicitně nezávisí ani na čase  $t$ , zachovává se i celková mechanická energie, čímž dostaneme druhý integrál pohybu

$$E = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) - mgl \cos \vartheta = \text{konst.} \quad (2.40)$$

Úpravami soustavy rovnic (2.39) a (2.40) dostaneme

$$\dot{\vartheta} = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{ml^2}} \sqrt{E - U_{ef}(\vartheta)}, \quad (2.41)$$

kde  $U_{ef}(\vartheta)$  je souhrnné označení pro členy závislé pouze na  $\vartheta$  (tzv. *efektivní potenciální energie*)

$$U_{ef}(\vartheta) = \frac{p_\varphi^2}{2ml^2 \sin^2 \vartheta} - mgl \cos \vartheta.$$

Vyjádřením členu  $dt$  z rovnice (2.41), resp. členu  $d\varphi$  z rovnice (2.39),

$$dt = \pm \sqrt{\frac{ml^2}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{E - U_{ef}(\vartheta)}},$$

$$d\varphi = \frac{p_\varphi}{ml^2 \sin^2 \vartheta} dt,$$

dosazením za člen  $dt$  v případě druhé z rovnic a následnou integrací obou rovnic získáme vztahy

$$t = \pm \sqrt{\frac{ml^2}{2}} \int \frac{d\vartheta}{\sqrt{E - U_{ef}(\vartheta)}},$$

$$\varphi = \pm \frac{p_\varphi}{\sqrt{2ml^2}} \int \frac{d\vartheta}{\sin^2 \vartheta \sqrt{E - U_{ef}(\vartheta)}},$$
(2.42)

kde integrál ve vztahu pro  $t$  je možné upravit na eliptický integrál 1. druhu a integrál v rovnici pro  $\varphi$  je možné upravit na součet dvou eliptických integrálů 3. druhu (uvedeno v [89, 106]).

Vztahy a hodnoty pro eliptické integrály jsou tabelovány, případně je možné je rozvinout pomocí Taylorovy řady (viz např. [106]). Zájemci o řešení a využití eliptických integrálů se o nich mohou více dočíst např. v [110, 111] (resp. přímo v souvislosti s pohybem sférického kyvadla v již citované práci [108]).

Druhou možností je popsat pohyb sférického kyvadla pomocí pohybových rovnic pro  $\varphi$  a  $\vartheta$ , které vycházejí z Lagrangových rovnic 2. druhu. Následující postup je prezentován např. v [85, 109, 112].

Dosazením do Lagrangeovy rovnice 2. druhu pro souřadnici  $\varphi$  a jí příslušející zobecněnou rychlost  $\dot{\varphi}$  (resp. pro  $\vartheta$  a její zobecněnou rychlost  $\dot{\vartheta}$ )

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt} (ml^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}) = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = \frac{d}{dt} (ml^2 \dot{\vartheta}) - ml^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2 + mgl \sin \vartheta = 0$$

dostaneme dvojici diferenciálních rovnic pro pohyb sférického kyvadla (mimocho-dem, první z rovnic je shodná s rovnicí (2.39), kterou vzešla z úvahy, že  $\varphi$  je cyklická souřadnice)

$$ml^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} = \text{konst.} = p_\varphi,$$

$$\ddot{\vartheta} + \frac{g}{l} \sin \vartheta - \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2 = 0.$$

Tuto soustavu pohybových rovnic lze ještě poupravit na finální tvar

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{g}{l} \sin \vartheta + \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2,$$

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{ml^2 \sin^2 \vartheta}.$$
(2.43)

Obzvláště z toho řešení je dobře vidět, že v případě, kdy je moment hybnosti  $p_\varphi$  sdružený se souřadnicí  $\varphi$  roven nule, pak platí

$$p_\varphi = 0 \Rightarrow \dot{\varphi} = 0 \Rightarrow \varphi = \text{konst.},$$

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{g}{l} \sin \vartheta,$$

jinými slovy dostaneme klasické rovinné matematické kyvadlo.

### Aproximace pro malé kmity

Výsledné pohybové rovnice nemají jednoduše analyticky vyjádřitelné řešení (zmíněné bylo např. rozvinutí pomocí Taylorovy řady). Avšak stejně jako v případě matematického kyvadla se můžeme nejprve zaměřit na případ s malými výchylkami (především pro malé  $\vartheta$ , resp. pro  $|x|, |y| \ll l$ ). S uvedeným postupem se můžeme setkat např. v [112, 108].

Vraťme se zpět ke kartézským souřadnicím a rozepišme si pomocí nich vazebnou podmínku  $r = l$

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2,$$

jednoduchými algebraickými úpravami získáme

$$z = \pm \sqrt{l^2 - (x^2 + y^2)}$$

Vzhledem k tomu, že se omezujeme jen na malé výchylky okolo stabilní polohy, můžeme brát  $z$  se záporným znaménkem.

V souladu s předpokladem pro malé výchylky  $|x|, |y| \ll l$ , nechť

$$x^2 + y^2 \leq d^2 \ll l^2$$

pak platí

$$l^2 - (x^2 + y^2) \geq l^2 - d^2 = l^2 \left[ 1 - \left( \frac{d}{l} \right)^2 \right].$$

Zderivováním vztahu pro souřadnici  $z$  dle času  $t$  (a umocněním) dojdeme k výrazu

$$\dot{z}^2 = \frac{(x\dot{x} + y\dot{y})^2}{l^2 - (x^2 + y^2)} \leq \frac{(x\dot{x} + y\dot{y})^2}{l^2 \left[ 1 - \left( \frac{d}{l} \right)^2 \right]} = \frac{(x\dot{x})^2 + (y\dot{y})^2 + 2(x\dot{x})(y\dot{y})}{l^2 \left[ 1 - \left( \frac{d}{l} \right)^2 \right]},$$

což můžeme ještě dále upravovat pomocí známých vztahů pro absolutní hodnoty ( $a < |a|$  a  $|2ab| \leq a^2 + b^2$ )

$$\dot{z}^2 \leq \frac{2}{1 - \left( \frac{d}{l} \right)^2} \frac{x^2\dot{x}^2 + y^2\dot{y}^2}{l^2} \leq \frac{2}{1 - \left( \frac{d}{l} \right)^2} \frac{d^2}{l^2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2).$$

Vzhledem k tomu, že  $1 - \left( \frac{d}{l} \right)^2 \approx 1$ , uvažujme, že hodnota celého prvního zlomku nebude větší než například 3. Zároveň  $d^2/l^2 \ll 1$ , proto platí

$$\dot{z}^2 \ll \dot{x}^2 + \dot{y}^2,$$

jinými slovy můžeme člen  $\dot{z}$  v dalších krocích zanedbat.



Dosazením do lagrangiánu  $L$  vyjádřeného v kartézské soustavě souřadnic

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

získáme rovnost (v souladu s našimi aproximacemi)

$$L \approx \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mg\sqrt{l^2 - (x^2 + y^2)}. \quad (2.44)$$

S využitím přiblížení pro členy pod odmocninou vycházejícího z Taylorova rozvoje

$$\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{l^2}} \approx 1 - \frac{x^2 + y^2}{2l^2}$$

dojdeme k tvaru

$$L \approx \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgl \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{2l^2}\right). \quad (2.45)$$

Snadno nahlédneme, že souřadnice  $x$  a  $y$  nejsou v lagrangiánu  $L$  nijak provázané a  $L$  má navíc tvar jako pro dvourozměrný harmonický oscilátor. Z něj pak obdržíme pohybové rovnice

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\omega_0^2 x, \\ \ddot{y} &= -\omega_0^2 y, \end{aligned} \quad (2.46)$$

kde  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$  je úhlová frekvence vlastního kmitání oscilátoru.

Složení pohybů těchto dvou harmonických oscilátoru se stejnou frekvencí je dán periodický pohyb po elipse (případně kružnici) s periodou  $T_0$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (2.47)$$

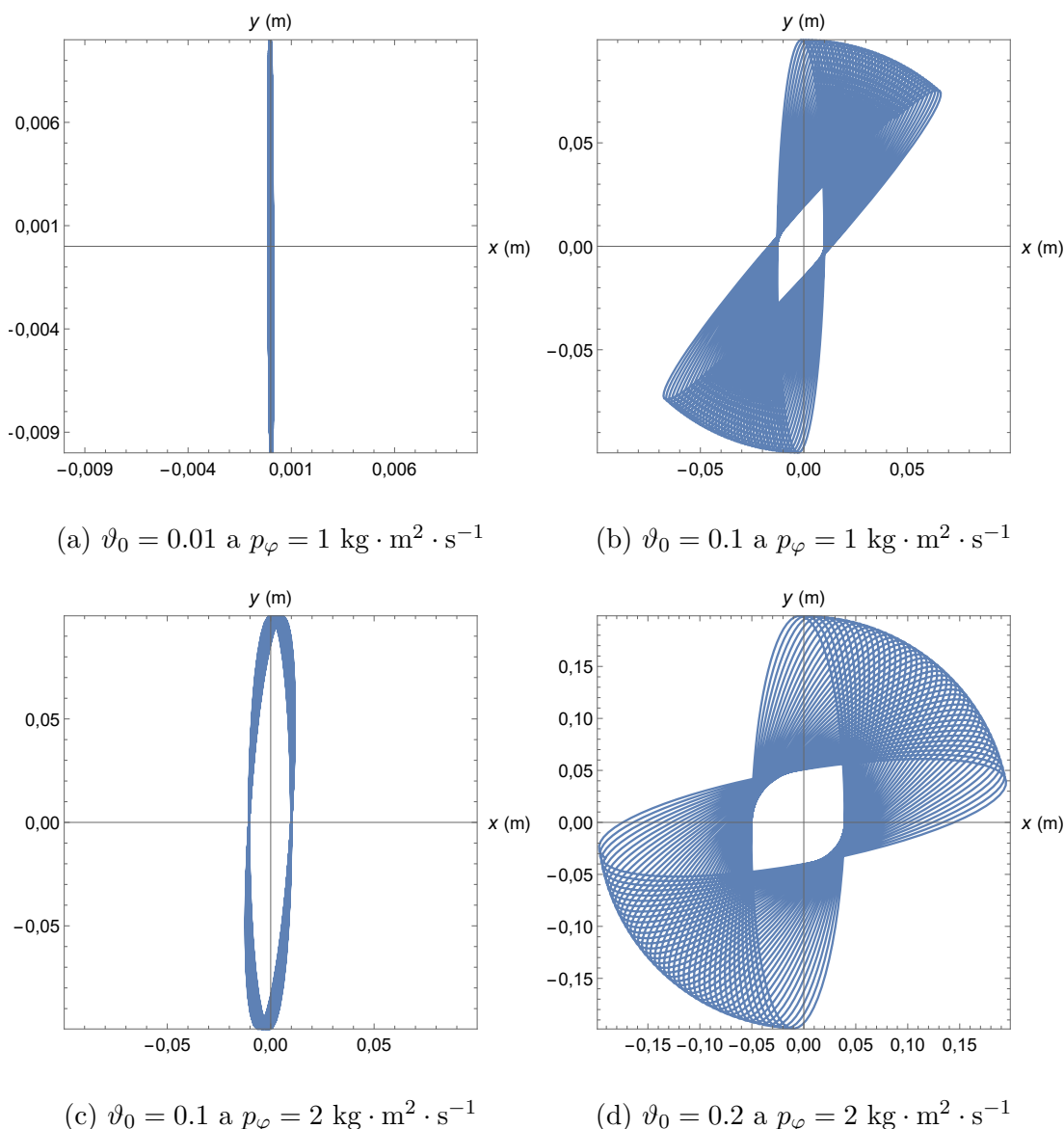
## Pohyb sférického kyvadla v případě větších výchylek

Pro větší výchylky se pohyb kyvadla více odchyluje od harmonického průběhu, což mimo jiné způsobuje stáčení bodu, ve kterém kyvadlo dosahuje maximální výchylky/výšky (což bylo diskutováno např. v [113]). Odvození rovnic pro stáčení bodu „maxima“ výchylky lze nalézt např. v [114, 115, 108].

Další možností, jak ukázat stáčení kyvadla, je pomocí numerického řešení soustavy rovnic (2.43) v nějakém matematickém programu (v mém případě *Wolfram Mathematica*). Z appletů dostupných na internetu mě nejvíce zaujal tento [116], kde je vykreslován pohyb sférického kyvadla ve všech třech dimenzích.

V grafech 2.11a až 2.11d jsou vykresleny průměty pohybu sférického kyvadla (s parametry  $m = 1$  kg,  $l = 1$  m a  $g = 10$  m·s<sup>-2</sup>) do roviny  $xy$  pro různé počáteční hodnoty úhlové výchylky  $\vartheta(0) = \vartheta_0 > 0$  a momentu hybnosti  $p_\varphi > 0$ . Ostatní počáteční podmínky pokládám rovny nule ( $\dot{\vartheta}(0) = 0$  a  $\varphi(0) = 0$ ).

Z grafu 2.11a je poměrně dobře vidět, že při velmi malých amplitudách  $\vartheta_0$  a ne příliš velkém momentu hybnosti  $p_\varphi$  se sférické kyvadlo pohybuje téměř v rovině. Na druhou stranu, z grafu 2.11b nahlédneme, že ačkoliv je moment hybnosti  $p_\varphi$  stejný, při desetinásobné amplitudě je stáčení bodu s maximální výchylkou mnohem výraznější. Z porovnání grafů 2.11b a 2.11c je patrné, že s větším momentem hybnosti  $p_\varphi$  je při stejné amplitudě výchylky  $\vartheta_0$  stáčení naopak méně výrazné.



Obrázek 2.11: Průměty pohybu sférického kyvadla do roviny  $xy$  pro různé počáteční hodnoty  $\vartheta_0$  a  $p_\varphi$

### 2.3.4 Sbírkky úloh a příkladů pro studenty vysokých škol

V sekci [2.2.2](#) věnované tématu *kyvadlo* na úrovni gymnázií a středních škol jsem uvedla výsledky řešerše úloh a příkladů vhodných (nejen) k procvičování. Zde by tedy bylo dobré zmínit, že existují sbírky úloh a příkladů (resp. skripta k jednotlivým fyzikálním předmětům) i pro studenty vysokých škol (např. [\[117\]](#), [\[118\]](#), [\[119\]](#), [\[120\]](#)). Krom skript a sbírek úloh lze čerpat inspiraci také z některých vysokoškolských učebnic (např. [\[121\]](#)).

Příklady na úrovni vysokých škol lze nalézt samozřejmě i na internetu (např. již zmíněna *Sbírka řešených úloh* [\[61\]](#)). Případně lze využít úlohy ze soutěží určených pro středoškolačky jako je *Fyzikální olympiáda* [\[67\]](#) a *Fyzikální korespondenční seminář FYKOS* [\[68\]](#), protože mnohé z úloh jsou na úrovni vysokých škol (především co se týče matematických aparátů - Lagrangeův a Hamiltonův formalismus atd.).

Nutno podotknout, že v tomto případě se většinou nejedná jen o prosté dosazování do známých vztahů, ale je vyžadována hlubší analýza fyzikální situace. Problémem zadaným k vyřešení může být i sestavení pohybové rovnice pro danou situaci.

## 3. Základní experimenty

Fyzika, jakožto exaktní přírodní věda (i školní předmět), je založena na experimentech a pozorování přírody, světa a celého vesmíru. Proto jsou pokusy ve výuce přinejmenším stejně důležitou součástí jako samotná teorie, která zkoumané jevy popisuje a vysvětluje [122].

Stejně jako ve vědecké sféře zůstávají fyzikální modely nepotvrzené experimenty pouze hypotézami, měli bychom i ve školní výuce věnovat dostatek času pokusům, ať už za účelem demonstrace jevů, které s žáky probíráme, nebo ještě lépe v podobě žákovského bádání, kdy mají žáci možnost fyzikální zákonitosti „objevovat“ sami. Na druhém přístupu je založena tzv. *badatelsky orientovaná výuka* (IBSE), která je v současné době čím dál populárnější [123, 124].

V České republice je tímto badatelským přístupem inspirován např. projekt *Heuréka* [125, 126]. O využití badatelské (resp. heuristické) metody se ještě jednou zmíním v podkapitole 3.3 věnované laboratorním pracím a žákovským měřením.

Vhodně zvolené experimenty, které reflektují reálnou podstatu dějů, přispívají k hlubšímu porozumění látky, získávání nových poznatků a zkušeností či upevňování již nabytých znalostí [127, 128]. Dále napomáhají rozvíjení schopnosti řešení problémů a dalších dovedností (včetně manuálních). Pokusy navíc dávají prostor k reflexi a rozšiřujícím diskuzím s žáky (nebo mezi žáky samotnými). V neposlední řadě mohou zvyšovat přitažlivost samotného předmětu (který v poslední době bohužel nepatří zrovna mezi nejoblíbenější [129]).

Ostatně stejně jako pro vše, co je do výuky zařazované, i v případě pokusů je nutné si položit otázku, jaká je funkce daného experimentu (resp. laboratorní práce) a co je jeho didaktickým cílem. Tomu pak bude odpovídat časový plán a konkrétní místo ve výuce (např. motivační experiment bude výklad předcházet, na druhou stranu, experiment sloužící k ověření daného jevu bude výklad následovat).

Školní pokusy je možné klasifikovat podle několika různých hledisek (zaměření, provedení, logické povahy a didaktické funkce) [128, 130]. V první podkapitole se zaměřím na základní (nejen) demonstrační experimenty s pomůckami, které jsou běžně dostupné ve školních fyzikálních kabinetech a laboratořích. Většina z prezentovaných pokusů však může být provedena i ve formě žákovského experimentu. Druhá podkapitola bude věnována počítačovým animacím, simulacím a vzdáleným experimentům. V poslední podkapitole pak budou rozebírány laboratorní práce a žákovská měření, které by bylo možné i vhodné do výuky zařadit.

### 3.1 Reálné demonstrační experimenty a pokusy s jednoduchými pomůckami

Do této kategorie spadají veškeré pokusy skutečně prováděné ve škole během vyučování, ať už se jedná o experimenty předváděné vyučujícím, žákem ve spolupráci s vyučujícím či jednoduché pokusy, které provádějí sami žáci. Vždy je pak dobré zapojit všechny studenty minimálně do diskuzí předcházejících experimentů a následujících po jeho provedení. Nutno však poznamenat, že většinu z dále uvedených experimentů si mohou žáci udělat a vyzkoušet sami doma.

Experiment může mít kvalitativní povahu (což je jeho častější podoba), kdy řešíme především existenci jevu, děje nebo procesu bez vymezení vztahu mezi veličinami, nebo kvantitativní provedení, při kterém pomocí měření zjišťujeme vztahy a zákonitosti mezi zkoumanými veličinami, případně dokonce formulujeme konkrétní (alespoň přibližný) matematický model děje [128, 130].

Inspiraci pro pokusy mohou vyučující hledat v českých tištěných sbírkách pokusů (např. [131, 132, 133, 134]) či v publikacích určených pro vysokoškolské kurzy praktik školních pokusů (např. [135, 136, 137]).

Z českých zdrojů dostupných na internetu bych ráda zmínila sborníky *Veletrhu nápadů učitelů fyziky* [138], kde se nachází mnoho zajímavých návrhů jednodušších i netradičních pokusů (klíčové slovo *kyvadlo* odkazuje na více než 20 článků, např. [102, 139, 140, 141]), *Sbírku fyzikálních pokusů* [142], kde lze nalézt jak inspiraci, tak i videa s reálným předvedením experimentů (pro téma *kyvadlo* zde však bohužel momentálně nic není) a sbírku videopokusů na fyzikálním serveru *FyzWeb* [143]. Ze soutěží je pak možné odkázat na seznam experimentů ze soustředění pořádaných v rámci *Fyzikálního korespondenčního semináře FYKOS* [93].

Co se týče zahraničních zdrojů, zde je paleta možností mnohem širší, stačí při vyhledávání použít hesla jako „physics experiments“, „physics projects“ nebo „low cost physics experiments“ (v případě kyvadla např. „pendulum experiments“). Ze serióznějších a obsáhlejších zdrojů bych ráda zmínila server *Institut of Physics Publishing*, kde vedle nejrůznějších vědeckých článků lze nalézt i mnoho článků věnovaných pokusům, z nichž některé si mohou dokonce žáci provést sami doma [145, 146]. Neméně zajímavými a důležitými zdroji článků jsou servery *ComPADRE* [147] či *Science NetLinks* [148].

Návrhy na experimenty a další (nejen) vědecké články se nachází i na stránkách známých mezinárodních organizací jako je např. *NASA* [149]. Tyto články slouží především k podpoře a propagaci vědeckého vzdělávání. Ze stránek určených pro vyučující lze zmínit např. server *We Are Teachers* [150], kde jsou i články s didaktickými radami a obecně nápady na obohacení výuky.

Dále je k dispozici mnoho „populárně naučných“ serverů, odkud je možné čerpat inspiraci na pokusy (např. *Interesting engineering* [151] nebo *Science Buddies* [152]). Mnoho experimentů je pak také uvedeno a prezentováno na stránkách se sbírkami (nejen) fyzikálních pokusů a projektů (např. [153] nebo [154], v obou případech je však obtížné dohledat autory). Video s fyzikálními experimenty, které lze případně dokonce zařadit do výuky místo reálného předvedení, je pak samozřejmě možné nalézt na platformě *YouTube* (např. [155]).

V následující pasáži se zaměřím na několik pokusů, které by bylo možné zařadit do výuky, s odkazy na materiály popisující jejich konkrétní provedení. V tomto výběru využívám výhradně české internetové zdroje, protože bych ráda ukázala, jaké pokusy jsou prezentovány v českém školství (a také jak jsou převáděny).

## Matematické kyvadlo a jeho základní vlastnosti

Pod tímto termínem označuji základní a pravděpodobně nejdůležitější experiment s kyvadlem v podobě závaží na niti či provázku zavěšeného na stojanu. Tento experiment je popsán např. v [156, 157].

Během pokusu vyučující nebo žáci zkoumají závislost periody kmitu na délce závěsu, hmotnosti závaží a velikosti amplitudy výchylky. Tento experiment může sloužit jako ilustrace jevu a ověření již předtím odvozených teoretických vztahů,

ale může být zařazen do výuky také jako motivace či být využit k heuristickému (a alespoň přibližnému) odhadnutí závislostí mezi diskutovanými veličinami před samotným výkladem. Experiment může také posloužit k určení tíhového zrychlení ze známé délky závěsu a periody kmitu.

Více budu tento pokus a s ním spojená fyzikální měření diskutovat v části [3.3](#) věnované laboratorním pracím, protože se jedná o typický příklad práce, která bývá do výuky zařazována.

## Vázané mechanické oscilátory

Pokus s vázanými mechanickými oscilátory, neboli spřaženými kyvadly, rovněž spadá mezi základní a zajímavé experimenty s kyvadly. Popis a provedení lze nalézt např. v [\[157, 158\]](#). Tento pokus se řadí spíše mezi ilustrační pokusy, ačkoliv i zde lze provádět měření a ověřovat teoretické předpovědi (což se dost často provádí v rámci vysokoškolských praktik, např. [\[159\]](#)).

Vázané oscilátory jsou dva oscilátory (v tomto případě kyvadla) se shodnou vlastní frekvencí kmitání, které jsou navzájem spojené vazbou (ideálně pružnou vazbou, např. pružinou či gumou). Pomocí vazby dochází k periodickému přenosu mechanické energie z jednoho oscilátoru na druhý (rezonátor) a zpět.

Příprava i provedení pokusu jsou poměrně jednoduché, na stojan zavěsíme na nit či provázek dvě závaží představující kyvadla a oba závěsy spojíme nějakou pružnou vazbou (např. gumou nebo dalším delším provázkem uprostřed zatíženým malým závažíčkem, ve vysokoškolských praktikách se využívají kyvadla s pevnou tyčí spojená pružinou [\[159\]](#)).

Po vychýlení prvního kyvadla z rovnovážné polohy a jeho následném vypuštění se kyvadlo začne kývat, avšak amplituda jeho výchylky se bude postupně zmenšovat. Na druhou stranu, druhé kyvadlo se začne kývat se stejnou frekvencí, ale s postupně rostoucí amplitudou výchylky. V momentě, kdy se první kyvadlo zastaví (nebo bude jeho výchylka tak malá, že ji ani nebude možné pořádně zaznamenat), druhé kyvadlo bude kmitat s maximální amplitudou. Následně dochází k opačné přeměně a celkově se děj periodicky opakuje.

Se studenty je vhodné diskutovat, proč a jak k celému ději dochází a jak je to s velikostí maximální amplitudy kmitání obou kyvadel. V ideálním případě bez odporových sil a tření by maximální amplituda obou kyvadel měla být stejná jako počáteční amplituda prvního kyvadla. Studentům pak také můžeme položit otázku, proč k tomu v realitě nedochází.

Dále by bylo dobré vyzkoušet, jak bude pohyb kyvadel záviset na poloze vazby. Pokud je vazba umístěná níže na závěsu, dochází k přenosu energie rychleji. Stejně tak dochází k přenosu rychleji i v případě větší tuhosti spojovací vazby (v případě gummy či pružiny).

Zjednodušenou formou tohoto experimentu může být pokus s gumou a kolíčky jako kyvadly (viz [\[160\]](#)). Otočíme židli a položíme sedadlem na stůl. Mezi nohy židle natáhneme gumu, na kterou připevníme kolíčky. Jeden z kolíčků rozkmitáme a následně celý pokus probíhá obdobně jako v předchozím případě. V této variantě vazbu mezi kyvadly zprostředkovává „kmitající“ guma, proto rychlost přenosu energie ovlivní různé napnutí gummy či vzájemná vzdálenost kolíčků.

## Grafické znázornění periodické změny amplitudy výchylky v čase

Jak již bylo diskutováno v části [2.3.1](#) s teoretickým odvozením, v aproximaci malých výchylek lze vývoj změny amplitudy výchylky v čase popsat harmonickou funkcí (např. konkrétně rovnicí  $\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega_0 t)$ ). Otázkou je, zda je možné závislost amplitudy výchylky na čase nějak zachytit ve skutečnosti a porovnat s teoretickými časovými diagramy.

Postup a provedení odpovídajícího pokusu je popsáno např. v [\[161\]](#), [\[162\]](#), kde závaží kyvadla tvoří nálevka (nebo kornout z papíru s ustřiženou špičkou) naplněná jemným pískem. Pod kyvadlo umístíme dostatečně dlouhý papír (např. několik listů slepených k sobě do dlouhého pásu), kyvadlo rozkýváme a papír pod kyvadlem rovnoměrně posouváme.

Vzhledem k tomu, že se kyvadlo rovnoměrně periodicky vychyluje oběma směry, unikající písek z kornoutu na papíře vytváří pravidelně opakující se křivku - sinusoidu, křivku odpovídající harmonickému ději.

Další provedení pokusu může být například se závažím v podobě malé lahvičky s obarvenou vodou a otvorem umožňujícím rovnoměrně vytékání vody (s touto variantou jsem se setkala v rámci kurzu *Praktika školních pokusů I* na MFF UK [\[163\]](#)). Ve všech provedeních se jedná o typický příklad ilustračního pokusu.

## Zkouška odvahy

Další pokus pravděpodobně nepatří k nejdůležitějším, co se vlastností matematického kyvadla či jiných typů kyvadel týče, ale jedná se o skvělou ukázkou zákona zachování mechanické energie. Pokus, jeho postup a didaktické poznámky jsou převzaty z [\[164\]](#). Díky své popularitě se navíc na internetu nachází mnoho videí s tímto pokusem (např. [\[165\]](#), [\[166\]](#)). Tento pokus by bylo možné zařadit například mezi problémové úlohy uvedené pokusem.

K pokusu je potřeba PET láhev s vodou a otvorem ve víčku pro provaz, pevný tenký dlouhý provaz nebo lanko a závěs ve výšce několika metrů (např. u stropu nebo zábradlí schodiště). Z láhve a provazu se sestaví kyvadlo, které se zavěsí ke stropu nebo na bezpečné místo na schodiště tak, aby se zavěšená láhev mohla volně kývat.

Vyučující či nějaký dobrovolný experimentátor z řad studentů vychýlí láhev z rovnovážné polohy a přitáhne láhev tak, aby se na napnutém provaze dotýkala jeho/jejího nosu. Poté láhev vypustí a musí zůstat stát na stejném místě bez jakéhokoli pohnutí (obzvláště při prvním návratu lahve).

Před samotným provedením experimentu je vhodné s žáky diskutovat jeho výsledek, tedy zda láhev narazí do experimentátora nebo ne, a především proč. Pokud se experimentátor nepohne, pak ke srážce s obličejem skutečně nedojde. Po provedení by bylo vhodné projít celý problém ještě jednou a zdůraznit, že se jedná o aplikaci zákona zachování mechanické energie v praxi.

Vzhledem k tomu, že láhev nezískává při svém pohybu žádnou energii a dochází pouze k přeměně potenciální energie v kinetickou a zpět, láhev nemůže vystoupat do vyšší polohy, než z jaké byla vypuštěna. Naopak během pohybu dochází k energetickým ztrátám způsobeným třením v závěsu a odporem vzduchu, takže láhev původní polohy ani nedosáhne.

## Balistické kyvadlo

Poslední z uvedených experimentů souvisí s dnes již spíše historickým využitím kyvadla, a to určováním rychlosti náboje (kulky, broku, diabolky) ze střelné zbraně (vzduchovka, pistole, ...). Tento pokus je podrobně popsán a diskutován např. v [63] a souvisejícím článku [167]. Rovněž patří do sbírek přípravných demonstračních experimentů KVOF MFF UK [168].

Stručně řečeno, balistické kyvadlo slouží k určení rychlosti střely na základě výšky, do které závaží vystoupá, resp. výchylky ve vodorovném směru nebo skutečné úhlové výchylky kyvadla. Všechny tyto údaje lze získat například analýzou videozáznamu pokusu.

Jako závaží kyvadla lze použít krabičku s vhodnou výplní (dřevo nebo kov v případě diabolky a broků, je-li zbraní kuličková pistole, lze pravděpodobně vystačit jen s kartonem či molitanem). Při zavěšování kyvadla je pak nutné zajistit, aby se kyvadlo pohybovalo pouze podél jedné osy a nedocházelo k přílišným vibračním závěsům. Jako střelnou zbraň je možné použít vzduchovku nebo kuličkovou pistoli.

Největším problémem v realizaci tohoto experimentu je jeho (ne)bezpečnost. Střela se může různě odrážet a během svého letu zasáhnout nějakého nepozorného nebo neukázněného žáka. Během přípravy pokusu je také nutné přihlídnout k předpisům bezpečnosti práce a zajistit, že všechna pravidla budou dodržena. Bude-li však celý experiment předem řádně ozkoušen, vyladěn a žáci dostatečně varováni a ukázněni, pak si myslím, že se jedná o velmi pěkný experiment, který uvádí zajímavou problémovou úlohu.

Existuje však i mnohem bezpečnější varianta pokusu popsána v [141], kde jako kyvadlo slouží prázdná láhev od minerálky zavěšená na dvou nitích tak, aby její osa byla vodorovná. Střelu pak představuje objem vody v injekční stříkačce, který je „vystřelen“ proti hrdlu lahve ve směru její osy.

## 3.2 Applety, animace a vzdálené experimenty

Jak již bylo řečeno, experiment v jakékoliv formě je neoddělitelnou součástí výuky fyziky, ne vždy však máme možnost pokus provést naživo (důvodem mohou být mimo jiné časové či materiální nedostatky). V tento moment se nabízejí vymoženosti dnešní doby, a to počítače a další elektronická zařízení. Na nich je možné předvádět různé prezentace, spouštět a ovládat jednoduché animace a virtuální nebo vzdálené experimenty, které se ve výuce začínají využívat čím dál častěji (důkazem může být rozšiřující se sbírka materiálů, které lze na internetu nalézt). Ukazuje se, že jejich využití ve výuce může přispět k hlubšímu pochopení a udržení vědomostí [169, 170, 128, 171].

Výhodou těchto tzv. *e-experimentů* může být již zmiňovaná úspora financí a času, menší náročnost na učitelovu manuální zručnost a eliminace rizika úrazu. Především se však takto dají simulovat experimenty, které by ve třídě reálně ani nebylo možné provést. Pokud je navíc studentům dovoleno s *e-experimenty* pracovat samostatně, může je to zaujmout ještě více, protože mají možnost si s nimi „hrát“ sami a zároveň se přitom vzdělávají (ačkoliv z vlastní zkušenosti vím, že je nutné si ohlídat, aby žáci na mobilních zařízeních dělali jen to, co jim bylo řečeno a nebrouzdali po sociálních sítích nebo nehráli hry).



V neposlední řadě, jsou tyto *e-experimenty* ideální pro distanční výuku, což je v poslední době velmi aktuální téma. Proto této podkapitole věnuji více trošku prostoru a ráda bych zde ukázala širokou škálu možností, které jsou k dispozici. Nutno však poznamenat, že jednoduchý pokus s kyvadlem, ve kterém se zkoumají jeho vlastnosti, by si žáci mohli udělat doma sami bez větších problémů.

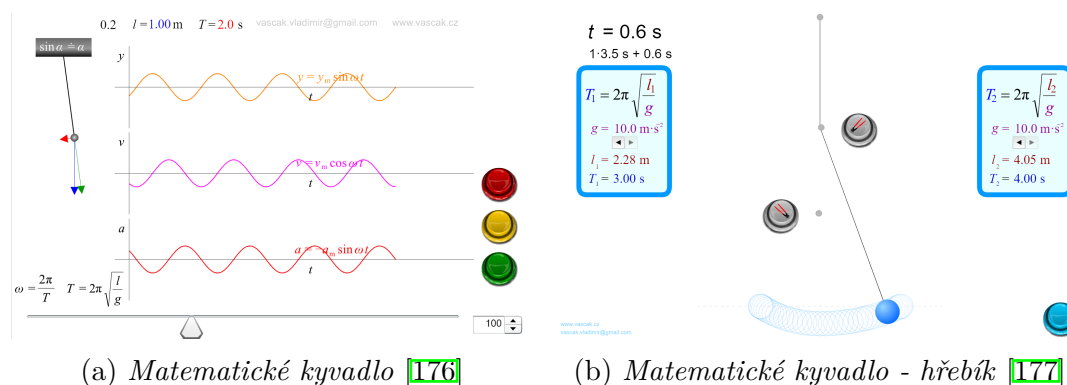
### 3.2.1 Applety a animace

Virtuální experimenty (animace a applety) jsou simulací zkoumaného fyzikálního jevu, většinou za ideálních podmínek, bez vlivu okolí jako je například odpor vzduchu či tření [172, 173]. Na druhou stranu, některé applety umožňují tyto faktory zahrnout a nastavit v parametrech experimentu. Hlavní výhodou je, že jejich prostřednictvím jsou uživatelé schopni simulovat a zkoumat jevy, které by jinak pozorovat nemohli. Další výhodou je možnost zobrazení časového průběhu veličin (např. výchylky, rychlosti) nebo vykreslení vektorových veličin, jejichž velikost a směr se při pohybu mění, šipkami v „reálném“ čase. Rovněž lze tyto simulace pouštět opakovaně bez omezení, u některých je možné měnit jejich rychlost nebo postupně krokovat.

V následujícím výběru se zaměřím hlavně na applety, které lze spustit rovnou z internetového prohlížeče. Pro spuštění těchto aplikací většinou není potřeba žádný speciální program či doplněk v prohlížeči a je možné je spustit i na mobilních zařízeních (dotykový telefon a tablet). Je však vhodné také poznamenat, že v minulosti se hojně používaly různé *Java* applety (viz např. [174]) nebo aplikace využívající dnes již nedostupný *Adobe Flash Player*.

#### České zdroje

Pravděpodobně největší z českých sbírek s animacemi a applety je stránka RNDr. Vladimíra Vašćáka [175], kde lze nalézt simulace téměř ze všech oblastí základoškolské i středoškolské fyziky a mnoho dalšího. Na tomto serveru jsem zvolila tři applety *Matematické kyvadlo*, *Matematické kyvadlo - hřebík* a *Matematické kyvadlo - helikoptéra*.



Obrázek 3.1: Applety ze sbírky RNDr. Vladimíra Vašćáka

V appletu *Matematické kyvadlo* [176] uživatel může sledovat pohyb kyvadla a časový průběh okamžité výchylky, rychlosti a zrychlení v grafu (viz obr. 3.1a). U grafů jsou uvedené i rovnice pro okamžité hodnoty těchto veličin. Avšak chybí

zde výpis okamžité hodnoty času a amplitudy výchylky, rychlosti a zrychlení jsou stále stejně veliké nezávisle na frekvenci (to je fyzikálně špatně, pokud by zároveň nedošlo k přeskálování os, což ale nikde není komentováno). Nastavit lze pouze délku závěsu, čímž se automaticky přepočítá délka periody, která je uvedena v horní části obrazovky. V dolní části jsou naopak uvedené teoretické vztahy pro úhlovou frekvenci a periodu kmitu. Pohyb lze zastavovat a krokovat.

U modelu kyvadla jsou šipky, znázorňující nějaké vektorové veličiny. Chybí zde však jejich popis. Odhaduji, že modrá šipka znázorňuje tíhovou sílu působící na závaží kyvadla, pak by červená šipka reprezentovala složku tíhové síly ve směru pohybu a zelená složku ve směru kolmém na směr pohybu. Absence popisků je tedy další velkou nevýhodou tohoto appletu.

V appletu *Matematické kyvadlo - hřebík* [177] může uživatel sledovat pohyb kyvadla a pomocí umístění jednoho či dvou hřebíků jej ovlivňovat (3.1b). Umístěním hřebíku se změní délka závěsu kyvadla (v polovině nebo celkově, pokud umístíme oba hřebíky do jednoho místa), a tím i jeho perioda (její polovina či celá). Nastavit lze i hodnotu tíhového zrychlení, čímž se také změní perioda kmitu. Výhodou je uvedení teoretického vztahu pro výpočet periody a názorné zvýraznění dosazovaných veličin. Tato simulace samozřejmě umožňuje i určení periody pro případ, kdy v každé polovině kmitá kyvadlo s jinou periodou.

Applet *Matematické kyvadlo - Helikoptéra* [178] je nejhravější z těchto tří. Pomocí zajímavé animace spojuje pohyb kyvadla s časovým průběhem okamžité výchylky (který vlastně odpovídá harmonické funkci sinus). Uživatel může nastavit délku závěsu kyvadla a velikost maximální výchylky. Dále jsou zde zobrazeny teoretické vztahy pro okamžitou výchylku a periodu kmitu a následný výpočet při dosazení konkrétních hodnot. Jedná se o velmi zajímavý nápad, avšak provedení této animace je místy až moc křiklavé a škoda, že není více propracované (např. při pozastavení zůstane člověk vychýlený, ale mraky se stále pohybují atd.).

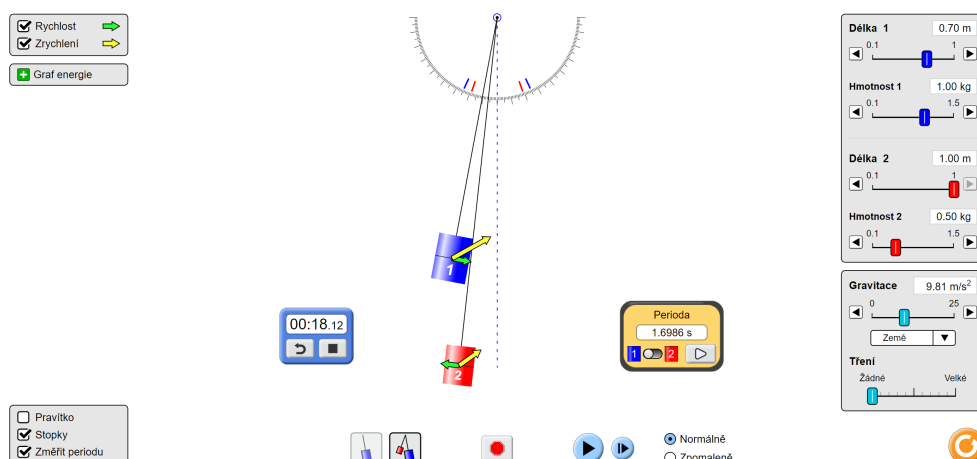
Další české sbírky s e-experimenty většinou nabízejí pouze převzaté a přeložené applety, které jsou diskutovány v následující pasáži, nebo nabízejí animace vytvořené například v programu *GeoGebra*, kterým se také budu věnovat později.

## Zahraniční zdroje

Mezi nejznámější a největší zahraniční sbírky appletů a animací patří ta z univerzity v Coloradu [179]. Většina zdejších simulací je přeložena do mnoha jazyků včetně češtiny, zbylé jsou dostupné alespoň v angličtině. Applety je navíc možné si stáhnout a používat je offline.

Konkrétně jsem na těchto stránkách zvolila simulaci s názvem *Laboratoř a kyvadlo* [180]. Zde může uživatel pracovat s jedním či dvěma kyvadly zároveň (vhodné pro porovnávání doby kyvu), nastavovat počáteční výchylku, délku závěsu, hmotnost závaží, gravitaci (tíhovou sílu) a tření v bodě závěsu. Dále je zde možnost využívat pravítka, stopky a aplikace umí i „vykreslit“ periodu. Pohyb kyvadla lze zastavovat, zpomalit i krokovat.

Tato simulace má již od začátku více možností zobrazení. Uživatel může pracovat jen se základní verzí (ta byla popsána v předchozím odstavci). Druhou možností je verze i s grafy energie. Zde je možné sledovat přeměny kinetické a potenciální energie, případně pak energetické ztráty způsobené třením. Třetí možnost zobrazení je nazvaná *Laboratoř* (obrázek 3.2). Tato možnost obsahuje

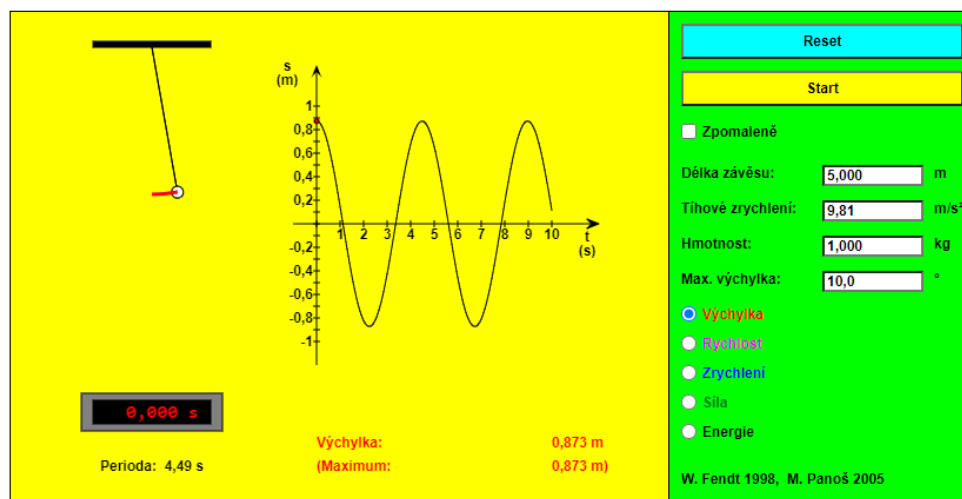


Obrázek 3.2: Applet *Laboratoř a kyvadlo* [180]

obě dříve popsaná zobrazení. Navíc je zde však možné sledovat graficky znázorněné vektory okamžité rychlosti a okamžitého zrychlení.

Jediné, co v appletu trošku chybí, je grafické znázornění sil působících na kyvadlo a jejich výslednice (i když té vlastně odpovídá vektor okamžitého zrychlení). Tato simulace je velmi pěkná a nabízí širokou škálu nastavitelných parametrů, a tedy i možností k samostatnému bádání studentů. Inspirace na pracovní listy pro studenty lze nalézt například v [169, 170].

Další z významných zahraničních zdrojů je sbírka Waltera Fendta [181], která je také z velké části přeložená do češtiny. I zde lze applety stáhnout a používat offline (tentokrát je však nutné stáhnout celou sbírku). Z této sbírky jsem zvolila dvě simulace *Matematické kyvadlo* a *Vázané oscilátory*.



Obrázek 3.3: Applet *Matematické kyvadlo* [182]

V appletu *Matematické kyvadlo* [182] uživatel může pozorovat pohyb jednoduchého matematického kyvadla (obrázek 3.3). Opět je zde možné nastavit délku závěsu, tíhové zrychlení, hmotnost závaží a maximální výchylku. Simulace ukazuje naměřenou periodu a pohyb lze sledovat i v desetkrát pomalejším tempu. Sledovat pak lze okamžitou výchylku, rychlost, zrychlení a přeměny energie. Vše

je graficky znázorněno pomocí šipek u modelu kyvadla, ale především i v grafu závislosti dané veličiny na čase.

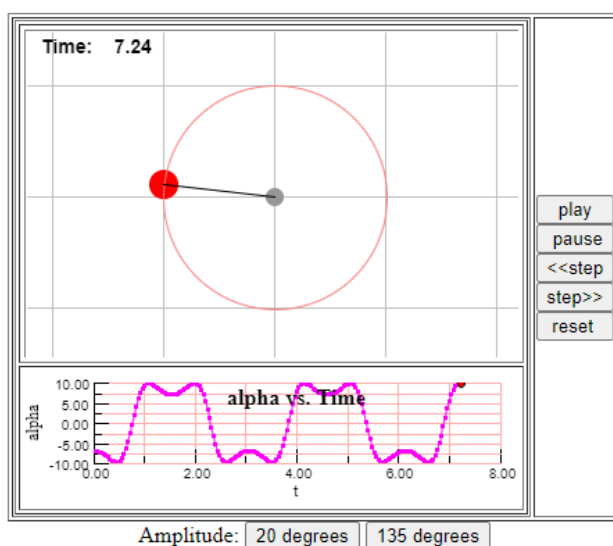
Z fyzikálního hlediska poněkud nesouhlasím se znázorněním síly a zrychlení působící na kyvadlo. Znázorněné vektory zrychlení a síla jsou jen složky ve směru pohybu, ne výslednice. To by mohlo některé studenty případně i vyučující zmást.

Applet *Vázané oscilátory* [183] je pak trochu jednodušší. Zde se nám nabízí dvě kyvadla spojená vazbou (pružinou). Nastavit lze počáteční pozice obou kyvadel. Pohyb je možné sledovat v normální či desetkrát menší rychlosti. V grafech pak uživatel může pozorovat, jak se mění výchylka kyvadel v závislosti na čase. Na základě tohoto grafu lze vypočítat charakteristickou vlastnost tohoto kmitajícího systému, a to „přelévání“ energie z jednoho kyvadla do druhého a zpět.

Oproti předchozí sbírce jsou applety trochu jednodušší, co se týče ovládání i vzhledu. Na druhou stranu však obsahují i poměrně pěkné grafické znázornění sledovaných veličin v závislosti na čase. Z fyzikálního a didaktického hlediska jsou na podobné, velmi dobré, úrovni.

Ještě bych ráda zmínila dvě neméně obsáhlé a významné sbírky virtuálních experimentů. První je sbírka Bostonské Univerzity [184], která obsahuje mnohem více animací a simulací než předchozí dvě sbírky (a některé i více směřované na VŠ), na druhou stranu jsou však opět trochu jednodušší.

Zde jsem našla dva applety s matematickým kyvadlem [185] (resp. [186]). V obou případech uživatel může sledovat pohyb jednoduchého kyvadla, který lze zastavovat a krokovat. V grafu lze pozorovat přeměny kinetické a potenciální energie. V druhé verzi lze pak sledovat a porovnávat pohyb dvou kyvadel s navzájem rozdílnými délkami závěsu. Jinak nelze nastavovat nic dalšího.

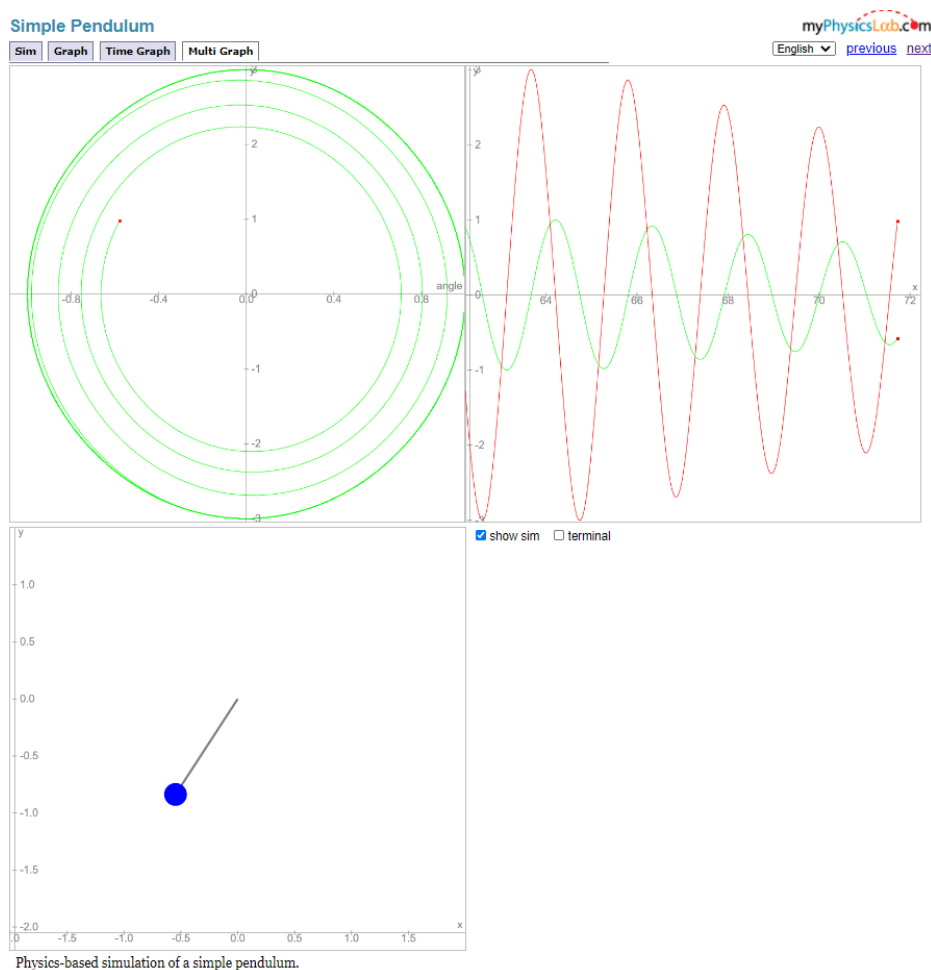


Obrázek 3.4: Model matematického kyvadla s nastavitelnou amplitudou [187]

Poněkud zajímavější je applet s kyvadlem, kde lze zvolit jednu ze dvou možností pro maximální výchylku kyvadla ( $20^\circ$  a  $135^\circ$ ) [187]. Spolu s pohybem kyvadla se pod ním vykresluje i část závislosti nějaké výchylky na čase (viz obrázek 3.4). Z podoby grafy je možné usoudit, že se pravděpodobně o okamžitou výchylku ve vodorovném směru, pak je však označení „alpha“ zavádějící a matoucí.

Dle autora komentáře nad animací bylo cílem ukázat, že průběh okamžité úhlové výchylky již není harmonický. V případě větší počáteční výchylky však graf okamžité úhlové výchylce neodpovídá.

Druhou sbírkou je [188], kde se nachází překvapivě mnoho simulací souvisejících s tematikou kyvadla (např. jednoduché matematické kyvadlo, kyvadlo reprezentující chaotický systém, dvojité kyvadlo, inverzní kyvadlo a simulace kyvadlových hodin, ...). U každého appletu se nachází samotná simulace a různé grafy ve více verzích zobrazení. Dále je zde vysvětlení daného jevu (spíše na VŠ úrovni) nebo alespoň odkaz na stránku s vysvětlením. U některých uživatel také nalezne inspiraci, co lze na simulaci zkoumat a objevovat, což je výhodné obzvláště pro vyučující, kteří vymýšlí zadání úkolů pro studenty.



Obrázek 3.5: Simulace a analýza pohybu matematického kyvadla se třením [189]

Konkrétním příkladem, který popíšu důkladněji, je *Matematické kyvadlo* [189], jehož pohyb zde lze sledovat a velmi různorodě nastavovat (obrázek 3.5). Možnosti nastavení jsou k dispozici v závislosti na volbě konkrétního zobrazení. V záložce simulace může uživatel měnit délku závěsu, míru tlumení pohybu (tření), hmotnost závaží, tíhové zrychlení, frekvenci buzení (a pravděpodobně jeho sílu). Zobrazit lze sloupcové grafy kinetické a potenciální energie a jednoduché stopky/hodinky. Ručně, posunutím závaží myší, lze nastavit počáteční výchylku. To je pravděpodobně nejzajímavější možnost, protože tato výchylka může nabývat libovolných hodnot z intervalu  $\langle -180^\circ, 180^\circ \rangle$ .

Ve druhé záložce je zobrazen graf znázorňující vzájemnou závislost úhlové výchylky a úhlové rychlosti během pohybu kyvadla. Samozřejmě je však možné z nabídky zvolit i jiné veličiny (krom již zmíněné úhlové výchylky a rychlosti se mezi možnostmi řadí ještě čas, úhlové zrychlení, kinetická, potenciální a celková energie). Ve třetí záložce se pak nachází grafy různých veličin v závislosti na čase, přičemž je možné sledovat současně až tři z nabídky, která je stejná jako v předchozí záložce.

Celkově se mi tato simulace velmi líbí. Ačkoliv docela dost přesahuje středoškolskou úroveň, určitě by se dala využít v rozšiřujícím semináři či v kurzech na vysokých školách. Na výběr je zde opravdu z mnoha možností a i po fyzikální stránce je skutečně povedená (dokonce i v případech větších výchylek, kdy je možné vidět, že pohyb opravdu harmonický není).

Nutno poznamenat, že všechny applety, které jsem zde komentovala se věnují především matematickému kyvadlu. Avšak je možné nalézt i takové, které se věnují pohybu fyzického kyvadla (např. [190]).

Další poznámka směřuje k fyzikální správnosti diskutovaných appletů. Pokud nebylo řečeno jinak, všechny animace a simulace pracují s pohybem kyvadla jako harmonickým, což však platí jen v aproximaci pro malé výchylky. Při větších výchylkách se pohyb kyvadla více odchyluje od harmonického průběhu a jeho popis je mnohem složitější (např. nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí viz část 2.3.1). Na druhou stranu, applet či animace může řešit příslušné diferenciální rovnice numericky.

Příkladem jednoduchého appletu, který demonsturuje pohyb kyvadlo pro větší výchylky může být např. [191], kde je uveden i začátek vztahu pro periodu matematického kyvadla v případě obecné výchylky.

### 3.2.2 GeoGebra

Výborným nástrojem k výrobě appletů a animací může být volně dostupný program *GeoGebra* [192], se kterým se seznamuje čím dál více učitelů a studentů (nejen) matematiky a fyziky [193]. V současné době je práce s tímto programem zařazována i do vysokoškolské přípravy budoucích učitelů (např. na MFF UK [194]).

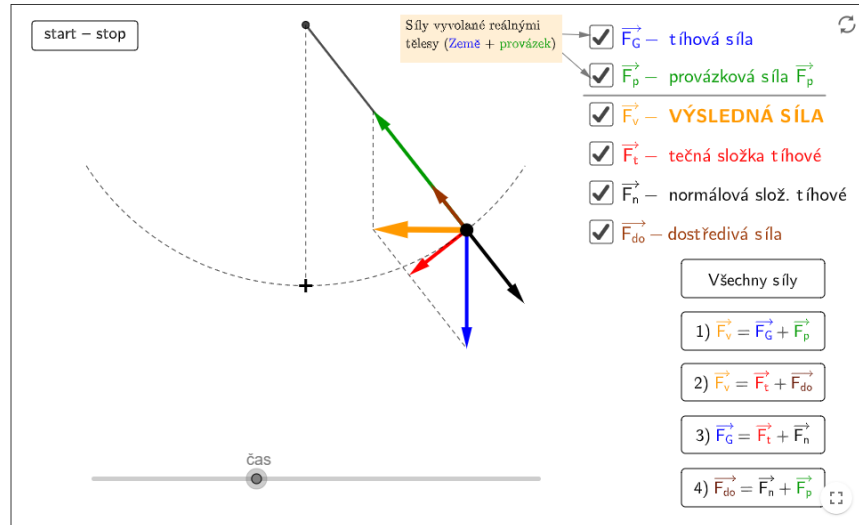
Základní ovládání programu není složité, a proto si i začínající uživatel může sám vytvořit velmi jednoduchou animaci. Samozřejmě, ke složitějším kouskům jsou již potřeba jisté znalosti, ale v tento okamžik se hlásí o slovo internetová databáze materiálů, kterou nalezneme na domovských stránkách tohoto programu [195]. Ačkoliv je většina materiálů v angličtině, řada z nich je i v češtině. Celkově lze říct, že se jedná o celosvětovou sbírku volně dostupných appletů a animací vytvořených v programu *GeoGebra*.

Z českých (nejen) fyzikálních sbírek určitě stojí za zmínění ta od Martina Vinklera [196], která obsahuje opravdu mnoho fyzikálních a matematických appletů a animací. Jen v sekci *Kmitání a vlnění - Matematické kyvadlo* lze nalézt spoustu inspirace.

Z této sekce bych vyzdvihla applet *Matematické kyvadlo - síly* [197] (viz obrázek 3.6), kde uživatel může sledovat pohyb kyvadla, síly na něj působící (tíhová síla a „provázková“ - vazbová síla) a jejich výslednici. Zobrazit je možné také tečnou a normálovou složku tíhové síly i dostředivou sílu. Applet je názorný a s po-

## Matematické kyvadlo - síly

Autor: Martin Vinkler



Obrázek 3.6: Model matematického kyvadla se znázorněnými silami [197]

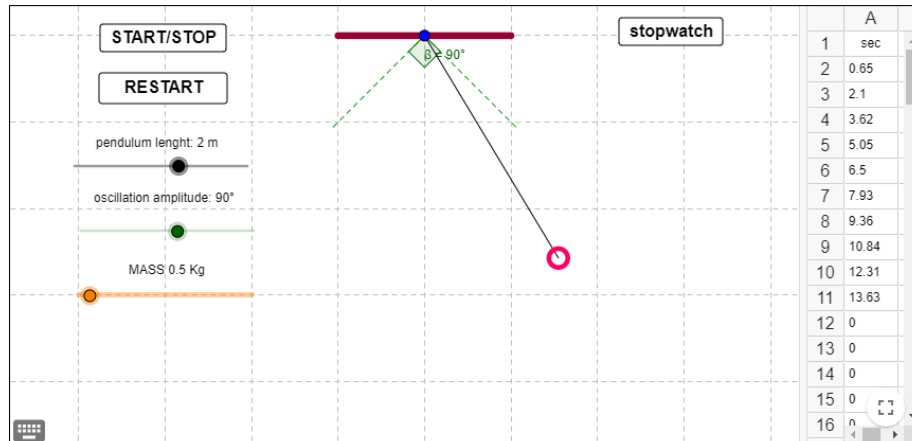
užitými popisky i velmi přehledný. Pohyb lze zastavovat a krokovat. Na druhou stranu zde není možné nastavit jinou počáteční výchylku a řešit, jak její velikost ovlivní pohyb kyvadla (anharmonický průběh při větších amplitudách). To však pravděpodobně nebylo hlavním cílem tohoto appletu.

Druhým appletem od tohoto autora, který bych zde ráda uvedla, je *Matematické kyvadlo - okamžitá výchylka oblouková a úhlová, tečná složka tíhové síly* [198]. V této simulaci, jak název napovídá, uživatel může sledovat pohyb kyvadla spolu s jeho okamžitou výchylkou (i její číselnou hodnotu). Také je zde graficky znázorněna tečná složka tíhové síly a vztahy pro ni platící. Opět však musím poznamenat, že není možné nastavit jinou počáteční výchylku.

Další zajímavou sbírkou je ta od Šárky Voráčové [199], která je zaměřena převážně na matematická témata, ale nalezneme zde i pěknou simulaci matematického kyvadla [200]. V ní lze sledovat pohyb kyvadla spolu s vektory okamžité rychlosti a zrychlení. Velikosti obou veličin se navíc v závislosti na pohybu kyvadla vykreslují i v grafu vedle kyvadla (graf závislosti na čase). Uživatel může nastavit počáteční (maximální) výchylku a pozorovat, jak se sledované veličiny změny. Pohyb lze zastavovat, ale ne krokovat. I tak je tato simulace velmi povedená, obzvláště vyzdvihují znázornění uvedených veličin v grafu a možnost výběru počáteční výchylky. Na druhou stranu, v případě větších výchylek už simulace není fyzikálně přesná, protože se stále drží harmonického průběhu, což není správně.

Co se týče appletů a simulací v angličtině, nabídka je rozhodně bohatší. Nalezneme zde jednoduché modely matematického kyvadla, dvojité kyvadlo, sférických kyvadel atd. [201]. Zmíním zde tři, které mne nejvíce zaujaly nejvíce.

Prvním je model matematického kyvadla [202], kde lze pozorovat pohyb kyvadla, nastavovat jeho délku, počáteční (maximální) výchylku a velikost tíhového zrychlení. V horní sekci je pak uveden teoretický vztah pro periodu kmitu a výsledek po dosazení konkrétních navolených hodnot. Vedle tohoto výsledku je ještě znázorněna kružnice a po ní pohybující se bod, který by měl odpovídat pohybu



Obrázek 3.7: Model kyvadla s možností měřit a zapisovat čas [204]

kyvadla. Nutno však podotknout, že vztah pro periodu kyvadla platí jen pro malé výchylky a autor jej zde používá i v obecném případě.

Druhým je model matematického kyvadla [203], který je velmi podobný tomu od Martina Vinklera (*Matematické kyvadlo - síly*). Výhodou je nastavitelnost délky závěsu, hmotnosti závaží a tíhového zrychlení. Nevýhodou je menší názornost a přehlednost. Jinak jsou velmi podobné a na stejné dobré úrovni.

Třetím, a svým způsobem nejzajímavějším, je model kyvadla se stopkami a tabulkou pro zápis naměřených hodnot [204] (obrázek 3.7). Nastavit lze délku závěsu, hmotnost závaží a počáteční (maximální) výchylku. Pohyb lze spustit, zastavit či celou simulaci restartovat. Důležité je však tlačítko „stopwatch“, pomocí kterého lze měřit periodu pohybu. Vyučující či studenti díky tomu mohou „experimentovat“, a zkoumat tak vlastnosti matematického kyvadla či pokusem ověřovat teoretické výpočty. Navíc se zdá, že applet alespoň částečně reflektuje závislost periody kmitů na maximální výchylce (tedy fakt, že při větších výchylkách se pohyb kyvadla oddaluje od harmonického průběhu a jeho perioda je delší). Překvapivě jednoduchá, ale přesto velmi zajímavá pomůcka do výuky.

Celkově si myslím, že applety vytvořené v programu *GeoGebra* jsou velmi pěkně provedené a mohou sloužit k inspiraci či vlastnímu využití ve výuce. Dobré je však podotknout, že v některých nelze měnit velikost maximální výchylky a pravděpodobně se v nich mnohdy neřeší, že pohyb kyvadla se v případě větších amplitud více odchyluje od harmonického průběhu.

Nemusíme se však omezovat pouze na *GeoGebra*, protože existují i další matematické/vzdělávací programy, které je možné využít ke tvorbě animací a simulací a stojí za zmínku. Mezi ně určitě patří *Wolfram Mathematica* se svou volně přístupnou internetovou sbírkou *Wolfram Demonstrations Project* [205]. Dalším příkladem je *MATLAB*. I v tomto případě je možné nalézt již vytvořené applety na internetu, a to na domovské stránce společnosti *MathWorks* [206].

V obou případech bývají animace a applety poněkud propracovanější než ty vytvořené v *GeoGebra*, na druhou stranu jejich vytvoření vyžaduje větší nároky na programovací dovednosti tvůrců.



### 3.2.3 Vzdálené experimenty

Reálné vzdálené experimenty jsou pokusy, které opravdu probíhají v reálném čase v e-laboratořích se vzdáleným přístupem prostřednictvím počítače s připojením na internet. Kdokoliv s přístupem na internet může daný volně přístupný experiment nejen sledovat, ale především i s ním aktivně pracovat (měnit nastavení experimentu, měřit, získávat a vyhodnocovat naměřená data). A nezáleží, kde přesně experiment ve skutečnosti probíhá. Právě naopak, studenty může zaujmout fakt, že ovládají něco, co se nachází na jiném kontinentu. V České republice se vzdálenými experimenty zabývá projekt *Školní experimentální systém iSES* provozovaný MFF UK [207] a další (např. [208]).

Co se týče vzdálených experimentů s kyvadly na českých či slovenských internetových stránkách, situace bohužel není moc veselá. Ačkoliv lze nalézt odkazy na staré experimenty, v současnosti je funkční pouze jeden odkaz [209], u kterého je však napsáno, že pokus je momentálně nedostupný. Celkově mám o funkčnosti těchto stránek jisté pochybnosti.

Co se týče zahraničních zdrojů, zde nalezneme odkazů více, ale ne o mnoho. Pro kyvadlo se mi podařilo nalézt jeden v současnosti aktivní vzdáleně řízený experiment [210], přístup k němu je ovšem placený (nebo v rámci zkušební měsíční doby).

Z dřívějších univerzitních sbírek vzdálených experimentů uvedu ještě jednu, kterou momentálně spravuje univerzita v Mnichově [211]. Dříve zde byl přístup k pokusu s matematickým kyvadlem v různých částech světa. Avšak dnes je odkaz nefunkční.

Je pravděpodobné, že ačkoliv jsou vzdálené experimenty zajímavou pomůckou, jejich reálné využití možná neodpovídalo představám při zavádění do provozu (obzvláště vzdálené pokusy s kyvadlem nemusely být dostatečně přitažlivé, protože je lehké provést téměř kdekoliv) a postupem času se mohly stát spíše finanční zátěží. Takže ty, které přežily bývají buď financovány z grantů (těch je málo) nebo placené.

## 3.3 Laboratorní práce

Laboratorní práce a žákovská fyzikální měření jsou nedílnou součástí výuky fyziky na všech úrovních školního vzdělávacího systému. Ačkoliv se dnes již nejedná o povinnou složku výuky na základních a středních školách a obecně bývají velmi náročné, minimálně co se týče přípravy i času, stále mají velkou tradici [128, 212, 213].

V závislosti na konkrétním místě zařazení do výuky, laboratorní práce žákům umožňují shrnutí probrané látky, praktické ověření nových poznatků a diskutování zákonitostí, nebo naopak mohou sloužit jako motivace před teoretickým uvedením a odvozením vztahů.

Při samotných měřeních mají studenti možnost naučit se pracovat s vybranými pomůckami a základními měřidly. Při vypracovávání protokolů se pak učí výsledky zpracovat a diskutovat je. Zároveň je vhodné podporovat studenty k samostatnému přemýšlení o problémech a dát jim možnost, ať si práci co nejvíce organizují sami. V neposlední řadě jsou laboratorní práce ideálním příkladem skupinové práce, kdy se žáci učí mezi sebou komunikovat a spolupracovat [214].

Česky psaných zdrojů zadání a inspirace pro vyučující je mnoho, ať už se jedná o učebnice (např. [34]) či další (nejen) internetové zdroje (např. již zmiňované sborníky *Veletruhu nápadů učitelů fyziky* [138] nebo *Metodický portál RVP.CZ* [215], ze soutěží např. korespondenční seminář *Výfuk* [216]).

Ze zahraničních zdrojů, kterých je opět nespočet, stojí za uvedení již dříve zmiňované servery *Institut of Physics Publishing* [145], *ComPADRE* [147] a *Science NetLinks* [148]. Dále lze čerpat inspiraci například ze serveru *The Physics Classroom* [217], kde se nachází již hotové přípravy a materiály k laboratorním pracím.

V následujícím textu se budu zaměřovat především na vybrané konkrétní české internetové zdroje a tam prezentovaná a diskutovaná zadání a pracovní listy. Tím bych ráda ukázala, jaké laboratorní práce jsou zařazované do výuky na českých školách a jaké příklady zadání může (nejen) začínající vyučující nalézt a použít jako inspiraci a rozšíření vůči klasickým učebnicím a sbírkám.

S tím souvisí i fakt, že se budu soustředit především na laboratorní práce na úrovni základních a středních škol. Příklady laboratorních prací a měření realizovaných na českých vysokých školách pak okomentuji stručněji.

### 3.3.1 Základní a střední školy

Na úrovni základních škol je pravděpodobně nejvhodnější „heuristický“ přístup ke studiu pohybu kyvadla, kdy mají žáci sami možnost zkoumat, na kterých parametrech závisí perioda kmitů kyvadla a na kterých ne (viz např. [218, 219]).

V tomto případě mají žáci za úkol sestrojít jednoduché kyvadlo ze závaží a niti nebo provázku zavěšeného na stojanu a naměřit délku periody kmitu pomocí stopky či mobilu (druhá možnost je dnes asi pravděpodobnější [220]). Během měření žáci zkoumají, na čem doba kmitu závisí, tedy jak ji ovlivní různé počáteční výchylky, odlišné hmotnosti závaží a různá délka závěsu kyvadla.

Obzvláště pěkně je pak tento přístup popsán a komentován v článku [126]. Nejzajímavější je část věnovaná zpracování výsledků měření a vykreslení grafu počtu kmitů za 10 s v závislosti na délce závěsu. Samotnému zpracování dat se ještě podrobněji věnuje článek [221].

Pomocí grafu závislosti periody kmitů na délce závěsu lze alespoň částečně odvodit (nebo ukázat), že tato závislost není lineární. Na úrovni základní školy pravděpodobně stačí jen říct, že tato závislost odpovídá odmocnině, na úrovni střední školy mohou studenti sami „odhadovat“, jaká funkce závislosti odpovídá. Tento odhad se pak dá ověřit vykreslením grafu závislosti periody kmitů na odmocnině z délky závěsu. Bude-li v tomto případě grafem přímka (což ano), byl odhad správný. V opačném případě by bylo nutné udělat nový a lepší odhad. Dále lze odhad ověřit experimentem ve „velkém“, kdy žáci odhadnou periodu kmitů pro kyvadlo s velmi dlouhým závěsem a následně se jejich tip ověří. Více se postupu takové práce věnuje [222].

Podobně koncipovaná měření by jistě bylo vhodné zařadit i do výuky na středních školách a gymnáziích, kde by mohlo sloužit jako motivace před teoretickým výkladem (viz např. [164, 223]).

Další typ laboratorních prací se zaměřuje spíše na ověření vztahu pro periodu. Postup při samotném měření je obdobný jako v předchozím případě, avšak cíl práce je jiný. Tentokrát žáci porovnávají naměřené periody kmitu s teoreticky vypočtenou hodnotou ze známé délky závěsu kyvadla. Velmi často je tento úkol

doprovázen určením velikosti tíhového zrychlení z naměřené doby kmitu a délky závěsu kyvadla.

Vzhledem k tomu, že při zpracování výsledků žáci musí umět provádět různé algebraické úpravy a výpočty, bývá tento druh práce spíše zařazován do výuky na středních školách a gymnáziích (např. [224]). Jsou-li však žáci šikovnější, pak si myslím, že je podobné měření možné zařadit již na základní škole (např. [225]).

K měření periody pohybu bych ráda přidala dvě didaktické poznámky, při kterých vycházím i ze své vlastní zkušenosti.

Za prvé je vhodné se studenty diskutovat, jak přesně je možné změřit dobu jednoho kmitu a následně jak je možné naše měření zpřesnit, například měřením celkové doby několika kmitů a následným vydělením počtem kmitů. Za druhé je dobré zaměřit se na diskuzi velikosti počáteční výchylky. Studenti sami vymyslí, že při delším závěsu spíše splní předpoklad menší výchylky, při kterém platí známé teoretické vztahy.

Z nalezených zadání pro laboratorní práce bych ráda vyzdvihla několik nalezených se zajímavými či rozšiřujícími nápady. V prvních z prací [226] (resp. [227]) jsou výše diskutované úkoly (závislost periody pohybu na různých parametrech a určení velikosti tíhového zrychlení) doplněné o otázku, ve které mají studenti z velikosti tíhového zrychlení dopočítat hmotnost Země. Jedná se o zajímavé rozšíření a svým způsobem dotažení klasického zadání práce. Především se však jedná o pěkné připomenutí Newtonova gravitačního zákona a propojení s mechanikou kmitání.

V dalších pracích se objevuje odlišný postup měření vůči klasickému využití stopek a telefonu k měření času. Mobilní telefony (pod tímto termínem uvažuji „smartphony“, ačkoliv z vlastní zkušenosti vím, že i mezi dnešními studenty se naleznou tací, kteří používají starší „tlačítkové“ modely) mívají kvalitní kamery, kterými lze experiment nahrávat. V zadání prezentovaném v [213] pak studenti využívají ke zpracování výsledků programy *Microsoft Excel* a *Movie Maker* (druhý ze zmiňovaných je volně dostupný, první lze nahradit neplacenými programy jako například *Google Sheets*). V dalším z citovaných zadání [228] se ke zpracování využívá program *Tracker* (také volně dostupný). V obou případech je však zpracování výsledků pro studenty mnohem náročnější, nejen časově, ale jsou potřebné i určité dovednosti při práci se zvolenými programy, což je nutné mít při přípravě práce na paměti.

Mobilní telefon je však možné využít dalším způsobem popsaným v [229]. Vzhledem k tomu, že „smartphony“ obsahují nejrůznější senzory (akcelerometr, gyroskop, GPS), je pomocí nich možné rovnou zaznamenávat pohyb telefonu. V tomto případě by závaží kyvadla tvořil přímo mobilní telefon (bezpečně uložen v ochranném pouzdře zavěšeném na provázku) a pomocí vhodné aplikace (např. *phyphox* [230]) by se zaznamenávalo zrychlení ve svislém směru. Z naměřených dat by se pak odhadovaly závislosti mezi různými veličinami.

K měření periody či zaznamenávání pohybu lze samozřejmě využít i specifické pomůcky. Zadání a postup při práci s aparaturami od firmy *Vernier* lze nalézt např. v [231, 232]. Laboratorní cvičení využívající optickou bránu a jí odpovídající software je popsána např. v [233]. Tyto možnosti zadání laboratorní práce jsou velmi zajímavé, avšak jsou náročnější, jak na přípravu a následné zpracování studenty, tak především na vybavenost školy, jelikož zmíněné pomůcky nemusí být vždy k dispozici.

### 3.3.2 Vysokoškolská fyzikální praktika

Laboratorní cvičení a fyzikální měření jsou zařazovány i v rámci vysokoškolských kurzů fyziky v podobě fyzikálních praktik (např. [159, 234, 235, 236]). V těchto předmětech se nejčastěji setkáme s úlohami, ve kterých studenti zkoumají pohyb vázaných oscilátorů (dvou kyvadel spojených pružinou), měřením tíhové zrychlení pomocí reverzního kyvadla či studiem pohybu torzního kyvadla (otáčení tuhého tělesa a určení momentu setrvačnosti). Můžeme se zde však setkat i s méně častými úlohami jako je měření s Machovým či balistickým kyvadlem [234].

Ve vysokoškolských praktikách na různých univerzitách by nepochybně bylo možné najít úloh mnohem více, ale vzhledem k tomu, že se zde soustřeďují spíše na výuku na nižších stupních škol, více se tomu věnovat nebudu.

# 4. Teoretické pozadí vybraných modelů kyvadel

V této kapitole se budu věnovat teoretickému rozboru pohybu čtyř vybraných modelů kyvadel (Foucaultovo, Huygensovo, Machovo a Maxwellovo). Ve všech případech kromě Huygensova (cykloidálního) kyvadla je zde prezentované odvození pohybových rovnic pro ideální případ bez tření a odporových sil.

V případě cykloidálního kyvadla byla využita Huygensova původní myšlenka, že cykloida je tzv. *tautochronou* (křivkou, na které se po ní pohybující hmotné body vlivem homogenního tíhového pole dostanou do jejího nejnižšího bodu ve stejný okamžik nezávisle na počáteční poloze).

Pro všechny modely kromě Foucaultova kyvadla je v této kapitole odvozen i vztah pro periodu vlastního kmitání kyvadla (v případě Machova kyvadla se jedná vztah pro periodu v aproximaci pro malé výchylky kyvadla). V případě Foucaultova kyvadla byl odvozen vztah pro stáčení roviny kmitů vůči povrchu Země.

Uznávám, že prezentovaná odvození jsou na úrovni vysokých škol, avšak, kde to bylo možné, jsem odvození na úrovni středních škol ve stručnosti okomentovala a odkázala se na zdroje, kde je odvození popsáno podrobněji.

## 4.1 Foucaultovo kyvadlo

V roce 1851 dokázal francouzský fyzik León Foucault pomocí svého experimentu s obřím kyvadlem zavěšeným v pařížském Pantheonu, že se Země otáčí [6]. Jak? Jeho pokus vycházel z geniální avšak poměrně jednoduché myšlenky.

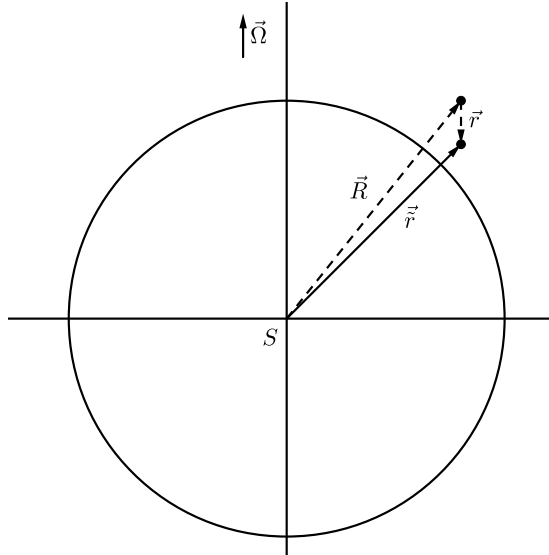
Představme si, že jsme na pouti a z venku se díváme na otáčející se kolotoč. Uprostřed kolotoče však někdo umístil kyvadlo a rozkýval jej. Z našeho pohledu se kyvadlo pohybuje stále ve stejné rovině (nebo alespoň přibližně, v závislosti na šikvosti experimentátora, povětrnostních podmínkách atd.). To vlastně není nic překvapivého, jedná se o Newtonův zákon setrvačnosti v akci.

Z pohledu člověka na kolotoči však celá situace vypadá jinak. Z jeho pohledu se neotáčí kolotoč ale vše ostatní, tedy i kyvadlo (resp. se stáčí rovina jeho kmitů). V neinerciální (rotující) soustavě na něj totiž působí setrvačné síly.

Foucault tady využil obrácenou implikaci. Postavil obří kyvadlo, jehož rovina kmitu se postupem času vůči Zemi stáčela (tento pokus vyžaduje dostatečné množství času). Tím dokázal, že je Země neinerciální vztažnou soustavou v důsledku rotace okolo své osy.

Samozřejmě je nutné poznamenat, že naše jednoduchá analogie s kolotočem platí jen na severním (resp. jižním) pólu. Jinde je situace poněkud složitější. Pojdme se tedy podívat na teoretické pozadí problému. Následující postup je použit např. v [6, 108].

Nechť má námi uvažovaná soustava souřadnic počátek  $S$  ve středu Země a otáčí se spolu s ní úhlovou rychlostí  $\vec{\Omega}$  (viz obrázek 4.1). Vektor  $\vec{r}$  spojuje počátek soustavy  $S$  se závažím kyvadla o hmotnosti  $m$ . S využitím druhého New-



Obrázek 4.1: Neinerciální vztažná soustava spojená se Zemí

tonova zákona pro závaží kyvadla v rotující soustavě získáme vztah

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_t + \vec{F}_g - 2m\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}} - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) - m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r} \quad (4.1)$$

kde tečky značí časové derivace,  $\vec{F}_g$  odpovídá gravitační síle působící na závaží a  $\vec{F}_t$  tahové síle, kterou na závaží působí závěs kyvadla. Člen  $-2m\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}}$  nazýváme Coriolisova síla,  $-m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$  odstředivá síla a  $-m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}$  Eulerova síla. Vzhledem k tomu, že úhlová rychlost rotace Země je s velkou přesností konstantní (její směr i velikost), poslední člen je nulový.

Vektor  $\vec{r}$  můžeme rozložit na součet dvou vektorů  $\vec{R} + \vec{r}$ , kde vektor  $\vec{R}$  spojuje střed Země  $S$  s bodem závěsu kyvadla a vektor  $\vec{r}$  odpovídá tyči kyvadla o délce  $|\vec{r}| = l$ . Po dosazení do rovnice (4.1) dostáváme vztah

$$m\ddot{\vec{R}} + m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_t + \vec{F}_g - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R}) - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) - 2m\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}} - 2m\vec{\Omega} \times \dot{\vec{R}}. \quad (4.2)$$

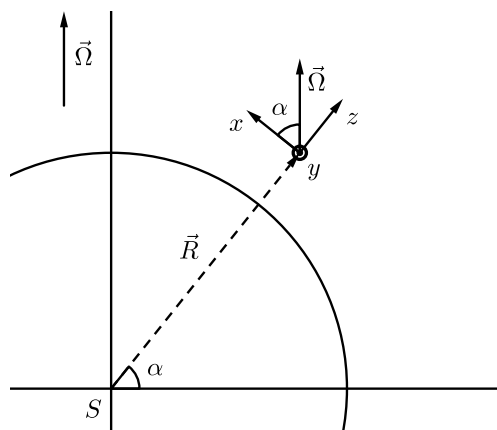
Vzhledem k tomu, že vzdálenost  $\vec{R}$  je konstantní, pak člen s její časovou derivací vypadávají. Dále, po zavedení tíhového zrychlení  $\vec{g} = \frac{1}{m}\vec{F}_g - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R})$  a vydělení celé rovnice hmotností  $m$ , dojdeme k následujícímu zjednodušení

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{F}_t}{m} + \vec{g} - 2\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}). \quad (4.3)$$

Velikost posledního členu je úměrná součinu  $\Omega^2|\vec{r}|$ , zatímco velikost Coriolisova zrychlení je úměrná součinu  $\Omega\omega r$ , kde  $\omega = \sqrt{g/l}$  je úhlová frekvence pohybu závaží kyvadla. Porovnáme-li velikosti obou úhlových rychlostí, pak je zřejmé, že  $\omega \gg \Omega$  ( $|\Omega| \approx 7,3 \cdot 10^{-5}$  rad/s a pro kyvadlo s délkou závěsu 50 m je  $\omega \approx 0,45$  rad/s). Proto můžeme poslední člen zanedbat, a získáme tak konečný vztah pro zrychlení

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{F}_t}{m} + \vec{g} - \vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}}. \quad (4.4)$$

Pro zkoumání pohybu kyvadla si zavedeme soustavu kartézských souřadnic s počátkem v bodě závěsu kyvadla, přičemž  $x$  a  $y$  leží v rovině tečné k povrchu



Obrázek 4.2: Soustava kartézských souřadnic v bodě závěsu kyvadla

Země. z toho  $x$  směřuje k severu, a  $z$  je kolmo směrem vzhůru, od středu Země  $S$  (viz obrázek 4.2). Pojďme se podívat, jak v této soustavě vypadají složky vektorů  $\vec{r}$ ,  $\dot{\vec{r}}$ ,  $\vec{\Omega}$  a vektorového součinu  $\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}}$

$$\begin{aligned}\vec{r} &= (x, y, z), \\ \dot{\vec{r}} &= (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ \vec{\Omega} &= (\Omega \cos \alpha, 0, \Omega \sin \alpha), \\ \vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}} &= (-\Omega \sin \alpha \dot{y}, \Omega \sin \alpha \dot{x} - \Omega \cos \alpha \dot{z}, \Omega \cos \alpha \dot{y}),\end{aligned}$$

kde  $\alpha$  odpovídá zeměpisné šířce.

Předpokládejme, že výchylky kyvadla jsou vůči svislému směru velmi malé (malé kmity). Pak je výchylka ve směru osy  $z$  oproti zbývajícím směrům zanedbatelná, stejně jako  $\dot{z}$  (druhého řádu oproti  $\dot{x}$  a  $\dot{y}$ ). Dále tedy budeme pracovat jen se složkami ve směru os  $x$  a  $y$

$$\begin{aligned}(\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}})_x &= -\Omega \sin \alpha \dot{y}, \\ (\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}})_y &= \Omega \sin \alpha \dot{x}.\end{aligned}$$

Při aproximaci malých kmitů a se zohledněním faktu, že osa  $z$  je prakticky rovnoběžná s vektorem tíhového zrychlení  $\vec{g}$  (vektor  $\vec{g}$  víceméně směřuje do středu Země), pro složky tahové síly platí  $F_t \approx \left(-\frac{mg}{l}x, -\frac{mg}{l}y, mg\right)$ . Po označení konstant ( $\Omega_C = \Omega \sin \alpha$ ,  $\omega^2 = g/l$ ) a následném dosazení do rovnice (4.4) dostáváme

$$\ddot{x} = -\omega^2 x + 2\dot{y}\Omega_C, \quad (4.5)$$

$$\ddot{y} = -\omega^2 y - 2\dot{x}\Omega_C. \quad (4.6)$$

Pohybové rovnice tvoří soustavu dvou navzájem provázaných lineárních diferenciálních rovnic druhého řádu, jejichž řešení budeme hledat ve tvaru

$$x(t) = \xi(t) \cos(at),$$

$$y(t) = \xi(t) \sin(at),$$

kde  $a$  je neznámá konstanta. Jak později uvidíme, je vhodné zvolit  $a = -\Omega_C$ .

Po první derivaci dle času  $t$  získáváme

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{\xi} \cos(at) - a\xi \sin(at), \\ \dot{y} &= \dot{\xi} \sin(at) + a\xi \cos(at)\end{aligned}$$

a po druhém zderivování

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \ddot{\xi} \cos(at) - 2a\dot{\xi} \sin(at) - a^2\xi \cos(at), \\ \ddot{y} &= \ddot{\xi} \sin(at) + 2a\dot{\xi} \cos(at) - a^2\xi \sin(at).\end{aligned}$$

Dosazením do rovnice (4.5) dostaneme

$$\ddot{\xi} \cos(at) - 2a\dot{\xi} \sin(at) - a^2\xi \cos(at) - 2\Omega_C \dot{\xi} \sin(at) - 2a\Omega_C \xi \cos(at) + \omega^2 \xi \cos(at) = 0.$$

Pro  $a = -\Omega_C$  se navzájem odečtou členy úměrné  $\dot{\xi} \sin(at)$  a rovnice přejde do tvaru

$$\cos(-\Omega_C t) \left[ \ddot{\xi} - \xi (\omega^2 + \Omega_C^2) \right] = 0.$$

Aby tato rovnice platila, musí být

$$\ddot{\xi} - \xi (\omega^2 + \Omega_C^2) = 0$$

a vzhledem k tomu, že jsme již dříve uvažovali  $\omega \gg \Omega$ , dojdeme k finální rovnici

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = 0, \quad (4.7)$$

jejíž řešení je ve tvaru

$$\xi(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (4.8)$$

kde  $A$  a  $\varphi_0$  jsou integrační konstanty.

Obdobně budeme postupovat při dosazení do rovnice (4.6)

$$\ddot{\xi} \sin(at) + 2a\dot{\xi} \cos(at) - a^2\xi \sin(at) + 2\Omega_C \dot{\xi} \cos(at) - 2a\Omega_C \xi \sin(at) + \omega^2 \xi \sin(at) = 0.$$

Pro  $a = -\Omega_C$  zmizí členy úměrné  $\dot{\xi} \cos(at)$  a rovnice přejde do tvaru

$$\sin(-\Omega_C t) \left[ \ddot{\xi} - \xi (\omega^2 + \Omega_C^2) \right] = 0.$$

a po zanedbaní  $\omega \gg \Omega$  opět dojdeme k rovnici

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = 0,$$

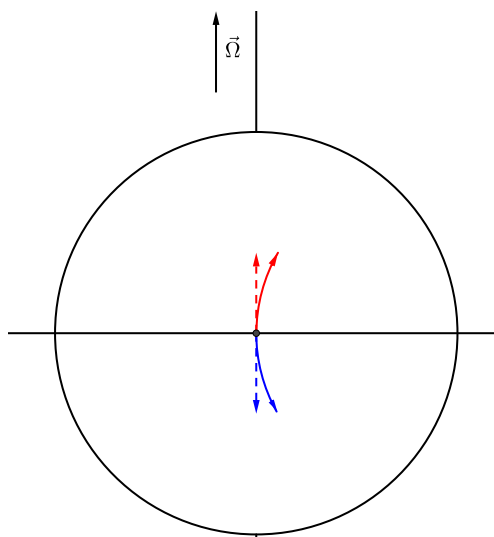
kterou řeší rovnice (4.8).

Tímto postupem jsme došli k řešení rovnic (4.5) a (4.6) ve tvaru:

$$\begin{aligned}x &= A \cos(\omega t + \varphi_0) \cos(-\Omega_C t), \\ y &= A \cos(\omega t + \varphi_0) \sin(-\Omega_C t).\end{aligned}$$

Snadno nahlédneme, že na severní polokouli se rovina kmitu kyvadla stáčí s úhlovou rychlostí  $\Omega_C$  ve směru naznačeném na obrázku 4.3. Stáčení je nejvýraznější na pólech ( $\alpha = \pm \pi/2$ ), na rovníku k němu nedochází vůbec ( $\alpha = 0$ ). Na jižní polokouli se kyvadlo stáčí v opačném směru.





Obrázek 4.3: Směr stočení Foucaultova kyvadla na severní i jižní polokouli (čárkovaně je zakreslen původní směr pohybu, plnou čarou je stočení trajektorie v důsledku působení Coriolisovy síly)

Pro dobu, za kterou se rovina kmitu stočí o  $360^\circ$ , platí vztah

$$T_C = \frac{2\pi}{\Omega_C} = \frac{2\pi}{\Omega \sin \alpha}. \quad (4.9)$$

Pro Prahu se zeměpisnou šířkou přibližně  $\alpha = 50^\circ$ , dostáváme periodu stačení roviny přibližně  $T_C = 31$  hodin 12 min a 38 s.

Postup zde popsany je ten, který se většinou objevuje ve vysokoškolských kurzech fyziky. Občas se však lze setkat také s vysvětlením založeným na paralelním přenosu (např. [237]). Případně lze nalézt články, které se problematiku snaží vysvětlit bez potřeby diferenciálního počtu (např. [238]).



Obrázek 4.4: Expozice Foucaultova kyvadla v Kroměříži [239]

Foucaultův experiment s kyvadlem je velmi známý a významný (dokonce se často objevuje mezi v žebříčcích deseti nejvýznamnějších pokusů v historii fyziky [240, 241, 242]).

Díky své oblíbenosti jej lze nalézt v nespočtu světových muzeích jako celoroční exponát [243]. Nejznámější model Foucaultova kyvadla v ČR nalezneme v Květné zahradě v Kroměříži (viz obrázek 4.4), další jsou umístěna například v budově ČVUT v Praze na Karlově náměstí, v budově MFF UK v Praze Ke Karlovu atd. [244].

## 4.2 Huygensovo (cykloidální) kyvadlo

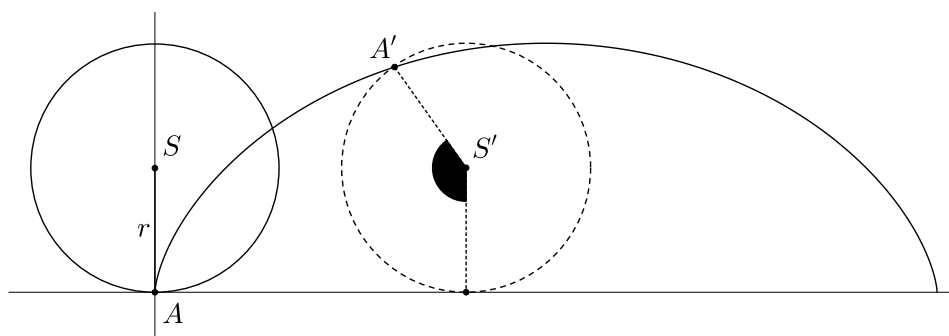
Jak již bylo zmíněno v kapitole 1 věnované historii a využití kyvadel, prvním z těch, kdo systematicky studovali pohyb kyvadla, jeho vlastnosti (závislost periody kmitů na odmocnině z délky závěsu atd.) a možnosti využití k měření času, byl počátkem 17. století Galileo Galilei. V roce 1641 dokonce sám popsal model kyvadlových hodin, avšak vzhledem ke svému vysokému věku již projekt nedokončil [10].

Na druhou stranu, Galilei se mýlil, když tvrdil, že pohyb kyvadla je *isochronní* (perioda kmitů je nezávislá na maximální výchylce kyvadla). Jak bylo diskutováno v části 2.3.1 věnované teoretickému odvození vztahů pro rovinné matematické kyvadlo, toto platí přibližně jen pro malé amplitudy.

Byl to však Christiaan Huygens, kdo v roce 1656 sestrojil první kyvadlové hodiny [14]. Konstrukci následujících modelů pak založil na myšlence, že tzv. *tautochronou* není kružnice (jak se domníval Galilei), nýbrž cykloida. *Tautochróna* (resp. *isochrona*) je křivka, na které se po ní pohybující hmotné body, na něž působí jen homogenní tíhová síla, projdou jejím nejnižším bodem ve stejný okamžik nezávisle na počáteční poloze. Jinými slovy, čas, za který se bod dostane do nejnižšího bodu této trajektorie, je nezávislý na počáteční poloze. Je však těžké přesně určit, u jakého modelu kyvadlových hodin tuto myšlenku využil poprvé [245].

Vzhledem k tomu, že křivka zvaná cykloida má několik velmi zajímavých vlastností, z nichž některé inspirovaly Huygense k sestrojení modelu cykloidálního kyvadla, pojďme se na ni podívat podrobněji.

Cykloida je definována jako stopa pevného bodu na obvodu generující kružnice, která se bez podkluzování odvaluje po přímce (obrázek 4.5) [246].



Obrázek 4.5: Náčrtek cykloidy

V kartézských souřadnicích ji lze popsat parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned}x &= r\varphi - r \sin \varphi, \\y &= r - r \cos \varphi,\end{aligned}\tag{4.10}$$

kde  $r$  značí poloměr odvalující se kružnice a  $\varphi$  úhel pootočení kružnice.

Mezi zajímavé vlastnosti cykloidy patří [246, 247]:

- i) Cykloida je periodická křivka s periodou opakování  $2\pi r$ .
- ii) Obsah plochy ohraničené obloukem cykloidy a osou  $x$  se rovná trojnásobku obsahu plochy generujícího kruhu  $S = 3\pi r^2$ .
- iii) Délka jednoho oblouku cykloidy je rovna osminásobku poloměru generující kružnice  $s = 8r$ .
- iv) Evoluta cykloidy je cykloida posunutá o  $-\pi r$  ve směru osy  $x$  a o  $-2r$  ve směru osy  $y$ . (Evoluta dané křivky je množina všech jejích středů křivosti.)
- v) Evolventa cykloidy je cykloida posunutá o  $\pi r$  ve směru osy  $x$  a o  $2r$  ve směru osy  $y$ . (Evolventa je trajektorie pevně zvoleného bodu na přímce, která se odvaluje po dané křivce.)
- vi) Cykloida je tzv. *tautochronou*.
- vii) Cykloida je tzv. *brachistochronou* („křivkou nejrychlejšího spádu“). Jedná se o křivku, po níž se hmotný bod vlivem působení jen tíhové síly dostane z bodu  $A$  do bodu  $B$  za nejkratší čas (předpokládáme, že body  $A$  a  $B$  jsou pevně dány a bod  $A$  je výše než bod  $B$ , zároveň neuvažujeme tření ani žádné další odporové síly). Stejně jako v případě *tautochrony*, i tentokrát je však cykloida převrácená směrem dolů a navíc „začíná“ právě v bodě  $A$ .

Z hlediska rozboru pohybu kyvadla (a Huygensova modelu) jsou pro nás nejdůležitější vlastnosti [iv] až [vi], proto se na ně zaměřím více. Z historického hlediska však byl velmi významný i problém *brachistochrony* (blíže viz např. [248, 98]).

Při důkazu bodů [iv] a [v] využiji vzájemný vztah mezi evolutou a evolventou říkající, že je-li křivka  $l$  evolventou křivky  $k$ , pak křivka  $k$  je evolutou křivky  $l$ . Navíc, tečny evolventy jsou kolmé na odpovídající evolutu. Díky tomu je nutné dokázat pouze fakt, že evolutou cykloidy je cykloida [249].

Nechť je dána křivka popsaná parametrickými rovnicemi  $x = x(t)$  a  $y = y(t)$ , kde  $t \in \mathbb{R}$  značí reálný parametr. Pak pro souřadnice její evoluty  $X = X(t)$  a  $Y = Y(t)$  platí [249, 250]:

$$\begin{aligned}X(t) &= x(t) - \frac{y'(t) \cdot (x'(t)^2 + y'(t)^2)}{x'(t) \cdot y''(t) - x''(t) \cdot y'(t)}, \\Y(t) &= y(t) - \frac{x'(t) \cdot (x'(t)^2 + y'(t)^2)}{x'(t) \cdot y''(t) - x''(t) \cdot y'(t)},\end{aligned}$$

kde čárky značí derivace dle parametru  $t$ . Po dosazení v našem konkrétním případě cykloidy popsané rovnicemi (4.10) dostaneme

$$\begin{aligned}X(\varphi) &= (r\varphi - \sin \varphi) - \frac{(r \sin \varphi) [(r - r \cos \varphi)^2 + r^2 \sin^2 \varphi]}{(r - r \cos \varphi) (r \cos \varphi) - (r \sin \varphi) (r \sin \varphi)}, \\Y(\varphi) &= (r - r \cos \varphi) - \frac{(r - r \cos \varphi) [(r - r \cos \varphi)^2 + r^2 \sin^2 \varphi]}{(r - r \cos \varphi) (r \cos \varphi) - (r \sin \varphi) (r \sin \varphi)}\end{aligned}$$

a následnými úpravami dojdeme ke tvaru

$$\begin{aligned} X(\varphi) &= r\varphi + r \sin \varphi, \\ Y(\varphi) &= -r + r \cos \varphi, \end{aligned}$$

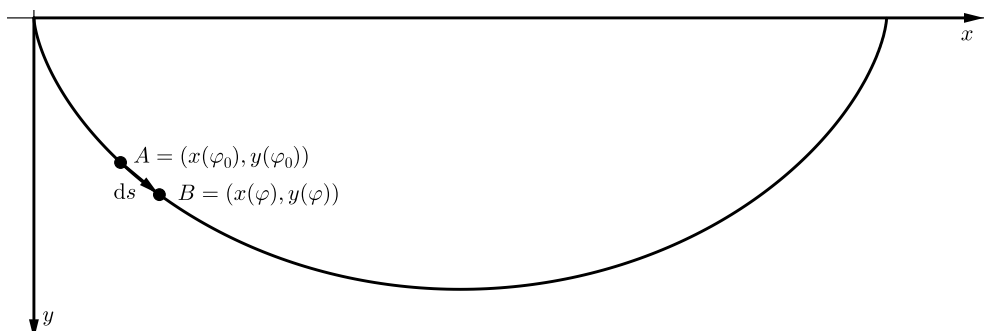
který lze ještě upravit na

$$\begin{aligned} X(\varphi) &= [r(\varphi - \pi) - r \sin(\varphi - \pi)] + \pi r, \\ Y(\varphi) &= [r - r \cos(\varphi - \pi)] - 2r, \end{aligned} \quad (4.11)$$

odkud je vidět, že se jedná o stejnou cykloidu jako je ta původní popsaná rovnicemi (4.10), jen je posunutá o  $-\pi r$  ve směru osy  $x$  a o  $-2r$  ve směru osy  $y$ .

Ještě zbývá dokázat, že cykloida je *tautochronou*. Přiznávám, že se zde nebudu zabývat otázkou, zda je cykloida jedinou možnou *tautochronou*, místo toho předvedu klasický důkaz, že cykloida tuto vlastnost *isochronnosti* opravdu má. Podobný postup je použit např. v [98, 249, 251, 247]. Další možnosti, jak tuto vlastnost dokázat, či odvodit jsou prezentované např. v [245, 252] (obzvláště pěkné je řešení s využitím lagrangiánu jednoduchého harmonického oscilátoru).

Případné zájemce řešící otázku jednoznačnosti odkazují na články [253, 254], kde je ukázáno, že cykloida opravdu jediným řešením není. Na druhou stranu, dle [245, 252] se jedná o jediné řešení v případě harmonického pohybu.



Obrázek 4.6: Náčrtek cykloidy, po které se pohybuje hmotný bod z bodu  $A$  do  $B$

Uvažujme kartézskou soustavu souřadnic se směrem osy  $y$  dolů a hmotný bod o hmotnosti  $m$  pohybující se po cykloidě převrácené směrem dolů popsané rovnicemi (4.10) s parametrem  $\varphi$  (obrázek 4.6). Jediná síla působící na hmotný bod je konstantní tíhová síla  $\vec{F}_G = m\vec{g}$  ( $\vec{g}$  značí tíhové zrychlení). Tření i jakékoliv další odporové síly zanedbáváme.

V následujících výpočtech vyjdeme ze zákona zachování mechanické energie, který tvrdí, že celková mechanická energie  $E$  (resp. součet potenciální energie  $E_p$  a kinetické energie  $E_k$ ) je konstantní. Pohybuje-li se tedy hmotný bod z počátečního bodu  $A = (x(\varphi_0), y(\varphi_0))$  z klidu (s nulovou počáteční rychlostí) do libovolného bodu  $B = (x(\varphi), y(\varphi))$ , pro jeho rychlost  $v$  v tomto bodě platí

$$\begin{aligned} E_{pA} + E_{kA} &= E_{pB} + E_{kB}, \\ -mgy_0 + 0 &= -mgy + \frac{1}{2}mv^2, \\ v &= \sqrt{2g(y(\varphi) - y(\varphi_0))}, \end{aligned}$$

Na malém (infinitesimálním) kousku cesty můžeme tuto rychlost považovat za konstantní a využít vztah

$$v = \frac{ds}{dt},$$

kde  $ds$  je délka uvažovaného infinitesimálního kousku cesty a  $dt$  je odpovídající čas potřebný k jeho překonání. Pro délku tohoto úseku cesty  $ds$  platí

$$ds = \sqrt{x'(\varphi)^2 + y'(\varphi)^2} d\varphi,$$

a pro odpovídající čas

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{x'(\varphi)^2 + y'(\varphi)^2} d\varphi}{\sqrt{2g(y(\varphi)) - y(\varphi_0)}}.$$

Celkový čas pohybu  $T$  z bodu  $A$  do bodu  $B$  pak získáme integrací

$$T_{AB} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{\frac{x'(\varphi)^2 + y'(\varphi)^2}{2g(y(\varphi)) - y(\varphi_0)}} d\varphi. \quad (4.12)$$

Vzhledem k tomu, že se námi zkoumaný hmotný bod pohybuje po cykloidě popsané rovnicemi (4.10), můžeme jeho polohu popsat pomocí parametru  $\varphi$ . Počátečnímu bodu  $A$  se souřadnicemi  $(r\varphi_0 - r \sin \varphi_0, r - r \cos \varphi_0)$ , odpovídá parametr  $\varphi_0 \geq 0$ . Také víme, že nás zajímá čas průchodu nejnižším bodem křivky, který má souřadnice  $B = (\pi r, 2r)$ , jemuž odpovídá hodnota parametru  $\varphi = \pi$ . Dosazením do integrálu (4.12) a následnými úpravami získáme

$$T_{AB} = \int_{\varphi_0}^{\pi} \sqrt{\frac{r^2(1 - \cos \varphi)^2 + r^2 \sin^2 \varphi}{2g(r - r \cos \varphi - r + r \cos \varphi_0)}} d\varphi = \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{\varphi_0}^{\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{\cos \varphi_0 - \cos \varphi}} d\varphi,$$

s využitím goniometrických vztahů pro poloviční úhly  $2 \sin^2(\varphi/2) = 1 - \cos \varphi$  a  $2 \cos^2(\varphi/2) = 1 + \cos \varphi$  dostaneme

$$T_{AB} = \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{\varphi_0}^{\pi} \frac{\sin(\varphi/2)}{\sqrt{\cos^2(\varphi_0/2) - \cos^2(\varphi/2)}} d\varphi,$$

následně po zavedení substituce  $u = \cos(\varphi/2)$ ,  $-2du = \sin(\varphi/2)$  a  $a = \cos(\varphi_0/2)$  dojdeme k tvaru

$$T_{AB} = \sqrt{\frac{r}{g}} \int_a^0 \frac{-2}{\sqrt{a^2 - u^2}} du = -\frac{2}{a} \sqrt{\frac{r}{g}} \int_a^0 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{a}\right)^2}} du$$

a po konečném zintegrování obdržíme finální výsledek

$$T_{AB} = -2\sqrt{\frac{r}{g}} \left[ \arcsin\left(\frac{u}{a}\right) \right]_a^0 = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}. \quad (4.13)$$

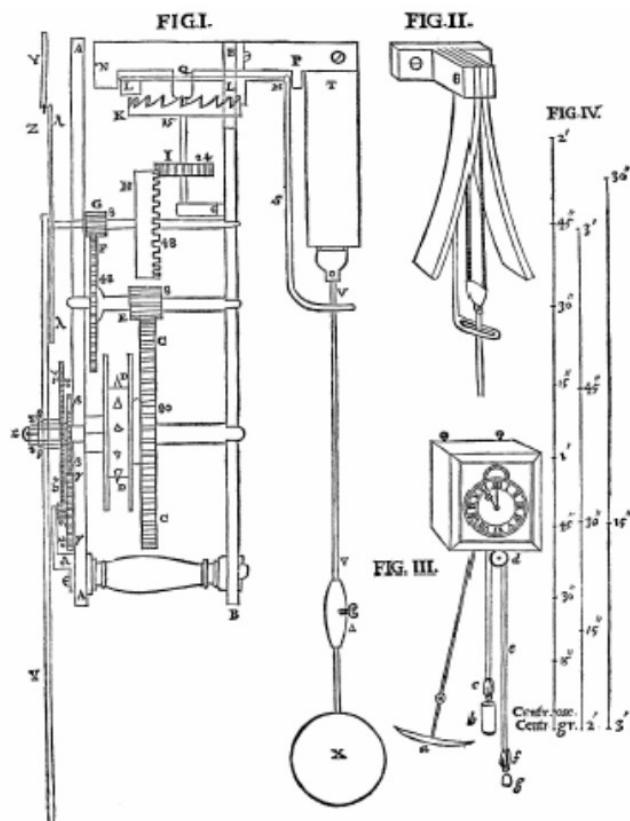
Snadno nahlédneme, že výsledný vztah (4.13) nezávisí na parametru  $\varphi_0$ . Jinými slovy čas pohybu hmotného bodu do nejnižší polohy cykloidy nezávisí na jeho počáteční poloze. Cykloida je *tautochronou*.

Vzhledem k tomu, že získaný vztah odpovídá době jedné čtvrtiny periody kmitů (pohyb hmotného bodu z počáteční polohy do nejnižší polohy), pro délku periody kmitů cykloidálního kyvadla  $T$  tedy platí

$$T = 4\pi\sqrt{\frac{r}{g}}. \quad (4.14)$$

Zde by bylo dobré podotknout, že ve vrcholu cykloidy (kdy  $\varphi = \pi$ , v případě otočené cykloidy se jedná o její nejnižší bod) je její poloměr křivosti roven  $4r$ . Z toho je vidět, že cykloidální kyvadlo je takové, které se ve vrcholu „přimyká“ k trajektorii matematického kyvadla (jinými slovy oskulační kružnice dané cykloidy splývá s trajektorií matematického kyvadla). Dosadíme-li pak za délku matematického kyvadla  $l = r/4$ , získáme stejnou periodu kmitů.

Jak již bylo zmíněno, Huygensův model kyvadlových hodin je založen na pohybu závaží po cykloidě tak, aby byl jeho pohyb *isochronní*. Vzhledem k tomu, že evolventou cykloidy je rovněž cykloida, umístil Huygens vedle závěsu kyvadla zarážky ve tvaru cykloidy za účelem korigování trajektorie závaží kyvadla (viz obrázek 4.7).



Obrázek 4.7: Náčrtek Huygensova modelu kyvadlových hodin uvedený v *Horologium Oscillatorium* [13]

Rozborem pohybu tlumeného pohybu kyvadla (tření a další odporové síly) se zabývá článek [255], kde je ukázáno, že i v případě tlumeného pohybu je cykloida stále *tautochronou*.

Nutno však poznamenat, že cykloidální kyvadlo je *isochronní* pouze v případě matematického kyvadla. I sám Huygens k tomuto problému došel, když studoval pohyb reálných kyvadel (větších závaží na provázku nebo fyzických kyvadel s pevnými tyčemi a pružným kloubem u závěsu). Během svého výzkumu došel k dvěma důležitým poznámkám [245].

Za prvé, neexistuje žádná jednoduchá konstrukce s pružným závěsem přizpůsobujícím se zarážkám, která by zajistila, aby se těžiště závaží (tuhého tělesa nezanedbatelných rozměrů) pohybovalo po evolventě k daným zarážkám. Za druhé, pokud je závaží zavěšeno na provázku a jeho těžiště se pohybuje po cykloidě, jeho pohyb není *isochronní*.

I proto sám Huygens navrhl jako řešení všech problémů svého modelu kyvadlových hodin prosté omezení maximální výchylky na hodnotu okolo  $5^\circ$ , protože malé kružnicové oblouky se od těch cykloidálních příliš neliší [17].

Studiem a hledání *isochronního* kyvadla se však zabývali i další vědci a vynálezci. Například Benjamin Gompertz v roce 1818 ukázal, že cykloidální kyvadlo v reálném provedení opravdu *isochronní* není a že není možné jej zkonstruovat pomocí nijak tvarovaných zarážek u závěsu [245].

### 4.3 Machovo kyvadlo

Podíváme-li se na vztah pro periodu matematického kyvadla ( $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ , viz část 2.3.1), jak již bylo diskutováno, pro malé výchylky tato doba závisí pouze na dvou měnitelných parametrech, na délce kyvadla  $l$  a velikosti tíhového zrychlení  $g$ . Jinými slovy, pokud uchováme délku konstantní, pak platí, že s menším tíhovým zrychlením se doba kyvu prodlužuje (např. na Měsíci bude mít stejné kyvadlo delší periodu než na Zemi).

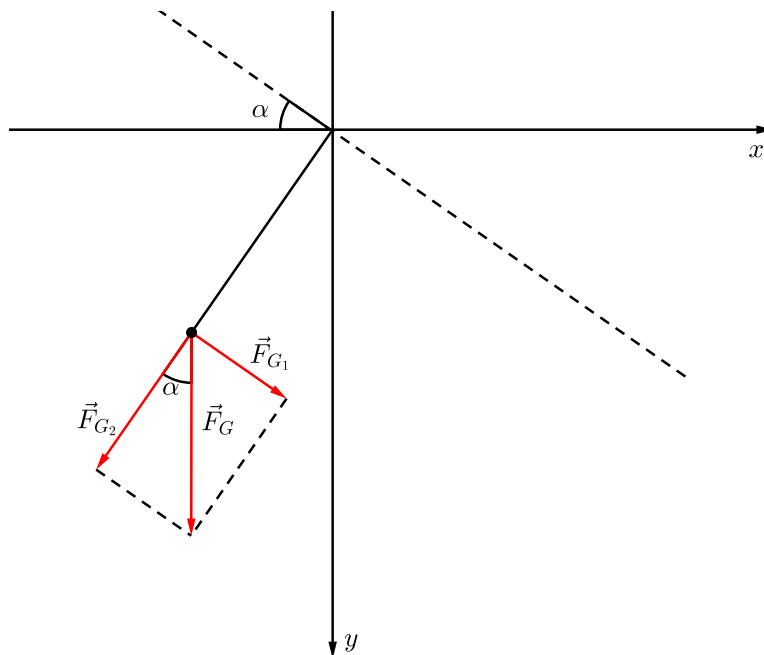


Obrázek 4.8: Model Machova kyvadla [256]

Velikost tíhového zrychlení ve třídě během vyučovací hodiny nejspíš jen tak nezměníme, ale jistý způsob, jak docílit podobných výsledků, přeci jen existuje. S touto myšlenkou souvisí pokus s *Machovým kyvadlem* pojmenovaném po rakouském fyzikovi Ernstu Machovi [257, 258] (anebo, jak se častěji objevuje především

v anglicky psané literatuře, tzv. *variable g-pendulum* [259]). Pro pohyb kyvadla je totiž důležitý průmět tíhové síly (tíhového zrychlení) do směru pohybu (roviny kmitání).

*Machovo kyvadlo* bývá často sestrojeno z dřevěné nebo kovové konstrukce a několika drátů (obrázek 4.8), na kterých je připevněno závaží, které se kýve kolmo k pevné ose. Tuto osu kyvadla lze naklánět o úhel  $\alpha$  vůči vodorovnému směru (obrázek 4.9), přičemž  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ .



Obrázek 4.9: Sklon osy  $\alpha$ , okolo které kmitá kyvadlo (kyvadlo kmitá v rovině kolmé k ose - „dopředu - dozadu“)

Když rozložíme tíhovou sílu  $\vec{F}_G = m\vec{g}$  působící na kyvadlo (kde  $m$  značí hmotnost závaží kyvadla a  $\vec{g}$  tíhové zrychlení), složka ve směru osy má velikost  $F_{G1} = mg \sin \alpha$  a složka ve směru kolmém k ose (tedy ležící v rovině pohybu) má velikost  $F_{G2} = mg \cos \alpha$ . Snadno nahlédneme, že první zmiňovaná složka nijak nepřispívá k pohybu okolo osy, a tedy ji nemusíme vůbec uvažovat.

Je pravda, že v tomto případě se už nejedná o model matematického kyvadla, ale fyzického. Vztah pro periodu fyzického kyvadla je (viz část 2.3.2)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}},$$

kde  $J$  značí moment setrvačnosti kyvadla vůči ose otáčení a  $l$  kolmou vzdálenost hmotného středu od osy otáčení.

Zaměříme-li se na poměr period, projevuje se zde pouze změna velikosti průmětu tíhového zrychlení do roviny kmitání. Ostatní parametry zůstávají neměnné. Pro poměr period pak platí vztah [257]

$$\frac{T_0^2}{T_\alpha^2} = \cos \alpha, \quad (4.15)$$

kde  $T_0$  značí periodu kyvadla se sklonem osy  $\alpha = 0^\circ$  a  $T_\alpha$  je perioda kyvadla s libovolným sklonem osy  $\alpha$ .



Pro  $\alpha = 90^\circ$  se model přestává chovat jako kyvadlo. Přesněji řečeno, pokud bude počáteční úhlová rychlost kyvadla nulová, pak je jakákoliv jeho počáteční výchylka rovnovážnou polohou volnou, a kyvadlo tedy nebude kmitat. Je-li počáteční úhlová rychlost nenulová, pak kyvadlo bude pokračovat v rovnoměrném pohybu po kružnici s touto rychlostí. Samozřejmě bychom zde mohli diskutovat vlivy prostředí a tření, ale z didaktického hlediska si myslím, že ideální případ bez vnějších vlivů je plně dostačující.

Výše uvedené úvahy by mohly sloužit k odůvodnění výsledného vztahu (4.15) na střední škole (například v rámci výběrového semináře). Pojdme se však na celou situaci podívat ještě jednou a dojít ke stejnému vztahu s využitím Lagrangeových rovnic 2. druhu pro fyzické kyvadlo s obecným sklonem osy otáčení  $\alpha$ .

Jako zobecněnou souřadnici zvolíme úhlovou výchylku  $\varphi$  (analogicky s klasickým fyzickým kyvadlem, jen je rovina kmitů skloněna o úhel  $\alpha$  vůči vodorovné rovině) a zobecněnou rychlost označíme  $\dot{\varphi}$ . Pro kinetickou energii  $E_k$  platí

$$E_k = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2$$

a pro potenciální energii  $E_p$

$$E_p = -mgl \cos \alpha \cos \varphi,$$

kde člen  $l \cos \alpha \cos \varphi$  vznikl kolmým průmětem délky  $l$  do svislého směru (úhlová výchylka  $\varphi$  a sklon osy otáčení  $\alpha$ ). Po následném dosazení do lagrangiánu  $L$  získáváme rovnici

$$L = E_k - E_p = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \alpha \cos \varphi. \quad (4.16)$$

Dále budeme potřebovat první derivace lagrangiánu  $L$  dle zobecněné souřadnice  $\varphi$  a zobecněné rychlosti  $\dot{\varphi}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= \frac{d}{d\dot{\varphi}} \left( \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 \right) = J \dot{\varphi}, \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= \frac{d}{d\varphi} (mgl \cos \alpha \cos \varphi) = -mgl \cos \alpha \sin \varphi, \end{aligned}$$

po jejichž dosazení do Lagrangeovy rovnice 2. druhu

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$

dojdeme k rovnici

$$J \ddot{\varphi} + mgl \cos \alpha \sin \varphi = 0.$$

Po vydělení momentem setrvačnosti  $J$  a označení  $\omega = \sqrt{mgl \cos \alpha / J}$  obdržíme finální pohybovou rovnici kyvadla s libovolným sklonem osy  $\alpha$

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0, \quad (4.17)$$

což lze pro malé výchylky s využitím aproximace  $\sin \varphi \approx \varphi$  přepsat jako

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0.$$

Odtud vidíme, že pro periodu fyzického kyvadla  $T_\alpha$  s obecným sklonem osy  $\alpha$  platí vztah

$$T_\alpha = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl \cos \alpha}}$$

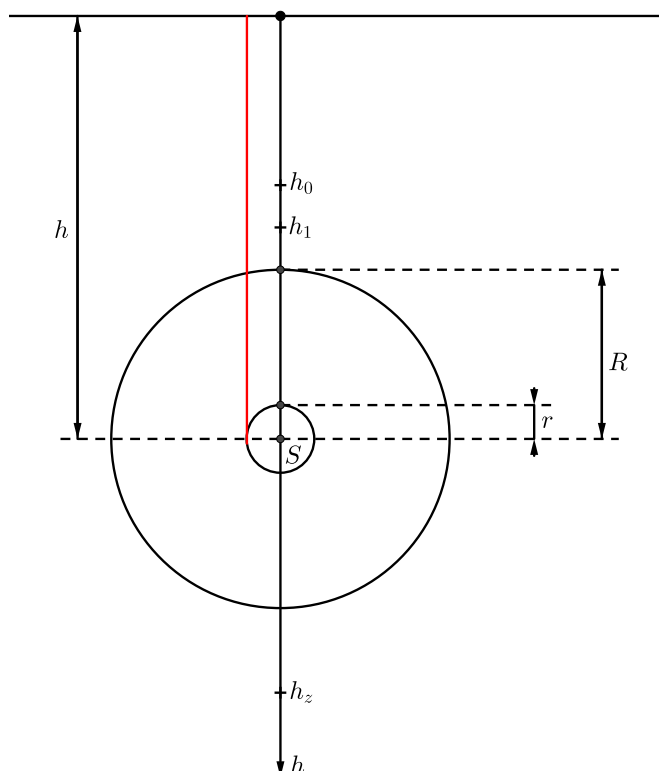
a pro poměr druhých mocnin period následně dostáváme výraz

$$\frac{T_0^2}{T_\alpha^2} = \frac{2\pi \frac{J}{mgl}}{2\pi \frac{J}{mgl \cos \alpha}} = \cos \alpha, \quad (4.18)$$

který se shoduje s výše uvedeným a diskutovaným vztahem (4.15).

## 4.4 Maxwellovo kyvadlo

Dalším příkladem tělesa konajícího kmitavý pohyb je tzv. *Maxwellovo kyvadlo* [260, 261] (resp. *Maxwellovo kolo*, jak se často objevuje v cizojazyčné literatuře [262]) pojmenované po významném skotském fyzikovi Jamesi Clerkovi Maxwellovi. Toto kyvadlo slouží především k demonstraci zákona zachování mechanické energie, tedy přeměnu potenciální energie v kinetickou. Dále je ideální pomůckou ke zkoumání momentu setrvačnosti rotujících těles, kmitavého pohybu těles a odporových sil působící na těleso. Využití tohoto kyvadla v reálném životě lze nalézt i u dětských hraček jako je jojo či diablo.



Obrázek 4.10: Náčrtek Maxwellova kyvadla (pohled z boku)

Kyvadlo obecně tvoří kotouč na hřídeli s velkým momentem setrvačnosti zavěšený na dvou tenkých vlákních o zanedbatelné hmotnosti (viz obrázek 4.10). Kotouč se po uvolnění z počáteční výšky  $h_0$  (poloha těžiště kyvadla, resp. osy

disku) pohybuje v tíhovém poli směrem dolů. Jeho potenciální energie se zmenšuje a jeho kinetická energie naopak roste. Při rozboru je pak důležité uvědomit si, že kinetická energie má v tomto případě dvě složky, translační a rotační.

Když disk (resp. jeho těžiště) dosáhne nejnižší polohy  $h_z$ , začne opět stoupat nahoru. Tentokrát už však nevystoupí do stejné výšky, ze které byl vypuštěn (postupně vystoupá do čím dál tím nižších poloh výšek  $h_1, h_2, \dots, h_z$ ). Toto je dáno působením různých odporových sil na disk během jeho pohybu (odpor vzduchu, tření mezi závěsnými vlákny a hřídelí, ohyb vlákna, ...), na jejichž překonání je potřeba vykonat určitou práci na úkor mechanické energie soustavy. Část energie se také „přesune“ do kmitavého pohybu kyvadla do ostatních směrů než je směr pohybu. Jakmile kotouč dosáhne polohy, v níž bude jeho velikost rychlosti nulová, začne opět klesat a celý děj se bude opakovat.

Pojďme se blíže podívat na přeměny mechanické energie během pohybu kyvadla a odvodit pomocí Lagrangeových rovnic 2. druhu, co platí pro zrychlení kyvadla (resp. jeho těžiště). Pro jednoduchost předpokládejme ideální případ bez odporových sil a dalších ztrát energie během pohybu. Rovněž budeme uvažovat pohyb osy Maxwellova kyvadla jen směrem svisle dolů, bez kývání do ostatních směrů.

Uvažujme disk o poloměru  $R$ , hmotnosti  $m$  a momentu setrvačnosti  $J$  na hřídeli o poloměru  $r$  v homogenním tíhovém poli se zrychlením  $g$ . Jako zobecněnou souřadnici zvolme okamžitou výšku jeho těžiště  $h$  (viz obrázek 4.10) a zobecněnou rychlost označíme  $\dot{h}$  ( $= \frac{dh}{dt} = v$ ). Pro potenciální energii kyvadla  $E_p$  platí

$$E_p = -mgh.$$

Pro jeho kinetickou energii  $E_k$ , která je dána součtem kinetické energie posuvného  $E_{k(trans)}$  a rotačního pohybu  $E_{k(rot)}$ , dostáváme

$$E_k = E_{k(trans)} + E_{k(rot)} = \frac{1}{2}m\dot{h}^2 + \frac{1}{2}J\omega^2,$$

kde  $\omega$  značí úhlovou rychlost. S využitím vztahu mezi úhlovou a obvodovou rychlostí (na obvodu hřídele, odkud se odmotává, resp. kde se namotává, závěsné vlákno), která je stejně velká jako rychlost posuvného pohybu ( $\dot{h} = \omega r$ ), dojdeme k tvaru

$$E_k = \frac{1}{2}\dot{h}^2 \left( m + \frac{J}{r^2} \right).$$

Dosazením do lagrangiánu poté získáme rovnici

$$L = E_k - E_p = \frac{1}{2}\dot{h}^2 \left( m + \frac{J}{r^2} \right) + mgh. \quad (4.19)$$

Následně budeme potřebovat první derivace lagrangiánu dle zobecněné souřadnice  $h$  a zobecněné rychlosti  $\dot{h}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{h}} &= \dot{h} \left( m + \frac{J}{r^2} \right), \\ \frac{\partial L}{\partial h} &= mg, \end{aligned}$$

po jejichž dosazení do Lagrangeovy rovnice 2. druhu

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{h}} \right) - \frac{\partial L}{\partial h} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left[ \dot{h} \left( m + \frac{J}{r^2} \right) \right] - mg &= 0\end{aligned}$$

a navazujících úpravách dojdeme ke vztahu pro velikost zrychlení těžiště kyvadla  $\ddot{h}$  ( $= \frac{d^2 h}{dt^2} = a$ )

$$\begin{aligned}\ddot{h} \left( m + \frac{J}{r^2} \right) - mg &= 0, \\ \ddot{h} &= \frac{g}{1 + \frac{J}{mr^2}}.\end{aligned}\tag{4.20}$$

Snadno nahlédneme, že zrychlení těžiště kyvadla je konstantní, jinými slovy nezávisí ani na čase  $t$  ani na aktuální poloze (přesněji řečeno na souřadnici  $h$ ). Jedná se tedy o rovnoměrně zrychlený pohyb (v našem idealizovaném případě bez odporových sil atd.). Experimentální ověření tohoto faktu je možno vyčíst např. z naměřených dat a odpovídajících grafů uvedených v [262].

Označíme-li  $h_0$  počáteční polohu,  $h_z$  nejnižší polohu a rozdíl těchto výšek  $s = |h_0 - h_z|$ , pak dosazením do vztahu pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu  $s$

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

a následnými jednoduchými algebraickými úpravami získáme vztah pro odpovídající dobu pohybu  $t$

$$t = \sqrt{\frac{2s \left( 1 + \frac{J}{mr^2} \right)}{g}}.\tag{4.21}$$

Zavedme značení  $T_i$  pro dobu mezi dvěma průchody kyvadla nejnižší polohou  $h_z$ ,  $h_i$  pro výšku maximální polohy mezi odpovídajícími dvěma průchody a  $s_i$  pro příslušnou dráhu ( $s_i = |h_i - h_z|$ ). Pak pro dobu  $T_i$  („periodu“ Maxwellova kyvadla) platí

$$T_i = 2\sqrt{\frac{2s_i \left( 1 + \frac{J}{mr^2} \right)}{g}}.\tag{4.22}$$

Ve speciálním případě, kdy by kyvadlo tvořil homogenní disk o poloměru  $R$  s momentem setrvačnosti  $J = \frac{1}{2}mR^2$ , bychom mohli výsledný tvar upravit na

$$T_i = 2\sqrt{\frac{s_i(2r^2 + R^2)}{gr^2}}.\tag{4.23}$$

Odvození vztahu pro zrychlení Maxwellova kyvadla  $a$  s využitím zákona zachování mechanické energie a analogie s volným pádem (rovnoměrně zrychlený pohyb) lze nalézt např. v [262, 263]. V diskutovaném odvození se omejdeme bez derivací, a tak je možné jej použít i na střední škole (např. ve výběrových seminářích). Ve stejných pracích je prezentováno i odvození vztahu pro zrychlení  $a$  s využitím 2. Newtonova zákona (a tedy i se započtením tahové síly závěsných vláken).

Pohyb Maxwellova kyvadla bez zanedbání odporových sil prostředí je pak diskutován např. v [261, 264].

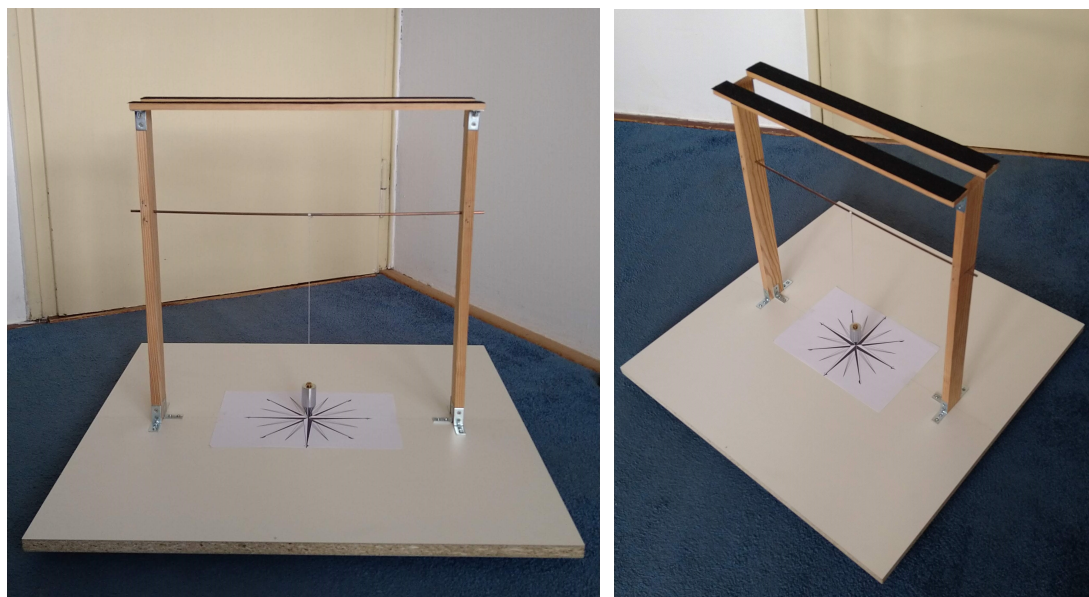
# 5. Jednoduché pokusy a měření s modely vybraných kyvadel

V následující kapitole je prezentováno a popsáno několik poměrně jednoduchých reálných modelů vybraných kyvadel (stejných jako v předchozí kapitole [4](#)), které byly vyrobeny z běžně dostupných (a nepříliš drahých) materiálů tak, aby se jimi mohli inspirovat průměrně zruční vyučující či studenti (např. ve výběrových seminářích) a v případě zájmu si je mohli sami postavit.

S modely byly provedeny různé experimenty, ať už sloužící ke kvalitativní demonstraci popsaných jevů či k alespoň přibližnému kvantitativnímu ověřování diskutovaných závislostí. Veškeré pokusy a jejich výsledky jsou v této kapitole podrobně popsány. Videozáznamy k pokusům lze nalézt na přiloženém DVD.

## 5.1 Foucaultovo kyvadlo

Za účelem zkoumání pohybu Foucaultova kyvadla diskutovaného v části [4.1](#) byl sestaven model kyvadla (obrázek [5.1](#)), který je inspirován modelem s kamerou pro pozorování stáčení roviny kmitů, který se nachází ve sbírce pokusů přípravných demonstračních experimentů KVOF MFF UK [\[168\]](#). Nutno poznamenat, že model neslouží k demonstraci otáčení Země, ale ke kvalitativní ukázce stáčení roviny kmitů při rotaci výrazně rychlejší.



Obrázek 5.1: Model Foucaultova kyvadla

Model se skládá z čtvercové desky a nosné konstrukce pro kyvadlo a mobilní telefon (resp. fotoaparát či kameru). Deska je z překližky a délka její strany je 70 cm. Čím větší a těžší, tím lepší, je potřeba získat co největší moment setrvačnosti. Na druhou stranu je nutné počítat s tím, že model bude nutné čas od času přesouvat a někde skladovat.

Pod hlavní deskou je připevněné ložisko (podobné jako bývá v otočných stolcích či podnosech). Ze spodní strany ložiska je přišroubované ještě jedno čtvercové prkno sloužící jako podstavec. Na horní straně hlavní desky je doprostřed přilepený obrázek růžice pro lepší pozorování stáčení roviny.

Nosná konstrukce se skládá ze dvou svislých obdélníkových prken o délce 50 cm, která jsou pomocí úhelníků přišroubována k hlavní desce. Tato prkna jsou nahoře pomocí úhelníků spojena dvěma dalšími vodorovnými lištami také o délce 50 cm.

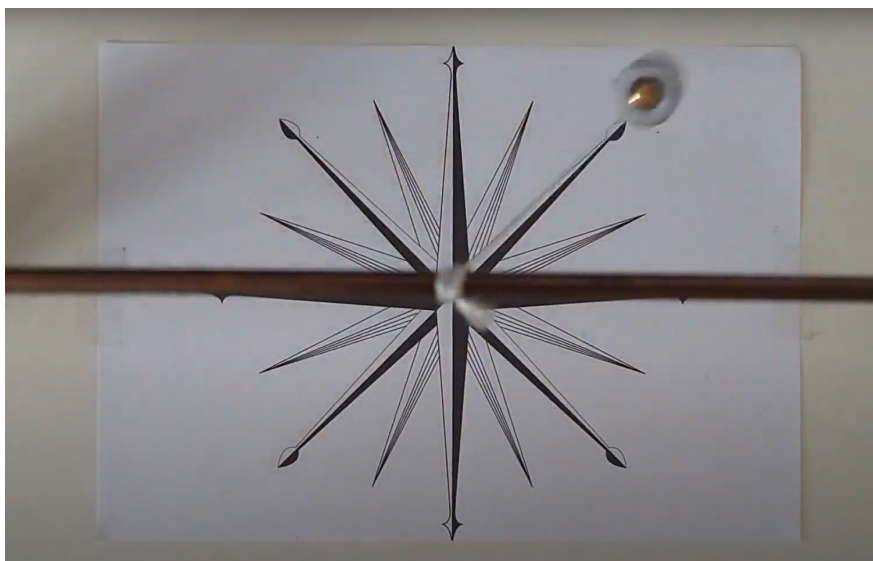
Tyto lišty jsou shora potaženy protiskluzovou páskou. Díky tomu na ně lze položit telefonní mobil a natáčet experimenty shora. Páska velmi dobře zabraňuje posouvání mobilu při otáčení desky. V případě problémů či nedůvěry lze mobil připevnit k lištám například pomocí kobercové pásky.

Ve výšce cca 35 cm nad deskou je upevněna měděná tyčka, na kterou lze zavěsit závaží kyvadla (v mém případě se jedná o olovničku o hmotnosti 150 g).

S modelem byly provedeny jednoduché pokusy, vše bylo zaznamenáno pomocí mobilního telefonu (s kamerou s rozlišením  $1\,920 \times 1\,080$  px a frekvencí 30 snímků za sekundu) a videonahrávky lze nalézt na přiloženém DVD.

V prvním případě jsem natáčela kyvadlo z boku, z vnějšku. Rozkývala jsem kyvadlo a následně roztočila desku. Kyvadlo se chovalo přesně podle očekávání, tedy kývalo se přibližně stále ve stejné rovině. Tento pokus je zaznamenán na dvou videích a v obou případech vyšel podobně.

Zde bych ráda zmínila jeden z největších problémů, na který jsem narazila. Je velmi těžké vypustit kyvadlo tak, aby se pohybovalo pouze v rovině, tedy abych mu neudělila rychlost v žádném jiném směru. V ideálním případě by bylo nutné nechat kyvadlo ustálit a následně jej co nejopatrněji vypustit (např. pomocí přepálení nitě, která jej v počáteční poloze drží). Na všech videích je vidět, že se rovina kyvu lehce stáčí jako by se stáčela u kónického kyvadla (viz část [2.3.3](#)). Vzhledem k rychlosti otáčení desky je však toto stáčení zanedbatelné a je stejné i při otáčení desky v opačném směru.



Obrázek 5.2: Pohyb kyvadla shora

Další videa jsem natáčela mobilním telefonem, který byl položen na horních vodorovných lištách. Snažila jsem se kameru umístit přímo na střed a zaostřit

tak, aby byl pohyb kyvadla, co nejlépe vidět. Kyvadlo jsem rozkývala a následně roztočila desku. Tento pokus jsem zaznamenala třikrát pro otáčení desky po směru hodinových ručiček (tři různé úrovně přiblížení) a třikrát při otáčení proti směru hodinových ručiček (viz obrázek).

Na videích je poměrně dobře vidět, jak se pohyb kyvadla změní při otáčení desky. Srovnání můžeme provést se začátkem, než se deska roztočí, a na konci poté, co se deska zastaví. Pohyb kyvadla připomíná růžici, která je nalepená na desce pod ním, případně nějaký květ s tenkými okvětními lístky. Vcelku si myslím, že tento model slouží velmi dobře ke kvalitativní prezentaci jevu.

Co se týče délky doby experimentu, deska se bez vnějšího buzení otáčí přibližně půlminutu. Moment setrvačnosti desky však lze zvýšit například umístěním závaží na obvod desky. Na druhou stranu si myslím, že i půlminuta je dostatečně dlouhá doba k registraci a pozorování děje.

Výhodou tohoto modelu je, že lze sledovat pohyb kyvadla z vnějšku, ale i z horní opěrné konstrukce. Pokusy můžeme natáčet a následně studentům přehrávat. Další možností je obraz rovnou přenášet na počítač (resp. na plátno pomocí projektoru). Většina současných smartphonů by tuto schopnost měla mít, buď přímo (při kombinaci Android OS na mobilu a Windows 10 na počítači [265]) nebo lze jistě nalézt nějaké aplikace třetí strany (např. [266, 267, 268])

## Další možnosti

Vzhledem k oblíbenosti tohoto experimentu můžeme na internetu nalézt nespočet článků zabývajících se touto tematikou stejně jako způsobem, jak jej demonstrovat žákům. Uvedu zde několik příkladů, které mě zaujaly.

Jednou možností je postavit kyvadlo v učebně (s délkou závěsu okolo 2 m). Problémem pak však bude především jeho časová náročnost (v naší zeměpisné poloze se rovina kmitů za 1 hodinu stočí přibližně o  $11^\circ$ ). Zajímavé je jistě využití laseru k určení stočení roviny kmitů jako je popsáno v [269].

U menších modelů může být velkým problémem tření v závěsu a odpor vzduchu, proto je nutné pohyb kyvadla budít pomocí elektromagnetu. Zájemci mohou nalézt inspiraci v [270]. Podobné buzení kyvadla je použito i v dalším článku [271], zde se však k zaznamenání pohybu kyvadla využívá jiskrových výbojů mezi kyvadlem a deskou pod ním. Díky tomu můžeme mezi tyto části vložit například papír a následně pohyb kyvadla dále kvalitativně zkoumat.

Jiskrových výbojů využívá i pokus popsáný v [272]. V tomto případě však kyvadlo není buzené, ale pohybuje se nad otočnou deskou, kterou pohání elektromotor. Dále pokus a zkoumání děje probíhá obdobně. V článku lze nalézt inspiraci na využití záznamu pohybu pomocí výbojů při jiných experimentech s kyvadlem.

Nejjednodušší ze zde diskutovaných experimentů je popsán v [238]. Autor využívá jednoduché kyvadlo z provázku a závaží, přičemž provázek je provléknut dírkou ve dně plechovky a zakončen uzlíkem tak, aby se z plechovky neuvolnil. Kyvadlo rozkýváme a následně plechovku v rukou otáčíme. Otáčení plechovky v rámci okolností neovlivňuje pohyb kyvadla.

## 5.2 Huygensovo (cykloidální) kyvadlo

Pro účely porovnání periody cykloidálního kyvadla (se zarážkami ve tvaru cykloidy) a klasického kyvadla (bez zarážek) byl sestaven model zobrazený na obrázku 5.3, který byl inspirován videem [273].



Obrázek 5.3: Model cykloidálního kyvadla se zarážkami ve tvaru cykloidy

Model tvoří dřevěná deska o výšce 45 cm a délce 40 cm upevněná mezi dvěma opěrnými stojany z dřevěných hranolů. V horní části desky jsou k ní přišroubované dvě zarážky ve tvaru cykloidy vytisknuté na 3D tiskárně ve spolupráci Mgr. Matějem Rystonem z KDF MFF UK. Přesně nad hranici mezi zarážkami je umístěn dlouhý hřebík, na který je možné zavěšovat provázky se závažími (v mém případě matičky a olovničky).

Využití 3D tiskárny k výrobě zarážek bylo zvoleno z několika důvodů. Za prvé, v poslední době se 3D tiskárny stávají velmi populární a seznamuje se s nimi čím dál tím více vyučujících i žáků (paleta možností, jak 3D tiskárny ve školách využít je totiž poměrně pestrá) [274, 275].

Za druhé, práce s nimi sice vyžaduje zkušenosti se specifickými programy - softwarem pro tvorbu 3D modelů (v mém případě *Autodesk Fusion 360* [276], který je volně dostupný pro studijní i další nekomerční účely) a softwarem připravující modely pro tisk (v mém případě *PrusaSlicer* [277], také volně dostupný), na druhou stranu, z vlastní zkušenosti vím, že práce s nimi není vyloženě obtížná a vyučující, který je zběhlejší v práci na počítači by se s těmito programy mohl naučit celkem rychle. Navíc je možné čerpat inspiraci z internetových databází 3D modelů (např. [278]), kde se nachází i mnoho modelů vhodných k zařazení do výuky (nejen) matematiky a fyziky.

Poslední důvod souvisí s obtížností výroby zarážky ve tvaru cykloidy ručně. Minimálně v mém případě si myslím, že bylo mnohem jednodušší zarážky vytisk-



nout na 3D tiskárně než je vyřezávat ze dřeva či je vyrábět ohýbáním nějakého kovu.

Nevýhodou modelu však může být jeho vrstevnatá struktura (jinými slovy řečeno vytisknutý model není opravdu hladký, avšak je možné jej ručně vyhladit pomocí pilníku nebo brusného papíru, případně pomocí acetonových par [279]). Další nevýhodou je horní mez velikosti modelu, který je možné nechat na tiskárně vytisknout (pro běžné 3D tiskárny je velikost vytisknutelných modelů omezená přibližně na  $20 \times 20 \times 20$  cm [280]).

S modelem byly prováděny dva druhy jednoduchých pokusů, které byly zaznamenány a videonahrávky je možné nalézt na přiloženém DVD. V obou případech byl k záznamu použit fotoaparát s rozlišením  $1\,920 \times 1\,080$  px a frekvencí 30 snímků za sekundu a také fotoaparát s rozlišením  $480 \times 360$  px a frekvencí 210 snímků za sekundu (resp. videa jsou  $7\times$  zpomalená, takže to opět vychází na 30 snímků za sekundu). V obou případech byl pokus proveden se závažími v podobě maticek i olovniček.

První typ pokusu spočíval v současném vypuštění dvou stejných kyvadel (stejná délka a druh závaží) s různě velkými počátečními výchylkami. Nejprve byl sledován pohyb kyvadel s omezujícími zarážkami (celkem 4 videa, 2 druhy závaží a 2 různé kamery). Následně byl obdobný pokus proveden bez zarážek omezujících pohyb kyvadla (rovněž celkem 4 videa).

V případě pohybu páru kyvadel s cykloidálními zarážkami je poměrně dobře vidět (i při zpomalení), že jejich pohyb je víceméně synchronní (největší odchylka je způsobená nesynchronizovaným vypuštěním kyvadel). Na druhou stranu přiznávám, že v některých případech se stalo, že kyvadlo s větší amplitudou začalo předcházet kyvadlo s menší amplitudou, což může pravděpodobně souviset s rozdílnými délkami závěsu (okomentováno níže).

V případě páru kyvadel neomezených zarážkami (tedy „klasických“ matematických kyvadel) se jejich pohyb zdá také synchronní, avšak při zpomaleném záběru (nebo dokonce studiu pohybu kyvadel po snímkách) je vidět, že fázový rozdíl mezi kyvadly se zvětšuje (přičemž vždy předchází kyvadlo s menší amplitudou kyvadlo s větší amplitudou, ačkoliv délky závěsu jsou stejné jako v případě pohybu se zarážkami), což svědčí o rozdílné periodě/frekvenci kyvadel.

Jak již bylo řečeno, největší chyba byla způsobená nesynchronizovaným vypuštěním kyvadel. Druhým (neméně významným) faktorem byla délka závěsu kyvadel. Ačkoliv jsem se snažila, aby byla délka závěsu u všech kyvadel stejná (a to přibližně 23 cm), jistá míra nepřesnosti (cca  $\pm 1$  mm) musí být brána v potaz a mohla výsledek celého pokusu zkreslit. Proto přiznávám, že experiment byl proveden několikrát a zde prezentovaná videa jsou ty nejlepší pokusy.

Pro účely „kvantitativního“ ověření prodloužení periody kmitů při větších počátečních výchylkách byl proveden druhý typ pokusů. Tentokrát bylo vypuštěno jen jedno kyvadlo za to s různými počátečními výchylkami ( $5^\circ$ ,  $20^\circ$  a  $45^\circ$ ). Nutno však poznamenat, že skutečná počáteční výchylka kyvadel se od zmíněné hodnoty mírně lišila (v případě největší amplitudy až o  $\pm 5^\circ$ ), protože je velmi těžké vychýlit kyvadlo o přesně definovaný úhel. Pokus byl proveden se zarážkami i bez nich, s oběma typy závaží a zaznamenán pomocí obou kamer (celkem tedy 8 videí).

Celý experiment byl následně zpracován v programu *Tracker*, kde byla pro každou kombinaci (kyvadlo, velikost amplitudy, kamera) odečtena doba 15 period.

Toto číslo bylo zvoleno jako kompromis mezi co nejpřesnějším určením délky jedné periody a doby, za kterou se maximální výchylka příliš nezmění (kvůli tření a dalším odporovým silám). Z této hodnoty byla aritmetickým průměrem určena doba jedné periody kmitu  $T$  (viz tabulky 5.1 a 5.2). Kompletní data z měření a více informací o zpracování dat (včetně chyb měření) lze nalézt v přílohách A.1.

Počáteční výchylka	Perioda kmitů $T$ [s]			Relativní prodloužení periody [%]	
	5 °	20 °	45 °	20 ° vůči 5 °	45 ° vůči 5 °
Matička (bez zarážky)	1,007	0,9765	0,9721	0,46	3,66
Olovnička (bez zarážky)	1,0232	0,9966	0,9877	0,90	3,60
Matička (se zarážkou)	0,9699	0,9676	0,9676	$\ll$ 0,01	0,23
Olovnička (se zarážkou)	1,001	0,9943	0,9943	$\ll$ 0,01	0,67

Tabulka 5.1: Výsledky měření periody kyvadla při různých počátečních výchylkách (ze záznamu pomocí fotoaparátu s frekvencí 30 snímků za sekundu)

Počáteční výchylka	Perioda kmitů $T$ [s]			Relativní prodloužení periody [%]	
	5 °	20 °	45 °	20 ° vůči 5 °	45 ° vůči 5 °
Matička (bez zarážky)	1,0041	0,9778	0,9727	0,52	3,23
Olovnička (bez zarážky)	1,0219	0,9933	0,9870	0,64	3,54
Matička (se zarážkou)	0,9702	0,9665	0,9663	0,02	0,40
Olovnička (se zarážkou)	1,0003	0,9959	0,9956	0,03	0,49

Tabulka 5.2: Výsledky měření periody kyvadla při různých počátečních výchylkách (ze záznamu pomocí fotoaparátu s frekvencí 210 snímků za sekundu)

V tabulkách jsou uvedeny i hodnoty relativního prodloužení periody kmitů (periody při počáteční výchylce 20 °, resp. 45 °, vůči periodě s počáteční výchylkou 5 °). Tyto hodnoty ukazují, že v případě pohybu kyvadla se cykloidálními zarážkami se závislost délky periody na velikosti amplitudy kmitů projevuje (dle očekávání) mnohem méně než v případě pohybu kyvadla bez zarážek.

Výsledky rovněž potvrzují fakt, že v případě maticek, které by bylo v našem uspořádání možné spíše považovat za „hmotné body“ než mnohem větší olovničky, se perioda kmitů v případě cykloidálního kyvadla prodlužuje méně (ačkoliv tento rozdíl už není tak výrazný).

Z porovnání hodnot uvedených v tabulkách 5.1 a 5.2 je vidět, že hodnoty relativního prodloužení periody rozhodně nejsou přesné na dvě až tři platné cifry, ačkoliv jsou tak v tabulkách uvedeny. Přesto dávají o chování cykloidálního kyvadla oproti normálnímu matematickému kyvadlu dobrou představu.

Nutno také podotknout, že kromě chyb měření (diskutovaných v přílohách A.1) celý experiment jistě ovlivnilo tření v bodě závěsu, tření závěsného vlákna o cykloidální zarážky a odpor vzduchu.

Především tření závěsného vlákna o zarážky při větších amplitudách kyvadla mohlo „dopomoci“ tomu, aby výsledná perioda kmitů byla kratší, na druhou stranu, z analýzy pohybu kyvadel bylo vidět, že maximální výchylka a ani samotná perioda se víceméně neměnila (během zkoumaných 15 period a ještě trochu déle). Větší problém s „měnicí“ se periodou byl v případě kyvadel bez zarážek, kdy se obzvláště u velkých amplitud začala stáčet rovina kmitů (proto byl pokus několikrát zopakován a prezentované pokusy jsou ty nejpovedenější).

Celkově si myslím, že model kyvadla s cykloidálními zarážkami spolu s provedenými a diskutovanými experimenty poměrně dobře posloužil jak ke kvalitativní demonstraci Huygensova kyvadla, ale překvapivě dobře dopadlo i samotné měření s modelem. Proto si myslím, že může sloužit jako inspirace pro vyučující fyziky (případně zájemce z řad studentů atd.), kteří by si jej mohli sami sestavit a používat k demonstraci, měření a dalšímu bádání.

## 5.3 Machovo kyvadlo

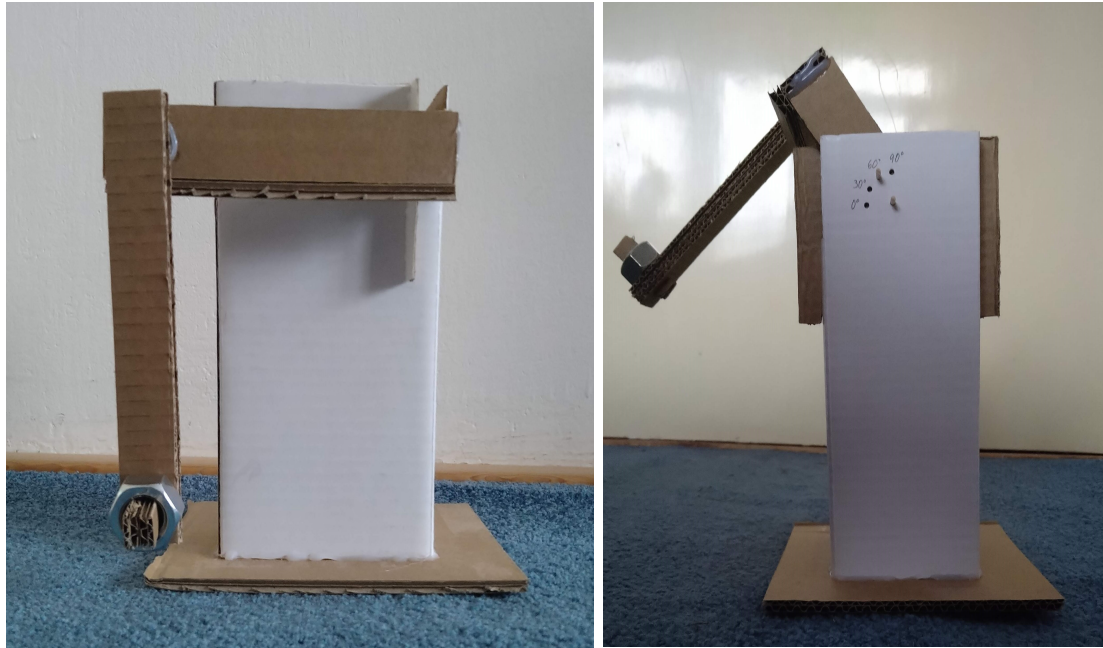
Za účelem demonstrace a zkoumání pohybu Machova kyvadla diskutovaného v části 4.3 byly sestrojeny dva modely kyvadla. Nutno poznamenat, že oba modely slouží spíše ke kvalitativní demonstraci jevu.

### 5.3.1 Model z kartonu

První model byl sestrojen převážně z kartonu (viz obrázek 5.4). Model umožňuje měnit sklon nosného ramene, a tedy i osy, okolo které se tyč kyvadla otáčí. Základní poloha je pro sklon  $\alpha = 0^\circ$ . Dále můžeme rameno pootočit a zaaretovat špejlemi v poloze pro sklon  $\alpha = 30^\circ$ ,  $60^\circ$  a  $90^\circ$ .

Základna je obdélníkového půdorysu o rozměrech přibližně 11 cm a 9 cm a výšce cca 22 cm. Přední stěna je zdvojená, aby se mezi obě desky vešlo nosné rameno kyvadla a zároveň nebyla základna tímto ramenem příliš deformována. V těchto předních deskách je pět otvorů. Hlavní je pro špejli představující osu, okolo které se může nosné rameno otáčet. Dále zde nalezneme čtyři otvory sloužící k aretaci ramene ve zvolené poloze, zvolený sklon kyvadla. Základna je kvůli stabilitě připevněna k podkladové desce. Díky tomu lze navíc dovnitř základny umístit závaží a zatížit ji.

Nosné rameno je ve tvaru písmene L. Na jednom konci má otvory sloužící k aretaci ramene ve zvolené poloze, na druhém je v rameni zapuštěné a přilepené ložisko. K ložisku je šroubem připevněna tyč kyvadla o délce přibližně 18 cm.



Obrázek 5.4: Kartonový model Machova kyvadla

Na druhém konci tyče se nachází zarážka, na kterou lze umístit závaží (v mém případě se jedná o matici).

S modelem jsem provedla jednoduché měření, které jsem natáčela fotoaparátem s rozlišením 1 920 x 1 080 px a frekvencí 30 snímků za sekundu (videa lze nalézt na přiloženém DVD). Pro polohy  $\alpha = 0^\circ$ ,  $30^\circ$  a  $60^\circ$  jsem kyvadlo vychýlila z rovnovážné polohy a sledovala jeho pohyb. Pro každý sklon proběhlo 6 měření. V programu *Tracker* jsem následně odečítala délku 10 period pro první dva případy a délku 6 period pro třetí možnost. Výsledná hodnota periody  $T$  pohybu kyvadla byla určena jako aritmetickým průměrem (viz tabulka 5.3, kde jsou výsledné hodnoty uvedeny spolu s výslednou chybou měření). O výsledcích měření a zpracování chyb je možné se dočíst více v přílohách A.2.

Sklon osy $\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$
Naměřená hodnota $1 T$ [s]	$0,774 \pm 0,005$	$0,798 \pm 0,008$	$0,967 \pm 0,011$
Teoretická hodnota $1 T_{teor}$ [s]	0,774	0,831	1,094

Tabulka 5.3: Měření s kartonovým modelem Machova kyvadla

Úpravou vztahu (4.15) z teoretické části textu 4.3 získáme vzorec pro periodu pohybu  $T_\alpha$  při daném sklonu  $\alpha$

$$T_\alpha = \frac{T_0}{\sqrt{\cos \alpha}}, \quad (5.1)$$

kde  $T_0$  značí periodu kyvadla se sklonem osy  $\alpha = 0^\circ$ .

Dosažením do vztahu (5.1) snadno určíme teoretickou délku periody pro naše zvolené hodnoty sklonu  $\alpha$ . Tyto hodnoty jsou pro porovnání také uvedené v tabulce 5.3 (délku periody  $T_0$  beru shodnou s naměřenou hodnotou).

Porovnáme-li teoretické hodnoty s naměřenými daty, je zřejmé, že se neshodují ani v rámci chyby. Přesněji řečeno, odchylky od teoretických hodnot jsou mnohonásobně větší než chyby měření periody.

Předpoklad, že by pohyb kyvadla mohlo při větším sklonu brzdit tření (například v ložisku) se nezdá jako správně vysvětlení, protože naměřená perioda je kratší, ne delší. Dalším faktorem může být velikost počáteční výchylky, která v některých případech dosahovala až  $15^\circ$ , především při větším sklonu osy. Avšak jak již bylo diskutováno v části 2.3.1, díky tomu by se perioda pohybu měla také prodloužit, ne zkrátit. Spíše to vypadá na chybu v konstrukci kyvadla.

Zkusila jsem opět využít vztah (4.15) a tentokrát pomocí něj vypočítat teoretický sklon  $\alpha$  odpovídající naměřeným délkám period. Pro první z nenulových sklonů vychází jeho teoretická hodnota přibližně  $\alpha_{30} = 19,8^\circ$ , tedy asi o  $10^\circ$  méně než se předpokládalo. Pro druhý z nenulových sklonů vychází jeho teoretická hodnota cca  $\alpha_{60} = 50,2^\circ$ , což je opět asi o  $10^\circ$  méně.

Vskutku, pomocí „hrubého“ měření běžným úhloměrem jsem se pokusila opravdový sklon u kyvadla ověřit a chyba je skutečně v konstrukci kyvadla. Tyč kyvadla není rovnoběžná se základnou kyvadla (ani s ramenem s ložiskem), od správného směru se odklání asi o  $3^\circ$ . Důležitější je však sklon nosného ramene s ložiskem, protože právě sklon ložiska udává sklon osy, okolo které se kyvadlo otáčí. Pro základní polohu, je osa rovnoběžná se zemí, avšak pro  $\alpha = 30^\circ$  skutečný sklon vychází přibližně na  $20^\circ$  a pro  $\alpha = 60^\circ$  je roven cca  $50^\circ$ .

Tato nepřesnost může být způsobena určením správné polohy aretačních otvorů na přední straně základny a na nosném rameni. Nepatrná odchylka od správného směru na malé vzdálenosti (vzdálenost otvorů je přibližně 1,5 cm) může být ve skutečnosti mnohem větší než se zdá. Navíc se otvory opakovaným používáním lehce rozšiřují a tyč i rameno se kvůli závaží trochu prohýbají směrem dolů. V neposlední řadě je nutné počítat s tím, že kyvadlo se může při větším zatížení naklánět (proto je vhodné základnu něčím zatížit).

Samozřejmě bychom mohli sestrojít nový model, ale vyrobit kvalitnější model z kartonu není jednoduché a velmi pravděpodobně by se podobný problém objevil znovu. Obzvláště těžké je ukotvení ložiska a šroubu v tyči kyvadla tak, aby se nekývalo a při zatížení nevyvracelo z úchyty. Toto je zatím nejpovedenější verze. Cílem však nebylo sestrojít dokonalý model, ale model funkční, a efekt prodloužení periody je zde vidět alespoň kvalitativně.

Následně jsem pozorovala, jak se kyvadlo chová pro sklon osy  $\alpha = 90^\circ$ , kdy by tyč kyvadla měla být rovnoběžná se zemí. Teoreticky by při nulové počáteční úhlové rychlosti měla být každá poloha tyče rovnovážná. Při nenulové počáteční úhlové rychlosti by tyč měla konat rovnoměrný kruhový pohyb.

Pro účely zkoumání tohoto jevu jsem natočila další 2 videa s dřívější verzí modelu, která se pro tyto účely ukázala být vhodnější. Na videích je vidět, že při nulové počáteční úhlové rychlosti je víceméně každá poloha rovnovážná. Musím však přiznat, že bylo potřeba nosné rameno lehce vyvažovat rukou, abychom tento jev mohli sledovat.

Zkusila jsem i, jak se kyvadlo bude chovat při nenulové počáteční úhlové rychlosti. Zde jsem však narazila na technické možnosti modelu. Tyč kyvadla se zavá-

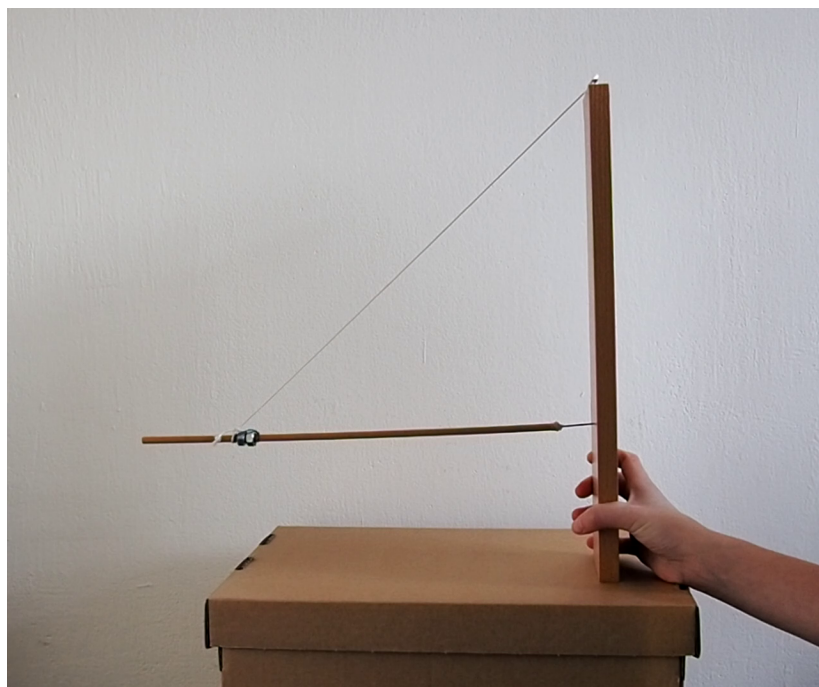
žím se prohýbala až tak, že se křížila s ramenem s ložiskem a tedy nebylo možné sledovat kruhový pohyb. Troufám si však tvrdit, že kdyby k srážce nedocházelo a rameno bylo lépe vyvážené, tyč kyvadla by se opravdu pohybovala po kružnici.

Konstrukce modelu je poměrně jednoduchá, není potřeba žádných speciálních pomůcek a použitý materiál je relativně snadno dostupný. Uznávám, že dřevo by bylo vhodnější materiál, ale výroba modelu by pak byla mnohem náročnější. Takto si myslím, že by si jej mohli sestavit i studenti a sami s ním provádět nějaká jednoduchá orientační měření. Samozřejmě, nelze očekávat žádné exaktní výsledky. O tom svědčí i výše uvedená diskuze výsledků. Na druhou stranu si myslím, že tento model ke kvalitativní demonstraci zkoumaného jevu použít lze.

### 5.3.2 Jednoduchý model

Druhý model je pravděpodobně ještě jednodušší (viz obr. 5.5). Tuto konstrukci jsem převzala od vedoucího práce, který přišel s nápadem podobný model prozkoumat. Tvoří jej nosné obdélníkové prkénko o rozměrech cca 40 cm a 10 cm, dřevěná tyčka o délce přibližně 37 cm s hřebíkem a závažími a provázek o délce přibližně 42 cm.

Na horní straně prkna je šroubek (může to být hřebík či třeba jen zářez v prkně), čímž je k němu provázek přivázán. Tyčka má na jednom konci hřebík, který slouží jako hrotový závěs kyvadla. V přední desce prkna je důlek pro uložení hrotu hřebíku. Na druhém konci tyčky je závaží tvořené matickami, za kterými je k tyčce přivázán druhý konec provázku. Provázek pomáhá držet tyčku v poloze kolmé na prkno.



Obrázek 5.5: Jednoduchý model Machova kyvadla

Ačkoliv by s tímto modelem šla jistě provádět měření podobná těm z předchozí části, využila jsem jej pouze ke kvalitativní demonstraci.

Práce s tímto kyvadlem je zaznamenána třech krátkých videích. Na začátku je prezentovaná úvodní poloha, kdy je tyč kyvadla rovnoběžná se zemí, a tedy každá počáteční výchylka je přibližně rovnovážná. Opět je zde nutné prkno pečlivě vyvažovat, ale jako demonstrace dané problematiky je to dostatečné. Rovnoměrný pohyb po kružnici při nenulové počáteční rychlosti je zde hůře prezentovatelný, protože je pohyb tyčky omezován uložením hrotu hřebíku a především samotným nosným prkénkem.

Následně je ukázán pohyb kyvadla pro další dva až tři různé sklony. Je poměrně viditelné, že čím je náklon prkna větší, tím je délka periody pohybu delší, a naopak. Dále se zde ukazuje největší nevýhoda tohoto modelu, a to fakt, že hřebík sloužící jako závěs z důlku v prkne vypadává. Avšak při troše šikovnosti lze s modelem i přes tento nedostatek pracovat.

Pokud by zájemci s tímto modelem chtěli provádět nějaká měření, jistě by bylo vhodnější místo držení v ruce vyrobít nějaký stojánek s možností otáčení a stupnicí, kvůli nastavování a odečítání velikosti sklonu. Dále by bylo lepší si více vyhrát s důlkiem, ve kterém je uložený hrot hřebíku, aby z něj nevypadával a dosáhlo se minimálního tření.

Vzhledem k tomu, že jsem model využila pouze ke kvalitativní demonstraci daného jevu, myslím, že to takto stačí a není problém podobný pokus předvést žákům ve třídě či nechat je samotné, ať s pomůckou sami pracují.

## 5.4 Maxwellovo kyvadlo

Pro účely demonstrace a studia pohybu Maxwellova kyvadla zkoumaného v části 4.4 byly vyrobeny tři jednoduché modely z běžně dostupných pomůcek, které byly inspirovány článkem 260.

První verze je vyrobena ze dvou slepených CD o poloměru  $(6,0 \pm 0,1)$  cm, špejle (sloužící jako hřídel s průměrem 3 mm), dvou koleček z kartonu sloužících k upevnění špejle, dvou stejně dlouhých nití a lepidla (obrázek 5.6). V druhém modelu byly místo CD použity dva menší kruhy z kartonu o poloměru  $(7,9 \pm 0,1)$  cm, ve třetím pak jeden větší kruh z kartonu o poloměru  $(9,9 \pm 0,1)$  cm. Vyzkoušela jsem i variantu, kdy jsem na velký kartonový disk přilepila čtyři matičky ve vzdálenosti  $(8,7 \pm 0,1)$  cm od středu disku za účelem zvětšení momentu setrvačnosti kyvadla.

Kyvadlo lze vyrobit i z jiných materiálů, například ze starých plechovek nebo kruhových krabiček 281. Případně je možné rovnou využít hračku jojo, která má podobné vlastnosti (např. 282).

S modely byl proveden velmi jednoduchý pokus, který byl zaznamenán fotoaparát s rozlišením  $1\,920 \times 1\,080$  px a frekvencí 30 snímků za sekundu (videa lze nalézt na přiloženém DVD). Kyvadla jsem zavěsila na stojan (v mém případě truhlářská svěrka) tak, aby byla špejle ve vodorovné poloze. Na svěrku jsem připevnila i skládací metr pro možnost odečítání polohy (výšky) těžiště kyvadla. Rovnoměrným otáčením špejle jsem na ni navinula nit a poté kyvadlo uvolnila. Pokus jsem provedla s každým modelem pětkrát (celkem 20 videí).

Následně jsem v programu *Tracker* provedla videoanalýzu pohybu kyvadla ve všech případech. Veškerá data z měření s vysvětlujícími komentáři (včetně informací o jejich zpracování a určení chyb měření) lze nalézt v přílohách A.3.



Obrázek 5.6: Jednoduchý model Maxwellova kyvadla

Z naměřených dat jsem určila doby mezi průchody nejnižšími polohami  $T_i$  a odpovídající výšky  $s_i$ , do kterých kyvadlo během nich vystoupalo.

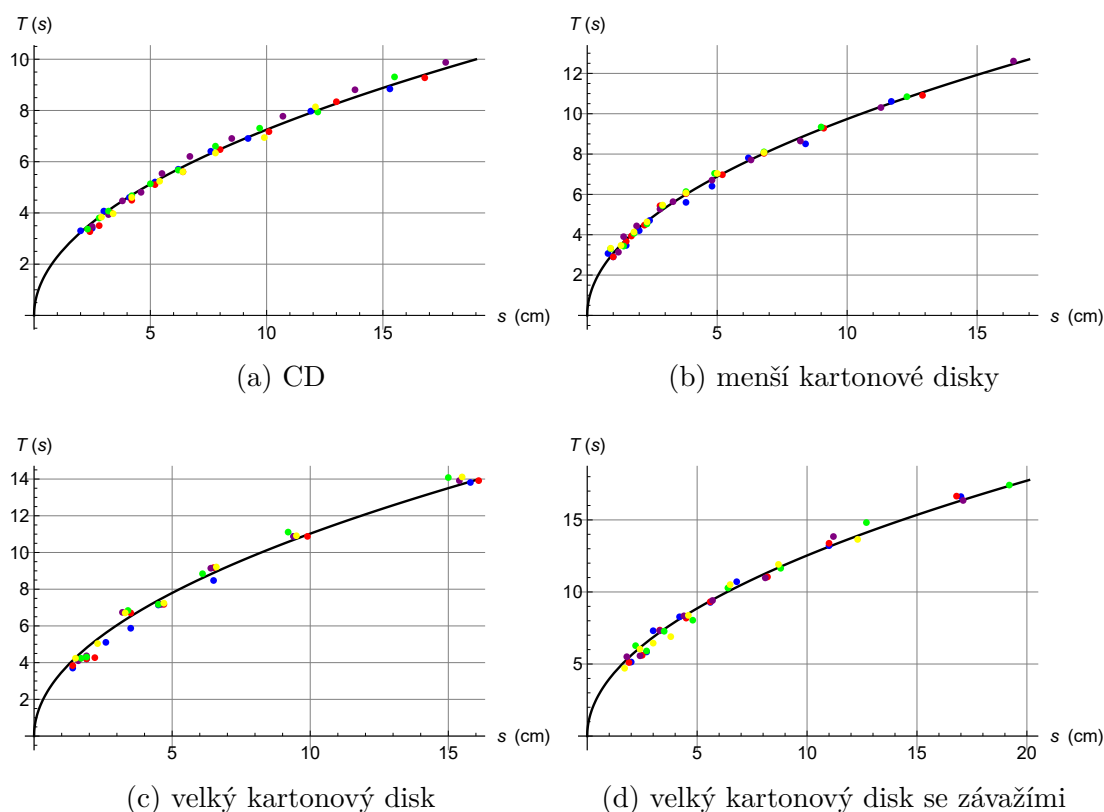
Dle vztahu (4.22) uvedeného v části 4.4 by funkce popisující závislost mezi „periodou“  $T$  a vzdáleností  $s$  měla být odmocnina. V grafech 5.7a až 5.7d jsou vyobrazena naměřená data pro hodnoty doby  $T$  a odpovídající výšky  $s$ . V grafech je vykreslena i křivka proložená daty odpovídající funkci  $T = a\sqrt{s}$ , kde parametr  $a$  byl z naměřených dat určen pomocí programu *Wolfram Mathematica* (grafy byly vytvořeny ve stejném programu). Data z jednotlivých měření jsou odlišena různými barvami.

Z grafů 5.7a až 5.7d je vidět, že předpokládaná závislost  $T \approx \sqrt{s}$  poměrně dobře odpovídá naměřeným datům. Nejlépe vyšla měření s modelem ze dvou menších kartonových kruhů. Jedním z důvodů mohl být fakt, že v tomto případě kyvadlo nejméně kmitalo do ostatních směrů. V případě velkého kartonového disku (ať bez závaží či s nimi) kyvadlo kmitalo do ostatních směrů nejvíce.

Rovněž je nutné poukázat na možné chyby měření, které se nejvíce projeví především při měření vzdáleností v nižších polohách. Nepřesnost určení přesné polohy z videoanalýzy je cca  $\Delta h \pm 1$  mm, což při vzdálenostech menších než 2 cm odpovídá relativní chybě větší než 5 % (resp. 10 %, jelikož je vzdálenost  $s_i$  určena rozdílem dvou výšek  $s_i = |h_i - h_z|$  s danou chybou měření).

Dále je z grafů 5.7a až 5.7d možné vyčíst, že „perioda“ Maxwellova kyvadla  $T$  se s větším momentem setrvačnosti  $J$  prodlužuje. V zjednodušeném případě, kdy by všechny disky byly homogenní, by „perioda“ kyvadla  $T$  dle vztahu (4.23) závisela při konstantní dráze  $s$  jen na poloměru disku  $R$ . Vzhledem k tomu, že platí nerovnost  $R_{CD} < R_{menší} < R_{velký}$ , z dat je vidět, že platí i odpovídající nerovnost





Obrázek 5.7: Závislost doby mezi dvěma průchody nejnižší polohou  $T$  a odpovídající vzdáleností  $s$  (data z jednotlivých měření jsou barevně rozlišena)

$T_{CD} < T_{menší} < T_{velký}$ . Moment setrvačnosti velkého kruhu se závažími je větší než bez nich, a tedy „perioda“  $T$  je v tomto případě nejdelší.

Nutno však dodat didaktickou poznámku. Pokud bychom chtěli podobné měření provádět a především vyhodnocovat na úrovni střední školy (např. ve výběrových seminářích), pak by bylo vhodnější zkoumat závislost „periody“  $T$  na  $\sqrt{s}$  (resp. závislost  $T^2$  na  $s$ ), která by měla vyjít lineárně. Takové zpracování výsledků lze provést poměrně snadno např. v programu *Excel*, kde by se hodnotami proložila lineární funkce.

Naměřená data můžeme zkoumat ještě dále. Za prvé je možné zkoumat moment setrvačnosti našich modelů (ostatně takto to bývá někdy zamýšleno v rámci měření s Maxwellovým kyvadlem, viz např. [261, 264]). Za druhé, z výšky, do které kyvadlo postupně zpět vystoupá, můžeme vypočítat energetické ztráty.

Z parametru  $a$  (koeficient úměrnosti  $T = a\sqrt{s}$ ) určeného v programu *Wolfram Mathematica* (případně ze směrnice lineární závislosti v *Excelu*) a vztahu (4.22) lze vyjádřit poměr  $J/mr^2$ , kde  $m$  je hmotnost celého kyvadla a  $r$  je poloměr hřídele (ve všech případech je jím poloměr špejle 1,5 mm),

$$a\sqrt{s} = 2\sqrt{\frac{2s\left(1 + \frac{J}{mr^2}\right)}{g}},$$

$$\frac{J}{mr^2} = \frac{a^2g - 8}{8} \quad (5.2)$$

Z tohoto poměru je pak možné také vyjádřit moment setrvačnosti kyvadla  $J$  (při známém poloměru hřídele a hmotnosti kyvadel). Hmotnost modelů byla určena pomocí přenosných vah s přesností  $\Delta m \pm 0,01$  g.

Hmotnost kyvadla s CD byla  $(34,54 \pm 0,01)$  g, hmotnost modelu s dvěma malými kartonovými disky  $(31,89 \pm 0,01)$  g, hmotnost verze s velkým kartonovým kotoučem  $(26,25 \pm 0,01)$  g a v případě velkého disku s matičkami byla hmotnost  $(43,75 \pm 0,01)$  g (hmotnost jedné matičky je  $(4,26 \pm 0,01)$  g).

V tabulce 5.4 jsou uvedeny vypočítané zaokrouhlené hodnoty parametru  $a$  (spolu se směrodatnou odchylkou), poměru  $J/mr^2$  a momentu setrvačnosti kyvadla  $J$  pro všechny modely. Při výpočtu parametru  $a$  byla použita zaokrouhlená hodnota pro normální tíhové zrychlení  $g = 9,81$  m · s<sup>-2</sup> (vzhledem k přesnosti měření je tato hodnota postačující).

Model	$a$ [s · m <sup>-½</sup> ]	$J/mr^2$	$J$ [kg · m <sup>2</sup> ]	$J_{teor}$ [kg · m <sup>2</sup> ]
CD	$23 \pm 2$	640	$(5,0 \pm 0,4) \cdot 10^{-5}$	$(6,2 \pm 0,1) \cdot 10^{-5}$
menší disky	$31 \pm 2$	1 160	$(8,3 \pm 0,8) \cdot 10^{-5}$	$(9,9 \pm 0,1) \cdot 10^{-5}$
velký disk	$35 \pm 4$	1 490	$(8,8 \pm 1,1) \cdot 10^{-5}$	$(12,9 \pm 0,1) \cdot 10^{-5}$
velký disk se závažími	$40 \pm 4$	1 930	$(18,9 \pm 2,0) \cdot 10^{-5}$	$(26,1 \pm 0,4) \cdot 10^{-5}$

Tabulka 5.4: Hodnoty parametru  $a$ , poměru  $J/mr^2$ , momentu setrvačnosti kyvadla  $J$  a teoreticky určeného momentu setrvačnosti  $J_{teor}$  pro všechny modely

Pro porovnání jsou v tabulce 5.4 uvedené i vypočítané teoretické odhady momentu setrvačnosti  $J_{teor}$  v ideálním případě, kdy by kyvadla tvořily homogenní disky o hmotnosti  $m$  a poloměru  $R$  ( $J_{teor} = \frac{1}{2}mR^2$ ). V případě modelu kyvadla se závažími byl přičten moment setrvačnosti čtyř „hmotných bodů“ ve vzdálenosti  $d$  od osy otáčení ( $J_{teor} = \frac{1}{2}mR^2 + 4md^2$ ). Více o zpracování výsledků a určení chyb všech veličin uvedených v tabulce 5.4 lze nalézt v přílohách A.3.

Snadno nahlédneme, že teoretické hodnoty momentu setrvačnosti  $J_{teor}$  jsou ve všech případech vyšší než ty experimentálně určené  $J$ . Tento rozdíl bude pravděpodobně způsoben faktem, že jsem jako hmotnost  $m$  brala hmotnost celého modelu včetně špejle a provázek. V případě modelu s CD pak hrají největší roli malá kartonová kolečka, která slouží k upevnění špejle jako hřídele. Přesnější by jistě bylo určit moment setrvačnosti každého prvku zvlášť. Rovněž nebyla započítána tloušťka nitě, která při svém namotávání na špejli ovlivňuje poloměr hřídele.

Z tohoto hlediska dopadlo nejhůře měření s modelem s velkým kartonovým diskem, který je ze všech verzí nejlehčí. Teoretický moment setrvačnosti je téměř o polovinu větší ( $J/J_{teor} \approx 1,46$ ). Vzhledem k tomu, že právě na tento model byla připevněna čtyři závažíčka, bohužel ani výsledky měření s modifikovanou verzí nedopadlo dle očekávání. Ačkoliv je vliv závaží na moment setrvačnosti výrazný, poměr  $J/J_{teor} \approx 1,38$  se k jedničce příliš nepřiblížil.

Rozdíl mezi  $J_{teor}$  a  $J$  může vysvětlovat i fakt, že použité disky určitě nejsou homogenní, a tedy používat vztah pro moment setrvačnosti homogenního disku může být trochu zavádějící. Další nepřesnost byla jistě způsobena i nepřesností měření.

Myslím si, že zjištěnými rozdíly se bude vhodné (a také zajímavé) dále zabývat a detailně zjišťovat příčiny uvedených rozdílů.

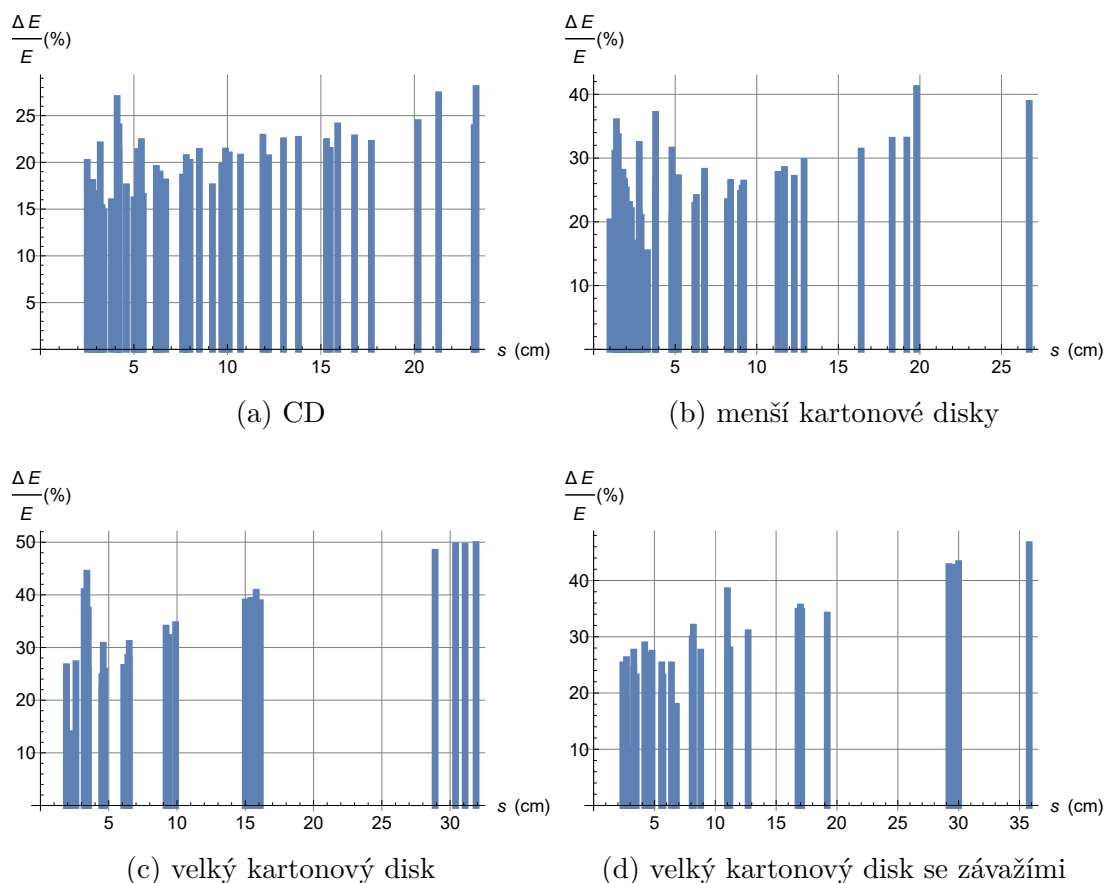
Pro výpočet energetických ztrát je vhodné porovnat velikost celkové energie ve dvou po sobě jdoucích „nejvyšších“ polohách  $h_i$  a  $h_{i+1}$ , kdy je rychlost těžiště kyvadla nulová, a kyvadlo má tedy jen potenciální polohovou energii. Nulovou hladinu potenciální energie uvažujeme v nejnižší poloze kyvadla  $h_z$ . Pro relativní ztráty energie pak platí

$$\frac{\Delta E}{E_i} = \frac{E_i - E_{i+1}}{E_i} = \frac{mg|h_i - h_z| - mg|h_{i+1} - h_z|}{mg|h_i - h_z|}.$$

S využitím již použitého značení pro vzdálenost  $s_i = |h_i - h_z|$  a jednoduchých algebraických úpravách se vztah zjednoduší na

$$\frac{\Delta E}{E_i} = \frac{s_i - s_{i+1}}{s_i}. \quad (5.3)$$

V grafech 5.8a až 5.8d jsou vykresleny relativní energetické ztráty v závislosti na počáteční vzdálenosti  $s$  (grafy byly opět vytvořeny v programu *Wolfram Mathematica*).



Obrázek 5.8: Relativní energetické ztráty v závislosti na předcházející dráze  $s$

Z grafů 5.8a až 5.8d lze vyčíst, že při větších prvotních vzdálenostech  $s$  bývají relativní energetické ztráty vyšší, avšak tato závislost neplatí vždy. Co je však zřejmé, je fakt, že k největším relativním energetickým ztrátám docházelo v případě velkého kartonového disku (a to až okolo 50 %, celkově v rozpětí cca mezi

14 % až 50 %). I to může být ovlivněno tím, že tento model kýval do stran více než ostatní.

Naopak, v případě modelu z CD byly ztráty nejmenší (v rozpětí cca mezi 15 % až 30 %). To však může být dáno i tím, že tento model s CD překonával menší maximální vzdálenosti  $s$ .

Porovná-li všechny modely z hlediska všech tří analyzovaných vlastností (závislost  $T \approx \sqrt{s}$ , porovnání teoretického momentu setrvačnosti  $J_{teor}$  a hodnoty určené z naměřených dat  $J$  a energetické ztráty), myslím si, že model s CD i verze se dvěma menšími kartonovými disky mohou posloužit k poměrně slušné kvalitativní demonstraci Maxwellova kyvadla.

Co se týče kvantitativních výsledků, ty už tak přesné nejsou, na druhou stranu, jako žákovské měření na střední škole (např. ve výběrových seminářích) by použité modely mohly dostačovat.

Nutno však podotknout, že především velikost relativních energetických ztrát poukazuje na fakt, že zde prezentovaný teoretický model, kde předpokládám jen konzervativní síly, je příliš hrubý a bylo by dobré celý problém analyzovat podrobněji, což by mohlo být cílem nějaké další práce.

# Závěr

V této diplomové práci jsem se zabývala pojetím tématu *kyvadlo* nejen z pohledu středních škol, ale pokusila jsem se na celé téma podívat z mnohem širší perspektivy. Myslím si totiž, že je škoda, že tak krásnému a zajímavému tématu není věnováno tolik prostoru, kolik by si zasloužilo. I během tvorby této práce se objevilo mnoho problémů, které by stálo za to více prozkoumat a věnovat se jim v nějakých navazujících studiích.

První polovina práce je věnována výsledkům řešerše učebnic, sbírek úloh a příkladů, ve kterých se setkáme s tématem *kyvadlo*, stejně jako vědeckým článkům a studiím, které se tomuto tématu věnují. Zkoumané vybrané texty reprezentují zdroje, které by bylo možné využít ve výuce na všech úrovních českého vzdělávacího systému.

Obzvláště v části věnované odvozením pohybové rovnice pro rovinné matematické kyvadlo na úrovni vysokých škol jsem se snažila ukázat pestrost možných přístupů (od postupu vycházejícího z 2. Newtonova zákona až po postupy využívající Lagrangeův a Hamiltonův formalismus).

Kromě pojetí teoretického pozadí tématu v práci prezentuji i výsledky řešerše zdrojů inspirace pro jednoduché reálné experimenty, simulace, applety, žákovská měření a laboratorní práce, které by bylo možné (i vhodné) zařadit do výuky.

V druhé polovině práce se věnuji studiu čtyř vybraných modelů kyvadel (Foucaultovo, Huygensovo, Machovo a Maxwellovo kyvadlo). Ve všech případech krom Huygensova (cykloidálního) kyvadla byly odvozeny pohybové rovnice pro ideální případ bez tření a odporových sil.

Pro všechny modely kromě Foucaultova kyvadla byl také odvozen vztah pro periodu vlastního kmitání kyvadla (v případě Machova kyvadla se jedná o vztah pro periodu v aproximaci pro malé výchylky kyvadla). Pro Foucaultovo kyvadlo byl odvozen vztah pro stáčení roviny kmitů vůči povrchu Země.

V teoretickém rozboru vycházím z řady českých i zahraničních pramenů (prací, učebnic a článků), vždy se však snažím předvést dostatečně podrobné odvození, které bude co nejsrozumitelnější pro cílovou skupinu čtenářů práce. V případě Machova a Maxwellova kyvadla nabízím vlastní odvození pohybových rovnic pomocí Lagrangeových rovnic 2. druhu.

V experimentální části pak předvádím, popisuji a diskutuji pomůcky vyrobené z běžně dostupných spolu materiálů spolu s jednoduchými experimenty a měřeními pro dané modely kyvadel (opět Foucaultovo, Huygensovo, Machovo a Maxwellovo kyvadlo). Ve všech případech jsem se snažila sestavit modely kyvadel tak, aby se jimi mohli inspirovat průměrně zruční zájemci z řad vyučujících i studentů (např. ve výběrových fyzikálních seminářích) a mohli si je sami sestavit.

Jak se ukázalo, všechny pomůcky mohou poměrně dobře posloužit ke kvalitativní demonstraci zkoumaných jevů. Co se týče kvantitativních měření, tam jsou výsledky v některých případech bohužel poněkud horší. Na druhou stranu si myslím, že vzhledem k jednoduché konstrukci, použitým materiálům a domácímu vybavení (většinu pomůcek jsem vyráběla doma pomocí běžně dostupného nářadí, přiznávám s pomocí zručnějších lidí), je to pochopitelné a očekávané.

V případě studia cykloidálního kyvadla je nepřesnost měření menší než 1 %. U Machova kyvadla se výsledky od teoretických předpovědi liší téměř až o 10 %.

V případě Maxwellova kyvadla dosáhla odchylka od teoretických předpovědí dokonce až skoro 50 %.

Porovnání výsledků měření s teorií tak ukázalo, že v některých případech může být běžně používaný teoretický popis příliš hrubý a nemusí vystihovat chování jednoduchých pomůcek dostatečně přesně, zejména pokud nezahrnuje vliv tření. Výsledky tedy ukazují, s jakými omezeními musejí vyučující při využití daných pomůcek ve výuce při měření a interpretaci výsledků počítat. Zároveň to může být pobídkou věnovat se v budoucnu důkladnějšímu rozboru a lepším konstrukcím (například Maxwellova kyvadla) v navazujících pracích.

# Seznam použité literatury

- [1] *Metronom na Letné - kyvadlo nad Prahou* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <https://www.kudyznudy.cz/aktivita/metronom-na-letne-kyvadlo-nad-prahou>
- [2] *Siderické kyvadlo* [online]. [cit. 2021-06-01]. Dostupné z: <https://www.loveczahad.cz/inpage/sidericke-kyvadlo/>
- [3] MORTON, William. S. a Charlton. M. LEWIS. *China: Its History and Culture*. 4. ilustrované vydání. New York: McGraw-Hill Education, 2004. ISBN: 978-0071412797.
- [4] *Horizontal Pendulum Seismometer* [online]. 2019 [cit. 2021-06-01] Dostupné z: <http://physicsopenlab.org/2019/08/22/horizontal-pendulum-seismometer/>
- [5] *Ballistic pendulum* [online]. Encyclopædia Britannica, inc., 1998 [cit. 2021-06-01]. Dostupné z: <https://www.britannica.com/technology/ballistic-pendulum>
- [6] BARENBOIM, Gabriela a Jose A. OTEO. *One pendulum to run them all*. European Journal of Physics [online]. 2013, 34(3), 1049-1065 [cit. 2021-06-01]. DOI: 10.1088/0143-0807/34/4/1049. Dostupné z: <https://doi.org/10.1088/0143-0807/34/4/1049>
- [7] BROŽ Miroslav a kolektiv. *Sluneční hodiny na pevných stanovištích: Čechy, Morava, Slezsko a Slovensko*. 1. vydání. Praha: Academia, 2004. ISBN 80-200-1204-4.
- [8] *Sluneční hodiny na budově školy* [online]. [cit. 2021-06-01] Dostupné z: <https://old.zsdoberichovice.cz/soubory/sunclock.htm>
- [9] *Analema* [online]. [cit. 2021-06-01]. Dostupné z: <https://mat.fsv.cvut.cz/solc/wwwpages/analema2/default.html>
- [10] SORGE, Francesco; Marco CAMALLERI a Giuseppe GENCHI. *On the Birth and Growth of Pendulum Clocks in the Early Modern Era*. Essays on the History of Mechanical Engineering [online]. 2015, 273–290 [cit. 2021-06-01]. DOI: 10.1007/978-3-319-22680-4\_16. Dostupné z: [https://doi.org/10.1007/978-3-319-22680-4\\_16](https://doi.org/10.1007/978-3-319-22680-4_16)
- [11] MATTHEWS, Michael. R.. *Time for Science Education: How Teaching the History and Philosophy of Pendulum Motion Can Contribute to Science Literacy*. Springer Netherlands, 2000. ISBN: 978-0-306-45880-4.
- [12] MAREŠ, Vlastimil. *Nelineární řízení modelu kyvadla*. Diplomová práce [online]. Praha, 2000. [cit. 2020-10-20]. Dostupné z: [http://iat.fs.cvut.cz/109/files/DP/Mares\\_Vlastimil\\_DP2000\\_kyvadlo/diplomova\\_prace\\_kyvadlo.htm](http://iat.fs.cvut.cz/109/files/DP/Mares_Vlastimil_DP2000_kyvadlo/diplomova_prace_kyvadlo.htm)
- [13] HUYGENS, Christiaan. *Horologium Oscillatorium* [online]. Přeloženo: Ian Bruce. 2007. [cit. 2021-06-01]. Dostupné z: <http://www.17centurymaths.com/contents/huygenscontents.html>
- [14] MATTHEWS, Michael R., Colin F. GAULD a Arthur STINNER. *The Pendulum: Scientific, Historical, Philosophical and Educational Perspectives*. Springer Netherlands, 2005. ISBN: 978-1-4020-3525-8.

- [15] Wikipedia contributors. *Christiaan Huygens*. Wikipedia, The Free Encyklopedia [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Christiaan\\_Huygens&oldid=1029576620](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Christiaan_Huygens&oldid=1029576620)
- [16] MATTHEWS, Michael R.. *Science Teaching: The Role of History and Philosophy of Science*. Psychology Press, 1994. ISBN: 978-0-415-90899-3.
- [17] USHER, Abbott P.. *A History of Mechanical Inventions*. Courier Corporation, 1954. ISBN: 978-0486255934.
- [18] BUREŠ, Josef. *Hodinové stroje: pro 1. ročník odborných učilišť a učňovských škol*. 3. vydání. Praha: SPN, 1975.
- [19] MILHAM, Willis I.. *Time & Timekeepers: Including the History, Construction, Care, and Accuracy of Clocks and Watches*. Macmillan, 1944.
- [20] Wikipedia contributors. *Pendulum*. Wikipedia, The Free Encyklopedia [online]. [cit. 2021-04-20] Dostupné z: <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Pendulum&oldid=1028893701>
- [21] RAMSEY, Norman F.. *Precise Measurement of Time*. American Scientist [online]. 1988, 76(1), 42-49. [cit. 2021-06-10]. Dostupné z: <http://www.jstor.org/stable/27854962>
- [22] MARRISON, Warren A.. *The Evolution of the Quartz Crystal Clock*. The Bell System Technical Journal [online]. 1948, 27(3), 510-588. [cit. 2021-06-10]. DOI: 10.1002/j.1538-7305.1948.tb01343.x. Dostupné z: [https://ia802701.us.archive.org/25/items/bstj27-3-510/bstj27-3-510\\_text.pdf](https://ia802701.us.archive.org/25/items/bstj27-3-510/bstj27-3-510_text.pdf)
- [23] MCGREW, W. F., X. ZHANG, R. J. FASANO a kol. *Atomic clock performance enabling geodesy below the centimetre level*. Nature [online]. 2018, 564, 87–90. [cit. 2021-06-15]. DOI: 10.1038/s41586-018-0738-2. Dostupné z: <https://doi.org/10.1038/s41586-018-0738-2>
- [24] Boulder Atomic Clock Optical Network (BACON) Collaboration. *Frequency ratio measurements at 18-digit accuracy using an optical clock network*. Nature [online]. 2021, 591, 564–569. [cit. 2021-06-15]. DOI: 10.1038/s41586-021-03253-4. Dostupné z: <https://doi.org/10.1038/s41586-021-03253-4>
- [25] MIKULČÁK, Jiří, Bohdan KLIMEŠ, Jaromír ŠIROKÝ, Václav ŠOLA a František ZEMÁNEK. *Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro střední školy*. 5. vydání. Praha: Prometheus, 2020. ISBN: 978-80-7196-481-0.
- [26] KŘÍŽEK, Marek. *Gravitace a tíhové pole Země*. Geografické rozhledy [online]. 2015, 24(4), 2–3. [cit. 2021-06-15]. Dostupné z: <https://www.natur.cuni.cz/geografie/fyzgeo/krizekma/ke-stazeni/gravitace-a-tihove-pole-zeme/>
- [27] KATER, Henry. *An account of experiments for determining the length of the pendulum vibrating seconds in the latitude of London*. Phil. Trans. R. Soc. [online]. 1818, 108(3), 33–102. [cit. 2021-06-15]. DOI: 10.1098/rstl.1818.0006. Dostupné z: <https://doi.org/10.1098/rstl.1818.0006>
- [28] BROŽ, Jaromír a kolektiv. *Základy fyzikálních měření*. Praha: SPN, 1983.



- [29] NELSON, Robert A. a Magnus G. OLSSON. *The pendulum—Rich physics from a simple system*. American Journal of Physics [online]. 1986, 54, 112-121. [cit. 2021-06-15]. DOI: 10.1119/1.14703. Dostupné z: <https://doi.org/10.1119/1.14703>
- [30] POYNTING, John H. a Joseph J. THOMSON. *A Textbook of Physics*. London: Griffin, 1928.
- [31] HOWARTH, Richard. *Gravity Surveying in Early Geophysics. I. From Time-Keeping to Figure of the Earth*. Earth sciences history: journal of the History of the Earth Sciences Society [online]. 2007, 26, 201-228. [cit. 2021-06-15]. DOI: 10.17704/eshi.26.2.7460m485n5701845. Dostupné z: <https://doi.org/10.17704/eshi.26.2.7460m485n5701845>
- [32] CHVAL, Miroslav. *Měření fyzikálních konstant*. Bakalářská práce [online]. 2009. [cit. 2020-10-20]. Dostupné z: [https://wstag.jcu.cz/StagPortletsJSR168/PagesDispatcherServlet?pp\\_destElement=%23ssSouboryStudentuDivId\\_2850&pp\\_locale=cs&pp\\_reqType=render&pp\\_portlet=souboryStudentuPagesPortlet&pp\\_page=souboryStudentuDownloadPage&pp\\_nameSpace=G223848&soubidno=95921](https://wstag.jcu.cz/StagPortletsJSR168/PagesDispatcherServlet?pp_destElement=%23ssSouboryStudentuDivId_2850&pp_locale=cs&pp_reqType=render&pp_portlet=souboryStudentuPagesPortlet&pp_page=souboryStudentuDownloadPage&pp_nameSpace=G223848&soubidno=95921)
- [33] BOD, L., E. FISCHBACH, E. MARX a kol. *One hundred years of the Eötvös experiment*. Acta Physica Hungarica [online]. 1991, 69, 335-355. [cit. 2021-06-15]. DOI: 10.1007/BF03156102. Dostupné z: <https://link.springer.com/article/10.1007%2FBF03156102>
- [34] LEPIL, Oldřich. *Fyzika pro gymnázia: Mechanické kmitání a vlnění*. Praha: Prometheus, 1994.
- [35] RVP ZV. *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. (verze platná od 1. 9. 2021) [online]. Praha: MŠMT, 2021. [cit. 2021-06-15]. Dostupné z: <http://www.nuv.cz/file/4983/>
- [36] RAUNER, Karel, Václav HAVEL, Gerhard HÖFER, Josef KEPKA, Josef PETŘÍK, Jitka PROKŠOVÁ a Miroslav RANDA. *Fyzika pro 6. ročník základní školy a primu víceletého gymnázia*. 1. vydání. Plzeň: Fraus, 2004. ISBN: 80-7238-210-1.
- [37] KOLÁŘOVÁ, Růžena a Jiří BĚHUNEK. *Fyzika pro 6. ročník základní školy*. Dotisk 2. vydání. Praha: Prometheus, 2016. ISBN: 978-80-7196-246-5.
- [38] TESAŘ, Jiří a František JÁCHIM. *Fyzika 1 pro základní školu: fyzikální veličiny a jejich měření*. 2. vydání. Praha: SPN, 2015. ISBN: 978-80-7235-556-3.
- [39] MACHÁČEK, Martin. *Fyzika 6 pro ZŠ a víceletá gymnázia*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN: 978-80-7196-186-4.
- [40] MARŠÁK, Jan, Pavel VESELÍK, Daniela PAKOVÁ a Jan PURKAR. *Fyzika v sešitě: učebnice pro 9. roč. zákl. škol*. 1. vydání. Praha: Fortuna, 1991. ISBN: 80-85298-39-2.
- [41] RVP G. *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia*. (verze platná od 1. 9. 2017) [online]. Praha: MŠMT, 2017. [cit. 2021-06-15]. Dostupné z: <http://www.nuv.cz/file/159>
- [42] RVP PRO STŘEDNÍ ODBORNÉ VZDĚLÁVÁNÍ [online]. [cit. 2021-06-01]. Dostupné z: <https://www.edu.cz/rvp/ramcove-vzdelavaci-programy-stredniho-odborneho-vzdelavani-rvp-sov/>

- [43] LEPIL, Oldřich, Milan BEDNAŘÍK a Radmila HÝBLOVÁ. *Fyzika pro střední školy I*. Dotisk 4. přepracovaného vydání. Praha: Prometheus, 2001. ISBN: 80-7196-184-1.
- [44] ŠTOLL, Ivan. *Fyzika pro netechnické obory SOŠ a SOU*. Praha: Prometheus, 2001. ISBN: 978-80-7196-223-6.
- [45] SVOBODA, Emanuel, Karel BARTUŠKA, Milan BEDNAŘÍK, Oldřich LEPIL a Miroslava ŠIROKÁ. *Přehled středoškolské fyziky*. 5. přepracované vydání. Praha: Prometheus, 2014. ISBN: 978-80-7196-438-4.
- [46] MUSILOVÁ, Jana. *Nejde jen o kyvadlo*. Československý časopis pro fyziku. Praha: Fyzikální ústav AV ČR, 2016, 66(6), 382-385. ISSN: 0009-0700.
- [47] MANDÍKOVÁ, Dana a Josef TRNA. *Žákovské prekoncepce ve výuce fyziky*. 1. vydání. Brno: Paido, 2011. ISBN: 978-80-7315-226-0.
- [48] MUSILOVÁ, Jana. *Fyzikální omyly ve výuce mechaniky*. Československý časopis pro fyziku. Praha: Fyzikální ústav AV ČR, 2012, 62(5-6), 346-357. ISSN: 0009-0700.
- [49] CZUDKOVÁ, Lenka a Jana MUSILOVÁ. *The pendulum: a stumbling block of secondary school mechanics*. Physics Education [online]. 2000, 35(6), 428-435. ISSN: 0031-9120. [cit. 2021-06-01]. DOI: 10.1088/0031-9120/35/6/309. Dostupné z: <https://doi.org/10.1088/0031-9120/35/6/309>
- [50] DOSSIS, Sotiris a Dimitris KOLIOPOULOS. *The problem of Timekeeping with the Help of the Simple Pendulum: An Empirical Study of 14-15-year-old Greek School Students*. 2<sup>nd</sup> International Pendulum Project [online]. Sydney: University of New South Wales, 2005, 65-78. [cit. 2021-06-01]. Dostupné z: [http://150.140.160.61:8000/static/conference/international/2020/12/26/DOSSIS\\_KOLIOPOULOS.pdf](http://150.140.160.61:8000/static/conference/international/2020/12/26/DOSSIS_KOLIOPOULOS.pdf)
- [51] CAMPANARIO, Juan. *Using textbook errors to teach physics: Examples of specific activities*. European Journal of Physics [online]. 2006, 27(4), 975. [cit. 2021-06-01]. DOI: 10.1088/0143-0807/27/4/028. Dostupné z: <https://doi.org/10.1088/0143-0807/27/4/028>
- [52] ŽÁK, Vojtěch. *Síly působící na matematické kyvadlo na 7 + 1 způsob*. MFI [online]. 2016, 25(4), 266-276. [cit. 2021-06-01]. Dostupné z: [http://mfi.upol.cz/files/25/2504/mfi\\_2504\\_266\\_276.pdf](http://mfi.upol.cz/files/25/2504/mfi_2504_266_276.pdf)
- [53] LEPIL, Oldřich. *Poznámka k silám působícím na kyvadlo*. MFI [online]. 2016, 25(4), 276-286. [cit. 2021-06-01]. Dostupné z: [http://mfi.upol.cz/files/25/2504/mfi\\_2504\\_276\\_286.pdf](http://mfi.upol.cz/files/25/2504/mfi_2504_276_286.pdf)
- [54] HEJNOVÁ, Eva. *Didaktika pro 2. st. ZŠ, 2. díl* [online]. 2011. [cit. 2021-06-01]. Dostupné z: [http://physics.ujep.cz/~ehejnova/Didaktika/Didaktika\\_fyziky\\_II.pdf](http://physics.ujep.cz/~ehejnova/Didaktika/Didaktika_fyziky_II.pdf)
- [55] LEPIL, Oldřich, Milan BEDNAŘÍK a Miroslava ŠIROKÁ. *Fyzika: Sbíрка úloh pro střední školy*. 3. vydání. Praha: Prometheus, 2004. ISBN: 80-7196-266-X.
- [56] BARTUŠKA, Karel. *Sbíрка řešených úloh z fyziky pro střední školy II.* Praha: Prometheus, 1997. ISBN: ISBN 978-80-7196-289-2.
- [57] ŽÁK, Vojtěch. *Fyzikální úlohy pro střední školy: sbíрка úloh pro přípravu k nové maturitě*. Praha: Prometheus, 2011. ISBN: 978-80-7196-411-7.

- [58] MIKLASOVÁ, Věra. *Sbírka úloh z fyziky pro SOŠ a SOU*. 2. vydání. Praha: Prometheus, 2009. ISBN: 978-80-7196-377-6.
- [59] SVOBODA, Emanuel, Oldřich LEPIL, Miroslava ŠIROKÁ, Milan BEDNAŘÍK a František BARTÁK. *Sbírka úloh z fyziky pro SOŠ a SOU*. Praha: SPN, 1988.
- [60] KOHOUT, Vladimír. *Písemky z fyziky SŠ*. Praha: Scientia, 2007. ISBN: 978-80-86960-30-2.
- [61] *Sbírka řešených úloh* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <https://reseneulohy.cz/cs>
- [62] *Realistické učebnice matematiky a fyziky* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <http://www.realisticky.cz/>
- [63] ČERNÝ, Michal. *Experimentální ověření vybraných fyzikálních modelů a aproximací*. Bakalářská práce [online]. Brno, 2010. [cit. 2021-04-28]. Dostupné z: <https://is.muni.cz/th/n4ccj/cerny.pdf>
- [64] *Balistické kyvadlo I - Sbírka úloh* [online]. 2019. [cit. 2021-04-28]. Dostupné z: <http://reseneulohy.cz/146/balisticke-kyvadlo-i>
- [65] *Balistické kyvadlo 2 - Sbírka úloh* [online]. 2019. [cit. 2021-04-28]. Dostupné z: <http://reseneulohy.cz/147/balisticke-kyvadlo-2>
- [66] HEJNOVÁ, Eva. *Fyzikální praktikum A* [online]. 2020. [cit. 2021-06-01]. Dostupné z: [http://physics.ujep.cz/~ehajnova/PraktikumA/Fyz\\_praktikum\\_A\\_v2020\\_opora.pdf](http://physics.ujep.cz/~ehajnova/PraktikumA/Fyz_praktikum_A_v2020_opora.pdf)
- [67] *Fyzikální olympiáda* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <http://fyzikalniolympiada.cz/>
- [68] *FYKOS.cz* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <https://fykos.cz/>
- [69] ŠEDIVÝ, Přemysl, Ivo VOLF a Radmila HORÁKOVÁ. *Harmonické kmity mechanických soustav - Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku* [online]. ÚVFO Hradec Králové [cit. 2021-05-20]. Dostupné z: <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/kmity.pdf>
- [70] PRACHAŘ, Jan. *Úlohy z mechaniky III: Zákony zachování - Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku* [online]. [cit. 2021-05-20]. Dostupné z: <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/ulohy3.pdf>
- [71] *Úlohy krajského kola 50. ročníku FO. Kategorie B* [online]. Ústřední komise fyzikální olympiády České republiky. [cit. 2021-05-20]. Dostupné z: [http://fyzikalniolympiada.cz/archiv/50/fo50b2\\_z.pdf](http://fyzikalniolympiada.cz/archiv/50/fo50b2_z.pdf)
- [72] REICHL, Jaroslav. *Sbírka úloh z fyzikální olympiády - určená všem zájemcům jako doplněk ke studiu fyziky* [online]. [cit. 2021-05-20]. Dostupné z: [http://www.jreichl.com/fyzika/vyuka/sbirky/priklady\\_fo.pdf](http://www.jreichl.com/fyzika/vyuka/sbirky/priklady_fo.pdf)
- [73] *Úlohy 1. kola 54. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie B* [online]. Ústřední komise fyzikální olympiády České republiky. [cit. 2021-05-20]. Dostupné z: [http://fyzikalniolympiada.cz/archiv/54/fo54b1\\_z.pdf](http://fyzikalniolympiada.cz/archiv/54/fo54b1_z.pdf)

- [74] *Úlohy 1. kola 61. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie B* [online]. Ústřední komise fyzikální olympiády České republiky. [cit. 2021-05-20]. Dostupné z: [http://fyzikalniolympiada.cz/archiv/61/fo61b1\\_z.pdf](http://fyzikalniolympiada.cz/archiv/61/fo61b1_z.pdf)
- [75] *Úlohy 1. kola 58. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie B* [online]. Ústřední komise fyzikální olympiády České republiky. [cit. 2021-05-20]. Dostupné z: [http://fyzikalniolympiada.cz/archiv/58/fo58b1\\_z.pdf](http://fyzikalniolympiada.cz/archiv/58/fo58b1_z.pdf)
- [76] *Úlohy regionálního kola 39. ročníku FO. Kategorie B* [online]. Ústřední komise fyzikální olympiády České republiky. [cit. 2021-05-20]. Dostupné z: [http://fyzikalniolympiada.cz/archiv/39/fo39b2\\_z.pdf](http://fyzikalniolympiada.cz/archiv/39/fo39b2_z.pdf)
- [77] *Úlohy 1. kola 46. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie C* [online]. Ústřední komise fyzikální olympiády České republiky. [cit. 2021-05-20]. Dostupné z: [http://fyzikalniolympiada.cz/archiv/46/fo46c1\\_z.pdf](http://fyzikalniolympiada.cz/archiv/46/fo46c1_z.pdf)
- [78] *Úlohy krajského kola 49. ročníku FO. Kategorie A* [online]. Ústřední komise fyzikální olympiády České republiky. [cit. 2021-05-20]. Dostupné z: [http://fyzikalniolympiada.cz/archiv/49/fo49a2\\_z.pdf](http://fyzikalniolympiada.cz/archiv/49/fo49a2_z.pdf)
- [79] *Úlohy 1. kola 54. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie A* [online]. Ústřední komise fyzikální olympiády České republiky. [cit. 2021-05-20]. Dostupné z: [http://fyzikalniolympiada.cz/archiv/54/fo54a1\\_z.pdf](http://fyzikalniolympiada.cz/archiv/54/fo54a1_z.pdf)
- [80] *Fyzikální korespondenční seminář, VIII. ročník 1994/95* [online]. Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy. [cit. 2021-05-20]. Dostupné z: [https://fykos.cz/\\_media/rocnik08/ulohy/pdf/rocnika08.pdf?cache=](https://fykos.cz/_media/rocnik08/ulohy/pdf/rocnika08.pdf?cache=)
- [81] LEDVINA, Lukáš. *22. ročník, úloha I . 3 ... už mě nehoupej* [online]. Fyzikální korespondenční seminář UK MFF. [cit. 2021-05-20]. Dostupné z: [https://fykos.cz/\\_media/rocnik22/ulohy/pdf/uloha22\\_1\\_3.pdf?cache=](https://fykos.cz/_media/rocnik22/ulohy/pdf/uloha22_1_3.pdf?cache=)
- [82] TŮMA, Karel. *19. ročník, úloha VI . 2 ... kukačky na lanech* [online]. Fyzikální korespondenční seminář UK MFF. [cit. 2021-05-20]. Dostupné z: [https://fykos.cz/\\_media/rocnik19/ulohy/pdf/uloha19\\_6\\_2.pdf?cache=](https://fykos.cz/_media/rocnik19/ulohy/pdf/uloha19_6_2.pdf?cache=)
- [83] PRACHAŘ, Honza. *18. ročník, úloha V . S ... Merkur, jáma a kyvadlo* [online]. Fyzikální korespondenční seminář UK MFF. [cit. 2021-05-20]. Dostupné z: [https://fykos.cz/\\_media/rocnik18/ulohy/pdf/uloha18\\_5\\_s.pdf?cache=](https://fykos.cz/_media/rocnik18/ulohy/pdf/uloha18_5_s.pdf?cache=)
- [84] BAKER, Gregory L. a James A. BLACKBURN. *The Pendulum: A Case Study in Physics*. Oxford: Oxford University Press, 2005. ISBN: 978-0198567547. Dostupné z: [https://www.academia.edu/34415707/The\\_pendulum\\_A\\_case\\_study\\_in\\_physics\\_pdf\\_pdf](https://www.academia.edu/34415707/The_pendulum_A_case_study_in_physics_pdf_pdf)
- [85] ZAIN, Samya. *Techniques of Classical Mechanics*. IOP Publishing, 2019. ISBN: 978-0-7503-2076-4. Dostupné z: <https://iopscience.iop.org/book/978-0-7503-2076-4>
- [86] KUČEROVÁ, Barbora. *Matematické kyvadlo*. Bakalářská práce [online]. Brno, 2010. [cit. 2020-10-20]. Dostupné z: [https://www.vutbr.cz/www\\_base/zav\\_prace\\_soubor\\_verejne.php?file\\_id=28939](https://www.vutbr.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=28939)
- [87] KVASNICA, Jozef. *Mechanika*. 2. vydání. Praha: Academia, 2004. ISBN: 80-200-1268-0.

- [88] DVOŘÁK, Leoš. *Mechanika* [online]. 2016. Prozatimní učební text k přednášce NFUF101 Mechanika (dříve NUFY080 Fyzika I (mechanika)) pro posluchače oboru Fyzika se zaměřením na vzdělávání. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <https://kdf.mff.cuni.cz/vyuka/Mechanika/>
- [89] BRDIČKA, Miroslav a Arnošt HLADÍK. *Teoretická mechanika*. 2. vydání. Praha: Academia, 1987.
- [90] DVOŘÁK, Leoš. *Teoretická mechanika* [online]. 2014. Prozatimní učební text k přednášce NFUF2020 (dříve NUFY028) pro posluchače oboru Fyzika se zaměřením na vzdělávání. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: [https://kdf.mff.cuni.cz/vyuka/Teoreticka\\_mechanika/](https://kdf.mff.cuni.cz/vyuka/Teoreticka_mechanika/)
- [91] *Matematické kyvadlo - Sbírka úloh* [online]. 2016. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <https://reseneulohy.cz/669/matematicke-kyvadlo>
- [92] FECKO, Marián. *Lagrangeove rovnice 1. druhu* [online]. KTF, FMFI UK, Bratislava. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: [http://davinci.fmph.uniba.sk/~fecko1/teormech/lagr\\_rovnice\\_1\\_druhu.pdf](http://davinci.fmph.uniba.sk/~fecko1/teormech/lagr_rovnice_1_druhu.pdf)
- [93] PRACHAŘ, Honza. *18. ročník, úloha III.S ... Lagrangeovy rovnice 1. druhu* [online]. Fyzikální korespondenční seminář UK MFF. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: [https://fykos.cz/\\_media/rocnik18/ulohy/pdf/uloha18\\_3\\_s.pdf?cache=](https://fykos.cz/_media/rocnik18/ulohy/pdf/uloha18_3_s.pdf?cache=)
- [94] *Matematické kyvadlo - Sbírka úloh* [online]. 2017. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <https://reseneulohy.cz/1233/matematicke-kyvadlo>
- [95] ČERVENKA, Milan. *Laboratorní úloha: Studium mechanických kmitů - Pohlovo kyvadlo* [online]. 2013. [cit. 2021-06-20]. Dostupné z: <https://planck.fel.cvut.cz/praktikum/downloads/navody/pohl.pdf>
- [96] HINRICHSSEN, Peter F.. *Review of approximate equations for the pendulum period*. European Journal of Physics [online]. 2021, 42(1). [cit. 2021-06-01]. DOI: 10.1088/1361-6404/abad10. Dostupné z: <https://doi.org/10.1088/1361-6404/abad10>
- [97] CARVALHAES, Caludio G. a Patrick SUPPER. *Approximations for the period of the simple pendulum based on the arithmetic-geometric mean*. American Journal of Physics [online]. 2008, 76(12), 1150-1154. [cit. 2021-06-01]. DOI: 10.1088/1361-6404/abad10. Dostupné z: <https://doi.org/10.1088/1361-6404/abad10>
- [98] TAKEUCHI, Tatsu. *The Tautochrone/Brachistochrone Problems: How to make the Period of a Pendulum independent of its Amplitude* [online]. 2019. CSAAPT 2019 Fall Meeting Demo. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <http://www1.phys.vt.edu/~takeuchi/Tools/CSAAPT-Fall2019-takeuchi.pdf>
- [99] CRAWFORD, James A.. *Pendulums and Elliptic Integrals* [online]. 2004. [cit. 2021-06-20]. Dostupné z: [https://www.am1.us/wp-content/uploads/Documents/U11610\\_Pendulums\\_and\\_Elliptic\\_Integrals\\_new.pdf](https://www.am1.us/wp-content/uploads/Documents/U11610_Pendulums_and_Elliptic_Integrals_new.pdf)
- [100] *Wolfram Mathematica: Modern Technical Computing* [online]. [cit. 2021-07-01] Dostupné z: <https://www.wolfram.com/mathematica/>
- [101] *WolframAlpha* [online]. [cit. 2021-07-01] Dostupné z: <https://www.wolframalpha.com/>

- [102] DVORÁK, Leoš. *Další nápady z Malé Hrašnice: Jáma a kyvadlo*. Veletrh nápadů učitelů fyziky 21 [online]. 2016. [cit. 2021-06-01]. Dostupné z: [https://vnuf.cz/sbornik/prispevky/pdf/21-02-Dvorak\\_L.pdf](https://vnuf.cz/sbornik/prispevky/pdf/21-02-Dvorak_L.pdf)
- [103] QUIROGA, Gonzalo a Paolo OSPINA-HENAO. *Dynamics of damped oscillations: Physical pendulum*. European Journal of Physics [online]. 2017, 38(6). [cit. 2021-06-01]. DOI: 10.1088/1361-6404/aa8961. Dostupné z: <https://doi.org/10.1088/1361-6404/aa8961>
- [104] HINRICHSSEN, Peter F.. *The period of the damped non-linear pendulum*. European Journal of Physics [online]. 2020, 41(5). [cit. 2021-06-01]. DOI: 10.1088/1361-6404/ab988b. Dostupné z: <https://doi.org/10.1088/1361-6404/ab988b>
- [105] JOHANNESSEN, Kim. *An analytical solution to the equation of motion for the damped nonlinear pendulum*. European Journal of Physics [online]. 2014, 35(3). [cit. 2021-06-01]. DOI: 10.1088/0143-0807/35/3/035014. Dostupné z: <https://doi.org/10.1088/0143-0807/35/3/035014>
- [106] ŠTOLL, Ivan, Jiří TOLAR a Igor JEX. *Klasická teoretická fyzika*. Praha: Karolinum, 2017. ISBN: 978-80-246-3545-3.
- [107] *Fyzické kyvadlo - Sbírka úloh* [online]. 2016. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <http://reseneulohy.cz/674/fyzicke-kyvadlo>
- [108] HERZÁNOVÁ, Lenka. *Fyzika sférického kyvadla*. Bakalářská práce [online]. Brno, 2009. [cit. 2020-10-20]. Dostupné z: [https://is.muni.cz/th/gqdfh/Fyzika\\_sferickeho\\_kyvadla.pdf](https://is.muni.cz/th/gqdfh/Fyzika_sferickeho_kyvadla.pdf)
- [109] TIMMER Jens. *Theoretische Physik I: Klassische Mechanik und Spezielle Relativitätstheorie* [online]. 2020. [cit. 2021-07-02]. Dostupné z: [http://jet1.uni-freiburg.de/vorles\\_klass\\_mech/klass\\_mech.pdf](http://jet1.uni-freiburg.de/vorles_klass_mech/klass_mech.pdf)
- [110] NEKOVÁŘ Jan. *Elliptic Functions and Elliptic Curves (A Classical Introduction)* [online]. 2004. [cit. 2021-07-02]. Dostupné z: <https://webusers.inj-prg.fr/~jan.nekovar/co/ln/el/el1.pdf>
- [111] BRIZARD Alain J.. *A primer on elliptic functions with applications in classical mechanics* [online]. 2007. [cit. 2021-07-02]. Dostupné z: <https://arxiv.org/pdf/0711.4064.pdf>
- [112] OLSSON, Magnus G.. *Spherical pendulum revisited*. American Journal of Physics. American Journal of Physics [online]. 1981, 49(3), 531-534. [cit. 2021-07-02]. DOI: 10.1119/1.12666. Dostupné z: <https://doi.org/10.1119/1.12666>
- [113] DVORÁK, Leoš. *Trocha heuristiky z Malé Hrašnice*. Veletrh nápadů učitelů fyziky 5 [online]. 2000. [cit. 2021-07-02]. Dostupné z: [http://vnuf.cz/sbornik/prispevky/pdf/05-09-Dvorak\\_L.pdf](http://vnuf.cz/sbornik/prispevky/pdf/05-09-Dvorak_L.pdf)
- [114] ESSÉN, Hanno a Nicholas APAZIDIS. *Turning points of the spherical pendulum and the golden ratio*. European Journal of Physics [online]. 2009, 30(2), 427. [cit. 2021-07-02]. DOI: 10.1088/0143-0807/30/2/021. Dostupné z: <https://doi.org/10.1088/0143-0807/30/2/021>

- [115] WEINSTEIN, Alexander. *The Spherical Pendulum and Complex Integration*. The American Mathematical Monthly [online]. 1942, 49(8), 521-523. [cit. 2021-07-02]. DOI: 10.1080/00029890.1942.11991275. Dostupné z: <https://doi.org/10.1080/00029890.1942.11991275>
- [116] KRAFFT, Franz. *Spherical Pendulum*. Wolfram Demonstrations Project [online]. c2011. [cit. 2021-07-02]. Dostupné z: <http://demonstrations.wolfram.com/SphericalPendulum/>
- [117] MANDÍKOVÁ, Dana. *Soubor úloh z mechaniky I. pro studium učitelství*. [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <http://kdf.mff.cuni.cz/~mandikova/mechanika/sbirka.doc>
- [118] ZMEŠKAL, Oldřich a Radek NOVOTNÝ. *Fyzika - sbírka příkladů*. Mechanika, skripta FCH VUT, Brno, 2004. ISBN: 80-214-2569-5.
- [119] KUPSKÁ, I., M. MACUR a A. RYNDOVÁ. *Fyzika - sbírka příkladů*. Mechanika, skripta FCH VUT, Brno.
- [120] TROJKOVÁ, Jana a Dalibor CIPRIAN. *Sbírka úloh z fyziky I*. Ostrava: Vysoká škola báňská - Technická univerzita, 2007. ISBN: 978-80-248-1610-4.
- [121] HALLIDAY, David, Robert RESNICK a Jearl WALKER. *Fyzika*. 2. přepracované vydání. Editace: Petr DUB. Přeložil: Miroslav Černý. Brno: VUTIUM, c2013. ISBN: 978-80-214-4123-1.
- [122] FRANKLIN, Allan a Slobodan PEROVIC. *Experiment in Physics*. The Stanford Encyclopedia of Philosophy [online]. 2021. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <https://plato.stanford.edu/archives/sum2021/entries/physics-experiment>
- [123] CONSTATINO, Costas, Olia TSIVITANIDOU a Eliza RYBSKA. *What Is Inquiry-Based Science Teaching and Learning?*. Professional Development for Inquiry-Based Science Teaching and Learning [online]. 2018, 1-23. [cit. 2021-06-01]. DOI: 10.1007/978-3-319-91406-0\_1. Dostupné z: [https://doi.org/10.1007/978-3-319-91406-0\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-319-91406-0_1)
- [124] ORWAT, Kinga, Paweł BERNARD a Karol DUDEK. *Inquiry Based Science Education - Bringing Theory to Practice*. Professional Development for Inquiry-Based Science Teaching and Learning [online]. Conference: Proceedings of the 9th IOSTE Symposium for Central and Eastern Europe. Hradec Králové: 2014, 225-238. [cit. 2021-06-01]. Dostupné z: [https://www.researchgate.net/publication/287125758\\_INQUIRY\\_BASED\\_SCIENCE\\_EDUCATION\\_-\\_BRINGING\\_THEORY\\_TO\\_PRACTICE](https://www.researchgate.net/publication/287125758_INQUIRY_BASED_SCIENCE_EDUCATION_-_BRINGING_THEORY_TO_PRACTICE)
- [125] *Projekt Heuréka* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <https://kdf.mff.cuni.cz/heureka/>
- [126] DVOŘÁKOVÁ, Irena. *Active Learning in the Heureka Project — Teachers in the Role of Students*. Scientia in educatione [online]. 2017, 8, 42-58. [cit. 2021-06-01]. DOI: 10.14712/18047106.731. Dostupné z: <https://doi.org/10.14712/18047106.731>
- [127] MILLAR, Robin. *The role of practical work in the teaching and learning of science*. High school science laboratories: role and vision [online]. Conference: Proceedings of the 9th IOSTE Symposium for Central and Eastern Europe.

- Washington DC: National Academy of Sciences, 2004, 1-24. [cit. 2021-06-01]. Dostupné z: [https://sites.nationalacademies.org/cs/groups/dbassesite/documents/webpage/dbasse\\_073330.pdf](https://sites.nationalacademies.org/cs/groups/dbassesite/documents/webpage/dbasse_073330.pdf)
- [128] VYBÍRAL, Bohumil. *Experimenty ve školské fyzice dříve a nyní*. MFI [online]. 2015, 24(4), 274–292. [cit. 2021-06-01]. Dostupné z: [http://mfi.upol.cz/files/24/2404/mfi\\_2404\\_274\\_292.pdf](http://mfi.upol.cz/files/24/2404/mfi_2404_274_292.pdf)
- [129] HRABAL, Vladimír a Isabella PAVELKOVÁ. *Jaký jsem učitel*. Praha: Portál, 2010. ISBN: 978-80-7367-755-8.
- [130] SVOBODA, Emanuel. *Didaktika fyziky: Didaktické funkce experimentů* [online]. [cit. 2021-06-01]. Dostupné z: [https://kdf.mff.cuni.cz/vyuka/didaktika/DF\\_POKUSY.pdf](https://kdf.mff.cuni.cz/vyuka/didaktika/DF_POKUSY.pdf)
- [131] SVOBODA, Emanuel a kol.. *Pokusy z fyziky na střední škole 1*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1997. ISBN: 80-7196-007-1.
- [132] SVOBODA, Emanuel a kol.. *Pokusy z fyziky na střední škole 2*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1997. ISBN: 80-7196-008-X.
- [133] SVOBODA, Emanuel a kol.. *Pokusy z fyziky na střední škole 3*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN: 80-7196-009-8.
- [134] SVOBODA, Emanuel a kol.. *Pokusy z fyziky na střední škole 4*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 2001. ISBN: 80-7196-010-1.
- [135] SVOBODA, Miroslav a kol.. *Praktikum školních pokusů I*. 1. vydání. Praha: Karolinum, 1993. ISBN: 80-7066-802-4.
- [136] SVOBODA, Miroslav a kol.. *Praktikum školních pokusů II*. 2. přepracované vydání. Praha: Karolinum, 1996. ISBN: 80-7184-238-9.
- [137] SVOBODA, Miroslav a kol.. *Praktikum školních pokusů III*. 1. vydání. Praha: Karolinum, 1995. ISBN: 80-7184-019-X.
- [138] *Souhrnný sborník Veletrhu nápadů učitelů fyziky* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <http://vnuf.cz/sbornik/>
- [139] PATČ, Břetislav. *Pokusy s kyvadly*. Veletrh nápadů učitelů fyziky 2 [online]. 1997. [cit. 2021-06-01]. Dostupné z: [https://vnuf.cz/sbornik/prispevky/pdf/02-18-Patc\\_B.pdf](https://vnuf.cz/sbornik/prispevky/pdf/02-18-Patc_B.pdf)
- [140] PATČ, Břetislav. *Pokusy s kyvadly II*. Veletrh nápadů učitelů fyziky 10 [online]. 2005. [cit. 2021-06-01]. Dostupné z: [https://vnuf.cz/sbornik/prispevky/pdf/10-19-Patc\\_B.pdf](https://vnuf.cz/sbornik/prispevky/pdf/10-19-Patc_B.pdf)
- [141] BANÍK, Ivan. *Exotické kmitavé systavy*. Veletrh nápadů učitelů fyziky 2 [online]. 1997 [cit. 2021-06-01]. Dostupné z: <http://vnuf.cz/sbornik/prispevky/02-01-Banik.html>
- [142] *Sbírka fyzikálních pokusů* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <http://fyzikalnipokusy.cz/cs>
- [143] *FyzWeb - videopokusy* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <http://fyzweb.cz/materialy/videopokusy/>



- [144] *Seznam experimentů - FYKOS* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <https://fykos.cz/sex/experimenty>
- [145] *Physics Education at home: DIY activities for home learning* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <https://iopscience.iop.org/journal/0031-9120/page/physics-education-at-home>
- [146] *Do Try This at Home* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <https://www.iop.org/explore-physics/at-home#gref>
- [147] *ComPADRE.org - Resources and Services for Physics Education - Search Results* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <https://www.compadre.org/portal/search/search.cfm?q=physics+experiments>
- [148] *Science NetLinks - Search Results* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: [http://sciencenetlinks.com/search/?q=experiment&themes=2&content\\_types=All](http://sciencenetlinks.com/search/?q=experiment&themes=2&content_types=All)
- [149] *NASA - Search STEM Resources and Opportunities* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <https://www.nasa.gov/education/materials/>
- [150] *Category - Classroom Ideas* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <https://www.weareteachers.com/category/teaching-strategies/?filter-grade=all-grades&filter-subject=52>
- [151] *How to Do DIY Physics Experiments That Will Impress Everyone* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <https://interestingengineering.com/7-diy-physics-experiments-that-will-impress-everyone>
- [152] *Physics Science Projects* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <https://www.sciencebuddies.org/science-fair-projects/project-ideas/physics>
- [153] *Physics Project Topics and Models* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <https://www.seminaronly.com/Engineering-Projects/Physics/Physics-Projects.php>
- [154] *Physics Projects* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <https://www.1000sciencefairprojects.com/Physics/Physics-Projects.php>
- [155] *Trust in Physics*. YouTube [online]. 16. 4. 2014 [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: [https://www.youtube.com/watch?v=xXXF2C-vrQE&ab\\_channel=TheNewInternet](https://www.youtube.com/watch?v=xXXF2C-vrQE&ab_channel=TheNewInternet). Kanál uživatele The New Internet.
- [156] *Pokusy pro děti - Kyvadlo* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <https://www.pokusyprodeti.cz/pokusy/fyzika/20-mechanika/7-kyvadlo>
- [157] ŠÍŠKOVÁ, Jana. *Reálný fyzikální experiment I. - mechanika, molekulová fyzika a termika, kmitání a vlnění* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <https://adoc.pub/queue/mgr-jana-ikova-realny-fyzikalni-experiment-i-mechanika-molek.html>
- [158] HELLER, Václav. *Praktika školních pokusů B* [online]. Přírodovědecká fakulta UJEP, Ústí nad Labem, 2010. [cit. 2021-06-01]. Dostupné z: <http://physics.ujep.cz/~rseifert/downloads/PSP-B-heller.pdf>
- [159] *Základní fyzikální praktikum* [online]. MFF UK. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <https://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/start>

- [160] DROZD, Zdeněk a Jitka BROCKMEYEROVÁ. *Fyzika z volné ruky*. Veletrh nápadů učitelů fyziky 12 [online]. 2007. [cit. 2021-06-01]. Dostupné z: [http://vnuf.cz/sbornik/prispevky/pdf/12-22-Drozd\\_Z,\\_Brockmeyerova\\_J.pdf](http://vnuf.cz/sbornik/prispevky/pdf/12-22-Drozd_Z,_Brockmeyerova_J.pdf)
- [161] KONÍČEK, Libor. *Školní pokusy z fyziky 2*. Ostrava: Ostravská univerzita, 2004. Systém celoživotního vzdělávání Moravskoslezska. ISBN: 80-7042-967-4.
- [162] *Pokusy z fyziky - Pokus č.12 - Vytvořte si sinusoidu* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <https://www.zsletohrad.cz/eu/fyzika/pokus12.htm>
- [163] *Předměty - Praktikum školních pokusů I* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <https://is.cuni.cz/studium/predmety/index.php?do=predmet&kod=NDFY045>
- [164] *Věda není žádná věda - Matematické kyvadlo* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: [http://vedaneniveda.cz/Veda/pdf/5\\_fyzika\\_stredni%20skola/01\\_obecne\\_zakonnosti/1.1\\_matematicke\\_kyvadlo.pdf](http://vedaneniveda.cz/Veda/pdf/5_fyzika_stredni%20skola/01_obecne_zakonnosti/1.1_matematicke_kyvadlo.pdf)
- [165] *Tlumené kmity na vlastní nebezpečí*. YouTube [online]. 27. 10. 2020 [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: [https://www.youtube.com/watch?v=0q8bMHaLWzs&ab\\_channel=Sb%C3%ADrkafyzik%C3%A1ln%C3%ADchpokus%C5%AF](https://www.youtube.com/watch?v=0q8bMHaLWzs&ab_channel=Sb%C3%ADrkafyzik%C3%A1ln%C3%ADchpokus%C5%AF). Kanál uživatele Sběrka fyzikálních pokusů.
- [166] *Kyvadlo - Pokusy Vladimíra Kořena - Zázraky přírody - Česká televize* [online]. [cit. 2021-06-20]. Dostupné z: <https://www.ceskatelevize.cz/porady/10214135017-zazraky-prirody/7810-pokusy-vladimira-korena/27747-kyvadlo/>
- [167] ČERNÝ, Michal. *Balistické kyvadlo v teorii i praxi gymnaziální výuky fyziky*. Metodický portál: Články [online]. 2011. [cit. 2020-10-20]. Dostupné z: <https://clanky.rvp.cz/clanek/t/GJE/10187/BALISTICKE-KYVADLO-V-TEORII-I-PRAXI-GYMNAZIALNI-VYUKY-FYZIKY.html/>
- [168] *Kabinet výuky obecné fyziky* [online]. [cit. 2021-02-20]. Dostupné z: <https://www.mff.cuni.cz/cs/kvof>
- [169] ŽOVÍNOVÁ, Michaela a Miroslava OŽVOLDOVÁ. *Vzdialené a virtuálny experiment matematické kyvadlo vo výučbe* [online]. MVEK, Prešov, 2011. [cit. 2020-10-01]. Dostupné z: <https://www.pulib.sk/web/kniznica/elpub/dokument/Istvan1/subor/Zovinova.pdf>
- [170] GERHÁTOVÁ, Žaneta a Miroslava OŽVOLDOVÁ. *Využitie integrovaného e-learningu vo vyučovaní témy „Kmity, vlny, optika“* [online]. 2012. [cit. 2020-10-01]. Dostupné z: <https://pdf.truni.sk/download?actafp/2012/c/z-gerhatova-ozvoldova.pdf>
- [171] HÜRSEN, Çiğdem a Gülsüm AŞIKSOY. *The effect of simulation methods in teaching physics on students' academic success*. World Journal on Educational Technology [online]. 2015, 7(1). [cit. 2021-06-01]. DOI: 10.18844/wjet.v7i1.26. Dostupné z: <https://doi.org/10.18844/wjet.v7i1.26>
- [172] CONCARI, Sonya, Silvia GIORGI, Cristina N. Cámara a Norah GIACOSA. *Didactic strategies using simulations for Physics teaching*. World Journal on Educational Technology [online]. 2006. [cit. 2021-06-01]. Dostupné z: [https://www.researchgate.net/publication/237308516\\_Didactic\\_strategies\\_using\\_simulations\\_for\\_Physics\\_teaching](https://www.researchgate.net/publication/237308516_Didactic_strategies_using_simulations_for_Physics_teaching)

- [173] AMAYA, Jasmin, Elvirez MARTINEZ, Victoria. Carbonell a Mercedes FLOREZ. *Simulations as a New Physics Teaching Tool*. Computer Applications in Engineering Education [online]. 2010, 18(4), 757-761. [cit. 2021-06-01]. DOI: 10.1002/cae.20266. Dostupné z: <https://doi.org/10.1002/cae.20266>
- [174] *Ejs Open Source Real Pendulum Model java applet* [online]. 2008 [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <https://weelookang.blogspot.com/2010/06/physical-quantities-and-units.html>
- [175] VAŠČÁK, Vladimír. *RNDr. Vladimír Vaščák - osobní stránky učitele z Moravy* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <https://www.vascak.cz/>
- [176] VAŠČÁK, Vladimír. *Matematické kyvadlo* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: [https://www.vascak.cz/data/android/physicsatschool/template.php?s=kv\\_kyvadlo&l=cz](https://www.vascak.cz/data/android/physicsatschool/template.php?s=kv_kyvadlo&l=cz)
- [177] VAŠČÁK, Vladimír. *Matematické kyvadlo - Hřebík* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: [https://www.vascak.cz/data/android/physicsatschool/template.php?s=kv\\_kyvadlo\\_hrebik&l=cz](https://www.vascak.cz/data/android/physicsatschool/template.php?s=kv_kyvadlo_hrebik&l=cz)
- [178] VAŠČÁK, Vladimír. *Matematické kyvadlo - Helikoptéra* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: [https://www.vascak.cz/data/android/physicsatschool/template.php?s=kv\\_kyvadlo2&l=cz](https://www.vascak.cz/data/android/physicsatschool/template.php?s=kv_kyvadlo2&l=cz)
- [179] *PhET: Interactive Simulations for Science and Maths* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <https://phet.colorado.edu/cs/>
- [180] *Laboratoř a kyvadlo* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <https://phet.colorado.edu/cs/simulation/pendulum-lab>
- [181] FENDT, Walter. *Fyzikální HTML5 aplikace* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <https://www.walter-fendt.de/html5/phcz/>
- [182] FENDT, Walter. *Matematické kyvadlo* [online]. 1998. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: [https://www.walter-fendt.de/html5/phcz/pendulum\\_cz.htm](https://www.walter-fendt.de/html5/phcz/pendulum_cz.htm)
- [183] FENDT, Walter. *Vázané oscilátory* [online]. 1998. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: [https://www.walter-fendt.de/html5/phcz/coupledpendula\\_cz.htm](https://www.walter-fendt.de/html5/phcz/coupledpendula_cz.htm)
- [184] *Physics Simulations* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <http://physics.bu.edu/~duffy/classroom.html>
- [185] *Speed of a Pendulum* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: [http://physics.bu.edu/~duffy/semester1/c11\\_pendulum.html](http://physics.bu.edu/~duffy/semester1/c11_pendulum.html)
- [186] *A simple pendulum* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: [http://physics.bu.edu/~duffy/semester1/c18\\_pendulum.html](http://physics.bu.edu/~duffy/semester1/c18_pendulum.html)
- [187] *The pendulum with small and large amplitudes* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: [http://physics.bu.edu/~duffy/semester1/c18\\_motion\\_pendulum\\_sim.html](http://physics.bu.edu/~duffy/semester1/c18_motion_pendulum_sim.html)
- [188] NEUMANN, Erik. *myPhysicsLab - Physics Simulations* [online]. c2001. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <https://www.myphysicslab.com/index-en.html>

- [189] NEUMANN, Erik. *myPhysicsLab - Simple Pendulum* [online]. c2001. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <https://www.mypysicslab.com/pendulum/pendulum-en.html>
- [190] *Modeling A Physical Pendulum – Another Adventure in Coding Nature* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <https://physicsfab.org/2019/02/06/modeling-a-physical-pendulum-another-adventure-in-coding-nature/>
- [191] *Period of Physical Pendulum* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: [https://javalab.org/en/period\\_of\\_pendulum\\_en/](https://javalab.org/en/period_of_pendulum_en/)
- [192] *GeoGebra* [online]. [cit. 2021-06-01] Dostupné z: <https://www.geogebra.org/>
- [193] NOVOTNÝ, Ondřej. *Užití programu GeoGebra ve výuce matematiky*. Diplomová práce [online]. České Budějovice, 2016. [cit. 2020-10-20]. Dostupné z: [https://theses.cz/id/sdx10i/Diplomov\\_prce.pdf](https://theses.cz/id/sdx10i/Diplomov_prce.pdf)
- [194] *Předměty - Informační technologie pro učitele* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <https://is.cuni.cz/studium/predmety/index.php?do=predmet&kod=NMTM110>
- [195] *Výukové materiály - GeoGebra* [online]. [cit. 2021-06-01] Dostupné z: <https://www.geogebra.org/materials>
- [196] VINKLER, Martin. *Martin Vinkler - Materiály* [online]. [cit. 2021-06-01] Dostupné z: <https://www.geogebra.org/u/mvinkler>
- [197] VINKLER, Martin. *Matematické kyvadlo - síly* [online]. [cit. 2021-06-01] Dostupné z: <https://www.geogebra.org/m/NmRfXEFZ#material/e2tmxtnd>
- [198] VINKLER, Martin. *Matematické kyvadlo - okamžitá výchylka oblouková a úhlová, tečná složka tíhové síly* [online]. [cit. 2021-06-01] Dostupné z: <https://www.geogebra.org/m/NmRfXEFZ#material/n6zxyusd>
- [199] VORÁČOVÁ, Šárka. *Šárka Voráčová - Materiály* [online]. [cit. 2021-06-01] Dostupné z: <https://www.geogebra.org/u/voracova>
- [200] VORÁČOVÁ, Šárka. *Matematické kyvadlo* [online]. [cit. 2021-06-01] Dostupné z: <https://www.geogebra.org/m/w5r9w5e6>
- [201] *Materiály - GeoGebra* [online]. [cit. 2021-06-01] Dostupné z: <https://www.geogebra.org/search/pendulum>
- [202] GEOGEBRA MATERIALS TEAM. *Simple Pendulum* [online]. [cit. 2021-06-01] Dostupné z: <https://www.geogebra.org/m/mypnuvXx>
- [203] PAUL. *Pendulum* [online]. [cit. 2021-06-01] Dostupné z: <https://www.geogebra.org/m/qZPw5XH>
- [204] TROILO, Luciano. *simple pendulum* [online]. [cit. 2021-06-01] Dostupné z: <https://www.geogebra.org/m/HrnNWHte>
- [205] *WOLFRAM Demonstrations Project* [online]. [cit. 2021-06-01] Dostupné z: <https://demonstrations.wolfram.com/>
- [206] *MathWorks - Makers of MATLAB and Simulink* [online]. [cit. 2021-06-01] Dostupné z: <https://uk.mathworks.com>

- [207] *iSES - Internet School Experimental System* [online]. [cit. 2021-06-01] Dostupné z: <https://www.ises.info/index.php/cs>
- [208] *Remote-LAB GymKT, Vzdálená internetová laboratoř, Fyzikální pokusy řízené přes Internet* [online]. [cit. 2021-06-01] Dostupné z: <http://remote-lab.fyzika.net/index.php?lng=cs>
- [209] *Vzdáleně ovládaná laboratoř - Určení tíhového zrychlení z doby kmitu matematického kyvadla* [online]. [cit. 2021-06-01] Dostupné z: <http://www.ictphysics.upol.cz/remotelab/rlab2.html>
- [210] *LabsLand - Pendulum* [online]. [cit. 2021-06-01] Dostupné z: <https://labsland.com/en/labs/pendulum>
- [211] *Remotely Controlled Laboratories - RCLs* [online]. [cit. 2021-06-01] Dostupné z: <http://rcl-munich.informatik.unibw-muenchen.de/>
- [212] TESAŘ, Jiří. *Laboratorní práce a projekty v inovované řadě učebnic fyziky pro ZŠ. Laboratorní práce a projekty pro ZŠ* [online]. „Jak učím fyziku“ - Vlachovice, 2009. [cit. 2021-06-01]. Dostupné z: <http://docplayer.cz/6368361-Laboratorni-prace-a-projekty-v-inovovane-rade-ucebnic-fyziky-pro-zs.html>
- [213] KOUTSKÁ, Barbora. *Laboratorní práce z fyziky pro střední školy. Bakalářská práce* [online]. Praha, 2011. [cit. 2020-10-20]. Dostupné z: [https://dspace.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/50593/BPTX\\_2010\\_1\\_\\_0\\_259467\\_0\\_96759.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://dspace.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/50593/BPTX_2010_1__0_259467_0_96759.pdf?sequence=1&isAllowed=y)
- [214] KOUDELKOVÁ, Irena. *Laboratorní práce jako problémová úloha. Veletrh nápadů učitelů fyziky 12* [online]. 2007. [cit. 2021-06-01]. Dostupné z: [https://vnuf.cz/sbornik/prispevky/pdf/12-12-Koudelkova\\_I.pdf](https://vnuf.cz/sbornik/prispevky/pdf/12-12-Koudelkova_I.pdf)
- [215] *Metodický portál RVP.CZ* [online]. [cit. 2021-06-01] Dostupné z: <https://rvp.cz/>
- [216] *Archiv úloh - Výfuk* [online]. [cit. 2021-06-01] Dostupné z: <https://vyfuk.mff.cuni.cz/ulohy/archiv>
- [217] *The Physics Classroom Website* [online]. [cit. 2021-06-01] Dostupné z: <https://www.physicsclassroom.com/The-Laboratory>
- [218] NOVÁK, Jakub. *Metodický list - Kmitání kyvadla* [online]. ZŠ Schulzovy Sady, 2012. [cit. 2021-06-01]. Dostupné z: [http://www.zsschsady.cz/dumy/soubory/VY\\_52\\_INOVACE\\_2NOV42.pdf](http://www.zsschsady.cz/dumy/soubory/VY_52_INOVACE_2NOV42.pdf)
- [219] *Laboratorní práce - Čas* [online]. [cit. 2021-06-01]. Dostupné z: <https://www.oag.cz/uc/fyz/NG/1LC/115.pdf>
- [220] BERNARD, Jan. *Využití chytrých telefonů při vyučování na střední škole. Závěrečná práce* [online]. Brno, 2021. [cit. 2020-10-20]. Dostupné z: [https://is.muni.cz/th/qvk16/Bernard\\_Jan\\_502818\\_ZP\\_2021.pdf](https://is.muni.cz/th/qvk16/Bernard_Jan_502818_ZP_2021.pdf)
- [221] DVOŘÁKOVÁ, Irena a Věra KOUDELKOVÁ. *ICT ve fyzice na ZŠ, Příklady dobré praxe* [online]. Praha, 2020. [cit. 2021-06-01]. Dostupné z: <https://kdf.mff.cuni.cz/materialy/ICTveFyzice.pdf>

- [222] ŠIMEK, Jan. *Školní fyzikální pokusy v provedení XXXL*. Bakalářská práce [online]. Praha, 2008. [cit. 2020-10-20]. Dostupné z: [https://dspace.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/18122/BPTX\\_2006\\_1\\_11320\\_NSZZ027\\_227904\\_0\\_45710.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://dspace.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/18122/BPTX_2006_1_11320_NSZZ027_227904_0_45710.pdf?sequence=1&isAllowed=y)
- [223] VÍCHA Vladimír a Ivo Volf. *Laboratorní práce z fyziky pro FO kategorie D, Studijní text pro řešitele FO kategorie D a ostatní zájemce o fyziku*. Knihovnička fyzikální olympiády č. 63 [online]. Hradec Králové, 2004. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/experim.pdf>
- [224] *Laboratorní práce č. 3: Kmitání mechanického oscilátoru* [online]. [cit. 2021-06-01]. Dostupné z: [https://gymnaziumhranice.cz/soubory/projekty/LPaSF/V4/LP3-V4\\_manual.pdf](https://gymnaziumhranice.cz/soubory/projekty/LPaSF/V4/LP3-V4_manual.pdf)
- [225] *Teorie, Za poznáním více smysly - Matematické kyvadlo* [online]. [cit. 2021-06-01]. Dostupné z: <http://www.zsturfren.cz/data/vice/vice.htm>
- [226] *Laboratorní práce: Jak pomocí matematického kyvadla určíme hmotnost Země?* Slovanské gymnázium Olomouc [online]. [cit. 2021-06-01]. Dostupné z: [http://fyzweb.cz/materialy/vlachovice/2009/bonus/holubova/Laboratorni\\_prace\\_fyzika\\_8.pdf](http://fyzweb.cz/materialy/vlachovice/2009/bonus/holubova/Laboratorni_prace_fyzika_8.pdf)
- [227] *Fyzika nejen s křídou a tabulí*. YouTube [online]. 13. 6. 2014 [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: [https://www.youtube.com/watch?v=KTCz98RWe4w&ab\\_channel=Nadace%C4%8Cesk%C3%A9spo%C5%99itelny](https://www.youtube.com/watch?v=KTCz98RWe4w&ab_channel=Nadace%C4%8Cesk%C3%A9spo%C5%99itelny). Kanál uživatele Nadace České společnosti.
- [228] *Závislost periody kyvadla na hmotnosti závaží - Videoanalýza* [online]. [cit. 2021-06-01]. Dostupné z: <https://fyzikalnikabinet.cz/pokus/zavislost-periody-kyvadla-hmotnosti-zavazi-videoanalyza/?pdf=903>
- [229] BRIGGLE, Justin. *Analysis of pendulum period with an iPod touch/iPhone*. Physics Education [online]. 2013, 48(3), 285. [cit. 2021-06-01]. DOI: 10.1088/0031-9120/48/3/28. Dostupné z: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0031-9120/48/3/285/pdf>
- [230] *phyphox - Physical Phone Experiments* [online]. [cit. 2021-06-01]. Dostupné z: <https://phyphox.org/>
- [231] NEČAS, Vítězslav. *Určení tíhového zrychlení z periody kmitu matematického kyvadla* [online]. [cit. 2021-06-01]. Dostupné z: <https://www.vernier.cz/experimenty/gml/fyzika/f30.pdf>
- [232] PAZDERA, Václav. *Měření fyzikálních veličin se systémem Vernier*. Fyzika na scéně – exploratorium pro žáky základních a středních škol [online]. 1. vydání. Olomouc, 2012. [cit. 2021-06-01]. ISBN: 978-80-7329-320-8 Dostupné z: [https://www.gcajkol.cz/data-projekty/03-fyzika-na-scene\\_files/vernier-II.pdf](https://www.gcajkol.cz/data-projekty/03-fyzika-na-scene_files/vernier-II.pdf)
- [233] STEFANOVÁ, Ivana. *Laboratorní cvičení z fyziky - Matematické kyvadlo* [online]. Soběslav, 2016. [cit. 2021-06-01]. Dostupné z: [https://ivana.stdin.cz/\\_media/fyzika/kyvadlo.pdf](https://ivana.stdin.cz/_media/fyzika/kyvadlo.pdf)
- [234] *Fyzikální praktikum (mechanika) - Portál moderní fyziky* [online]. UPOL. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <https://fyzika.upol.cz/cs/predmety-kef-slo/fyzikalni-praktikum-mechanika>

- [235] *Fyzikální praktikum I* [online]. VUT Brno. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <https://www.vutbr.cz/studenti/predmety/detail/230346>
- [236] *Fyzikální praktikum 1* [online]. ZČU Plzeň. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: [https://kfy.zcu.cz/Pro\\_studenty/Fyzikalni\\_praktikum\\_1.html](https://kfy.zcu.cz/Pro_studenty/Fyzikalni_praktikum_1.html)
- [237] PÉREZ, José-Philippe a Olivier PUJOL. *Two often disregarded aspects of Foucaults pendulum*. European Journal of Physics [online]. 2014, 36(1). [cit. 2021-06-01]. DOI: 10.1088/0143-0807/36/1/015019. Dostupné z: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0143-0807/36/1/015019>
- [238] BASANO, Lorenzo. *The Foucault Pendulum Precession and the Additivity of Infinitesimal Rotations*. European Journal of Physics [online]. 2018, 39(5). [cit. 2021-06-01]. DOI: 10.1088/1361-6404/aac52d. Dostupné z: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6404/aac52d>
- [239] FÍK, Luděk. *Znovuzprovoznění Foucaultova kyvadla v Kroměříži* [online]. 2012. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <https://www.astro.cz/clanky/ostatni/znovuzprovozneni-foucaultova-kyvadla-v-kromerizi.html>
- [240] CREASE, Robert P.. *The most beautiful experiment...* Physics World [online]. 2002, 15(5), 17-17. [cit. 2021-06-01]. DOI: 10.1088/2058-7058/15/5/23. Dostupné z: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/2058-7058/15/5/23>
- [241] *Top 10 Beautiful Physical Experiments* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <https://www.kent.edu/physics/top-10-beautiful-physics-experiments>
- [242] JOHNSON, George. *Here They Are, Science's 10 Most Beautiful Experiments*. The New York Times [online]. 2002. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <https://www.nytimes.com/2002/09/24/science/here-they-are-science-s-10-most-beautiful-experiments.html>
- [243] Wikipedia contributors. *List of Foucault pendulums*. Wikipedia, The Free Encyclopedia [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_Foucault\\_pendulums](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Foucault_pendulums)
- [244] Příspěvatelé Wikipedie. *Foucaultovo kyvadlo*. Wikipedie: Otevřená encyklopedie [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: [https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Foucaultovo\\_kyvadlo&oldid=20140407](https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Foucaultovo_kyvadlo&oldid=20140407)
- [245] EMMERSON, Alan W.. *Things are seldom what they seem: Christiaan Huygens, the Pendulum, and the Cycloid*. NAWCC bulletin [online]. 2006, 18, 295-313. [cit. 2021-06-01]. Dostupné z: [http://www.antique-horology.org/Piggott/RH/Images/81V\\_Cycloid.pdf](http://www.antique-horology.org/Piggott/RH/Images/81V_Cycloid.pdf)
- [246] BARTSCH, Hans-Jochen. *Matematické vzorce*. 4. vydání. Praha: Academia, 2006. ISBN: 80-200-1448-9.
- [247] TEIGISZEROVÁ, Lucia. *Cykloida v teorii a praxi*. Bakalářská práce [online]. Brno, 2010. [cit. 2020-10-20]. Dostupné z: [https://is.muni.cz/th/268878/prif\\_b/bakalarka.pdf](https://is.muni.cz/th/268878/prif_b/bakalarka.pdf)
- [248] CHAMROVÁ, Martina. *Brachistochrona v teorii a pokusech*. Bakalářská práce [online]. Praha, 2018. [cit. 2020-10-20]. Dostupné z: <https://dspace.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/100908/130231980.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

- [249] TAPP, Kristopher. *Differential geometry of curves and surfaces*. Switzerland: Springer International Publishing, 2016. Undergraduate texts in mathematics. ISBN: 978-3-319-39798-6.
- [250] Wikipedia contributors. *Evolute*. Wikipedia, The Free Encyklopedia [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Evolute&oldid=1014357357>
- [251] JAREŠOVÁ Miroslava a Ivo Volf. *Matematika křivek, Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/matematika/mkrivek.pdf>
- [252] Wikipedia contributors. *Tautochrone curve*. Wikipedia, The Free Encyklopedia [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Tautochrone\\_curve&oldid=1032330850](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Tautochrone_curve&oldid=1032330850)
- [253] TERRA, Pedro, Reinaldo de MELO E SOUZA a Carlos FARINA DE SOUZA. *Is the tautochrone curve unique?*. American Journal of Physics [online]. 2016, 84(12). [cit. 2021-06-01]. DOI: 10.1119/1.4963770. Dostupné z: <https://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.4963770>
- [254] GÓMEZ, Raúl, Vivianne MARQUINA a S. GÓMEZ-AÍZA. *An alternative solution to the general tautochrone problem*. Revista mexicana de física E. [online]. 2008, 54(2). [cit. 2021-06-01]. Dostupné z: [https://www.researchgate.net/publication/237694649\\_An\\_alternative\\_solution\\_to\\_the\\_general\\_tautochrone\\_problem](https://www.researchgate.net/publication/237694649_An_alternative_solution_to_the_general_tautochrone_problem)
- [255] TALERO L., Paco H., César A. HERREÑO-FIERRO a Fernanda SANTANA GÓMEZ. *Tautochrone in the damped cycloidal pendulum* [online]. 2016. [cit. 2021-06-01]. Dostupné z: [https://www.researchgate.net/publication/309651602\\_Tautochrone\\_in\\_the\\_damped\\_cycloidal\\_pendulum](https://www.researchgate.net/publication/309651602_Tautochrone_in_the_damped_cycloidal_pendulum)
- [256] Contributeurs de Wikipédia. *Pendule de Mach*. Wikipédia, l'encyclopédie libre [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: [https://fr.wikipedia.org/wiki/Pendule\\_de\\_Mach](https://fr.wikipedia.org/wiki/Pendule_de_Mach)
- [257] TEODORESCU, Petre P.. *Mechanical Systems, Classical Models: Volume II: Mechanics of Discrete and Continuous Systems*. 1. vydání. Springer Netherlands, 2009. ISBN: 978-1-4020-8987-9.
- [258] ČERNÝ, Michal a Monika. ČERNÁ. *Ernst Mach* [online]. [cit. 2021-06-01]. Dostupné z: [https://is.muni.cz/www/384/44071821/44071867/KA7\\_MC\\_mach\\_poster.pdf](https://is.muni.cz/www/384/44071821/44071867/KA7_MC_mach_poster.pdf)
- [259] *The Variable g Pendulum* [online]. [cit. 2021-06-01]. Dostupné z: <http://academic.brooklyn.cuny.edu/physics/sobel/Phys1/Varg.html>
- [260] REICHL, Jaroslav. *Maxwellovo kyvadlo*. Metodický portál: Články [online]. 2010. [cit. 2020-10-20]. Dostupné z: <https://clanky.rvp.cz/clanek/k/g/9263/MAXWELLOVO-KYVADLO.html/>
- [261] *2. Maxwellovo kyvadlo* [online]. [cit. 2020-10-20]. Dostupné z: [http://files.gamepub.sk/Bakalar/Fyzika-I/Labaky/zadania\\_LS\\_2004-2005/02.%20maxwellovo%20kyvadlo.pdf/](http://files.gamepub.sk/Bakalar/Fyzika-I/Labaky/zadania_LS_2004-2005/02.%20maxwellovo%20kyvadlo.pdf/)



- [262] PECORI, Barbara a Giacomo TORZO. *The Maxwell wheel investigated with MBL*. The Physics Teacher [online]. 1998, 36(6), 362-366. [cit. 2021-06-01]. DOI: 10.1119/1.880109. Dostupné z: <https://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.880109>
- [263] *Jojo - Sbírka úloh* [online]. 2019. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <https://reseneulohy.cz/2306/jojo>
- [264] *Laboratorná úloha č. 2: Maxwellovo kyvadlo* [online]. 2015. Oddelenie fyziky ÚJFI, FEI STU v Bratislave. [cit. 2020-10-20]. Dostupné z: [http://www.ujfi.fei.stuba.sk/fyzika/navody/MaxwellovoKyvadlo\\_20150928.pdf/](http://www.ujfi.fei.stuba.sk/fyzika/navody/MaxwellovoKyvadlo_20150928.pdf/)
- [265] *Nastavení a používání funkce Obrazovka telefonu v aplikaci Váš telefon* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <https://support.microsoft.com/cs-cz/topic/nastaven%C3%AD-a-pou%C5%BE%C3%ADv%C3%A1n%C3%AD-funkce-obrazovka-telefonu-v-aplikaci-v%C3%A1%C5%A1-telefon-ea853ebc-0856-2f6e-af34-703fe449416b>
- [266] *Jak zrcadlit svůj displej Android na PC* [online]. 2019. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <https://cz.gadgetsforyou.eu/jak-zrcadlit-svuj-displej-android-na-pc/>
- [267] *LetsView pro Windows - Zrcadlit obrazovku Android/iPhone do PC* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <https://letsview.com/cz/windows>
- [268] *ApowerMirror - Zrcadlení iPhonu/Androidu do PC v reálném čase* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <https://www.apowersoft.cz/phone-mirror>
- [269] MATTILA, J. O.. *The Foucault pendulum as a teaching aid*. Physics Education [online]. 1991, 26(2), 120-123. [cit. 2021-06-01]. DOI: 10.1088/0031-9120/26/2/007. Dostupné z: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0031-9120/26/2/007>
- [270] KRUGLAK, Haym a Stanley STEELE. *A 25 cm continuously operating Foucault pendulum*. Physics Education [online]. 1984, 19(6), 296-296. [cit. 2021-06-01]. DOI: 10.1088/0031-9120/19/6/412. Dostupné z: <https://doi.org/10.1088/0031-9120/19/6/412>
- [271] LACSNY, Boris, Igor STUBNA a Aba TELEKI. *School Foucault pendulum*. European Journal of Physics [online]. 2014, 35(6), 362-366. [cit. 2021-06-01]. DOI: 10.1088/0143-0807/35/6/065023. Dostupné z: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0143-0807/35/6/065023>
- [272] LIANG, Zhi-qiang, Wen-xiao TANG a Hai-bo SUN. *Drawing and displaying the trajectories of some pendulums*. Physics Education [online]. 2008, 43(1). [cit. 2021-06-01]. DOI: 10.1088/0031-9120/43/01/012. Dostupné z: <https://doi.org/10.1088/0031-9120/43/01/012>
- [273] *Huygens' Pendulum*. YouTube [online]. 28. 3. 2018 [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: [https://www.youtube.com/watch?v=EI5zwTvfkqA&ab\\_channel=HannahSheats](https://www.youtube.com/watch?v=EI5zwTvfkqA&ab_channel=HannahSheats). Kanál uživatele Hannah Sheats.
- [274] SEFZIG, Luděk. *7 důvodů pro využití 3D tisku ve školách*. Metodický portál: Články [online]. 2018. [cit. 2020-10-20]. ISSN: 1802-4785. Dostupné z: <https://clanky.rvp.cz/clanek/c/0/21812/7-DUVODU-PRO-VYUZITI-3D-TISKU-VE-SKOLACH.html>

- [275] FORD, Simon a Tim MINSHAL. *Invited review article: Where and how 3D printing is used in teaching and education* [online]. 2017. [cit. 2021-06-01]. Dostupné z: [https://www.researchgate.net/publication/320617391\\_Invited\\_review\\_article\\_Where\\_and\\_how\\_3D\\_printing\\_is\\_used\\_in\\_teaching\\_and\\_education](https://www.researchgate.net/publication/320617391_Invited_review_article_Where_and_how_3D_printing_is_used_in_teaching_and_education)
- [276] *Autodesk Fusion 360 - Cloudový 3D/CAM modelář* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <https://www.fusion360.cz/>
- [277] *PrusaSlicer - Prusa Research a.s. - 3D tisk a 3D tiskárny od Josefa Průši* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <https://www.prusa3d.cz/prusaslicer/>
- [278] *Thingiverse - Digital Designs for Physical Objects* [online]. [cit. 2021-04-20]. Dostupné z: <https://www.thingiverse.com/>
- [279] KOČÍ, Jakub. *Jak vyhladit 3D tisky pomocí chemického vyhlazování* [online]. 2020. [cit. 2020-10-20]. Dostupné z: [https://blog.prusaprinters.org/cs/jak-vyhladit-3d-tisky-pomoci-chemickeho-vyhlazovani\\_36268/](https://blog.prusaprinters.org/cs/jak-vyhladit-3d-tisky-pomoci-chemickeho-vyhlazovani_36268/)
- [280] BROCKOTTER, Robert. *3D printing geometry restrictions* [online]. [cit. 2020-10-20]. Dostupné z: <https://www.hubs.com/knowledge-base/3d-printing-geometry-restrictions/>
- [281] DVOŘÁK, Leoš. *Fyzika s Veselou krávkou – aneb pokusy s opravdu jednoduchými pomůckami*. Veletrh nápadů učitelů fyziky 10 [online]. 2005. [cit. 2021-06-01]. Dostupné z: [https://vnuf.cz/sbornik/prispevky/pdf/10-29-Dvorak\\_L.pdf](https://vnuf.cz/sbornik/prispevky/pdf/10-29-Dvorak_L.pdf)
- [282] VESELÝ, Marek. *Od hraček k fyzice*. Veletrh nápadů učitelů fyziky 2 [online]. 1997. [cit. 2021-06-01]. Dostupné z: [http://vnuf.cz/sbornik/prispevky/pdf/02-28-Vesely\\_M.pdf](http://vnuf.cz/sbornik/prispevky/pdf/02-28-Vesely_M.pdf)

# Seznam obrázků

1.1	Pražský metronom na Letné [1]	4
1.2	Sluneční hodiny v Dobříčovicích [8]	5
1.3	Huygensovy kyvadlové hodiny a jeho nejslavnější dílo <i>Horologium oscillatorium</i> [15]	6
1.4	Příklady různých závěsu používaných v kyvadlových hodinách [18]	7
1.5	Příklady různých kyvadel užívaných v kyvadlových hodinách [20]	8
1.6	Repsoldovo - Besselovo reverzní kyvadlo [31]	10
2.1	Náčrtek matematického kyvadla a rozbor sil působících na závaží kyvadla	12
2.2	Model rovinného matematického kyvadla	18
2.3	Náčrtek matematického kyvadla a rozbor sil na něj působících	19
2.4	Náčrtek matematického kyvadla a rozbor situace pro porovnání mechanické energie v krajní poloze s výchylkou $\varphi_0$ a obecné poloze s výchylkou $\varphi$	20
2.5	Náčrtek matematického kyvadla a rozbor sil na něj působících	22
2.6	Relativní prodloužení periody v závislosti na max. výchylce $\varphi_0$	28
2.7	Slabě tlumené kmity	30
2.8	Amplituda nucených kmitů $\Phi_0$ v závislosti na frekvenci buzení $\Omega$ pro různé hodnoty tlumení $\delta_1 < \delta_2 < \delta_3$	31
2.9	Model fyzického kyvadla s těžištěm $T$ , které se otáčí okolo osy $O$	31
2.10	Model sférického kyvadla kyvadla	33
2.11	Průměty pohybu sférického kyvadla do roviny $xy$ pro různé počáteční hodnoty $\vartheta_0$ a $p_\varphi$	38
3.1	Applety ze sbírky RNDr. Vladimíra Vaščáka	45
3.2	Applet <i>Laborator a kyvadlo</i> [180]	47
3.3	Applet <i>Matematické kyvadlo</i> [182]	47
3.4	Model matematického kyvadla s nastavitelnou amplitudou [187]	48
3.5	Simulace a analýza pohybu matematického kyvadla se třením [189]	49
3.6	Model matematického kyvadla se znázorněnými silami [197]	51
3.7	Model kyvadla s možností měřit a zapisovat čas [204]	52
4.1	Neinerciální vztažná soustava spojená se Zemí	58
4.2	Soustava kartézských souřadnic v bodě závěsu kyvadla	59
4.3	Směr stočení Foucaultova kyvadla na severní i jižní polokouli (čárkovane je zakreslen původní směr pohybu, plnou čarou je stočení trajektorie v důsledku působení Coriolisovy síly)	61
4.4	Expozice Foucaultova kyvadla v Kroměříži [239]	61
4.5	Náčrtek cykloidy	62
4.6	Náčrtek cykloidy, po které se pohybuje hmotný bod z bodu $A$ do $B$	64
4.7	Náčrtek Huygensova modelu kyvadlových hodin uvedený v <i>Horologium Oscillatorium</i> [13]	66
4.8	Model Machova kyvadla [256]	67
4.9	Sklon osy $\alpha$ , okolo které kmitá kyvadlo (kyvadlo kmitá v rovině kolmé k ose - „dopředu - dozadu“)	68
4.10	Náčrtek Maxwellova kyvadla (pohled z boku)	70
5.1	Model Foucaultova kyvadla	73
5.2	Pohyb kyvadla shora	74
5.3	Model cykloidálního kyvadla se zarážkami ve tvaru cykloidy	76

5.4	Kartonový model Machova kyvadla . . . . .	80
5.5	Jednoduchý model Machova kyvadla . . . . .	82
5.6	Jednoduchý model Maxwellova kyvadla . . . . .	84
5.7	Závislost doby mezi dvěma průchody nejnižší polohou $T$ a odpovídající vzdáleností $s$ (data z jednotlivých měření jsou barevně rozlišena) . . . .	85
5.8	Relativní energetické ztráty v závislosti na předcházející dráze $s$ . . . . .	87

# Seznam tabulek

2.1	Relativní prodloužení periody v závislosti na maximální výchylce $\varphi_0$	27
5.1	Výsledky měření periody kyvadla při různých počátečních výchylkách (ze záznamu pomocí fotoaparátu s frekvencí 30 snímků za sekundu)	78
5.2	Výsledky měření periody kyvadla při různých počátečních výchylkách (ze záznamu pomocí fotoaparátu s frekvencí 210 snímků za sekundu)	78
5.3	Měření s kartonovým modelem Machova kyvadla	80
5.4	Hodnoty parametru $a$ , poměru $J/mr^2$ , momentu setrvačnosti kyvadla $J$ a teoreticky určeného momentu setrvačnosti $J_{teor}$ pro všechny modely	86
A.1	Výsledky měření s fotoaparátem s frekvencí 30 snímků za sekundu	114
A.2	Výsledky měření s fotoaparátem s frekvencí 210 snímků za sekundu	114
A.3	Měření s kartonovým modelem Machova kyvadla	115
A.4	Výsledky z měření s modelem z CD (č. 1)	117
A.5	Výsledky z měření s modelem z CD (č. 2)	117
A.6	Výsledky z měření s modelem z CD (č. 3)	117
A.7	Výsledky z měření s modelem z CD (č. 4)	118
A.8	Výsledky z měření s modelem z CD (č. 5)	118
A.9	Výsledky z měření s modelem s menšími kartonovými disky (č. 1)	118
A.10	Výsledky z měření s modelem s menšími kartonovými disky (č. 2)	119
A.11	Výsledky z měření s modelem menšími kartonovými disky (č. 3)	119
A.12	Výsledky z měření s modelem s menšími kartonovými disky (č. 4)	119
A.13	Výsledky z měření s modelem s menšími kartonovými disky (č. 5)	120
A.14	Výsledky z měření s modelem s velkým kartonovým diskem (č. 1)	120
A.15	Výsledky z měření s modelem s velkým kartonovým diskem (č. 2)	120
A.16	Výsledky z měření s modelem s velkým kartonovým diskem (č. 3)	120
A.17	Výsledky z měření s modelem s velkým kartonovým diskem (č. 4)	121
A.18	Výsledky z měření s modelem s velkým kartonovým diskem (č. 5)	121
A.19	Výsledky z měření s modelem s velkým kartonovým diskem a čtyřmi matičkami jako přídavnými závažími (č. 1)	121
A.20	Výsledky z měření s modelem s velkým kartonovým diskem a čtyřmi matičkami jako přídavnými závažími (č. 2)	121
A.21	Výsledky z měření s modelem s velkým kartonovým diskem a čtyřmi matičkami jako přídavnými závažími (č. 3)	122
A.22	Výsledky z měření s modelem s velkým kartonovým diskem a čtyřmi matičkami jako přídavnými závažími (č. 4)	122
A.23	Výsledky z měření s modelem s velkým kartonovým diskem a čtyřmi matičkami jako přídavnými závažími (č. 5)	122

# A. Přílohy

## A.1 Naměřené hodnoty a zpracování výsledků uvedených a diskutovaných v kapitole 5.2 Huygensovo (cykloidální) kyvadlo

V tabulkách A.1 a A.2 jsou uvedeny naměřené hodnoty 15 period kmitů  $T$  kyvadla zjištěných pomocí analýzy videí v programu *Tracker*. Měření bylo provedeno v případě pohybu kyvadla s cykloidálním zarážkami i bez nich, jako závaží byly použity dvě svázané matičky nebo olovnička. Pokusy byly zaznamenány dvěma fotoaparáty (jeden s rozlišením  $1\,920 \times 1\,080$  px a frekvencí 30 snímků za sekundu, druhý s rozlišením  $480 \times 360$  px a frekvencí 210 snímků za sekundu). Celkem se jedná o 8 videí.

Počáteční výchylky kyvadel byly velké  $5^\circ$ ,  $20^\circ$  a  $45^\circ$ . Vzhledem k tomu, že je velmi těžké vychýlit kyvadlo o přesně definovaný úhel, v případě největší amplitudy se velikost počáteční výchylky může lišit až o  $\pm 5^\circ$ .

Chybu odečítání doby 15 period odhaduji  $\Delta T = 0,033$  s v případě fotoaparátu s menší počtem snímků za sekundu a  $\Delta T = 0,005$  s v případě fotoaparátu s větším počtem snímků za sekundu (tato doba odpovídá časovému úseku mezi dvěma po sobě jdoucími snímky). V tabulkách jsou uvedené i relativní chyby určení těchto hodnot.

Počáteční výchylka	$5^\circ$		$20^\circ$		$45^\circ$	
	15 $T$ [s]	rel. chyba [%]	15 $T$ [s]	rel. chyba [%]	15 $T$ [s]	rel. chyba [%]
Matička (bez zarážky)	14,5812	0,22	14,6480	0,23	15,1151	0,23
Olovnička (bez zarážky)	14,8148	0,22	14,9483	0,22	15,3487	0,22
Matička (se zarážkou)	14,5145	0,23	14,5147	0,23	14,5479	0,23
Olovnička (se zarážkou)	14,9149	0,22	14,9149	0,22	15,0150	0,22

Tabulka A.1: Výsledky měření s fotoaparátem s frekvencí 30 snímků za sekundu

Počáteční výchylka	$5^\circ$		$20^\circ$		$45^\circ$	
	15 $T$ [s]	rel. chyba [%]	15 $T$ [s]	rel. chyba [%]	15 $T$ [s]	rel. chyba [%]
Matička (bez zarážky)	14,5905	0,03	14,6667	0,03	15,0619	0,03
Olovnička (bez zarážky)	14,8048	0,03	14,9000	0,03	15,3286	0,03
Matička (se zarážkou)	14,4948	0,03	14,4971	0,03	14,5524	0,03
Olovnička (se zarážkou)	14,9333	0,03	14,9380	0,03	15,0048	0,03

Tabulka A.2: Výsledky měření s fotoaparátem s frekvencí 210 snímků za sekundu

## A.2 Naměřené hodnoty a zpracování výsledků uvedených a diskutovaných v kapitole 5.3 Machovo kyvadlo

V tabulce A.3 jsou uvedené naměřené hodnoty 10 period kmitů  $T$  pro sklony roviny kmitů  $\alpha = 0^\circ$ ,  $30^\circ$  (resp. 6 period  $T$  pro sklon  $\alpha = 60^\circ$ ) získané pomocí videoanalýzy pokusů v programu *Tracker*. Pokusy jsem natáčela pomocí fotoaparátu s rozlišením  $1\,920 \times 1\,080$  px a frekvencí 30 snímků za sekundu. Pro každý sklon proběhlo 6 měření (celkem 18 videí). Výsledná hodnota periody pohybu kyvadla byla určena jako aritmetický průměr naměřených dat.

Chybu odečítání délky period z videa odhaduji na 0,033 s, což je časový úsek mezi dvěma po sobě jdoucími snímky. Pro jednu periodu z deseti je nepřesnost měření tedy  $\Delta T_{0,30} = 0,0033$  s (resp. pro jednu ze šesti to vychází na  $\Delta T_{60} = 0,0055$  s). Celková chyba měření (na úrovni přesnosti  $\sigma$  ( $P \approx 1$ )) byla určena dle vztahu  $\sqrt{s_{stat}^2 + s_{mer}^2}$  [28], kde  $s_{stat}$  je směrodatná odchylka a  $s_{mer}$  je odhadovaná chyba odečítání délky periody. V tabulce uvádím celkovou chybu měření i relativní chybu měření.

Měření	$\alpha = 0^\circ$		$\alpha = 30^\circ$		$\alpha = 60^\circ$	
	10 $T$ [s]	1 $T$ [s]	10 $T$ [s]	1 $T$ [s]	6 $T$ [s]	1 $T$ [s]
1	7,708	0,7708	7,908	0,7908	5,772	0,9620
2	7,741	0,7741	8,041	0,8041	5,806	0,9677
3	7,774	0,7774	7,941	0,7941	5,873	0,9788
4	7,708	0,7708	8,041	0,8041	5,806	0,9677
5	7,741	0,7741	7,975	0,7975	5,806	0,9677
6	7,741	0,7741	7,941	0,7941	5,739	0,9565
Průměr 1 $T$ [s]	0,7736		0,7975		0,9667	
Celková chyba [s]	0,0047		0,0082		0,0114	
Relativní chyba [%]	0,61		1,02		1,18	

Tabulka A.3: Měření s kartonovým modelem Machova kyvadla

## A.3 Naměřené hodnoty a zpracování výsledků uvedených a diskutovaných v kapitole 5.4 Maxwellovo kyvadlo

Pokusy s modely Maxwellova kyvadla byly zaznamenány pomocí fotoaparátu s rozlišením  $1\,920 \times 1\,080$  px a frekvencí 30 snímků za sekundu. Pro každý z modelů (CD, menší kartonové disky, velký kartonový disk a velký kartonový disk se závažími) bylo měření provedeno pětkrát (celkem 20 videí).

V tabulkách A.4 až A.23 jsou uvedeny naměřené hodnoty výšek  $h_i$  významných poloh těžiště během pohybu různých modelů Maxwellova kyvadla zjištěných pomocí analýzy videí v programu *Tracker* ( $h_0$  značí počáteční polohu,  $h_z$  značí nejnižší polohu a polohy  $h_i$  s indexy  $i \in \{1, 2, 3, \dots\}$  odpovídají zbylým po sobě jdoucím „nejvyšším“ polohám, do kterých těžiště kyvadla vystoupalo). Chybu odečítání polohy z videa odhaduji na  $\Delta h = 0,1$  cm (to je nejmenší dílek použitého skládacího metru, který byl na videu poměrně dobře vidět).

V tabulkách jsou rovněž uvedeny z videoanalýzy naměřené hodnoty času  $t_i$  významných poloh během pohybu kyvadel ( $t_0$  značí čas vypuštění z počáteční polohy,  $t_z$  čas prvního průchodu nejnižší polohou a zbylé indexy časy  $t_i$  s  $i \in \{1, 2, 3, \dots\}$  odpovídají dalším po sobě jdoucím průchodům nejnižší polohou). Chybu odečítání času odhaduji na  $\Delta t = 0,033$  s (to je doba mezi po sobě jdoucími snímky videa).

Dále jsou v tabulkách uvedeny vypočítané délky vzdáleností  $s_i$  (daných vztahem  $s_i = h_z - h_i$ ), „periody“ Maxwellova kyvadla  $T_i$  (pro první hodnotu platí  $T_1 = t_1 - t_z$ , dále už platí obecný vztah  $T_i = t_i - t_{i-1}$ ). Vzhledem k definičním vztahům pro tyto veličiny odhaduji velikosti chyby určení na  $\Delta s = 2\Delta h = 0,2$  cm a  $\Delta T = 2\Delta t = 0,066$  s. V tabulce pak uvádím velikost relativní chyby v procentech.

V tabulce jsou rovněž uvedeny hodnoty relativních energetických ztrát daných vztahem  $\frac{\Delta E}{E_i} = \frac{s_i - s_{i+1}}{s_i}$ . Vzhledem k definičnímu vztahu odpovídá relativní chyba určení těchto hodnot přibližně dvojnásobku relativní chyby určení  $s_i$ .

Poznámka k hodnotám zkoumaných veličin a chybám uvedeným v tabulce 5.4. Jako chybu určení parametru  $a$  (koeficient úměrnosti  $T = a\sqrt{s}$ ) určeného pomocí programu *Wolfram Mathematica* jsem použila směrodatnou odchylku zjištěnou ve stejném programu.

Relativní chyby  $\eta$  experimentálně určeného momentu setrvačnosti  $J$  a teoretické hodnoty  $J_{teor}$  (i jejich celková chyba) byly vypočteny pomocí přenosu relativních chyb použitých veličin  $\eta_J = \sqrt{\sum \eta_k^2}$  [28], kde  $\sum \eta_k^2$  součet druhých mocnin rel. chyb dílčích veličin (hmotnost kyvadla  $m$ , případně i maticek, poloměr disku  $R$ , vzdálenost závaží od osy otáčení  $d$ , parametru  $a$ , průměrná rel. chyba vzdálenosti  $s$  a průměrná rel. chyba periody  $T$ ).

Příznávám, že nepřesnost poloměru špejle daného výrobcí jsem zanedbala, ačkoliv uznávám, že právě tato nepřesnost může mít na výslednou přesnost velký vliv. Pro přesnější měření by bylo vhodnější zvolit jinou osu s průměrem, který bude možno určit dostatečně přesně (např. tenká kovová trubička). Stejně tak by bylo vhodné vztít do úvahy i tloušťku nitě, protože ta při svém namotávání na špejli (resp. odmotáváním se ze špejle) ovlivňuje celkový poloměr hřídele.



$i$	$h_z$ [cm]	$t_i$ [s]	$s_i$ [cm]	Rel. chyba $s_i$ [%]	$T_i$ [s]	Rel. chyba $T_i$ [%]	$\frac{\Delta E}{E_i}$ [%]
0	24,0	0,000	20,2	1,0	–	–	24,3
$z$	44,2	5,339	–	–	–	–	–
1	28,9	14,181	15,3	1,3	8,842	0,7	22,2
2	32,3	22,155	11,9	1,7	7,974	0,8	22,7
3	35,0	29,062	9,2	2,2	6,907	1,0	17,4
4	36,6	35,469	7,6	2,6	6,407	1,0	18,4
5	38,0	41,174	6,2	3,2	5,705	1,2	16,1
6	39,0	46,380	5,2	3,8	5,206	1,3	21,2
7	40,1	50,984	4,1	4,9	4,604	1,4	26,9
8	41,2	55,055	3,0	6,7	4,071	1,6	16,7
9	41,7	58,458	2,5	8,0	3,403	1,9	20,0
10	42,2	61,762	2,0	10,0	3,304	2,0	–

Tabulka A.4: Výsledky z měření s modelem z CD (č. 1)

$i$	$h_z$ [cm]	$t_i$ [s]	$s_i$ [cm]	Rel. chyba $s_i$ [%]	$T_i$ [s]	Rel. chyba $T_i$ [%]	$\frac{\Delta E}{E_i}$ [%]
0	21,1	2,336	23,3	0,9	–	–	27,9
$z$	44,4	7,341	–	–	–	–	–
1	27,6	16,617	16,8	1,2	9,276	0,7	22,6
2	31,4	24,958	13,0	1,5	8,341	0,8	22,3
3	34,3	32,132	10,1	2,0	7,174	0,9	20,8
4	36,4	38,605	8,0	2,5	6,473	1,0	20,0
5	38,0	44,211	6,4	3,1	5,606	1,2	18,8
6	39,2	49,316	5,2	3,8	5,105	1,3	19,2
7	40,2	53,812	4,2	4,8	4,496	1,5	21,4
8	41,1	57,824	3,3	6,1	4,012	1,6	15,2
9	41,6	61,328	2,8	7,1	3,504	1,9	14,3
10	42,0	64,598	2,4	8,3	3,270	2,0	–

Tabulka A.5: Výsledky z měření s modelem z CD (č. 2)

$i$	$h_z$ [cm]	$t_i$ [s]	$s_i$ [cm]	Rel. chyba $s_i$ [%]	$T_i$ [s]	Rel. chyba $T_i$ [%]	$\frac{\Delta E}{E_i}$ [%]
0	20,8	0,934	23,2	0,9	–	–	23,7
$z$	44,0	7,341	–	–	–	–	–
1	26,3	16,617	17,7	1,1	9,877	0,7	22,0
2	30,2	24,985	13,8	1,4	8,808	0,7	22,5
3	33,3	32,132	10,7	1,9	7,775	0,8	20,6
4	35,5	38,605	8,5	2,4	6,907	1,0	21,2
5	37,5	44,211	6,7	3,0	6,206	1,1	17,9
6	38,5	49,316	5,5	3,6	5,539	1,2	16,4
7	39,4	53,812	4,6	4,3	4,805	1,4	17,4
8	40,2	57,824	3,8	5,3	4,471	1,5	15,8
9	40,8	61,328	3,2	6,3	3,937	1,7	21,9
10	41,5	64,598	2,5	8,0	3,470	1,9	–

Tabulka A.6: Výsledky z měření s modelem z CD (č. 3)

$i$	$h_z$ [cm]	$t_i$ [s]	$s_i$ [cm]	Rel. chyba $s_i$ [%]	$T_i$ [s]	Rel. chyba $T_i$ [%]	$\frac{\Delta E}{E_i}$ [%]
0	22,9	1,335	21,3	0,9	–	–	27,23
$z$	44,2	5,572	–	–	–	–	–
1	28,7	14,882	15,5	1,3	9,310	0,7	21,3
2	32,0	22,823	12,2	1,6	7,941	0,8	20,5
3	34,5	30,130	9,7	2,1	7,307	0,9	19,6
4	36,4	36,737	7,8	2,6	6,607	1,0	20,5
5	38,0	42,409	6,2	3,2	5,672	1,2	19,4
6	39,2	47,547	5,0	4,0	5,138	1,3	16,0
7	40,0	52,219	4,2	4,8	4,672	1,4	23,8
8	41,0	56,290	3,2	6,3	4,071	1,6	12,5
9	41,4	60,093	2,8	7,1	3,803	1,7	17,9
10	41,9	63,463	2,3	8,7	3,370	2,0	–

Tabulka A.7: Výsledky z měření s modelem z CD (č. 4)

$i$	$h_z$ [cm]	$t_i$ [s]	$s_i$ [cm]	Rel. chyba $s_i$ [%]	$T_i$ [s]	Rel. chyba $T_i$ [%]	$\frac{\Delta E}{E_i}$ [%]
0	28,5	2,769	15,9	1,3	–	–	23,9
$z$	44,4	6,807	–	–	–	–	–
1	32,3	14,948	12,1	1,7	8,141	0,8	18,2
2	34,5	21,889	9,9	2,0	6,941	1,0	21,2
3	36,6	28,228	7,8	2,6	6,336	1,0	18,0
4	38,0	33,834	6,4	3,1	5,606	1,2	15,6
5	39,0	39,072	5,4	3,7	5,238	1,3	22,2
6	40,2	43,677	4,2	4,8	4,605	1,4	19,0
7	41,0	47,648	3,4	5,9	3,971	1,7	14,7
8	41,5	51,485	2,9	6,9	3,837	1,7	–

Tabulka A.8: Výsledky z měření s modelem z CD (č. 5)

$i$	$h_z$ [cm]	$t_i$ [s]	$s_i$ [cm]	Rel. chyba $s_i$ [%]	$T_i$ [s]	Rel. chyba $T_i$ [%]	$\frac{\Delta E}{E_i}$ [%]
0	20,0	3,036	19,8	1,0	–	–	40,9
$z$	39,8	9,142	–	–	–	–	–
1	28,1	19,753	11,7	1,7	10,611	0,6	28,2
2	31,4	28,259	8,4	2,4	8,506	0,8	26,2
3	33,6	36,069	6,2	3,2	7,810	0,8	22,6
4	35,0	42,476	4,8	4,2	6,407	1,0	20,8
5	36,0	48,081	3,8	5,3	5,605	1,2	36,8
6	37,4	52,786	2,4	8,3	4,705	1,4	16,7
7	37,8	56,990	2,0	10,0	4,204	1,6	25,0
8	38,3	60,460	1,5	13,3	3,470	1,9	33,3
9	38,8	63,363	1,0	20,0	2,903	2,5	20
10	39,0	66,433	0,8	25,0	3,070	2,1	–

Tabulka A.9: Výsledky z měření s modelem s menšími kartonovými disky (č. 1)

$i$	$h_z$ [cm]	$t_i$ [s]	$s_i$ [cm]	Rel. chyba $s_i$ [%]	$T_i$ [s]	Rel. chyba $T_i$ [%]	$\frac{\Delta E}{E_i}$ [%]
0	20,6	1,835	19,2	1,0	–	–	32,8
$z$	39,8	9,176	–	–	–	–	–
1	26,9	20,087	12,9	1,6	10,911	0,6	29,5
2	30,7	29,369	9,1	2,2	9,282	0,7	25,3
3	33,0	37,404	6,8	2,9	8,035	0,8	23,5
4	34,6	44,378	5,2	3,8	6,974	0,9	26,9
5	36,0	50,417	3,8	5,3	6,039	1,1	36,3
6	37,0	55,852	2,8	7,1	5,435	1,2	21,4
7	37,6	60,327	2,2	9,1	4,475	1,5	22,7
8	38,1	64,264	1,7	11,8	3,937	1,7	11,8
9	38,3	67,935	1,5	13,3	3,671	1,8	33,3
10	38,8	70,837	1,0	20,0	2,902	2,3	–

Tabulka A.10: Výsledky z měření s modelem s menšími kartonovými disky (č. 2)

$i$	$h_z$ [cm]	$t_i$ [s]	$s_i$ [cm]	Rel. chyba $s_i$ [%]	$T_i$ [s]	Rel. chyba $T_i$ [%]	$\frac{\Delta E}{E_i}$ [%]
0	13,1	1,969	26,7	0,7	–	–	38,6
$z$	39,8	10,077	–	–	–	–	–
1	23,4	22,689	16,4	1,2	12,612	0,5	31,1
2	28,5	32,996	11,3	1,8	10,307	0,6	27,4
3	31,6	41,642	8,2	2,4	8,646	0,8	23,2
4	33,5	49,349	6,3	3,2	7,707	0,9	23,8
5	35,0	56,056	4,8	4,2	6,707	1,0	31,3
6	36,5	61,695	3,3	6,1	5,639	1,2	15,2
7	37,0	66,967	2,8	7,1	5,272	1,3	32,1
8	37,9	71,405	1,9	10,5	4,438	1,5	26,3
9	38,4	75,309	1,4	14,3	3,904	1,7	14,3
10	38,6	78,445	1,2	16,7	3,136	2,1	–

Tabulka A.11: Výsledky z měření s modelem menšími kartonovými disky (č. 3)

$i$	$h_z$ [cm]	$t_i$ [s]	$s_i$ [cm]	Rel. chyba $s_i$ [%]	$T_i$ [s]	Rel. chyba $T_i$ [%]	$\frac{\Delta E}{E_i}$ [%]
0	21,5	1,401	18,3	1,1	–	–	32,8
$z$	39,8	8,408	–	–	–	–	–
1	27,5	19,253	12,3	1,6	10,845	0,6	26,8
2	30,8	28,595	9,0	2,2	9,342	0,7	24,4
3	33,0	36,703	6,8	2,9	8,108	0,8	27,9
4	34,9	43,744	4,9	4,1	7,041	0,9	22,4
5	36,0	49,883	3,8	5,3	6,139	1,1	23,7
6	36,9	55,322	2,9	6,9	5,439	1,2	20,7
7	37,5	59,860	2,3	8,7	4,538	1,5	21,7
8	38,0	63,931	1,8	11,1	4,071	1,6	22,2
9	38,4	67,367	1,4	14,3	3,436	1,9	35,7
10	38,9	70,671	0,9	22,2	3,304	2,0	–

Tabulka A.12: Výsledky z měření s modelem s menšími kartonovými disky (č. 4)

$i$	$h_z$ [cm]	$t_i$ [s]	$s_i$ [cm]	Rel. chyba $s_i$ [%]	$T_i$ [s]	Rel. chyba $T_i$ [%]	$\frac{\Delta E}{E_i}$ [%]
0	30,6	1,001	9,2	2,2	–	–	26,1
$z$	39,8	6,173	–	–	–	–	–
1	33,0	14,248	6,8	2,9	8,075	0,8	26,5
2	34,8	21,288	5,0	4,0	7,040	0,9	24,0
3	36,0	27,361	3,8	5,3	6,073	1,1	23,7
4	36,9	32,833	2,9	6,9	5,472	1,2	20,7
5	37,5	37,471	2,3	8,7	4,638	1,4	21,7
6	38,0	41,608	1,8	11,1	4,137	1,6	27,8
7	38,5	45,078	1,3	15,4	3,470	1,9	30,8
8	38,9	48,408	0,9	22,2	3,330	2,0	–

Tabulka A.13: Výsledky z měření s modelem s menšími kartonovými disky (č. 5)

$i$	$h_z$ [cm]	$t_i$ [s]	$s_i$ [cm]	Rel. chyba $s_i$ [%]	$T_i$ [s]	Rel. chyba $T_i$ [%]	$\frac{\Delta E}{E_i}$ [%]
0	18,8	0,000	31,1	0,6	–	–	49,2
$z$	49,9	9,042	–	–	–	–	–
1	34,1	22,856	15,8	1,3	13,814	0,5	40,5
2	40,5	33,734	9,4	2,1	10,878	0,6	30,9
3	43,4	42,209	6,5	3,1	8,475	0,8	30,8
4	45,4	49,349	4,5	4,4	7,140	0,9	22,2
5	46,4	55,222	3,5	5,7	5,873	1,1	25,7
6	47,3	60,327	2,6	7,7	5,105	1,3	26,9
7	48,0	64,531	1,9	10,5	4,204	1,6	26,3
8	48,5	68,235	1,4	14,3	3,704	1,8	–

Tabulka A.14: Výsledky z měření s modelem s velkým kartonovým diskem (č. 1)

$i$	$h_z$ [cm]	$t_i$ [s]	$s_i$ [cm]	Rel. chyba $s_i$ [%]	$T_i$ [s]	Rel. chyba $T_i$ [%]	$\frac{\Delta E}{E_i}$ [%]
0	18,0	1,268	31,9	0,6	–	–	49,5
$z$	49,9	11,745	–	–	–	–	–
1	33,8	25,659	16,1	1,2	13,914	0,5	38,5
2	40,0	36,537	9,9	2,0	10,878	0,6	34,3
3	43,4	45,712	6,5	3,1	9,175	0,7	27,7
4	45,2	52,886	4,7	4,3	7,174	0,9	25,5
5	46,4	59,593	3,5	5,7	6,707	1,0	37,1
6	47,7	63,864	2,2	9,1	4,271	1,5	13,6
7	48,0	68,068	1,9	10,5	4,204	1,6	26,3
8	48,5	71,905	1,4	14,3	3,837	1,7	–

Tabulka A.15: Výsledky z měření s modelem s velkým kartonovým diskem (č. 2)

$i$	$h_z$ [cm]	$t_i$ [s]	$s_i$ [cm]	Rel. chyba $s_i$ [%]	$T_i$ [s]	Rel. chyba $T_i$ [%]	$\frac{\Delta E}{E_i}$ [%]
0	19,5	2,603	30,4	0,7	–	–	49,3
$z$	49,9	12,646	–	–	–	–	–
1	34,5	26,560	15,4	1,3	13,914	0,5	39,0
2	40,5	37,437	9,4	2,1	10,877	0,6	31,9
3	43,5	46,580	6,4	3,1	9,143	0,7	28,1
4	45,3	53,754	4,6	4,3	7,174	0,9	30,4
5	46,7	60,494	3,2	6,3	6,740	1,0	40,6
6	48,0	64,865	1,9	10,5	4,371	1,5	15,8
7	48,3	68,969	1,6	12,5	4,104	1,6	–

Tabulka A.16: Výsledky z měření s modelem s velkým kartonovým diskem (č. 3)

$i$	$h_z$ [cm]	$t_i$ [s]	$s_i$ [cm]	Rel. chyba $s_i$ [%]	$T_i$ [s]	Rel. chyba $T_i$ [%]	$\frac{\Delta E}{E_i}$ [%]
0	21,0	2,069	28,9	0,7	–	–	48,1
$z$	49,9	12,779	–	–	–	–	–
1	34,9	26,860	15,0	1,3	14,081	0,5	38,7
2	40,7	37,971	9,2	2,2	11,111	0,6	33,7
3	43,8	46,813	6,1	3,3	8,842	0,7	26,2
4	45,4	53,987	4,5	4,4	7,174	0,9	24,4
5	46,5	60,827	3,4	5,9	6,840	1,0	44,1
6	48,0	65,132	1,9	10,5	4,305	1,5	10,5
7	48,2	69,369	1,7	11,8	4,237	1,6	–

Tabulka A.17: Výsledky z měření s modelem s velkým kartonovým diskem (č. 4)

$i$	$h_z$ [cm]	$t_i$ [s]	$s_i$ [cm]	Rel. chyba $s_i$ [%]	$T_i$ [s]	Rel. chyba $T_i$ [%]	$\frac{\Delta E}{E_i}$ [%]
0	20,0	1,602	29,9	0,7	–	–	48,2
$z$	49,9	12,312	–	–	–	–	–
1	34,4	26,426	15,5	1,3	14,114	0,5	38,7
2	40,4	37,337	9,5	2,1	10,911	0,6	30,5
3	43,3	46,547	6,6	3,0	9,210	0,7	28,8
4	45,2	53,787	4,7	4,3	7,240	0,9	29,8
5	46,6	60,494	3,3	6,1	6,707	1,0	30,3
6	47,6	65,532	2,3	8,7	5,038	1,3	34,8
7	48,4	69,769	1,5	13,3	4,237	1,6	–

Tabulka A.18: Výsledky z měření s modelem s velkým kartonovým diskem (č. 5)

$i$	$h_z$ [cm]	$t_i$ [s]	$s_i$ [cm]	Rel. chyba $s_i$ [%]	$T_i$ [s]	Rel. chyba $T_i$ [%]	$\frac{\Delta E}{E_i}$ [%]
0	20,5	0,968	29,5	0,7	–	–	42,4
$z$	50,0	13,347	–	–	–	–	–
1	33,0	29,963	17,0	1,2	16,616	0,4	35,3
2	39,0	43,176	11,0	1,8	13,213	0,5	38,2
3	43,2	53,887	6,8	2,9	10,711	0,6	17,6
4	44,4	63,163	5,6	3,6	9,276	0,7	25,0
5	45,8	71,438	4,2	4,8	8,275	0,8	28,6
6	47,0	78,746	3,0	6,7	7,308	0,9	10,0
7	47,3	84,585	2,7	7,4	5,839	1,1	25,9
8	48,0	89,723	2,0	10,0	5,138	1,3	–

Tabulka A.19: Výsledky z měření s modelem s velkým kartonovým diskem a čtyřmi matičkami jako přidavnými závažími (č. 1)

$i$	$h_z$ [cm]	$t_i$ [s]	$s_i$ [cm]	Rel. chyba $s_i$ [%]	$T_i$ [s]	Rel. chyba $T_i$ [%]	$\frac{\Delta E}{E_i}$ [%]
0	20,8	1,635	29,2	0,7	–	–	42,5
$z$	50,0	13,747	–	–	–	–	–
1	33,2	30,397	16,8	1,2	16,650	0,4	34,5
2	39,0	43,777	11,0	1,8	13,380	0,5	25,5
3	41,8	54,821	8,2	2,4	11,044	0,6	31,7
4	44,4	64,141	5,6	3,6	9,320	0,7	19,6
5	45,5	72,327	4,5	4,4	8,186	0,8	26,7
6	46,7	79,680	3,3	6,1	7,353	0,9	24,2
7	47,5	85,285	2,5	8,0	5,605	1,2	24,0
8	48,1	90,390	1,9	10,5	5,105	1,3	–

Tabulka A.20: Výsledky z měření s modelem s velkým kartonovým diskem a čtyřmi matičkami jako přidavnými závažími (č. 2)

$i$	$h_z$ [cm]	$t_i$ [s]	$s_i$ [cm]	Rel. chyba $s_i$ [%]	$T_i$ [s]	Rel. chyba $T_i$ [%]	$\frac{\Delta E}{E_i}$ [%]
0	20,0	2,802	30,0	0,7	–	–	43,0
$z$	50,0	14,514	–	–	–	–	–
1	32,9	30,864	17,1	1,2	16,350	0,4	34,5
2	38,8	44,711	11,2	1,8	13,847	0,5	27,7
3	41,9	55,689	8,1	2,5	10,978	0,6	29,6
4	44,3	65,098	5,7	3,5	9,409	0,7	22,8
5	45,6	73,440	4,4	4,5	8,342	0,8	25,0
6	46,7	80,747	3,3	6,1	7,307	0,9	27,3
7	47,6	86,320	2,4	8,3	5,573	1,2	25,0
8	48,2	91,825	1,8	11,1	5,505	1,2	–

Tabulka A.21: Výsledky z měření s modelem s velkým kartonovým diskem a čtyřmi matičkami jako přídatnými závažími (č. 3)

$i$	$h_z$ [cm]	$t_i$ [s]	$s_i$ [cm]	Rel. chyba $s_i$ [%]	$T_i$ [s]	Rel. chyba $T_i$ [%]	$\frac{\Delta E}{E_i}$ [%]
0	14,2	0,834	35,8	0,6	–	–	46,4
$z$	50,0	13,647	–	–	–	–	–
1	30,8	31,064	19,2	1,0	17,417	0,4	33,9
2	37,3	45,879	12,7	1,6	14,815	0,4	30,7
3	41,2	57,524	8,8	2,3	11,645	0,6	27,3
4	43,6	67,801	6,4	3,1	10,277	0,6	25,0
5	45,2	75,842	4,8	4,2	8,041	0,8	27,1
6	46,5	83,116	3,5	5,7	7,274	0,9	22,9
7	47,3	89,022	2,7	7,4	5,906	1,1	18,5
8	47,8	94,295	2,2	9,1	5,273	1,3	–

Tabulka A.22: Výsledky z měření s modelem s velkým kartonovým diskem a čtyřmi matičkami jako přídatnými závažími (č. 4)

$i$	$h_z$ [cm]	$t_i$ [s]	$s_i$ [cm]	Rel. chyba $s_i$ [%]	$T_i$ [s]	Rel. chyba $T_i$ [%]	$\frac{\Delta E}{E_i}$ [%]
0	31,1	0,334	18,9	1,1	–	–	34,9
$z$	50,0	10,010	–	–	–	–	–
1	37,7	23,657	12,3	1,6	13,647	0,5	29,3
2	41,3	35,569	8,7	2,3	11,912	0,6	25,3
3	43,5	46,079	6,5	3,1	10,510	0,6	29,2
4	45,4	54,454	4,6	4,3	8,375	0,8	17,4
5	46,2	61,352	3,8	5,3	6,898	1,0	21,1
6	47,0	67,801	3,0	6,7	6,449	1,0	20,0
7	47,6	73,840	2,4	8,3	6,039	1,1	29,2
8	48,3	78,545	1,7	11,8	4,705	1,4	–

Tabulka A.23: Výsledky z měření s modelem s velkým kartonovým diskem a čtyřmi matičkami jako přídatnými závažími (č. 5)

## B. Přílohy na DVD

Příložené DVD obsahuje následující složky a soubory. DVD bude také k dispozici na Katedře didaktiky fyziky MFF UK v Praze.

### B.1 Videozáznamy k pokusům prezentovaným v kapitole 5.1 Foucaultovo kyvadlo

Ve složce *foucaultovo\_kyvadlo* se nachází videozáznamy (ve formátu *.mp4*) k experimentům uváděným a diskutovaným v kapitole 5.1

Jedná se o pohled na otáčející se model Foucaultova kyvadla z venku (2 videa):

- *foucault\_mimo\_01.mp4*
- *foucault\_mimo\_02.mp4*

Dále se ve složce nachází záznamy natočené mobilním telefonem z horní nosné konstrukce modelu Foucaultova kyvadla v různých přiblíženích (3 videa při otáčení po směru hodinových ručiček a 3 videa při otáčení proti směru hodinových ručiček):

- *foucault\_po\_smeru\_01.mp4*
- *foucault\_po\_smeru\_02.mp4*
- *foucault\_po\_smeru\_03.mp4*
- *foucault\_proti\_smeru\_01.mp4*
- *foucault\_proti\_smeru\_02.mp4*
- *foucault\_proti\_smeru\_03.mp4*

## B.2 Videozáznamy k pokusům prezentovaným v kapitole 5.2 Huygensovo (cykloidální) kyvadlo

Ve složce *huygensovo\_kyvadlo* lze nalézt videozáznamy (ve formátu *.mp4*) k experimentům uváděným a diskutovaným v kapitole 5.2

Jedná se o nahrávky pokusů, během kterých se porovnával pohyb dvou kyvadel s různými amplitudami. Byl sledován pohyb se cykloidálními zarážkami (označení *zarazky*) i bez nich (*bez*). Byly použity dva typy závaží - matičky (*mat*) a olovničky (*olov*). K záznamu byly využity dva fotoaparáty, jeden s frekvencí 30 snímků za sekundu (*30*) a druhý s frekvencí 210 snímků za sekundu (*210*). Celkem 8 videí:

- *srovnani\_zarazky\_mat\_30.mp4*
- *srovnani\_bez\_mat\_30.mp4*
- *srovnani\_zarazky\_olov\_30.mp4*
- *srovnani\_bez\_olov\_30.mp4*
- *srovnani\_zarazky\_mat\_210.mp4*
- *srovnani\_bez\_mat\_210.mp4*
- *srovnani\_zarazky\_olov\_210.mp4*
- *srovnani\_bez\_olov\_210.mp4*

Dále jsou ve složce videozáznamy k měření periody kyvadel při různých počátečních výchylkách. Jednotlivá měření odpovídají výsledkům uvedeným v přílohách v tabulkách A.1 a A.2. Zároveň odpovídají i výsledkům prezentovaným v tabulkách 5.1 a 5.2 v kapitole 5.2

Opět byl sledován pohyb se cykloidálními zarážkami (*zarazky*) i bez nich (*bez*). Byly použity dva typy závaží - matičky (*mat*) a olovničky (*olov*). K záznamu byly využity dva fotoaparáty, jeden s frekvencí 30 snímků za sekundu (*30*) a druhý s frekvencí 210 snímků za sekundu (*210*). Celkem 8 videí:

- *solo\_zarazky\_mat\_30.mp4*
- *solo\_bez\_mat\_30.mp4*
- *solo\_zarazky\_olov\_30.mp4*
- *solo\_bez\_olov\_30.mp4*
- *solo\_zarazky\_mat\_210.mp4*
- *solo\_bez\_mat\_210.mp4*
- *solo\_zarazky\_olov\_210.mp4*
- *solo\_bez\_olov\_210.mp4*



## B.3 Videozáznamy k pokusům prezentovaným v kapitole 5.3 Machovo kyvadlo

Ve složce *machovo\_kyvadlo* lze nalézt videozáznamy (ve formátu *.mp4*) k experimentům uváděným a diskutovaným v kapitole 5.3

Jedná se o videozáznamy k měření periody při různých sklonech osy otáčení  $\alpha$ . Jednotlivá měření odpovídají výsledkům uvedeným v přílohách v tabulce A.3. Zároveň odpovídají i výsledkům prezentovaným v tabulce 5.3 v části 5.3.1.

Pokus byl proveden pro čtyři různé sklony  $\alpha = 0^\circ$  (označení *0*),  $\alpha = 30^\circ$  (označení *30*),  $\alpha = 60^\circ$  (označení *60*) a  $\alpha = 90^\circ$  (označení *90*). Celkem 18 videí:

- *mach\_0\_01*
- *mach\_0\_02*
- *mach\_0\_03*
- *mach\_0\_04*
- *mach\_0\_05*
- *mach\_0\_06*
- *mach\_30\_01*
- *mach\_30\_02*
- *mach\_30\_03*
- *mach\_30\_04*
- *mach\_30\_05*
- *mach\_30\_06*
- *mach\_60\_01*
- *mach\_60\_02*
- *mach\_60\_03*
- *mach\_60\_04*
- *mach\_60\_05*
- *mach\_60\_06*
- *mach\_90\_01*
- *mach\_90\_02*

Dále se ve složce nachází videozáznamy k experimentům s jednoduchým modelem Machova kyvadla (označení *simple*) popsáno v části 5.3.2. Celkem 3 videa:

- *mach\_simple\_01*
- *mach\_simple\_02*
- *mach\_simple\_03*

## B.4 Videozáznamy k pokusům prezentovaným v kapitole 5.4 Maxwellovo kyvadlo

Ve složce *maxwellovo\_kyvadlo* lze nalézt videozáznamy (ve formátu *.mp4*) k experimentům uváděným a diskutovaným v kapitole 5.4. Jedná se o videozáznamy k měření periody různých modelů Maxwellova kyvadla. Jednotlivá měření odpovídají výsledkům uvedeným v přílohách v tabulkách A.4 až A.23. Zároveň odpovídají i výsledkům prezentovaným v tabulce 5.4 a grafech 5.7 a 5.8 v kapitole 5.4.

Byly použity čtyři typy modelů. První vyrobený z CD (označení *CD*), druhý s menšími kartonovými disky (*maly*), třetí s velkým kartonovým diskem (*velky*) a čtvrtý s matičkami jako přídatnými závažími (*zavazi*). Celkem 20 videí:

- *max\_cd\_01*
- *max\_cd\_02*
- *max\_cd\_03*
- *max\_cd\_04*
- *max\_cd\_05*
- *max\_maly\_01*
- *max\_maly\_02*
- *max\_maly\_03*
- *max\_maly\_04*
- *max\_maly\_05*
- *max\_velky\_01*
- *max\_velky\_02*
- *max\_velky\_03*
- *max\_velky\_04*
- *max\_velky\_05*
- *max\_zavazi\_01*
- *max\_zavazi\_02*
- *max\_zavazi\_03*
- *max\_zavazi\_04*
- *max\_zavazi\_05*