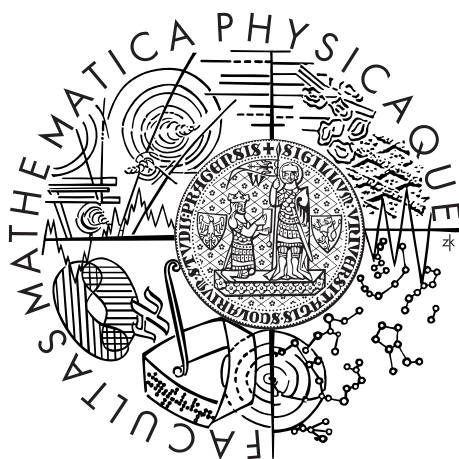


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Jan Došek

Nahrazování singularit ve statických prostoročasech

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Tomáš Ledvinka, Ph.D.

Studijní program: Fyzika (B1701)

Studijní obor: FOF (1701R026)

Praha 2021

Zde bych rád vyjádřil poděkování mému vedoucímu, Mgr. Tomášovi Ledvinkovi Ph.D., který trpělivě odpovídal na mé časté dotazy a vždy byl ochotný mi pomoci s řešením jak teoretických, tak technických problémů, jež se při psaní této práce vyskytly. Též bych rád poděkoval učitelce Ing. Evě Kospachové, která ve mne na gymnáziu probudila dřímající zájem o fyziku. V neposlední řadě děkuji mé rodině a mé přítelkyni za to, že mi v těchto absurdních časech poskytli psychologickou podporu. Bez nich bych tuto práci nedokončil.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Název práce: Nahrazování singularit ve statických prostoročasech

Autor: Jan Došek

Katedra: Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Tomáš Ledvinka, Ph.D., Ústav teoretické fyziky

Abstrakt: Tato bakalářská práce se zabývá možností použití variačního principu při hledání vnitřních řešení nahrazujících singularity ve statických prostoročasech. Problematiku nejdříve představuje na jednoduchém případě klasické Newtonovy gravitace, kde objasňuje její praktickou aplikaci na několika jednoduchých příkladech symetrických potenciálů, a následně se teorii snaží zobecnit pro Einsteinovu teorii gravitace. Ukáže se, že zde by mohla problematika volně souviset s tzv. kvadratickou gravitací, neboť vnitřní řešení je hledáno jako minimizér funkcionálu složeného z kvadrátů Ricciho tenzoru, Weylova tenzoru a skalární křivosti. Následně se ověří, že nově předložená teorie v newtonovské limitě přechází zpět na klasickou. Nakonec se práce zabývá použitím této teorie k nalezení vnitřního řešení nahrazujícího singularitu ve Schwarzschildově prostoročasu a diskutuje jeho vlastnosti.

Klíčová slova: Obecná relativita, Einsteinovy rovnice, Energetické podmínky

Title: Replacement of singularities in static spacetimes

Author: Jan Došek

Department: Institute of Theoretical Physics

Supervisor: Mgr. Tomáš Ledvinka, Ph.D., Institute of Theoretical Physics

Abstract: This bachelor thesis deals with the possibility of using the variational principle in the search for internal solutions replacing singularities in static spacetimes. In the first instance, the thesis introduces the problematics on the simple case of classical Newton's gravity, where it also shows its practical application on several simple examples of symmetric potentials, and then it tries to generalize the theory for Einstein's gravity. It turns out that the relativistic problem could be loosely related to the so-called quadratic gravity as the internal solution is being found as a minimizer of a functional composed of quadrates of the Ricci tensor, the Weyl tensor and scalar curvature. Subsequently, it is verified that the newly presented theory in the newtonian limit yields the same results as the classical one. Finally, the thesis deals with the use of this theory to find an internal solution replacing the singularity in Schwarzschild spacetime and discusses its properties.

Keywords: General relativity, Einstein equations, Energy conditions

Obsah

Úvod	3
1 Nahrazování singularit v Newtonově teorii gravitace	5
1.1 Variační formulace problému	6
1.2 Nahrazení singularity ve sféricky symetrickém potenciálu	7
1.3 Nahrazování singularit v axiálně symetrických potenciálech	9
1.3.1 Potenciál dvou bodů na ose	9
1.3.2 Potenciál homogenní úsečky	10
1.3.3 Potenciál homogenní kružnice	12
2 Einsteinovy rovnice gravitačního pole a jejich řešení	14
2.1 Tenzor energie a hybnosti, energetické podmínky	15
2.2 Weylovy souřadnice	16
2.3 Izotropní souřadnice	18
2.4 Schwarzschildovo řešení	18
2.5 Curzonovo řešení	19
3 Nahrazování singularit ve vakuových řešeních Einsteinových polních rovnic	21
3.1 Nahrazení singularity v Curzonově řešení	21
3.2 Nahrazení singularity ve Schwarzschildově řešení v izotropních souřadnicích	25
3.3 Nahrazení singularity ve Schwarzschildově řešení ve Weylových souřadnicích	27
4 Použití variačních principů při nahrazování singularit	30
4.1 Einstein-Hilbertova akce	30
4.2 Variační přístup k nahrazování singularit v Einsteinově teorii gravitace	31
4.3 Newtonovská limita variačních rovnic	33
5 Aplikace variačního přístupu na Schwarzschildovu metriku	37
5.1 Variační rovnice v izotropních souřadnicích	37
5.2 Newtonovská a post-newtonovská analýza	39
5.3 Pseudospektrální metoda řešení obyčejných diferenciálních rovnic	42
5.4 Různá vnitřní řešení pro Schwarzschildovu externí metriku	43
Závěr	46

Seznam použité literatury	48
A Výpočty v programu Mathematica	50
A.1 Výpočet Einsteinova tenzoru a jeho vlastních čísel pro Weylovu metriku	50
A.2 Výpočet Einsteinova tenzoru, kvadrátů křivostních invariantů a Euler-Lagrangeových rovnic v izotropních souřadnicích	51
A.3 Řešení variačních rovnic spektrální metodou	52

Úvod

Einsteinovy rovnice gravitačního pole byly objeveny již před více než sto lety a stále představují dosud nejpřesnější známou teorii gravitace. Gravitační interakci již nepopisují jako záhadnou, těžko definovatelnou a na dálku působící sílu jako Newtonova teorie gravitace, ale jako projev zakřivení časoprostoru. Časoprostor deformují všechna hmotná tělesa. Ta se v něm pak pohybují po nejrovnějších možných drahách - geodetikách. Geometrie časoprostoru tak určuje, jakým způsobem se v něm mají pohybovat všechny zdroje gravitačního pole, zatímco pozměněné rozložení zdrojů určuje, jak se má časoprostor zakřivit. Z tohoto důvodu se obecné teorii relativity občas říká geometrodynamika.

Matematicky je geometrie časoprostoru popsána symetrickým metrickým tenzorem $g_{\mu\nu}$. Einsteinovy rovnice pak jsou systémem deseti parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu pro deset těchto metrických koeficientů $g_{\mu\nu}$ a představují teorii gravitace, jejíž polní rovnice zároveň určují pohyb zdrojů. I díky tomu jsou ale jednotlivé rovnice v soustavě úzce provázané a silně nelineární. Její analytické vyřešení je proto ve většině případů nemožné, nebo přinejmenším velmi složité. Přesná analytická řešení zahrnující realistické zdroje pak lze najít jen pro hrstku jednoduchých specifických případů.

I když jsou společně s neustále rostoucím výpočetním výkonem moderních počítačů k dispozici stále silnější numerické metody řešící například strukturu neutronových hvězd nebo srážky černých děr, přesná řešení vždy hrála a stále hrají důležitou roli. Mnoho astrofyzikálních dějů se například odehrává na pozadí Kerrova řešení, zatímco na kosmologických škálách se ke zkoumání vlastností, historie a budoucnosti vesmíru používá FLRW metrika. První takovéto přesné analytické řešení našel pro sféricky symetrické gravitační pole Karl Schwarzschild v roce 1916. Jedná se o jedno z třídy řešení zvané Weylovy prostoročasy, z nichž jen právě Schwarzschildovo řešení má jasný význam Schwarzschildovy černé díry, resp. pole vně sféricky symetrické hvězdy.

Vakuové Weylovy prostoročasy obsahují matematické singularity, které představují jak singularity křivostní, tak horizonty. Je obecně známo, že Schwarzschildovo řešení má křivostní singularitu v počátku a horizont událostí na poloměru $r_s = 2M$, kde M je hmotnost prostoročasu. Ve Weylových souřadnicích se ale objeví jen horizont, neboť křivostní singularita se nachází pod ním, tedy v oblasti, která není v těchto souřadnicích pokryta. Přesná analýza charakteru singularit některých řešení z Weylovy třídy byla podána až v nedávné době.

Weylovy prostoročasy ale mohou představovat i vnější gravitační pole statických axiálně symetrických objektů. Jednou z možností je nahradit vnitřní část vakuového řešení obsahující singularitu jinou metrikou a následně zkoumat, jaké jsou vlastnosti příslušného zdroje. Ten je charakterizován tenzorem energie a hybnosti, jehož podobu je možné určit z Einsteinových polních rovnic. Z něj lze

následně dopočítat hustotu a rozložení hlavních tlaků uvnitř objektu. Diskusí energetických podmínek je též možné zjistit, za jakých podmínek tenzor energie a hybnosti představuje fyzikálně realistické těleso.

Při pokusech o aplikaci tohoto postupu ale doposud vždy byly využívány metody závislé na volbě souřadnic, což je v rozporu s jedním z základních principů obecné teorie relativity - s principem obecné kovariance. Několik takových pokusů je diskutováno v práci [1], která v závěru zároveň upozorňuje na nejednoznačnost použitých přístupů a na potřebu formulovat úlohu navazování vnitřních řešení tak, aby co nejméně závisela na volbě souřadnic. Tato bakalářská práce se pokouší o odstranění těchto nedostatků tím, že se věnuje možnosti nalézt vnitřní metriku jako řešení variační úlohy. Výhoda použití variačního principu spočívá v možnosti zkoumat problematiku velmi obecně a právě v nezávislosti řešení na volbě souřadnicového systému.

Kapitola 1

Nahrazování singularit v Newtonově teorii gravitace

Se singularitami se setkáváme již při studiu klasické Newtonovy teorie gravitace. Je například známo, že netriviální vakuový sféricky symetrický potenciál, který odpovídá poli hmotného bodu, je v počátku singulární. Tento fakt nám tedy umožňuje si problematiku nahrazování singularit předtím, než přistoupíme k práci se složitými rovnicemi obecné teorie relativity, ilustrovat v rámci relativně jednoduché lineární newtonovské gravitace. V této kapitole budeme vycházet z bakalářské práce Matúše Papajčíka [1].

V klasické teorii gravitace používáme k popisu gravitačního pole skalární potenciál $\Phi = \Phi(\vec{x})$, který vyhovuje polní rovnici

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho, \quad (1.1)$$

kde $\rho = \rho(\vec{x})$ popisuje rozložení hustoty hmoty v prostoru. Najít řešení této rovnice s obecnou pravou stranou je komplikované, a často nelze vyjádřit analyticky, ale jen jako konvoluce pravé strany s Greenovou funkcí, případně numericky.

Je zřejmé, že v oblastech mimo zdroje platí Laplaceova rovnice

$$\Delta\Phi = 0. \quad (1.2)$$

Pracujeme-li s prostorem zcela bez zdrojů, je hledání globálního řešení této rovnice mnohem jednodušší než v případě Poissonovy rovnice (1.1), zvláště pokud na potenciál Φ klademe požadavek vhodné symetrie. Nevýhodou je, že toto řešení typicky v bodech, osách či rovinách symetrie obsahuje singularitu. Taková řešení tedy nejsou fyzikálně realistická, neboť intenzita gravitačního pole $\vec{K} = -\nabla\Phi$ dosahuje na okolí těchto singularit nekonečných hodnot.

Tento problém můžeme vyřešit tím, že singulární potenciál ve vhodné oblasti Ω zahrnující všechny singularitu nahradíme vhodným potenciálem s regulárním průběhem. Tento nový potenciál už samozřejmě nebude vyhovovat Laplaceově rovnici (1.2), nicméně bude odpovídat nějakému rozložení hmoty $\rho(\vec{x})$ danému rovnicí (1.1). Vnitřní potenciál přitom musí na hranici zvolené oblasti spojitě navazovat na původní vnější řešení, a to včetně první normálové derivace. Nespojitosť v normálové derivaci by se totiž projevila přítomností plošného rozložení hmoty na hranici, což v praxi neodpovídá příliš fyzikálně realistické situaci. V rámci této práce se tedy budeme zabývat pouze prostorovým rozložením zdrojů.

Výše zmíněným postupem tedy nalezneme těleso, které vně svých hranic budí původní řešení rovnice (1.2), zatímco uvnitř potenciál všude nabývá regulárních hodnot. Je zřejmé, že uvedené podmínky spojitosti neurčují vnitřní potenciál, a tedy ani rozložení hmoty v tělese, zdaleka jednoznačně. Teoreticky můžeme vnější potenciál regularizovat za pomoci nejrůznějších funkcí v nejrůznějších souřadnicích, za podmínky, že hustota je v celém objemu tělesa nezáporná. My nicméně chceme problém řešit invariantně vzhledem ke zvoleným souřadnicím, symetriím i tvaru oblasti Ω . Úlohu je proto žádoucí formulovat variačně, tj. hledat vnitřní řešení jako minimizér vhodného funkcionálu.

1.1 Variační formulace problému

V práci [1] se pracuje s funkcionálem

$$\mathcal{A}[w] = \int_{\Omega} (\Delta w)^2 dV, \quad (1.3)$$

kde funkce w je z množiny

$$W = \{w \in C^4(\bar{\Omega}), w = f \text{ na } \partial\Omega, \partial_{\vec{n}}w = g \text{ na } \partial\Omega\}, \quad (1.4)$$

přičemž f zadává hodnoty potenciálu na hranici oblasti Ω a g hodnoty jeho normálových derivací. Volba tohoto funkcionálu je přirozená, neboť je tvořen kvadrátem Laplaceova operátoru, který je, přesně jak jsme požadovali, invariantní, a obsahuje druhé derivace, díky čemuž lze na hranici Ω zadat funkční hodnoty i hodnoty normálových derivací. Kvadratický funkcionál zajistí, že jeho variací získáme lineární Euler-Lagrangeovu rovnici.

Vnitřní potenciál u nalezneme jako minimizér funkcionálu (1.3), tedy by mělo platit

$$\mathcal{A}[u] = \min_{w \in X} \mathcal{A}[w]. \quad (1.5)$$

Hledaný minimizér musí splňovat variační princip $\delta\mathcal{A} = 0$. Variací funkcionálu (1.3) získáme příslušnou Euler-Lagrangeovu rovnici jako

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{A} &= \int_{\Omega} \delta(\Delta w)^2 dV = 2 \int_{\Omega} \Delta w \delta(\Delta w) dV = 2 \int_{\Omega} \Delta w \Delta(\delta w) dV = \\ &= 2 \int_{\Omega} \Delta^2 w \delta w dV + 2 \int_{\partial\Omega} [\Delta w \partial_{\vec{n}}(\delta w) - \delta w \partial_{\vec{n}}(\Delta w)] d\vec{S} = \\ &= 2 \int_{\Omega} \Delta^2 w \delta w dV = 0, \end{aligned}$$

kde na druhém řádku jsme použili druhou Greenovu identitu a na třetím jsme využili faktu, že δw a $\partial_{\vec{n}}(\delta w)$ jsou na hranici nulové. Úloha (1.5) je tedy zřejmě ekvivalentní bi-Laplaceově úloze s Dirichletovými hraničními podmínkami

$$\begin{cases} \Delta^2 u = 0 & \text{v } \Omega, \\ u = f & \text{na } \partial\Omega, \\ \partial_{\vec{n}}u = g & \text{na } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.6)$$

Kompletní rigorózní důkaz tohoto tvrzení lze nalézt v práci [1].

Nyní je již vidět, proč je funkcionál volen právě ve tvaru (1.3). O úloze (1.6), která vyplývá z jeho minimalizace, je totiž známo, že její řešení vždy existuje a je jednoznačné, což je dokázáno v článku [2]. Z Teoremu 2.19 v monografii [3] navíc vyplývá, že je vždy regulární.

Je známo, že pro axiálně symetrické případy ve sférických souřadnicích řeší úlohu (1.6) kombinace funkcí $r^l P_l(\cos \theta)$ a $r^{l+2} P_l(\cos \theta)$, kde P_l jsou Legendreovy polynomy a $l \in \mathbb{N}_0$. Toho můžeme využít při regularizaci různých axiálně symetrických potenciálů, včetně speciálního sféricky symetrického případu, chceme-li oblast se singularitami nahradit koulí o poloměru a .

Obecně osově symetrické řešení úlohy (1.6) ve sférických souřadnicích můžeme zapsat jako

$$\Phi_{\text{in}}(r, \theta) = -GM \sum_{l=0}^{\infty} [A_l f_l(r) + B_l g_l(r)] P_l(\cos \theta), \quad (1.7)$$

kde M je celková hmotnost zdroje a funkce f_l a g_l jsou bázové funkce tvaru

$$\begin{aligned} f_l(r) &= \alpha r^l + \beta r^{l+2}, \\ g_l(r) &= \gamma r^l + \delta r^{l+2}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

na které jsou kladeny požadavky plynoucí z okrajových podmínek

$$\begin{aligned} f(a) &= 1, \quad f'(a) = 0, \\ g(a) &= 0, \quad g'(a) = 1. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Jejich splněním dostaneme bázové funkce v konečném tvaru

$$\begin{aligned} f_l(r) &= -\frac{r^l (lr^2 - a^2(l+2))}{2a^{l+2}}, \\ g_l(r) &= \frac{(r^2 - a^2)r^l}{2a^{l+1}}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Ještě zbývá nalézt posloupnosti A_l , B_l . Ty jsou pro každý typ potenciálu různé. Koeficienty A_l určíme hraničním porovnáním rozvoju (1.7) a rozvoje vnějšího řešení obecného tvaru

$$\Phi_{\text{out}}(r, \theta) = -G \sum_{l=0}^{\infty} M_l \frac{P_l(\cos \theta)}{r^{l+1}}. \quad (1.11)$$

Koeficienty B_l zjistíme porovnáním derivací (1.7) a (1.11).

1.2 Nahrazení singularity ve sféricky symetrickém potenciálu

Nejjednodušším netriviálním potenciálem, jenž splňuje rovnici (1.2), je sféricky symetrický potenciál daný předpisem

$$\Phi_{\text{out}}(r) = -G \frac{M}{r}. \quad (1.12)$$

Singularitu v počátku nyní nahradíme koulí o poloměru a dle výše sepsaného postupu. Rozvoj (1.11) má zjevně nenulový pouze člen odpovídající $l = 0$. Z rozvoje

(1.7) tedy též zbude pouze člen $l = 0$ a vnitřní potenciál tak hledáme v jednoduchém tvaru

$$\Phi_{\text{in}}(r) = A + B \frac{r^2 - a^2}{2a}, \quad (1.13)$$

neboť $P_0(\cos \theta) = 1$.

Konstanty A a B nalezneme porovnáním funkčních hodnot a derivací vnějšího a vnitřního řešení na hranici. Dostáváme

$$\Phi_{\text{in}}(a) = A = -G \frac{M}{a} = \Phi_{\text{out}}(a), \quad (1.14)$$

$$\Phi'_{\text{in}}(a) = B = G \frac{M}{a^2} = \Phi'_{\text{out}}(a). \quad (1.15)$$

Získáváme tedy vnitřní řešení ve tvaru

$$\Phi_{\text{in}}(r) = GM \frac{r^2 - 3a^2}{2a^3}. \quad (1.16)$$

Získaný vnitřní potenciál dosadíme do rovnice (1.1), čímž zjistíme, že hustota je v celém objemu koule konstantní a má hodnotu

$$\rho(r) = \rho_0 = \frac{3M}{4\pi a^3}. \quad (1.17)$$

Ze znalosti průběhu potenciálu ještě můžeme dopočítat závislost tlaku na vzdálenosti od středu koule. Využijeme k tomu rovnici hydrostatické rovnováhy

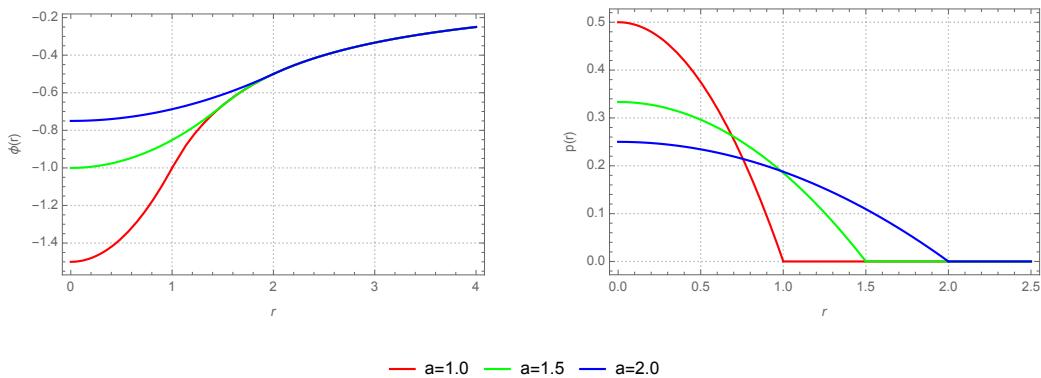
$$\frac{dp(r)}{dr} = -\frac{d\Phi(r)}{dr} \rho(r), \quad (1.18)$$

která lze jednoduše integrovat, čímž dostaneme

$$p(r) = -\int \frac{d\Phi}{dr} \rho(r) dr = -\int \frac{3GM^2}{4\pi a^6} r dr = -\frac{3GM^2}{8\pi a^6} r^2 + C. \quad (1.19)$$

Integrační konstantu C určíme z požadavku na nulový tlak na povrchu koule jako

$$C = \frac{3GM^2}{8\pi a^4}. \quad (1.20)$$



Obrázek 1.1: Průběh potenciálů (vlevo) a tlaků (vpravo) pro různé poloměry koule ($G = M = 1$).

Průběh tlaku v kouli tedy zřejmě popisuje funkce

$$p(r) = \frac{3GM^2}{8\pi a^6}(a^2 - r^2). \quad (1.21)$$

Na obrázku 1.1 jsou vykresleny průběhy potenciálu a tlaku pro různě velké koule jednotkové hmotnosti.

1.3 Nahrazování singularit v axiálně symetrických potenciálech

Papajčík v práci [1] ještě diskutuje případ axiálně symetrického potenciálu generovaného dvěma hmotnými body na ose. My zde tuto diskusi rozšíříme o případy dvou dalších válcově symetrických potenciálů — totiž o případ potenciálu buzeného homogenní úsečkou a homogenní kružnicí. Tyto potenciály vždy nejdříve předepíšeme ve válcových souřadnicích (R, ϑ, z) , přičemž následně budeme hledat jejich rozvoj (1.11) ve sférických souřadnicích (r, θ, φ) .

1.3.1 Potenciál dvou bodů na ose

Uvažujme dva hmotné body o hmotnosti M umístěné na ose z v bodech $z = 1$ a $z = -1$. Gravitační potenciál tohoto systému má tvar

$$\Phi_{\text{out}}(R, z) = -GM \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + (z+1)^2}} + \frac{1}{\sqrt{R^2 + (z-1)^2}} \right). \quad (1.22)$$

Singularity se nacházejí v bodech $z = 1$ a $z = -1$, proto potenciál budeme nahrazovat v oblasti ve tvaru koule se středem v počátku a poloměrem $a > 1$.

Rozvoj potenciálu (1.22) můžeme bez újmy na obecnosti hledat jen na poloze $z, z > 0$, kde souřadnice z hraje stejnou roli jako souřadnice r . Potom

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{out}}(0, z) &= -GM \left(\frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1} \right) = \\ &= -\frac{GM}{z} \left[\left(1 + \frac{1}{z}\right)^{-1} + \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{-1} \right] = \\ &= -\frac{GM}{z} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^l}{z^l} = -GM \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^l}{z^{l+1}}. \end{aligned}$$

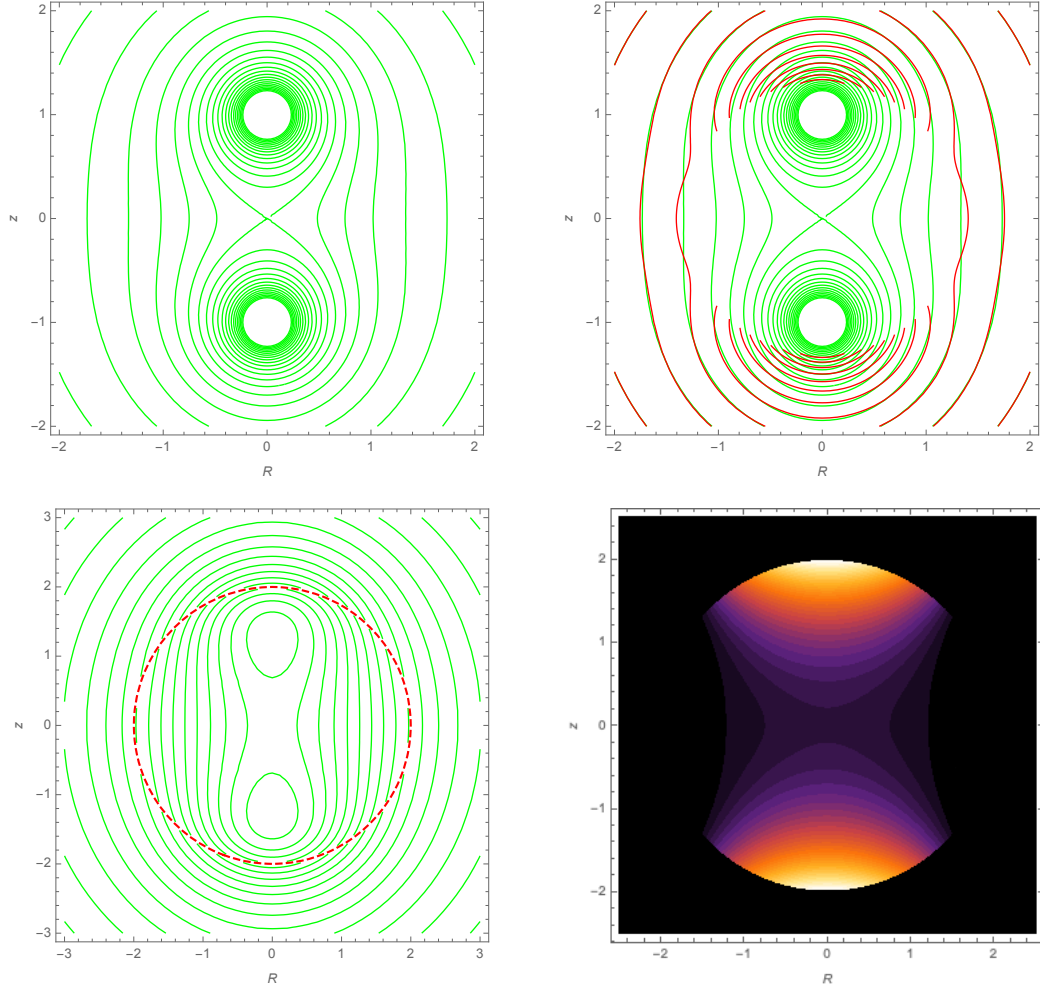
Plný rozvoj (1.11) pak zřejmě bude mít tvar

$$\Phi_{\text{out}}(r, \theta) = -GM \sum_{l=0}^{\infty} [1 + (-1)^l] \frac{P_l(\cos \theta)}{r^{l+1}}. \quad (1.23)$$

Porovnáním tohoto rozvoje s obecným rozvojem (1.7) a jejich derivací na hranici získáme posloupnosti koeficientů A_l, B_l ve tvaru

$$A_l = \frac{1 + (-1)^l}{a^{l+1}}, \quad B_l = -\frac{(l+1)(1 + (-1)^l)}{a^{l+2}}. \quad (1.24)$$

Nyní z rovnice (1.1) můžeme získat prostorové rozložení hmoty $\rho(\vec{x})$. Průběh hustoty příslušný prvním šesti členům rozvoje vnitřního řešení byl vypočten v programu Mathematica. Ten pro případ $a = 2$ naleznete na obrázku 1.2, stejně jako graf potenciálu (1.22), jeho multipólový rozvoj (1.23) a jeho regularizaci.



Obrázek 1.2: Přesný potenciál buzený dvěma hmotnými body na ose (vlevo nahoře), jeho multipólový rozvoj (vpravo nahoře), jeho regularizace (vlevo dole) a příslušné rozložení hmoty (vpravo dole). Singulární oblast byla nahrazena koulí o poloměru $a = 2$. Rozvoje obsahují členy až do $l = 5$.

1.3.2 Potenciál homogenní úsečky

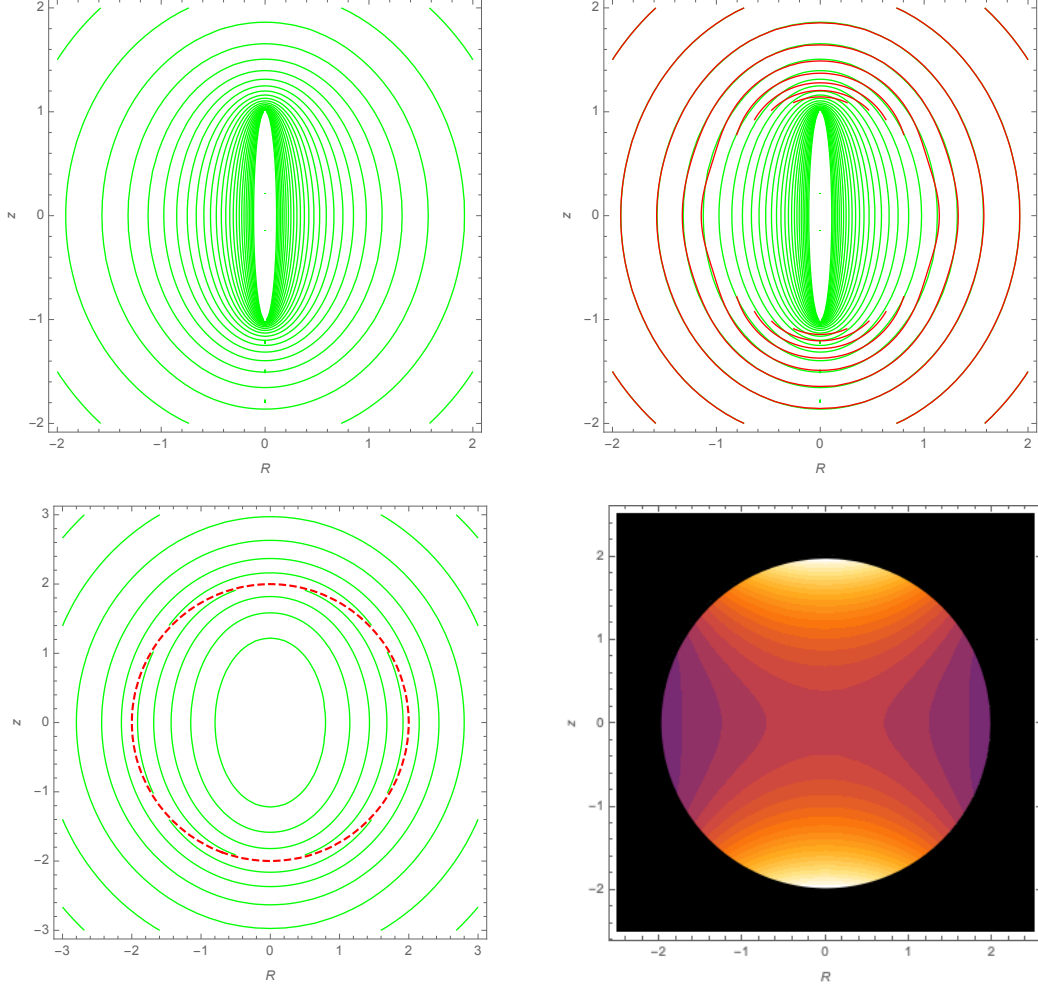
Dále se budeme zabývat polem buzeným homogenní úsečkou umístěnou na ose z mezi body $z = 1$ a $z = -1$. Potenciál buzený tímto objektem je v cylindrických souřadnicích dán předpisem

$$\Phi_{\text{out}}(R, z) = -\frac{GM}{2} \ln \frac{z + 1 + \sqrt{R^2 + (z + 1)^2}}{z - 1 + \sqrt{R^2 + (z - 1)^2}}. \quad (1.25)$$

Na okolí této úsečky je potenciál zjevně singulární, regulární potenciál proto opět budeme hledat v oblasti tvaru koule se středem v počátku o poloměru $a > 1$.

Obdobně jako v předchozím případě provedeme na poloose z , $z > 0$ multipólový rozvoj

$$\Phi_{\text{out}}(r, \theta) = -\frac{GM}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^l}{l+1} \frac{P_l(\cos \theta)}{r^{l+1}}. \quad (1.26)$$



Obrázek 1.3: Přesný potenciál buzený homogenní úsečkou (vlevo nahoře), jeho multipólový rozvoj (vpravo nahoře), jeho regularizace (vlevo dole) a příslušné rozložení hmoty (vpravo dole). Singulární oblast byla nahrazena koulí o poloměru $a = 2$. Rozvoje obsahují členy až do $l = 5$.

Porovnáním obecného řešení bi-Laplaceovy rovnice (1.7) s právě nalezeným rozvojem na $r = a$ odečteme koeficienty A_l , B_l jako

$$A_l = -\frac{1 + (-1)^l}{2(l+1)a^{l+1}}, \quad B_l = \frac{1 + (-1)^l}{2a^{l+2}}. \quad (1.27)$$

Z prvních šesti členů tohoto rozvoje jsme za pomoci rovnice (1.1) v programu Mathematica spočetli příslušné rozložení hustoty, které je znázorněno na obrázku 1.3.

1.3.3 Potenciál homogenní kružnice

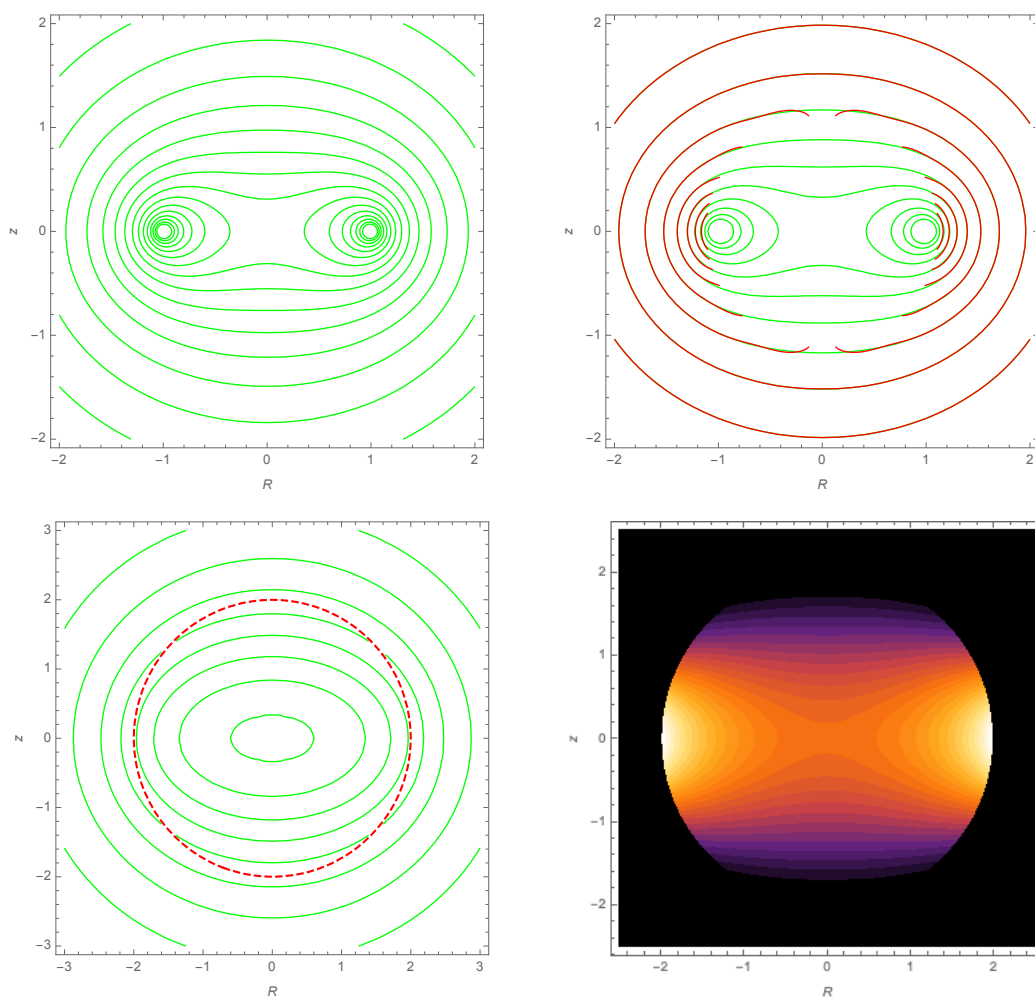
Nakonec se podívejme na případ pole homogenní kružnice o jednotkovém poloměru se středem v počátku a položené v rovině $z = 0$. Potenciál tentokrát bez použití tzv. eliptických integrálů nedokážeme vyjádřit analyticky, ale jen ve tvaru integrálu jako

$$\Phi_{\text{out}}(r, \theta, \varphi) = -GM \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{r^2 + 1 - 2r \sin \theta \cos(\alpha - \varphi)}}. \quad (1.28)$$

Nahrazování potenciálu budeme i zde provádět ve stejné oblasti jako v předchozích dvou případech.

Na ose z , tj. pro $\theta = 0$, $\varphi = 0$, $r = z$, lze potenciál (1.28) vyjádřit analyticky jako

$$\Phi_{\text{out}}(z) = -\frac{GM}{\sqrt{z^2 + 1}}. \quad (1.29)$$



Obrázek 1.4: Přesný potenciál buzený homogenní kružnicí jednotkového poloměru získaný numerickou integrací výrazu (1.28) (vlevo nahoře), jeho multipólový rozvoj (vpravo nahoře), jeho regularizace (vlevo dole) a příslušné rozložení hustoty (vpravo dole). Singulární oblast byla nahrazena koulí o poloměru $a = 2$. Rozvoje obsahují prvních šest nenulových členů.

Toho můžeme využít při hledání multipólového rozvoje

$$\Phi_{\text{out}}(r, \theta) = -GM \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{(2l-1)!!}{2^l l!} \frac{P_{2l}(\cos \theta)}{r^{2l+1}}, \quad (1.30)$$

z něhož odečteme posloupnosti koeficientů A_l , B_l z obecného řešení (1.7) jako

$$A_{2l} = (-1)^l \frac{(2l-1)!!}{2^l l!} \frac{1}{a^{2l+1}}, \quad B_{2l} = (-1)^{l+1} \frac{(2l-1)!!}{2^l l!} \frac{2l+1}{a^{2(l+1)}},$$

přičemž $A_{2l+1} = B_{2l+1} = 0$.

Na obrázku 1.4 je vykreslen průběh potenciálu (1.28), jehož číselné hodnoty byly v programu Mathematica dopočteny numerickou integrací. Z prvních šesti nenulových členů rozvoje regularizovaného potenciálu bylo v programu Mathematica z rovnice (1.1) dopočteno odpovídající rozložení zdrojů $\rho(\vec{x})$, jehož graf je rovněž součástí obrázku 1.4.

Kapitola 2

Einsteinovy rovnice gravitačního pole a jejich řešení

Odteď dále budeme pracovat s tzv. geometrickou soustavou jednotek, ve které pokládáme gravitační konstantu a rychlost světla rovny jedné, tj. $G = c = 1$.

V obecné teorii relativity je gravitační pole popisováno pomocí symetrického metrického tenzoru $g_{\mu\nu}$. Ten vyhovuje Einsteinovým polním rovnicím

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

kde $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$ je Einsteinův tenzor ($R_{\mu\nu}$ je Ricciho tenzor křivosti a $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ je skalární křivost) a $T_{\mu\nu}$ je tenzor energie a hybnosti. Levá strana rovnice skrz křivost časoprostoru popisuje gravitační působení, zatímco pravá strana popisuje rozložení zdrojů. Rovnice (2.1) ve skutečnosti obecně obsahuje deset nelineárních parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu pro deset metrických funkcí $g_{\mu\nu}$. V případech, kdy je na prostoročas kladen požadavek jistých symetrií, je však počet netriviálních metrických funkcí a jim odpovídajících nezávislých rovnic zpravidla nižší.

Vyřešit tyto rovnice je pro jejich nelinearitu velmi obtížné. Gravitační pole na levé straně určuje pohyb zdrojů, zatímco odlišné rozložení zdrojů vybudí odlišné gravitační pole. Systém (2.1) se tak vyznačuje velmi silnou zpětnou vazbou. Pro případ statických řešení nicméně můžeme postupovat podobně jako v kapitole 1, tedy nejdříve vzít vakuové řešení

$$G_{\mu\nu} = 0, \quad (2.2)$$

kteří typicky, podobně jako u newtonovské gravitace, bude obsahovat singularity, a ty následně v rámci vhodně zvolené prostoročasové oblasti Ω nahradit regulárními metrickými funkcemi tak, aby určitým způsobem spojitě navazovaly na vnější řešení (2.2). Metrickým funkcím uvnitř oblasti Ω pak bude dle rovnice (2.1) odpovídat jisté rozložení zdrojů $T_{\mu\nu}$. Tímto způsobem nalezneme zdroje generující vnější vakuovou metriku splňující (2.2).

V této kapitole se nejdříve blíže seznámíme se zdrojovou částí Einsteinových rovnic gravitačního pole (2.1), tedy s tenzorem energie a hybnosti $T_{\mu\nu}$. Dále si představíme vhodné souřadnice pro popis sféricky a axiálně symetrických prostoročasů. Nakonec si v těchto souřadnicích představíme dvě jednoduchá statická vakuová řešení Einsteinových polních rovnic (2.1).

2.1 Tenzor energie a hybnosti, energetické podmínky

Každé částici pohybující se po světočáře v časoprostoru může být přiřazen čtyř-vektor hybnosti. Pohybuje-li se prostoročasem mnoho různých částic po mnoha různých světočárách, pak na ně v dobrém přiblížení můžeme hledět jako na kontinuum s určitým tokem čtyř-hybnosti. Tento tok může být vyjádřen pomocí symetrického tenzoru energie a hybnosti $T_{\mu\nu}$. Tato fyzikální veličina tedy zřejmě popisuje hustotu a tok energie a hybnosti — tedy zdrojů gravitačního pole — v časoprostoru. Tenzor energie a hybnosti má pro různé typy zdrojů různý tvar.

Typem látky, který se při relativistických úvahách nejčastěji uvažuje, je ideální kapalina v termodynamické rovnováze, která je poměrně dobrým modelem pro popis látky ve hvězdách. Pohybuje-li se ideální tekutina časoprostorem se čtyř-rychlostí u_μ , která se může měnit od časoprostorové události k události, pak jí příslušející tenzor energie a hybnosti má tvar

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

kde ρ je její hustota energie-hmotnosti a p je její tlak. Tlak musí v klidové soustavě každého elementárního objemu kapaliny působit izotropně, jinak by se nejednalo o ideální kapalinu.

Einsteinova teorie gravitace sama o sobě na tenzor energie a hybnosti, krom jeho symetričnosti, neklade žádná omezení. Z řešení rovnic (2.1) bychom tak teoreticky mohli získat tenzor $T_{\mu\nu}$, který by popisoval látku v nefyzikálních stavech. Do teorie je tedy vhodné a nutné přidat podmínky, které by měl realistický tenzor energie a hybnosti splňovat. Jedním typem takových podmínek jsou tzv. energetické podmínky. V učebnici [4] se při jejich odvozování vychází z tzv. Raychaudhuriho rovnice, která se ukazuje jako klíčová při dokazování známých Hawkingových-Penroseových teorémů o singularitách. V té se objevuje výraz

$$R_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu = 8\pi\left(T_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu + \frac{1}{2}T\right), \quad (2.4)$$

který se nazývá Raychaudhuriho skalár a má význam slapového působení v látce, kde člen $T_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu$ reprezentuje hustotu hmoty-energie naměřenou pozorovatelem se čtyř-rychlostí ξ^μ . Pro případ klasické baryonové látky je rozumné předpokládat, že tato veličina by měla být pro všechny pozorovatele nezáporná. Tento předpoklad je znám jako tzv. slabá energetická podmínka

$$T_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu \geq 0, \quad (2.5)$$

která by měla být splněna pro všechny jednotkové časupodobné čtyř-vektory ξ^μ . Z fyzikálního hlediska se ale zdá též rozumné předpokládat, že napětí a tlaky v látce nebudou nikdy tak velké a záporné, že by závorka na pravé straně rovnice (2.4) byla záporná. Z této úvahy získáváme tzv. silnou energetickou podmínku

$$T_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu \geq -\frac{1}{2}T, \quad (2.6)$$

která by měla opět být splněna pro všechny jednotkové časupodobné ξ^μ .

Další podmínkou, kterou učebnice [4] uvádí, je tzv. dominantní energetická podmínka, o které se předpokládá, že je platná pro všechnu fyzikálně realistickou látku. Ta říká, že pro každý časupodobný do budoucnosti orientovaný čtyř-vektor ξ^μ by čtyř-vektor $-T^\mu{}_\nu \xi^\nu$ měl být rovněž časupodobný a do budoucnosti orientovaný, nebo světelný. Fyzikální význam této podmínky je, že rychlost toku energie je vždy menší nebo rovna rychlosti světla. Zde je vhodné poznamenat, že z dominantní energetické podmínky vyplývá slabá energetická podmínka.

Všechny výše zmíněné energetické podmínky je možné formulovat ekvivalentně, pokud se nám podaří tenzor energie a hybnosti diagonalizovat, tj. pokud se nám podaří nalézt bázi, ve které ho lze zapsat jako

$$T_{\mu\nu} = \rho t_\mu t_\nu + p_1 x_\mu x_\nu + p_2 y_\mu y_\nu + p_3 z_\mu z_\nu, \quad (2.7)$$

kde čtyř-vektory $\{t^\mu, x^\mu, y^\mu, z^\mu\}$ tvoří ortonormální bázi a t^μ je časupodobný. Vlastní číslo ρ zde může být interpretováno jako hustota klidové hmoty-energie látky, zatímco vlastní hodnoty p_1, p_2 a p_3 představují tzv. hlavní tlaky. Předpokládá se, že všechny tenzory $T_{\mu\nu}$ popisující fyzikálně realistickou látku, jsou diagonalizovatelné (s výjimkou případu tzv. “světelné tekutiny”). Tvar tenzoru $T_{\mu\nu}$ (2.7) nyní můžeme dosadit do vztahů pro energetické podmínky, čímž získáme jejich ekvivalentní formulaci. Slabá energetická podmínka je pak splněna právě tehdy, když

$$\rho \geq 0 \quad \text{a} \quad \rho + p_i \geq 0, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (2.8)$$

a silná energetická podmínka platí, pokud

$$\rho + \sum_{i=1}^3 p_i \geq 0 \quad \text{a} \quad \rho + p_i \geq 0, \quad i \in \{1, 2, 3\}. \quad (2.9)$$

Obě podmínky budou tedy splněny pouze tehdy, pokud bude $\rho \geq 0$ a zároveň v látce nebudou působit záporné tlaky (napětí) velikostí srovnatelné s hustotou ρ nebo větší. Nakonec podmínka

$$\rho \geq \|p_i\|, \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (2.10)$$

je ekvivalentní dominantní energetické podmínce.

2.2 Weylovy souřadnice

Weylovy souřadnice $\{t, \rho, z, \phi\}$ jsou souřadnice vhodné k popisování vakuových statických axiálně symetrických prostoročasů. Takovéto prostoročasy jsou obecně popsány metrikou

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\zeta-2\nu} (d\rho^2 + dz^2) + e^{-2\nu} \rho^2 d\phi^2, \quad (2.11)$$

kde funkce ν a ζ jsou závislé na Weylových kanonických souřadnicích $\{\rho, z\}$.

V publikaci [5] je ukázáno, že dosazením tohoto tvaru metriky do vakuových Einsteinových rovnic (2.2) získáme pro metrické funkce ν a ζ podmínky

$$\Delta\nu = 0, \quad (2.12a)$$

$$\zeta_{,\rho} = \rho \left((\nu_{,\rho})^2 - (\nu_{,z})^2 \right), \quad (2.12b)$$

$$\zeta_{,z} = 2\rho\nu_{,\rho\nu_{,z}}, \quad (2.12c)$$

$$\zeta_{,\rho\rho} + \zeta_{,zz} = -(\nabla\nu)^2, \quad (2.12d)$$

kde $\Delta\nu = \nu_{,\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\nu_{,\rho} + \nu_{,zz}$. Obecný postup řešení této soustavy je jednoduchý. Nejdříve nalezneme funkci ν jako řešení Laplaceovy rovnice (2.12a). Tuto funkci následně dosadíme do rovnice (2.12b), resp. (2.12c), a integrujeme podle ρ , resp. podle z , čímž nalezneme funkci ζ . Rovnice (2.12d) je pak splněna identicky.

Weylovu metriku (2.11) můžeme za pomoci transformace $\rho = r \sin \theta$, $z = r \cos \theta$ vyjádřit ve sférických souřadnicích $\{t, r, \theta, \phi\}$, ve kterých má pak tvar

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\zeta-2\nu} (dr^2 + r^2 d\theta^2) + r^2 \sin^2 \theta e^{-2\nu} d\phi^2, \quad (2.13)$$

kde funkce ν a ζ jsou nyní závislé na souřadnicích $\{r, \theta\}$. Obecné asymptoticky ploché axisymetrické řešení soustavy rovnic (2.12) lze dostatečně daleko od centra v těchto souřadnicích dle [6] vyjádřit ve tvaru řad jako

$$\nu = - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}}, \quad (2.14a)$$

$$\zeta = - \sum_{l,m=0}^{\infty} a_l a_m \frac{(l+1)(m+1) P_l(\cos \theta) P_m(\cos \theta) - P_{l+1}(\cos \theta) P_{m+1}(\cos \theta)}{l+m+2 r^{l+m+2}}, \quad (2.14b)$$

kde $P_n(\cos \theta)$ označuje Legendreovy polynomy.

Chceme-li ve Weylově prostoročasu popsáném metrikou (2.13) znát rozložení zdrojů, musíme spočítat jemu příslušející tenzor energie a hybnosti $T_{\mu\nu}$, resp. Einsteinův tenzor $G_{\mu\nu}$. Jeho složky lze spočítat za pomoci programu z přílohy A.1. Tímto dostaneme

$$G_t^t = K [\zeta_{,\theta\theta} - 2\nu_{,\theta\theta} + r^2 \zeta_{,rr} - 2r^2 \nu_{,rr} + \nu_{,\theta}^2 - 2\nu_{,\theta} \cot \theta + r^2 \nu_{,r}^2 + r \zeta_{,r} - 4r \nu_{,r}] = 8\pi T_t^t, \quad (2.15a)$$

$$G_r^r = K [\nu_{,\theta}^2 - \zeta_{,\theta} \cot \theta + r (\zeta_{,r} - r \nu_{,r}^2)] = 8\pi T_r^r, \quad (2.15b)$$

$$G_r^\theta = \frac{K}{r} [\zeta_{,\theta} + r \zeta_{,r} \cot \theta - 2r \nu_{,\theta} \nu_{,r}] = 8\pi T_r^\theta, \quad (2.15c)$$

$$G_\theta^r = r K [\zeta_{,\theta} + r \zeta_{,r} \cot \theta - 2r \nu_{,\theta} \nu_{,r}] = 8\pi T_\theta^r, \quad (2.15d)$$

$$G_\theta^\theta = K [\zeta_{,\theta} \cot \theta - \nu_{,\theta}^2 - r (\zeta_{,r} - r \nu_{,r}^2)] = 8\pi T_\theta^\theta, \quad (2.15e)$$

$$G_\phi^\phi = K [\zeta_{,\theta\theta} + \nu_{,\theta}^2 + r (\zeta_{,r} + r (\zeta_{,rr} + \nu_{,r}^2))] = 8\pi T_\phi^\phi, \quad (2.15f)$$

kde jsme označili

$$K = \frac{e^{2\nu-2\zeta}}{r^2}. \quad (2.16)$$

Ostatní složky jsou nulové.

Hustotu a tlaky v tělese budící příslušný prostoročas pak až na konstantu 8π nalezneme jako vlastní čísla Einsteinova tenzoru $G_{\mu\nu}$. Pro Weylovu metriku

(2.13) tato vlastní čísla jsou

$$-\rho = T_t^t, \quad (2.17a)$$

$$p_\phi = T_\phi^\phi, \quad (2.17b)$$

$$\begin{aligned} p_+ &= \frac{1}{2} \left(T_r^r + T_\theta^\theta + \sqrt{(T_r^r - T_\theta^\theta)^2 + 4T_r^\theta T_\theta^r} \right) \\ &= K \sqrt{(\zeta_{,\theta} + r\zeta_{,r} \cot \theta - 2r\nu_{,\theta}\nu_{,r})^2 + \left(-\zeta_{,\theta} \cot \theta + \nu_{,\theta}^2 + r(\zeta_{,r} - r\nu_{,r}^2) \right)^2}, \end{aligned} \quad (2.17c)$$

$$p_- = \frac{1}{2} \left(T_r^r + T_\theta^\theta - \sqrt{(T_r^r - T_\theta^\theta)^2 + 4T_r^\theta T_\theta^r} \right) = -p_+, \quad (2.17d)$$

neboť $G_r^r = -G_\theta^\theta$. Je vidět, že jeden z tlaků v tělese musí nutně být záporný (krom speciálního případu $p_+ = p_- = 0$). V knize [5] se ukazuje, že tato vlastnost je dána volbou (2.11), která byla učiněna za předpokladu $G_{\mu\nu} = 0$ a souřadnice nejsou dostatečně obecné pro popis gravitačního pole uvnitř tělesa.

2.3 Izotropní souřadnice

Izotropní souřadnice jsou takové souřadnice, že v nich metrický tenzor popisující konformně plochý prostoročas má tvar

$$ds^2 = \alpha^2(\tilde{r})dt^2 + \psi^4(\tilde{r})d\Sigma^2, \quad (2.18)$$

kde $d\Sigma^2 = d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\theta^2 + \tilde{r}^2 \sin^2 \theta d\phi^2$ je euklidovská metrika zapsaná ve sférických souřadnicích. Je vidět, že v izotropních souřadnicích je se všemi prostorovými souřadnicemi zacházeno stejně, jsou proto vhodné pro popisování sféricky symetrických prostoročasů.

Rozložení zdrojů je v izotropních souřadnicích popsáno diagonálním Einsteinovým tenzorem se složkami

$$G_t^t = \frac{4\tilde{r}\psi'' + 8\psi'}{\tilde{r}\psi^5} = 8\pi T_t^t, \quad (2.19a)$$

$$G_{\tilde{r}}^{\tilde{r}} = \frac{4\alpha\psi'(\psi + \tilde{r}\psi') + 2\alpha'\psi(\psi + 2\tilde{r}\psi')}{\tilde{r}\alpha\psi^6} = 8\pi T_{\tilde{r}}^{\tilde{r}}, \quad (2.19b)$$

$$G_\theta^\theta = \frac{\alpha'\psi^2 + 2\alpha\psi\psi' - 2\tilde{r}\alpha\psi'^2 + \tilde{r}\psi(\alpha''\psi + 2\alpha\psi'')}{\tilde{r}\alpha\psi^6} = 8\pi T_\theta^\theta, \quad (2.19c)$$

$$G_\phi^\phi = G_\theta^\theta = 8\pi T_\phi^\phi, \quad (2.19d)$$

kde čárky značí derivaci podle souřadnice \tilde{r} . Složky $G_{\mu\nu}$ byly vypočteny v programu z přílohy A.2.

2.4 Schwarzschildovo řešení

Nejjednodušším netriviálním a zároveň prvním objeveným vakuovým řešením rovnic (2.1) je Schwarzschildův prostoročas popsáný Schwarzschildovou metrikou

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.20)$$

kde M je hmotnost prostoročasu. Jedná se o statické sféricky symetrické řešení singularní v počátku (singularita v $r = 2M$ lze odtransformovat přechodem do vhodných souřadnic).

Metriku (2.20) je výhodné převést do izotropních souřadnic. Porovnáním radiálních částí metrik (2.18) a (2.20) zjistíme, že mezi souřadnicemi r a \tilde{r} musí platit vztah

$$\frac{d\tilde{r}}{\tilde{r}} = \frac{dr}{\sqrt{r^2 - 2Mr}}. \quad (2.21)$$

Jeho integrací za pomoci Eulerovy substituce a z asymptotického požadavku $r \sim \tilde{r}$ dostáváme transformaci

$$r = \tilde{r} \left(1 + \frac{M}{2\tilde{r}} \right)^2. \quad (2.22)$$

Odtud již lze jednoduše získat tvar funkcí α^2 a ψ^4 pro Schwarzschildovu metriku jako

$$\alpha^2(\tilde{r}) = \left(\frac{2\tilde{r} - M}{2\tilde{r} + M} \right)^2, \quad \psi^4(\tilde{r}) = \left(1 + \frac{M}{2\tilde{r}} \right)^4. \quad (2.23)$$

Dosazením těchto funkcí do Einsteinova tenzoru (2.19) lze ověřit, že je skutečně splněna rovnice (2.2).

V příští kapitole budeme pracovat i se Schwarzschildovou metrikou transformovanou do Weylových souřadnic. V nich je dle [5] popsáno pomocí metrických funkcí

$$\nu = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{R_+ + R_- - 2M}{R_+ + R_- + 2M} \right), \quad (2.24a)$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(R_+ + R_-)^2 - 4M^2}{4R_+R_-} \right), \quad (2.24b)$$

kde jsme označili

$$R_{\pm}^2 = \rho^2 + (z \pm M)^2. \quad (2.25)$$

Ve sférických souřadnicích pak máme

$$e^{2\nu} = \frac{\sqrt{M^2 + 2Mr \cos \theta + r^2} + \sqrt{M^2 - 2Mr \cos \theta + r^2} - 2M}{\sqrt{M^2 + 2Mr \cos \theta + r^2} + \sqrt{M^2 - 2Mr \cos \theta + r^2} + 2M}, \quad (2.26a)$$

$$e^{2\zeta} = \frac{r^2 - M^2 + \sqrt{(M^2 + r^2)^2 - 4M^2r^2 \cos^2 \theta}}{2\sqrt{(M^2 + r^2)^2 - 4M^2r^2 \cos^2 \theta}}. \quad (2.26b)$$

2.5 Curzonovo řešení

Nyní si ještě představíme nejjednodušší řešení vakuových polních rovnic (2.12) pro Weylovu metriku. V kapitole 1 jsme se seznámili se sféricky symetrickým řešením řešením Laplaceovy rovnice (2.12a), které odpovídá poli hmotného bodu

$$\nu = -\frac{m}{r}. \quad (2.27)$$

Dosazením této metrické funkce do (2.12b) a (2.12c) a jejich vyřešením získáme i druhou metrickou funkci

$$\zeta = -\frac{m^2}{2r^2} \sin^2 \theta. \quad (2.28)$$

Kladná konstanta m zde odpovídá hmotnosti prostoročasu. Weylova metrika (2.13) s metrickými funkcemi (2.27) a (2.28) se nazývá Curzonova metrika.

Kapitola 3

Nahrazování singularit ve vakuových řešeních Einsteinových polních rovnic

Na začátku kapitoly 2 jsme si vysvětlili, jakým způsobem lze nahrazovat singularitu ve statických vakuových řešeních polních rovnic (2.2). Podobně jako v newtonovském případě, i zde máme velkou volnost ve volbě vnitřních metrických funkcí. Jedinou nutnou podmínkou je, že na hranici zvolené oblasti musí mít vnitřní i vnější řešení stejnou geometrii. Není proto zcela jasné, jakým způsobem nahrazování provádět tak, aby byl zdroj odpovídající vnitřnímu řešení fyzikálně realistický. Nyní se budeme zabývat několika heuristickými pokusy o nahrazení singularit v Curzonově a Schwarzschildově metrice. Rigoróznějšímu přístupu k problematice se budeme věnovat v další kapitole.

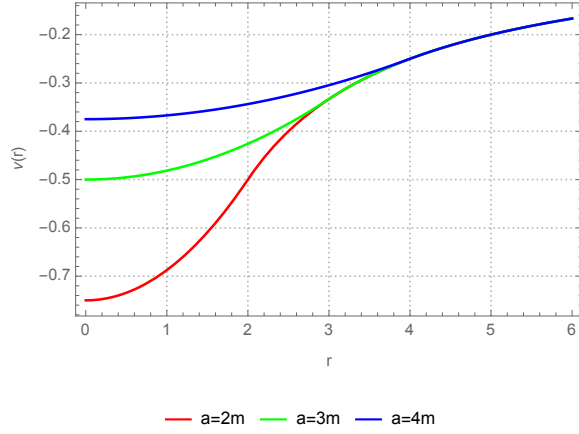
3.1 Nahrazení singularity v Curzonově řešení

V této sekci si představíme výsledky Bonnorova článku [7] o vnitřních řešeních pro Curzonovu metriku. Bonnor v článku uvažuje nekonečnou sadu vnitřních řešení

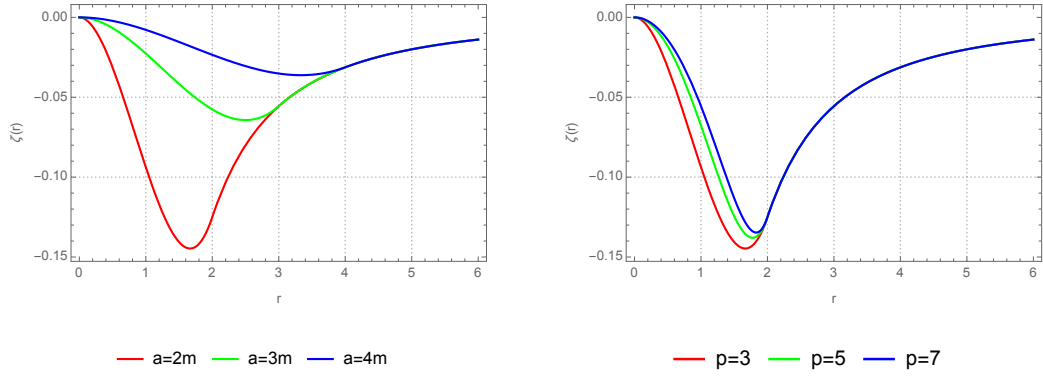
$$\nu = \frac{m}{2a} \left[\left(\frac{r}{a} \right)^2 - 3 \right], \quad (3.1a)$$

$$\zeta = -\frac{1}{2(p-2)} \left(\frac{mr}{a^2} \right)^2 \left[(p+2) - 4 \left(\frac{r}{a} \right)^{p-2} \right] \sin^2 \theta, \quad (3.1b)$$

kde $p \in \mathbb{N}$, $p > 2$ a a je kladná konstanta. Hranice vnitřní oblasti je dána podmínkou $r = a$. Kladná konstanta m hraje roli hmotnosti zdroje. Složky metrického tenzoru $g_{\mu\nu}$ a jejich první derivace jsou všude, včetně hranice, spojité. Metrická funkce ζ a její derivace podle r jsou v počátku nulové a na jeho okolí jsou dle [7] nadplochy $t = konst$ konformně ploché. Řešení (3.1) je tedy pro všechna $p \in \mathbb{N}$ regulární. Grafy metrických funkcí ν a ζ pro různá a a p jsou na obrázcích 3.1 a 3.2.



Obrázek 3.1: Průběh metrické funkce ν pro různé poloměry navázání a .



Obrázek 3.2: Průběh metrické funkce ζ pro $\theta = \frac{\pi}{2}$ pro různé poloměry navázání a a $p = 3$ (vlevo) a pro různá $p \in \mathbb{N}$ s poloměrem navázání $a = 2m$ (vpravo).

Dosazením metrických funkcí ν , ζ do rovnic (2.15) získáme tenzor energie a hybnosti. Dále z rovnic (2.17) získáme jeho vlastní hodnoty

$$\mu = \mathcal{C} \left(2\Delta\nu - \zeta_{,\rho\rho} - \zeta_{,zz} - \nu_{,\rho}^2 - \nu_{,z}^2 \right), \quad (3.2a)$$

$$s_1 = \mathcal{C} \sqrt{\left(\nu_{,\rho}^2 - \nu_{,z}^2 - \frac{\zeta_{,\rho}}{\rho} \right)^2 + \left(2\nu_{,\rho}\nu_{,z} - \frac{\zeta_{,z}}{\rho} \right)^2}, \quad (3.2b)$$

$$s_2 = -s_1, \quad (3.2c)$$

$$s_3 = \mathcal{C} \left(\zeta_{,\rho\rho} + \zeta_{,zz} + \nu_{,\rho}^2 + \nu_{,z}^2 \right), \quad (3.2d)$$

kde μ označuje hustotu, s_i , $i \in \{1, 2, 3\}$ jsou hlavní tlaky, Δ je Laplaceův operátor v cylindrických souřadnicích a

$$\mathcal{C} = \frac{e^{2\nu-2\zeta}}{8\pi}. \quad (3.3)$$

Zavedeme-li nyní pro vnitřní řešení značení

$$\beta = \frac{m}{a}, \quad x = \frac{r}{a}, \quad (3.4)$$

kde $\beta > 0$ a $x \in (0, 1)$, pak lze hustotu (3.2a) přepsat jako

$$\mu = \frac{\mathcal{C}\beta}{a^2} \left[6 + \beta \frac{p+2}{p-2} - \beta x^2 H \right], \quad (3.5)$$

kde

$$H = 1 + 2x^{p-4} \left[\frac{(p^2 - 1) - (p^2 - 4) \cos^2 \theta}{p - 2} \right]. \quad (3.6)$$

Je vidět, že pro dané p nabývá H nejvyšší možné hodnoty, když $x = 1$ a $\cos \theta = 0$, tj. $\theta = \frac{\pi}{2}$. Hustota μ je tedy nejnižší na povrchu tělesa na rovníku a její hodnota je

$$\mu_{\min} = \frac{6\mathcal{C}\beta}{a^2} \left(1 - \frac{p+2}{3} \beta \right). \quad (3.7)$$

Aby řešení splňovalo slabou energetickou podmínku (2.8), musí být hustota μ_{\min} nezáporná. Musí tedy platit

$$a \geq \frac{p+2}{3} m. \quad (3.8)$$

Pro nejmenší možné $p = 3$ je tedy nejmenší možný poloměr tělesa $a = \frac{5}{3}m$.

Bonnor dále omezuje minimální velikost tělesa použitím dominantních energetické podmínky (2.10). Vzhledem k tomu, že $s_2 = -s_1$, stačí, když budou splněny následující vztahy

$$\mu + s_1 \geq 0, \quad (3.9a)$$

$$\mu - s_1 \geq 0, \quad (3.9b)$$

$$\mu + s_3 \geq 0, \quad (3.9c)$$

$$\mu - s_3 \geq 0. \quad (3.9d)$$

Podmínky (3.9a) a (3.9c) jsou splněny vždy, z podmínky (3.9d) získáváme

$$a \geq \frac{2(p+2)}{3} m, \quad (3.10)$$

neboť

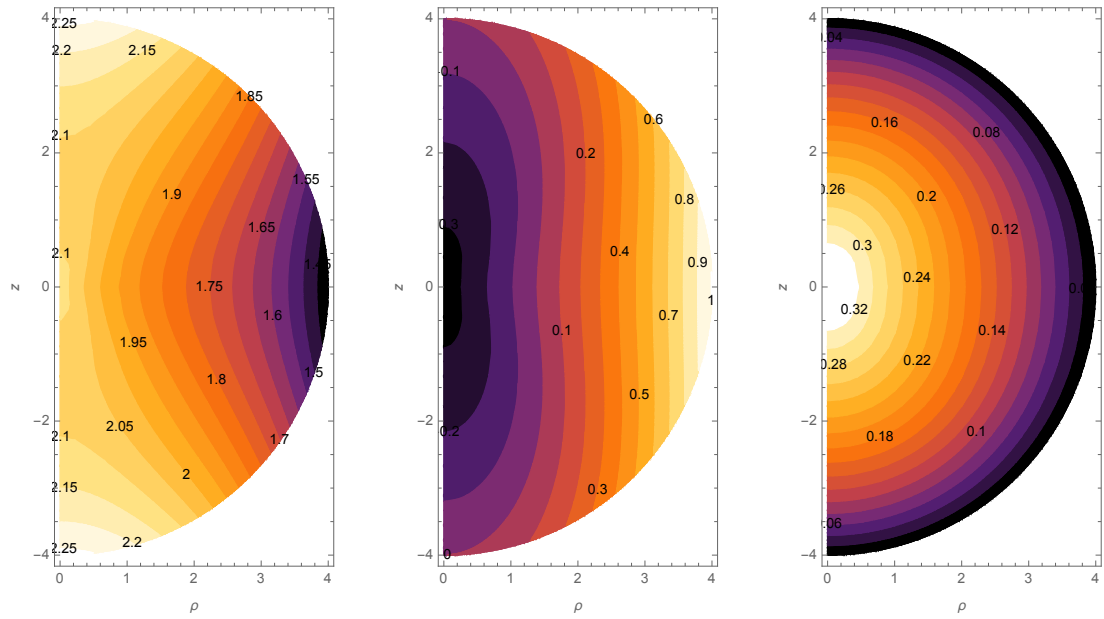
$$(\mu - s_3)_{\min} \geq \frac{6\mathcal{C}\beta}{a^2} \left(1 - \frac{2\beta(p+2)}{3} \right). \quad (3.11)$$

Zbývá podmínka (3.9b), kterou se nepodařilo pro obecné p vyřešit. Minimální rozměr tělesa určený z dominantních energetických podmínek je tedy (nejméně) dvojnásobný oproti (3.8).

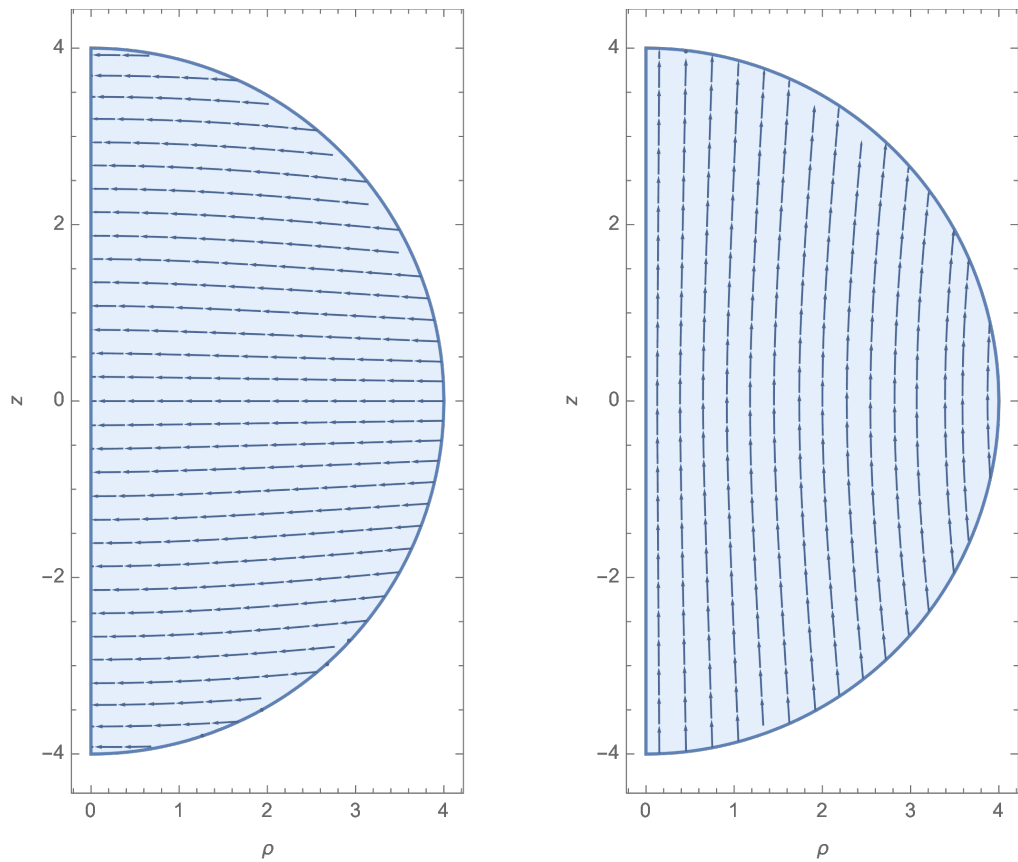
Je zajímavé dopočítat kontravariantní složky vlastních vektorů tenzoru energie a hybnosti, tj. vektorů w^μ , které vyhovují rovnici

$$T^\nu{}_\mu w^\mu = \lambda w^\mu, \quad \lambda = -\mu, s_1, s_2, s_3. \quad (3.12)$$

Ty lze znázornit jako “siločáry” hlavních směrů tlaků, jejichž rozložení je znázorněno na obrázku 3.3. Vlastní vektor hustoty μ míří ve směru t , tedy má složky $(1, 0, 0, 0)$, zatímco vlastní vektor tlaku s_3 míří ve směru ϕ , tj. jeho složky jsou $(0, 0, 0, 1)$. Vlastních vektorů odpovídající tlakům s_1 a s_2 jsou již netriviální a jejich průběh je vykreslen na obrázku 3.4.



Obrázek 3.3: Hustota μ (vlevo), úhlový tlak s_3 (uprostřed) a hlavní tlak s_1 (vpravo) odpovídající vnitřnímu řešení (3.1) s parametry $p = 3$, $a = 4m$. Kótoování je pro větší přehlednost násobeno faktorem $\frac{10^3}{8\pi}$.



Obrázek 3.4: Siločáry tlaků s_1 a s_2 pro vnitřní řešení (3.1) s parametry $p = 3$ a $a = 4m$.

3.2 Nahrazení singularity ve Schwarzschildově řešení v izotropních souřadnicích

Nyní se budeme věnovat nahrazení singularity ve Schwarzschildově řešení v izotropních souřadnicích představených v podkapitole 2.3. Vnitřní řešení budeme hledat uvnitř koule o poloměru $\tilde{r} = \tilde{a}$. Regularitu vnitřního řešení zajistí například volba metrických funkcí ve tvaru

$$\alpha(\tilde{r}) = \begin{cases} A\tilde{r}^n + B, & \tilde{r} \leq \tilde{a} \\ \frac{2\tilde{r}-M}{2\tilde{r}+M}, & \tilde{r} > \tilde{a} \end{cases} \quad (3.13a)$$

$$\psi(\tilde{r}) = \begin{cases} C\tilde{r}^n + D, & \tilde{r} \leq \tilde{a} \\ 1 + \frac{M}{2\tilde{r}}, & \tilde{r} > \tilde{a} \end{cases} \quad (3.13b)$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Konstanty $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ určíme z požadavku spojitosti funkčních hodnot a radiálních derivací funkcí α, ψ . Nakonec dostaneme

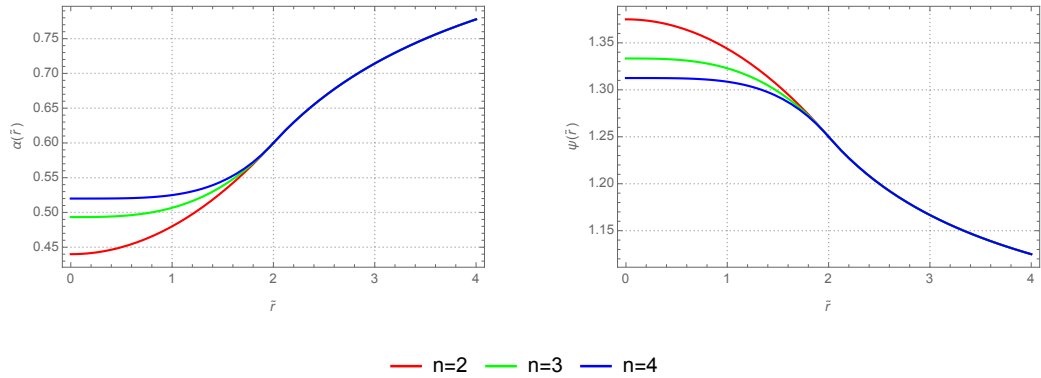
$$A = \frac{4M}{n\tilde{a}^{n-1}(2\tilde{a} + M)^2}, \quad (3.14a)$$

$$B = \frac{4\tilde{a}^2 - M^2 - \frac{4}{n}M\tilde{a}}{(2\tilde{a} + M)^2}, \quad (3.14b)$$

$$C = -\frac{M}{2n\tilde{a}^{n+1}}, \quad (3.14c)$$

$$D = \frac{2n\tilde{a} + (n+1)M}{2n\tilde{a}}. \quad (3.14d)$$

Grafy funkcí (3.13) pro různá n jsou vykresleny na obrázku 3.5.



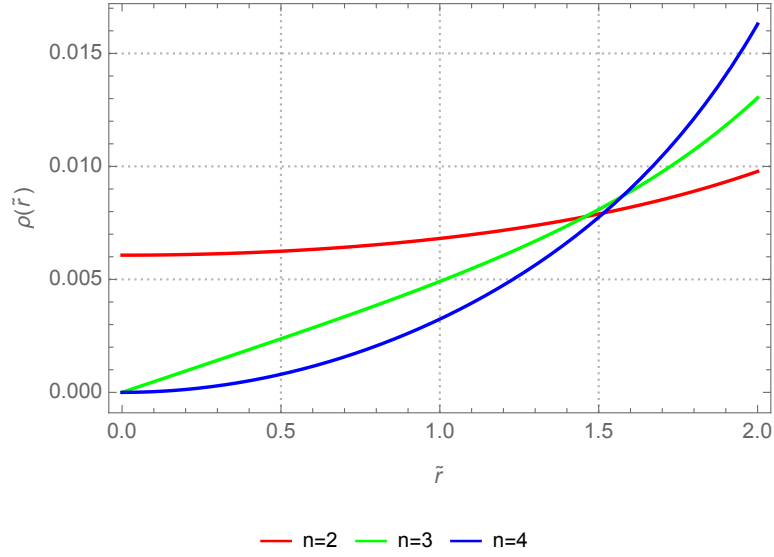
Obrázek 3.5: Průběh metrických potenciálů α (vlevo) a ψ (vpravo) pro $\tilde{a} = 2M$ a různá n .

Hustotu a tlaky ve vnitřní oblasti získáme dosazením právě nalezeného vnitřního řešení (3.13) do složek Einsteinova tenzoru (2.19). Hustota má pro obecné n tvar

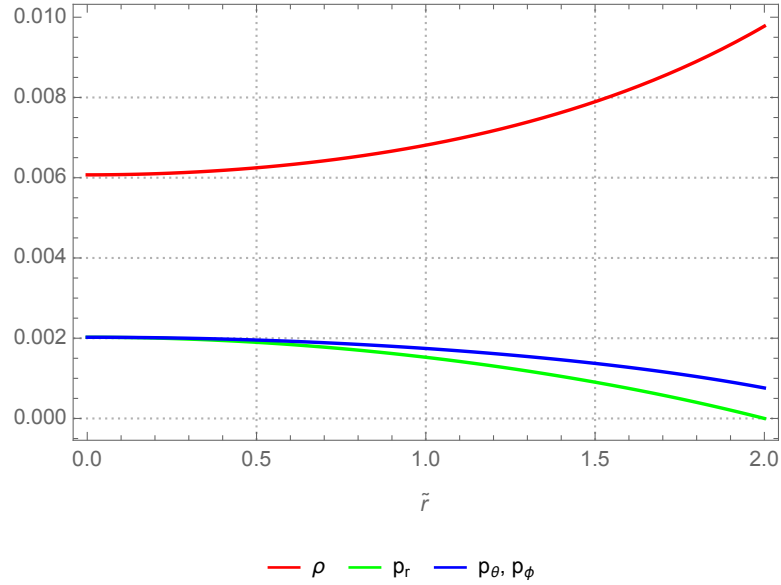
$$\rho(\tilde{r}) = \frac{1}{8\pi} \frac{64n^5(n+1)\tilde{a}^{4n+4}\tilde{r}^{n-2}}{(\tilde{a}^n(2\tilde{a}n + n + 1) - \tilde{r}^n)^5}, \quad (3.15)$$

její průběh pro různá n je na obrázku 3.6. Z grafu je zřejmé, že vnitřní řešení dává smysl jen pro $n = 2$, neboť pro vyšší n je hustota v počátku nulová, což není

fyzikálně realistické. Pro tuto hodnotu n jsme na obrázku 3.7 vykreslili průběh společně s hustotou i průběh tlaků.



Obrázek 3.6: Graf hustoty pro $\tilde{a} = 2M$ a různá n .



Obrázek 3.7: Graf hustoty a tlaků pro $\tilde{a} = 2M$ a $n = 2$.

Z grafů ihned vidíme, že metrické funkce (3.13) ani pro $n = 2$ nerepresentují příliš realistický zdroj, neboť jeho hustota směrem k centru klesá. Navíc na jeho povrchu jsou nenulové úhlové tlaky, což je v rozporu s obvyklou fyzikální definicí povrchu tělesa. Dále můžeme diskutovat realističnost tělesa z hlediska energetických podmínek. Slabá energetická podmínka (2.8) je splněna pro všechna $a \geq 0$ a na velikost tělesa tak neklade žádná omezení. Tak činní až silná energetická podmínka (2.9), která spodní hranici tělesa klade na $a \sim \frac{4}{5}$, zatímco dominantní energetická podmínka minimální rozměr tělesa omezuje ještě přísněji na $a \sim \frac{6}{5}$. Obě tyto hodnoty byly určeny numericky v programu Mathematica.

3.3 Nahrazení singularity ve Schwarzschildově řešení ve Weylových souřadnicích

Vnitřní řešení pro Schwarzschildův prostoročas se můžeme pokusit nalézt i ve Weylových souřadnicích. Tomu se věnoval Papajčík v práci [1], který na hranici $r = a$ navazuje metrické funkce tvaru

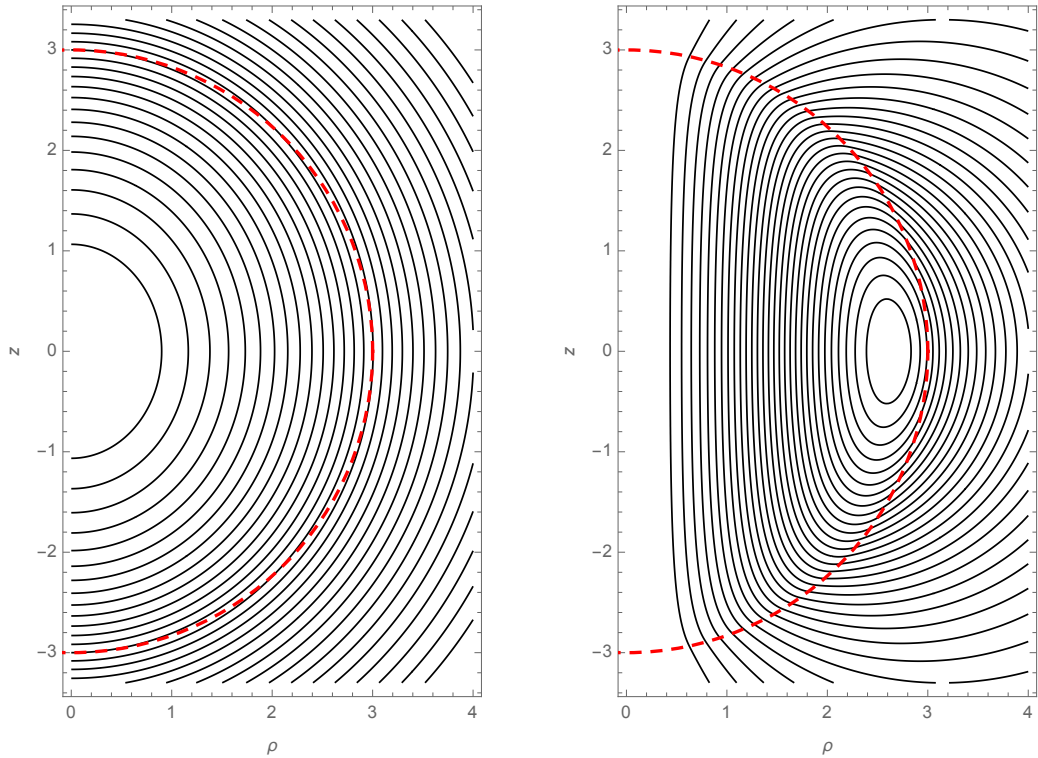
$$e^{2\nu_{\text{in}}} = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k r^2) r^k P_k(\cos \theta), \quad (3.16a)$$

$$e^{2\zeta_{\text{in}}} = 1 + r^2 \sin^2 \theta \sum_{k=0}^{\infty} (A_k + B_k r^2) r^k P_k(\cos \theta) \quad (3.16b)$$

na vnější řešení (2.26) rozvinuté do řady v $\cos \theta$, čímž ho získává v separovaném tvaru

$$e^{2\nu_{\text{out}}} = \frac{\sqrt{M^2 + r^2} - M}{\sqrt{M^2 + r^2} + M} - \frac{M^3 r^2 \cos^2 \theta}{(M^2 + r^2)^{3/2} (\sqrt{M^2 + r^2} + M)^2} + \mathcal{O}(\cos^4 \theta), \quad (3.17a)$$

$$e^{2\zeta_{\text{out}}} = 1 + r^2 \sin^2 \theta \left[-\frac{M^2}{r^2 (M^2 + r^2)} - \frac{M^4 (M^2 + 3r^2) \cos^2 \theta}{r^2 (M^2 + r^2)^3} + \mathcal{O}(\cos^4 \theta) \right] \quad (3.17b)$$



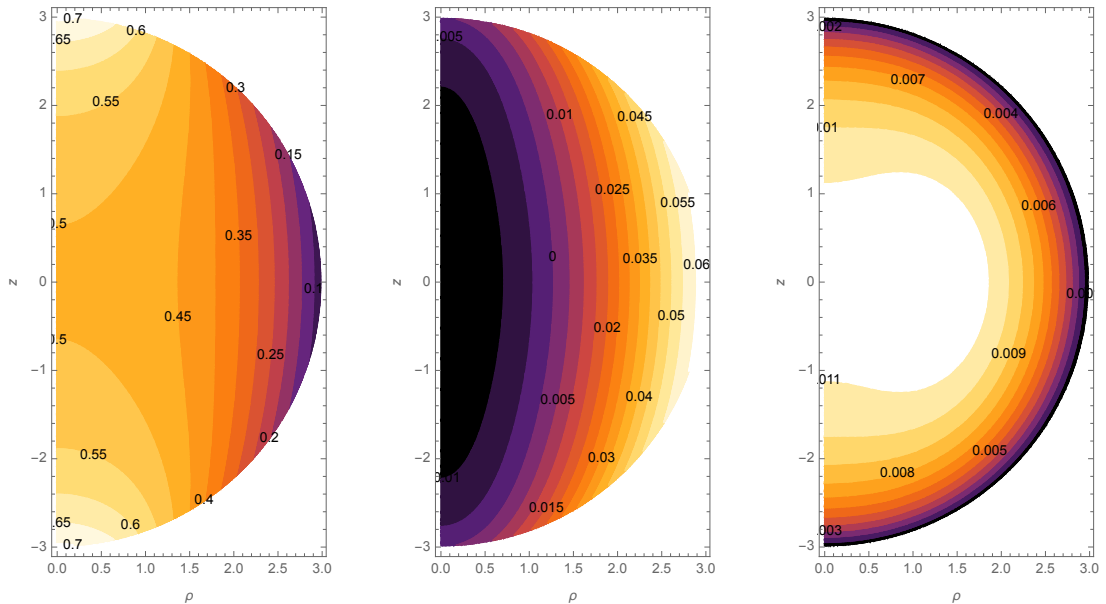
Obrázek 3.8: Grafy metrických funkcí $e^{2\nu_{\text{in}}}$ (vlevo) a $e^{2\zeta_{\text{in}}}$ (vpravo) navázaných na vnější řešení (2.26). Poloměr navázání je $a = 3M$, navazování provádíme pro prvních šest nenulových členů rozvoju (3.16) a (3.17).

Díky tomu pak lze z porovnání funkčních hodnot a derivací jednotlivých členů rozvoju vnitřního a vnějšího řešení na $r = a$ určit neznámé koeficienty a_k, b_k, A_k, B_k .

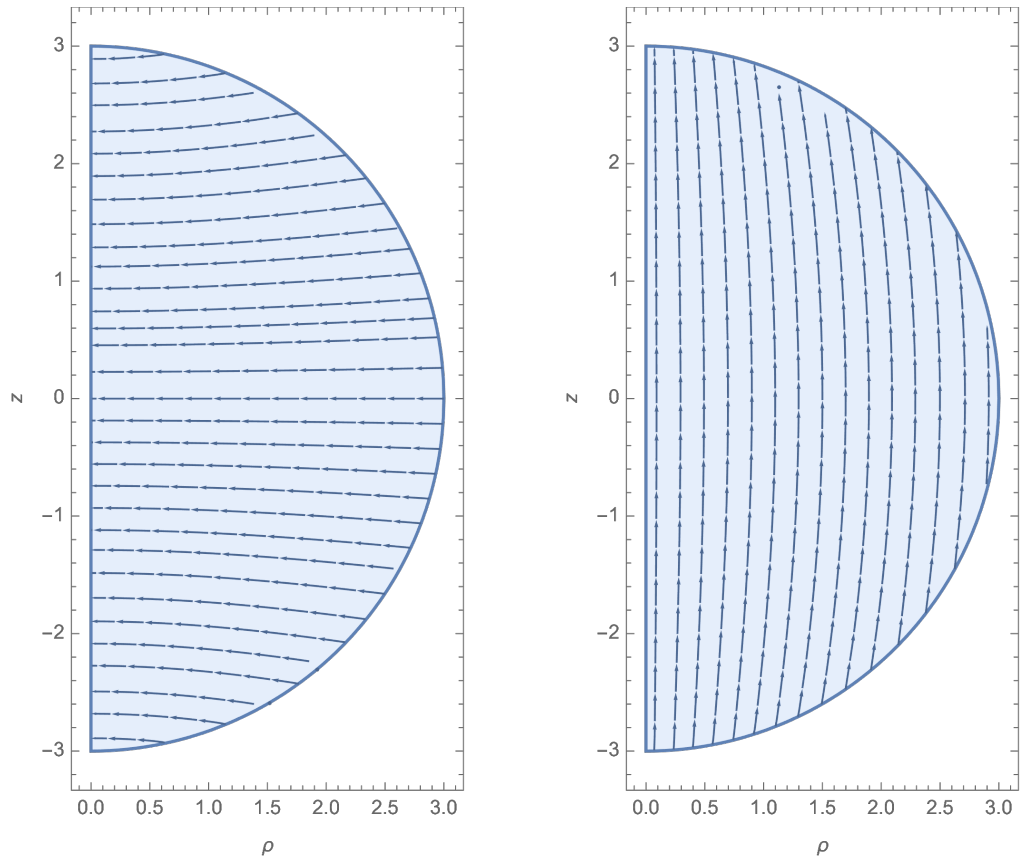
Volba funkcí (3.16) je inspirována vztahem (1.7) z podkapitoly 1.1, o kterém víme, že je regulární. Metrická funkce ν navíc, stejně jako potenciál Φ v Newtonově teorii, splňuje Laplaceovu rovnici (2.12a). Je tedy rozumné rozvoj funkce $e^{2\nu_{\text{in}}}$ volit ve stejném tvaru. Rozvoj funkce $e^{2\zeta_{\text{in}}}$ je volen tak, aby byla na ose z , tj. pro $\theta = 0$ a $\theta = \pi$, stejně jako vnější funkce $e^{2\zeta_{\text{out}}}$, identicky rovna jedné. Tímto se jednoduše vyhneme případné kónické singularitě.

Grafy vnitřních metrických funkcí získaných právě popsáním způsobem jsou na obrázku 3.8. Můžeme se přesvědčit, že skutečně hladce navazují na vnější řešení 3.8. Dosadíme-li získané výsledky do vztahů (2.17), určíme jim odpovídající hustotu a hlavní tlaky. Jejich rozložení uvnitř tělesa je znázorněno na obrázku 3.9. Vzhledem ke komplexitě výpočtů se nám však nepodařilo provést diskusi energetických podmínek a neznáme tak minimální fyzikálně přípustný rozměr tělesa.

Podobně jako u Bonnorova řešení z podkapitoly 3.1, i zde můžeme vyjádřit vlastní vektory Einsteinova tenzoru (2.15). Vlastní vektory odpovídající hustotě, resp. úhlovému tlaku, stejně jako u Bonnorova řešení míří ve směru t , resp. ϕ . Vlastní vektory hlavních tlaků p_+ a p_- jsou znázorněny na obrázku 3.10.



Obrázek 3.9: Hustota (vlevo), úhlový tlak p_ϕ (uprostřed) a tlak $p_+ = -p_-$ (vpravo) odpovídající vnitřnímu řešení z obrázku 3.8. Poloměr tělesa je $a = 3M$. Všechny veličiny jsou kvůli přehlednějšímu kótování vynásobeny faktorem 8π .



Obrázek 3.10: Siločáry tlaků p_+ a p_- pro vnitřní řešení (3.16) a poloměr $a = 3M$.

Kapitola 4

Použití variačních principů při nahrazování singularit

V předchozí kapitole jsme si ukázali, že dosavadní heuristický přístup k nahrazování singularit je velice nejednoznačný a závislý na volbě souřadnic. Již Papajčík v práci [1] poukazuje na potřebu formulovat problém kovariantně. K tomu je vhodný variační přístup představený v podkapitole 1.1 pro newtonovskou teorii gravitace. Cílem této kapitoly tedy bude variační přístup k problematice nahrazování singularit zobecnit a rozšířit i pro potřeby obecné teorie relativity.

4.1 Einstein-Hilbertova akce

Použití variačních principů v rámci Einsteinovy teorie gravitace si nejdříve ilustrujeme na známém případě Einstein-Hilbertovy akce. Budeme přitom vycházet z knihy Gravitation [8].

Každý fundamentální fyzikální zákon lze formulovat za pomoci Hamiltonova variačního principu, který říká, že fyzikální systém se v časovém intervalu $t \in [t_1, t_2]$ vyvíjí tak, že

$$\delta \mathcal{S} = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt \equiv \delta \int_{\Omega} \mathcal{L} \sqrt{-g} d\Omega = 0, \quad (4.1)$$

kde funkcionál \mathcal{S} se nazývá akce, $\sqrt{-g}d\Omega = \sqrt{-g} dV dt$ je element objemu prostoročasu (g je determinant metrického tenzoru), skalární funkce L je Lagrangeova funkce systému a \mathcal{L} je její hustota. Rovnice (4.1) říká, že příroda realizuje takový vývoj systému, že jeho akce \mathcal{S} je minimální (resp. extrémální). Einsteinovy rovnice gravitačního pole lze z Hamiltonova variačního principu odvodit zadáním hustoty lagrangiánu

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{grav}} + \mathcal{L}_{\text{zdroj}} = \frac{1}{16\pi} R + \mathcal{L}_{\text{zdroj}}, \quad (4.2)$$

kde R je skalární křivost. Funkcionál odpovídající gravitačnímu příspěvku k hustotě lagrangiánu

$$\mathcal{S}_{\text{grav}}[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi} \int_{\Omega} R \sqrt{-g} d\Omega. \quad (4.3)$$

se nazývá Einstein-Hilbertova akce.

Za použití tzv. Palatiniho formalismu a faktu, že variace metriky jsou na hranici oblasti Ω nulové, nyní můžeme spočítat variaci celkové akce $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\text{grav}} + \mathcal{S}_{\text{zdroj}}$. Dostaneme

$$\delta\mathcal{S} = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{16\pi} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{zdroj}}}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{L}_{\text{zdroj}} \right) \right] \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \, d\Omega. \quad (4.4)$$

Hamiltonův variační princip říká, že pro všechny variace $\delta g^{\mu\nu}$ má být splněna rovnice $\delta\mathcal{S} = 0$. Musí tedy platit příslušná Euler-Lagrangeova rovnice

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi \left(g_{\mu\nu} \mathcal{L}_{\text{zdroj}} - 2 \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{zdroj}}}{\partial g^{\mu\nu}} \right), \quad (4.5)$$

kde výraz v závorce na pravé straně rovnice lze identifikovat s tenzorem energie a hybnosti $T_{\mu\nu}$. Získáváme tedy známý Einsteinův gravitační zákon (2.1).

4.2 Variační přístup k nahrazování singularit v Einsteinově teorii gravitace

V podkapitole 1.1 jsme k nalezení rovnic, které musí vnitřní řešení splňovat, použili funkcionál (1.3). Ten je tvořen kvadrátem invariantní skalární funkce složené z druhých derivací potenciálu a jeho minimizér musí být řešením bi-Laplaceovy úlohy (1.6). Nynějším úkolem bude nalézt jeho obecně-relativistickou analogii. Budeme přitom požadovat, aby Euler-Lagrangeovy rovnice tohoto relativistického funkcionálu v newtonovské limitě přešly právě na bi-Laplaceovu rovnici. Je proto přirozené takový hledaný funkcionál složit z relativistických kvadratických invariantů obsahujících druhé derivace metriky, která hraje roli zobecněného potenciálu. V obecné teorii relativity máme k dispozici tři takové invarianty: kvadrát Weylova tenzoru $C_{\mu\nu\kappa\lambda} C^{\mu\nu\kappa\lambda}$, kvadrát Ricciho tenzoru $R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$ a kvadrát skalární křivosti R^2 . Další případné kvadratické křivostní invarianty lze vyjádřit jako lineární kombinaci těchto tří základních, například tzv. Kretschmannův skalár lze dle [9] vyjádřit jako

$$K = R_{\mu\nu\kappa\lambda} R^{\mu\nu\kappa\lambda} = C_{\mu\nu\kappa\lambda} C^{\mu\nu\kappa\lambda} + 2R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{1}{3} R^2. \quad (4.6)$$

Volme proto hledaný relativistický funkcionál obecně jako

$$\mathcal{A}[h_{\mu\nu}] = k_1 \mathcal{A}_{\text{Ricci}}[h_{\mu\nu}] + k_2 \mathcal{A}_{\text{Weyl}}[h_{\mu\nu}] + k_3 \mathcal{A}_{\text{curv}}[h_{\mu\nu}], \quad (4.7)$$

kde $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ jsou volné parametry teorie a kde jsme zavedli značení

$$\mathcal{A}_{\text{Ricci}}[h_{\mu\nu}] = \int_{\Omega} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \sqrt{-g} \, d\Omega, \quad (4.8a)$$

$$\mathcal{A}_{\text{Weyl}}[h_{\mu\nu}] = \int_{\Omega} C_{\mu\nu\kappa\lambda} C^{\mu\nu\kappa\lambda} \sqrt{-g} \, d\Omega, \quad (4.8b)$$

$$\mathcal{A}_{\text{curv}}[h_{\mu\nu}] = \int_{\Omega} R^2 \sqrt{-g} \, d\Omega. \quad (4.8c)$$

Nyní je třeba diskutovat podmínky navázání, resp. zobecnit množinu (1.4) pro relativistické potenciály $h_{\mu\nu}$. V obecné relativitě je hladké navázání vnitřní a vnější

metriky podmíněno tím, aby navazující plocha měla stejnou geometrii. Ne všechny složky metrického tenzoru totiž musejí mít, na rozdíl od newtonovského potenciálu Φ , spojitou první derivaci. Předpokládejme, že vnitřní i vnější metrika lze zapsat ve tvaru

$$ds^2 = dw^2 + \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (4.9)$$

a definujme podle [10] tenzor vnější křivosti čtyř-dimenzionální nadplochy $w = konst$ jako

$$K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial w}. \quad (4.10)$$

Chceme-li vyloučit plošné zdroje, pak je třeba navazování řešení na ploše $w = konst$ provádět tak, aby byly spojitě veličiny $\gamma_{\mu\nu}$ a $K_{\mu\nu}$. Proto metrické funkce $h_{\mu\nu}$ musí být z množiny

$$H = \{h_{\mu\nu} \in C^4(\bar{\Omega}), K_{\mu\nu}^{\text{in}} = K_{\mu\nu}^{\text{out}} \text{ na } \partial\Omega, \gamma_{\mu\nu}^{\text{in}} = \gamma_{\mu\nu}^{\text{out}} \text{ na } \partial\Omega\}, \quad (4.11)$$

kde $K_{\mu\nu}^{\text{in}}$ a $\gamma_{\mu\nu}^{\text{in}}$ jsou spočteny z tenzoru $h_{\mu\nu}$, zatímco veličiny $K_{\mu\nu}^{\text{out}}$ a $\gamma_{\mu\nu}^{\text{out}}$ přísluší vnější metrice $g_{\mu\nu}^{\text{out}}$.

Podobně jako v podkapitole 1.1 by se mělo realizovat takové vnitřní řešení $g_{\mu\nu}^{\text{in}}$, které minimalizuje funkcional \mathcal{A} . Tedy hledáme $g_{\mu\nu}^{\text{in}}$ tak, že

$$\mathcal{A}[g_{\mu\nu}^{\text{in}}] = \min_{h_{\mu\nu} \in H} \mathcal{A}[h_{\mu\nu}]. \quad (4.12)$$

Minimizér nalezneme pomocí variačního principu $\delta\mathcal{A} = 0$. Funkcionální derivace funkcionalů (4.8) lze spočítat jako

$$\frac{\delta\mathcal{A}_{\text{Ricci}}}{\delta g^{\mu\nu}} = g_{\mu\nu} \square R - R_{;\mu\nu} + \square G_{\mu\nu} + 2R^{\alpha\lambda} \left(R_{\mu\alpha\nu\lambda} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R_{\alpha\lambda} \right), \quad (4.13a)$$

$$\frac{\delta\mathcal{A}_{\text{Weyl}}}{\delta g^{\mu\nu}} = 4 \left(C_{\mu\alpha\nu\lambda}{}^{;\alpha\lambda} + \frac{1}{2} R^{\alpha\lambda} C_{\mu\alpha\nu\lambda} \right), \quad (4.13b)$$

$$\frac{\delta\mathcal{A}_{\text{curv}}}{\delta g^{\mu\nu}} = 2R \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} R g_{\mu\nu} \right) + 2 \left(g_{\mu\nu} \square R - R_{;\mu\nu} \right), \quad (4.13c)$$

přičemž tyto výsledky čerpáme z [11, 12]. Středník ve vztazích (4.13) označuje kovariantní derivaci a \square je d'Alambertův operátor. Euler-Lagrangeova rovnice příslušející funkcionalu \mathcal{A} , kterou musí splňovat vnitřní metrické funkce $g_{\mu\nu}^{\text{in}}$, tedy potom má tvar

$$k_1 \frac{\delta\mathcal{A}_{\text{Ricci}}}{\delta g^{\mu\nu}} + k_2 \frac{\delta\mathcal{A}_{\text{Weyl}}}{\delta g^{\mu\nu}} + k_3 \frac{\delta\mathcal{A}_{\text{curv}}}{\delta g^{\mu\nu}} = 0. \quad (4.14)$$

Je vidět, že tato rovnice obecně představuje soustavu deseti nelineárních parciálních diferenciálních rovnic čtvrtého řádu (neboť obsahuje dvakrát derivované křivostní členy, které jsou samy o sobě složeny z druhých derivací metriky) pro deset neznámých metrických funkcí $g_{\mu\nu}^{\text{in}}$. Tyto metrické funkce navíc musí splňovat okrajové podmínky

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu}^{\text{in}} &= K_{\mu\nu}^{\text{out}} \text{ na } \partial\Omega, \\ \gamma_{\mu\nu}^{\text{in}} &= \gamma_{\mu\nu}^{\text{out}} \text{ na } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Ve sférické symetrii, pokud pro metriku použijeme tvar (2.18), zjednoduší se tyto okrajové podmínky na spojitost metrických funkcí α , ψ a jejich normálových derivací.

4.3 Newtonovská limita variačních rovnic

Nyní bychom měli ověřit, že se rovnice (4.14) společně s okrajovými podmínkami (4.15) v newtonovské limitě, tj. za předpokladů, že

- gravitační pole je dostatečně slabé,
- gravitační pole je statické, tedy metrika je nezávislá na čase a
- rychlost pozorovatele vůči gravitujícímu tělesu je dostatečně malá v porovnání s rychlostí světla,

skutečně redukuje na problém (1.6), jak jsme požadovali v předchozí podkapitole.

Předpoklad slabého gravitačního pole znamená, že prostoročas je téměř plochý a lze popsat metrikou

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varkappa_{\mu\nu}, \quad |\varkappa_{\mu\nu}| \ll 1, \quad (4.16)$$

kde $\varkappa_{\mu\nu}$ jsou malé odchylky od Minkowského metriky $\eta_{\mu\nu}$. Díky malosti odchylek $\varkappa_{\mu\nu}$ můžeme ve všech následných výpočtech zanedbávat členy řádu $\mathcal{O}(\varkappa^2)$ a vyšší. Zvyšování, snižování a kontrakce indexů u členů řádu $\mathcal{O}(\varkappa)$ tak lze provádět pouze pomocí Minkowského metriky $\eta_{\mu\nu}$.

Z metriky tvaru (4.16) určíme linearizovanou podobu tenzorů $R_{\mu\nu\kappa\lambda}$, $R_{\mu\nu}$, R , $C_{\mu\nu\kappa\lambda}$ a $G_{\mu\nu}$. Nejdříve je třeba vyjádřit Christoffelovy symboly

$$\begin{aligned} \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} [g_{\beta\rho,\gamma} + g_{\gamma\rho,\beta} - g_{\beta\gamma,\rho}] \\ &= \frac{1}{2} \eta^{\alpha\rho} [\varkappa_{\beta\rho,\gamma} + \varkappa_{\gamma\rho,\beta} - \varkappa_{\beta\gamma,\rho}] + \mathcal{O}(\varkappa^2) \\ &= \frac{1}{2} [\varkappa^{\alpha}_{\beta,\gamma} + \varkappa^{\alpha}_{\gamma,\beta} - \varkappa_{\beta\gamma}{}^{\alpha}] + \mathcal{O}(\varkappa^2). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Vztahy (4.16) a (4.17) dosadíme do Riemannova tenzoru

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \frac{1}{2} (g_{\alpha\delta,\beta\gamma} + g_{\beta\gamma,\alpha\delta} - g_{\alpha\gamma,\beta\delta} - g_{\beta\delta,\alpha\gamma}) + g_{\rho\sigma} (\Gamma_{\alpha\delta}^{\rho} \Gamma_{\beta\gamma}^{\sigma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\rho} \Gamma_{\beta\delta}^{\sigma}) \\ &= \frac{1}{2} (\varkappa_{\alpha\delta,\beta\gamma} + \varkappa_{\beta\gamma,\alpha\delta} - \varkappa_{\alpha\gamma,\beta\delta} - \varkappa_{\beta\delta,\alpha\gamma}) + \mathcal{O}(\varkappa^2), \end{aligned} \quad (4.18)$$

kde jsme využili toho, že všechny parciální derivace Minkowského metriky jsou nulové a toho, že členy “ $\Gamma\Gamma$ ” jsou zřejmě řádu $\mathcal{O}(\varkappa^2)$ a tedy je zanedbáváme. Kontrakcí Riemannova tenzoru nyní spočteme Ricciho tenzor

$$R_{\beta\delta} = \eta^{\alpha\gamma} R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} (\varkappa^{\alpha}_{\delta,\beta\alpha} + \varkappa^{\alpha}_{\beta,\alpha\delta} - \varkappa_{,\beta\delta} - \varkappa_{\beta\delta,\alpha}{}^{\alpha}) + \mathcal{O}(\varkappa^2), \quad (4.19)$$

kde $\varkappa = \eta^{\mu\nu} \varkappa_{\mu\nu} = \varkappa_{\mu}{}^{\mu}$. Jeho další kontrakcí ve zbylých dvou indexech získáme skalární křivost

$$R = \eta^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = \varkappa^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta} - \varkappa_{,\alpha}{}^{\alpha} + \mathcal{O}(\varkappa^2). \quad (4.20)$$

Použitím vztahů (4.16), (4.18), (4.19) a (4.20) lze spočítat linearizovanou podobu Weylova tenzoru (vztah na prvním řádku čerpáme z [4])

$$\begin{aligned}
C_{\alpha\beta\gamma\delta} &\equiv R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{1}{2} (g_{\alpha\delta}R_{\gamma\beta} + g_{\beta\gamma}R_{\delta\alpha} - g_{\alpha\gamma}R_{\delta\beta} - g_{\beta\delta}R_{\gamma\alpha}) \\
&\quad + \frac{1}{6} (g_{\alpha\gamma}g_{\delta\beta} - g_{\alpha\delta}g_{\gamma\beta}) R \\
&= \frac{1}{2} (\varkappa_{\alpha\delta,\beta\gamma} + \varkappa_{\beta\gamma,\alpha\delta} - \varkappa_{\alpha\gamma,\beta\delta} - \varkappa_{\beta\delta,\alpha\gamma}) \\
&\quad + \frac{1}{4} [\eta_{\alpha\delta} (\varkappa^\sigma_{\beta,\gamma\sigma} + \varkappa^\sigma_{\gamma,\sigma\beta} - \varkappa_{,\gamma\beta} - \varkappa_{\gamma\beta,\sigma}{}^\sigma) \\
&\quad + \eta_{\beta\gamma} (\varkappa^\sigma_{\alpha,\delta\sigma} + \varkappa^\sigma_{\delta,\sigma\alpha} - \varkappa_{,\delta\alpha} - \varkappa_{\delta\alpha,\sigma}{}^\sigma) \\
&\quad - \eta_{\alpha\gamma} (\varkappa^\sigma_{\beta,\delta\sigma} + \varkappa^\sigma_{\delta,\sigma\beta} - \varkappa_{,\delta\beta} - \varkappa_{\delta\beta,\sigma}{}^\sigma) \\
&\quad - \eta_{\beta\delta} (\varkappa^\sigma_{\alpha,\gamma\sigma} + \varkappa^\sigma_{\gamma,\sigma\alpha} - \varkappa_{,\gamma\alpha} - \varkappa_{\gamma\alpha,\sigma}{}^\sigma)] \\
&\quad + \frac{1}{6} (\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\delta\beta} - \eta_{\alpha\delta}\eta_{\gamma\beta}) (\varkappa^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta} - \varkappa_{,\alpha}{}^\alpha) + \mathcal{O}(\varkappa^2)
\end{aligned} \tag{4.21}$$

a Einsteinova tenzoru

$$\begin{aligned}
G_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} [\varkappa_{\mu\alpha,\nu}{}^\alpha + \varkappa_{\nu\alpha,\mu}{}^\alpha - \varkappa_{,\mu\nu} - \varkappa_{\mu\nu,\alpha}{}^\alpha \\
&\quad - \eta_{\mu\nu} (\varkappa^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta} - \varkappa_{,\alpha}{}^\alpha)] + \mathcal{O}(\varkappa^2).
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Ten lze, jak se provádí v [8], upravit a zjednodušit zavedením nové veličiny $\gamma_{\mu\nu}$ definovanou vztahem

$$\varkappa_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\gamma. \tag{4.23}$$

Dosadíme-li takto zavedenou veličinu do Einsteinova tenzoru, získáme výraz

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (-\gamma_{\mu\nu,\alpha}{}^\alpha - \eta_{\mu\nu}\gamma_{\alpha\beta}{}^{\alpha\beta} + \gamma_{\mu\alpha,\nu}{}^\alpha + \gamma_{\nu\alpha,\mu}{}^\alpha) + \mathcal{O}(\gamma^2), \tag{4.24}$$

který lze zřejmě dále výrazně zjednodušit pomocí Lorentzovy kalibrační podmínky

$$\gamma_{\mu}{}^\nu{}_{,\nu} = 0. \tag{4.25}$$

Její použitím získáme Einsteinův tenzor ve tvaru

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu,\alpha}{}^\alpha = -\frac{1}{2}\square\gamma_{\mu\nu}. \tag{4.26}$$

Einsteinův gravitační zákon (2.1) tedy v limitě slabých gravitačních polí přejde na sadu nehomogenních vlnových rovnic

$$\square\gamma_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu}, \tag{4.27}$$

který se po použití předpokladu statičnosti gravitačního pole zredukuje na sadu Laplaceových rovnic

$$\Delta\gamma_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu}, \tag{4.28}$$

neboť korekce $\gamma_{\mu\nu}$ jsou nezávislé na čase.

Nyní využijeme předpokladu malých rychlostí, který na složky tenzoru energie a hybnosti klade požadavek $|T_{00}| \gg |T_{0j}| > |T_{ij}|$. Všechny složky tenzoru $T_{\mu\nu}$, krom T_{00} , lze tedy zanedbat a z rovnic (4.28) tak zůstane jediná

$$\Delta\gamma_{00} = -16\pi T_{00} = 16\pi\rho, \quad (4.29)$$

kteří má tvar Newtonova gravitačního zákona (1.1). Jejich srovnáním je zřejmé, že mezi γ_{00} a klasickým potenciálem Φ by v newtonovské limitě měl být vztah

$$\gamma_{00} = -4\Phi. \quad (4.30)$$

Veličina γ_{00} tedy v lineárním přiblížení hraje roli klasického potenciálu Φ . Ostatní složky $\gamma_{\mu\nu}$ je rozumné považovat za přibližně nulové. Okrajové podmínky (4.15) se pak redukuje na obyčejné Dirichletovy okrajové podmínky z úlohy (1.6).

Již máme všechny potřebné výsledky k určení linearizované podoby všech členů z rovnic (4.13). Všechny členy kvadratické v křivosti, tedy členy obsahující $R^{\kappa\lambda}R_{\mu\kappa\nu\lambda}$, $R^{\kappa\lambda}R_{\kappa\lambda}$, $R^{\kappa\lambda}C_{\mu\kappa\nu\lambda}$, $RR_{\mu\nu}$ a R^2 , jsou zjevně řádu $\mathcal{O}(\varkappa^2)$ a mohou tak být zanedbány. Zbývá tak spočítat $C_{\mu\kappa\nu\lambda}{}^{;\kappa\lambda}$ a

$$g_{\mu\nu}\square R = \eta_{\mu\nu} \left(\varkappa^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta} - \varkappa_{,\alpha}{}^{;\alpha} \right)_{,\sigma}{}^{;\sigma} + \mathcal{O}(\varkappa^2), \quad (4.31a)$$

$$R_{;\mu\nu} = \left(\varkappa^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta} - \varkappa_{,\alpha}{}^{;\alpha} \right)_{,\mu\nu} + \mathcal{O}(\varkappa^2), \quad (4.31b)$$

kde jsme využili vztahu (4.17), díky kterému kovariantní derivace přejdou na partiální. Přejdeme-li nyní k transformaci (4.23), dostaneme

$$g_{\mu\nu}\square R = \eta_{\mu\nu} \left(\gamma^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta} + \frac{1}{2}\gamma_{,\alpha}{}^{;\alpha} \right)_{,\sigma}{}^{;\sigma} + \mathcal{O}(\gamma^2), \quad (4.32a)$$

$$R_{;\mu\nu} = \left(\gamma^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta} + \frac{1}{2}\gamma_{,\alpha}{}^{;\alpha} \right)_{,\mu\nu} + \mathcal{O}(\gamma^2). \quad (4.32b)$$

Použitím kalibrační podmínky (4.25) se vztahy zjednoduší na

$$g_{\mu\nu}\square R = \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\gamma_{,\alpha\beta}{}^{;\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\square^2\gamma, \quad (4.33a)$$

$$R_{;\mu\nu} = \frac{1}{2}\gamma_{,\mu\nu\alpha}{}^{;\alpha} = \frac{1}{2}\square\gamma_{,\mu\nu}. \quad (4.33b)$$

Tenzor $C_{\mu\kappa\nu\lambda}{}^{;\kappa\lambda}$ po použití transformace (4.23) a kalibrační podmínky (4.25) přejde nakonec po všech výpočtech do tvaru

$$C_{\mu\kappa\nu\lambda}{}^{;\kappa\lambda} = \frac{1}{12} \left(\eta_{\mu\nu}\square^2\gamma + 2\square\gamma_{,\mu\nu} - 3\square^2\gamma_{\mu\nu} \right). \quad (4.34)$$

Linearizovaný tvar variací (4.13) tak je

$$\frac{\delta\mathcal{A}_{\text{Ricci}}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \left(\eta_{\mu\nu}\square^2\gamma - \square\gamma_{,\mu\nu} - \square^2\gamma_{\mu\nu} \right), \quad (4.35a)$$

$$\frac{\delta\mathcal{A}_{\text{Weyl}}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{3} \left(\eta_{\mu\nu}\square^2\gamma + 2\square\gamma_{,\mu\nu} - 3\square^2\gamma_{\mu\nu} \right), \quad (4.35b)$$

$$\frac{\delta\mathcal{A}_{\text{curv}}}{\delta g^{\mu\nu}} = \eta_{\mu\nu}\square^2\gamma - \square\gamma_{,\mu\nu}, \quad (4.35c)$$

Využijeme-li nyní vztahu (4.30) a poznatku, že se v newtonovské limitě jedná o jedinou nenulovou složku kalibrovaných odchylek $\gamma_{\mu\nu}$ (tedy $\gamma_{00} = \gamma = -4\Phi$), získáme

$$\frac{\delta\mathcal{A}_{\text{Ricci}}}{\delta g^{\mu\nu}} = \begin{cases} 4\Delta^2\Phi, & \mu = \nu = 0 \\ 2(\Delta\Phi_{,ij} - \delta_{ij}\Delta^2\Phi), & \mu = i, \nu = j \end{cases} \quad (4.36a)$$

$$\frac{\delta\mathcal{A}_{\text{Weyl}}}{\delta g^{\mu\nu}} = \begin{cases} \frac{16}{3}\Delta^2\Phi, & \mu = \nu = 0 \\ -\frac{4}{3}(2\Delta\Phi_{,ij} + \delta_{ij}\Delta^2\Phi), & \mu = i, \nu = j \end{cases} \quad (4.36b)$$

$$\frac{\delta\mathcal{A}_{\text{curv}}}{\delta g^{\mu\nu}} = \begin{cases} 4\Delta^2\Phi, & \mu = \nu = 0 \\ 4(\Delta\Phi_{,ij} - \delta_{ij}\Delta^2\Phi), & \mu = i, \nu = j \end{cases} \quad (4.36c)$$

kde jsme opět využili toho, že všechny časové derivace jsou nulové. Ostatní složky variačních derivací jsou nulové.

Euler-Lagrangeova rovnice (4.14) se tedy v klasické limitě stacionárních polí pro složku $\mu = \nu = 0$ redukuje na

$$\left(k_1 + \frac{4}{3}k_2 + k_3\right)\Delta^2\Phi = 0. \quad (4.37)$$

Pro složky $\mu = i, \nu = j$ pak po použití tohoto výsledku (za předpokladu, že závorka lze zkrátit proti nule) máme

$$\left(k_1 - \frac{4}{3}k_2 + 2k_3\right)\Delta\Phi_{,ij} = 0. \quad (4.38)$$

Požadavek, aby tyto rovnice společně s okrajovými podmínkami skutečně byly ekvivalentní s bi-Laplaceovou úlohou (1.6), klade na parametry k_1, k_2, k_3 jistá omezení. Předně rovnice (4.37) nesmí být triviální a proto musí platit

$$k_1 + \frac{4}{3}k_2 + k_3 \neq 0. \quad (4.39)$$

Naopak rovnice (4.38) musí být splněna identicky, neboť rovnice $\Delta\Phi_{,ij} = 0$ se v klasické teorii nikde nevyskytuje. To nám mezi parametry dává vztah

$$k_1 - \frac{4}{3}k_2 + 2k_3 = 0. \quad (4.40)$$

Další omezení těchto parametrů se pokusíme nalézt v další kapitole.

Kapitola 5

Aplikace variačního přístupu na Schwarzschildovu metriku

V této kapitole aplikujeme teorii představenou v kapitole 4 na případ nahrazení singularity ve Schwarzschildově metrice. Nejdříve si představíme rovnice (4.14) ve sféricky symetrickém prostoročase popsaném v izotropních souřadnicích a uvedeme si okrajové podmínky pro spojitě navázání vnitřního a vnějšího řešení na sféře o poloměru $\tilde{r} = \tilde{a}$. Následně provedeme newtonovskou a post-newtonovskou analýzu získaných rovnic a srovnáme jejich řešení s výsledky z podkapitoly 1.2. Nakonec použijeme pseudospektrální metodu k nalezení přesného řešení diferenciálních rovnic k vyřešení tohoto okrajového problému.

5.1 Variační rovnice v izotropních souřadnicích

Rovnice (4.14) jsou obecně kovariantní, jejich řešení tedy nijak nezávisí na volbě souřadnic. Ze všech možných souřadnic tedy můžeme zvolit ty, které jsou pro popis problému nejvhodnější a v nichž bude hledání jeho řešení nejjednodušší. Pro popis sféricky symetrického prostoročasu tedy bez újmy na obecnosti můžeme použít výhodné izotropní souřadnice představené v podkapitole 2.3.

Při hledání konkrétního tvaru rovnic (4.14) můžeme postupovat dvěma způsoby. Buď můžeme přímo vyjádřit složky tenzorů (4.13), čímž v izotropních souřadnicích získáme čtyři netriviální rovnice, z nichž jen dvě se ukazují být nezávislé, nebo v izotropních souřadnicích nalezneme tvar funkcionalů (4.8) a následně provedeme jejich variaci podle α a ψ . Tím získáme ekvivalentní systém dvou nezávislých rovnic. My jsme zde zvolili druhý přístup, neboť je méně pracný.

I při volbě nejvhodnějších souřadnic je nalezení jim příslušného tvaru rovnic (4.14) i v případě sféricky symetrického prostoročasu velmi složité a je téměř nemožné ho najít manuálně. Je proto nutné si na pomoc vzít vhodný počítačový nástroj, v našem případě program Mathematica s importovaným softwarovým balíkem *xAct*. Veškeré potřebné výpočty obstarává kód sepsaný v příloze A.2. Programu nejdříve zadáme metrický tenzor (2.18) v maticovém vyjádření

$$ds^2 = \begin{pmatrix} -\alpha^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{r}^2 \psi^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{r}^2 \sin^2 \theta \psi^4 \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Ten za nás následně spočítá obecný tvar kvadrátu Ricciho tenzoru

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = & \frac{2}{\tilde{r}^2\alpha^2\psi^{12}} \left[4\alpha\psi(\psi')^2 (11\alpha\psi - \tilde{r}^2(\psi\alpha'' + 2\alpha\psi'')) \right. \\
& + 2\psi\alpha' (6\alpha\psi^2\psi' + 8\tilde{r}^2\alpha(\psi')^3 + \tilde{r}\psi^2(\psi\alpha'' + 2\alpha\psi'')) + 10\tilde{r}\alpha\psi(\psi')^2 \\
& + 12\tilde{r}^2\alpha^2(\psi')^4 + \tilde{r}^2\psi^2(\psi^2(\alpha'')^2 + 4\alpha\psi\alpha''\psi'' + 12\alpha^2(\psi'')^2) \\
& + 4\tilde{r}\alpha\psi^2\psi'(\psi\alpha'' + 10\alpha\psi'') + 8\tilde{r}\alpha^2\psi(\psi')^3 \\
& \left. + \psi^2(\alpha')^2(8\tilde{r}\psi'(\tilde{r}\psi' + \psi) + 3\psi^2) \right], \quad (5.2)
\end{aligned}$$

kvadrátu Weylova tenzoru

$$\begin{aligned}
C_{\mu\nu\kappa\lambda}C^{\mu\nu\kappa\lambda} = & \frac{4}{3\tilde{r}^2\alpha^2\psi^{12}} \left[-2\alpha\psi\psi' + \psi\alpha'(4\tilde{r}\psi' + \psi) \right. \\
& \left. + \tilde{r}\psi(2\alpha\psi'' - \psi\alpha'') - 6\tilde{r}\alpha(\psi')^2 \right]^2 \quad (5.3)
\end{aligned}$$

a kvadrátu skalární křivosti

$$R^2 = \frac{4}{\tilde{r}^2\alpha^2\psi^{10}} [8\alpha\psi' + 2\alpha'(\tilde{r}\psi' + \psi) + \tilde{r}\psi\alpha'' + 4\tilde{r}\alpha\psi'']^2, \quad (5.4)$$

kde čárky u funkcí značí derivace podle proměnné \tilde{r} . Ještě je třeba spočíst determinant metriky (5.1), resp. jeho odmocninu

$$\sqrt{-g} = \tilde{r}^2 \sin \theta \alpha \psi^6. \quad (5.5)$$

Získané výsledky dosadíme do funkcionalů (4.8) a za pomoci balíku *Variational Methods* z jejich lineární kombinace dopočteme dvě Euler-Lagrangeovy rovnice odpovídající variacím podle α a ψ .

Získáme velmi složitou a silně nelineární soustavu dvou obyčejných diferenciálních rovnic pro dvě neznámé funkce α a ψ . Příklad této soustavy pro $k_1 = 1$ a $k_2 = k_3 = 0$ vypadá takto

$$\begin{aligned}
\frac{\sin \theta}{\alpha^3\psi^6} \left[\alpha(\alpha')^2 (-48\tilde{r}^2\psi^2(\psi')^2 + 32\tilde{r}^2\psi^3\psi'' + 96\tilde{r}\psi^3\psi' + 8\psi^4) \right. \\
+ \alpha^3 (-64\tilde{r}^2\psi(\psi')^2\psi'' + 96\tilde{r}^2(\psi')^4 + 32\tilde{r}^2\psi^2(\psi'')^2 \\
+ 64\tilde{r}\psi^2\psi'\psi'' + 64\tilde{r}\psi(\psi')^3 + 96\psi^2(\psi')^2) \\
+ \alpha'' (\alpha^2 (-32\tilde{r}^2\psi^3\psi'' - 160\tilde{r}\psi^3\psi') + 16\tilde{r}^2\psi^4(\alpha')^2 \\
+ \alpha\alpha' (80\tilde{r}^2\psi^3\psi' - 32\tilde{r}\psi^4)) + \alpha^2\alpha' (-48\tilde{r}^2\psi^2\psi'\psi'' \\
+ 192\tilde{r}^2\psi(\psi')^3 - 16\tilde{r}^2\psi^{(3)}\psi^3 + 192\tilde{r}\psi^2(\psi')^2 - 128\tilde{r}\psi^3\psi'' - 64\psi^3\psi') \\
- 32\tilde{r}^2\psi^3(\alpha')^3\psi' + \alpha^{(3)} (\alpha^2 (32\tilde{r}\psi^4 - 32\tilde{r}^2\psi^3\psi') - 16\tilde{r}^2\alpha\psi^4\alpha') \\
\left. - 12\tilde{r}^2\alpha\psi^4(\alpha'')^2 + 8\tilde{r}^2\alpha^2\alpha^{(4)}\psi^4 \right] = 0, \quad (5.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\sin \theta}{\alpha^2 \psi^7} \left[\psi^4 \left(-48\alpha (\alpha')^2 - 16\tilde{r}^2 (\alpha')^2 \alpha'' + 16\alpha \alpha^{(3)} \tilde{r}^2 \alpha' + 8\tilde{r}^2 \alpha (\alpha'')^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 32\tilde{r} \alpha \alpha' \alpha'' + 32\tilde{r} (\alpha')^3 \right) + \psi^3 \psi' \left(-64\alpha^2 \alpha' \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 192\tilde{r}^2 \alpha \alpha' \alpha'' + 96\tilde{r}^2 (\alpha')^3 - 192\tilde{r} \alpha (\alpha')^2 + 64\tilde{r} \alpha^2 \alpha'' \right) \right. \\
& \quad \left. + \psi^2 (\psi')^2 \left(-448\alpha^3 + 192\tilde{r}^2 \alpha (\alpha')^2 - 64\tilde{r}^2 \alpha^2 \alpha'' - 960\tilde{r} \alpha^2 \alpha' \right) \right. \\
& \quad \left. + \psi'' \left(\psi^3 \left(-96\tilde{r}^2 \alpha (\alpha')^2 + 64\tilde{r}^2 \alpha^2 \alpha'' + 320\tilde{r} \alpha^2 \alpha' \right) + 1408\tilde{r}^2 \alpha^3 \psi (\psi')^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \psi^2 \psi' \left(-640\tilde{r}^2 \alpha^2 \alpha' - 2432\tilde{r} \alpha^3 \right) \right) + \psi (\psi')^3 \left(256\tilde{r}^2 \alpha^2 \alpha' + 2432\tilde{r} \alpha^3 \right) \right. \\
& \quad \left. - 192\tilde{r}^2 \alpha^3 (\psi')^4 + \psi^{(3)} \left(\psi^3 \left(128\tilde{r}^2 \alpha^2 \alpha' + 256\tilde{r} \alpha^3 \right) - 512\tilde{r}^2 \alpha^3 \psi^2 \psi' \right) \right. \\
& \quad \left. - 384\tilde{r}^2 \alpha^3 \psi^2 (\psi'')^2 + 64\tilde{r}^2 \alpha^3 \psi^{(4)} \psi^3 \right] = 0. \quad (5.7)
\end{aligned}$$

Tuto sadu rovnic ještě musíme doplnit o okrajové podmínky pro navázání na sféru o poloměru $\tilde{r} = \tilde{a}$. Jelikož se tedy jedná o sféricky symetrický problém, lze jej ekvivalentně formulovat jako úlohu na úsečce s podmínkami

$$\begin{aligned}
\alpha_{\text{in}}(\tilde{a}) &= \alpha_{\text{out}}(\tilde{a}), & \alpha'_{\text{in}}(\tilde{a}) &= \alpha'_{\text{out}}(\tilde{a}), & \alpha'_{\text{in}}(0) &= 0, & \alpha_{\text{in}}^{(3)}(0) &= 0, \\
\psi_{\text{in}}(\tilde{a}) &= \psi_{\text{out}}(\tilde{a}), & \psi'_{\text{in}}(\tilde{a}) &= \psi'_{\text{out}}(\tilde{a}), & \psi'_{\text{in}}(0) &= 0, & \psi_{\text{in}}^{(3)}(0) &= 0,
\end{aligned} \quad (5.8)$$

kde $\alpha_{\text{out}}, \psi_{\text{out}}$ značí metrické funkce vnějšího Schwarzschildova řešení (2.23).

Soustavu diferenciálních rovnic s počátečními podmínkami (5.8) je zjevně nutné řešit numericky. Pokusíme-li se však tento problém vyřešit pomocí v Mathematice nativně zabudované funkce `NDSolve`, narazíme na nepřekonatelné problémy. Rovnice (5.6) a (5.7) jsou bohužel silně nelineární a též singulární v počátku, a proto si s jejich řešením ani metoda střílení, kterou funkce `NDSolve` používá, nedovede poradit. K jejich vyřešení je tedy nutné zvolit jiný přístup. Jednou z možností je zkoumat získané rovnice pomocí přibližných analytických metod, např. hledat jejich přibližné řešení ve tvaru asymptotického rozvoje. Protože koeficienty takového rozvoje jsou ve standardních jednotkách mocninami poměru $\frac{GM}{c^2}$, jde vlastně o tzv. post-newtonovský rozvoj. Porovnání získaných výsledků s řešením odpovídajícího klasického problému z podkapitoly 1.2 můžeme využít k nalezení dalších restrikcí volných parametrů k_1, k_2, k_3 . Druhou možností je k hledání řešení využít pseudospektrální metodu.

5.2 Newtonovská a post-newtonovská analýza

Asymptotický rozvoj řešení diferenciálních rovnic lze v programu Mathematica nalézt pomocí příkazu `AsymptoticDSolveValue`. Použijeme-li ho na naši soustavu rovnic (4.14) v izotropních souřadnicích, získáme rozvoj metrické funkce α jako

$$\begin{aligned}
\alpha_{\text{in}} &= \alpha_0 + \frac{\alpha_2}{2} \tilde{r}^2 \\
&+ \frac{\tilde{r}^4}{40\alpha_0 \psi_0^2 (k_1 + 2k_2)} \left[k_1 \left(3\alpha_2^2 \psi_0^2 + 16\alpha_0 \alpha_2 \psi_2 \psi_0 - 32\alpha_0^2 \psi_2^2 \right) \right. \\
&\left. + 2k_2 \alpha_2 \psi_0 (\alpha_2 \psi_0 + 16\alpha_0 \psi_2) + 6k_3 \left(\alpha_2^2 \psi_0^2 - 16\alpha_0^2 \psi_2^2 \right) \right] + \mathcal{O}(\tilde{r}^6). \quad (5.9)
\end{aligned}$$

Pro funkci ψ máme rozvoj

$$\begin{aligned}\psi_{\text{in}} &= \psi_0 + \frac{\psi_2}{2}\tilde{r}^2 \\ &+ \frac{\tilde{r}^4}{80\alpha_0^2\psi_0(k_1+2k_2)} [2k_1\alpha_0\psi_2(23\alpha_0\psi_2-2\alpha_2\psi_0) \\ &+ 2k_2(\alpha_2^2\psi_0^2-4\alpha_0\alpha_2\psi_2\psi_0+30\alpha_0^2\psi_2^2) + k_3(48\alpha_0^2\psi_2^2-3\alpha_2^2\psi_0^2)] \\ &+ \mathcal{O}(\tilde{r}^6).\end{aligned}\tag{5.10}$$

Konstanty α_0 , α_2 , ψ_0 , ψ_2 určíme hladkým navázáním vnitřního asymptotického řešení do daného řádu rozvoje na vnější Schwarzschildovo řešení. Ihned je vidět, že existence vnitřního řešení je podmíněna platností nerovnosti

$$k_1 + 2k_2 \neq 0.\tag{5.11}$$

Tento výraz se ve jmenovatelích dalších řádů asymptotických rozvoje obou funkcí vyskytuje ve vyšších mocninách a jedná se tak o silnou singularitu.

Zkoumejme nejdříve newtonovskou limitu, tj. uvažujme rozvoje α_{in} a ψ_{in} do řádu $\mathcal{O}(\tilde{r}^2)$. Ze sešívacích podmínek (5.8) určíme neznámé konstanty

$$\alpha_0 = \frac{4\tilde{a}^2 - 2\tilde{a}M - M^2}{(2\tilde{a} + M)^2}, \quad \alpha_2 = \frac{4M}{\tilde{a}(2\tilde{a} + M)^2}\tag{5.12}$$

pro funkci α_{in} a

$$\psi_0 = \frac{4\tilde{a} + 3M}{4\tilde{a}}, \quad \psi_2 = -\frac{M}{2\tilde{a}^3}\tag{5.13}$$

pro funkci ψ_{in} . Nyní bude zajímavé se přesvědčit, zda-li se hustota odpovídající těmto metrickým funkcím bude v klasické limitě shodovat s hustotou (1.17) z newtonovské teorie. Dosadíme je proto do časové složky Einsteinova tenzoru (2.19) a provedeme rozvoj získaného výrazu v M v okolí nuly. Potřebujeme totiž přejít od izotropní souřadnice \tilde{r} ke sférickému r , tedy musí platit $\tilde{r} \sim r$, což je splněno, jak je vidět ze vztahu (2.22), když $M \rightarrow 0$. Nakonec tedy pro hustotu získáme

$$\rho = \frac{3M}{4\pi\tilde{a}^3} + \mathcal{O}(M^2),\tag{5.14}$$

což se přesně shoduje s klasickým výsledkem.

Chceme-li totéž ověřit pro radiální tlak, musíme již uvažovat první post-newtonovskou aproximaci funkcí α_{in} a ψ_{in} , tedy v rozvojech (5.9) a (5.10) musíme uvažovat i členy řádu $\mathcal{O}(\tilde{r}^4)$. Tlak (1.21) je totiž řádu $\mathcal{O}(M^2)$, zatímco funkce α , ψ v newtonovské limitě jsou pouze řádu $\mathcal{O}(M)$ a proto je pro dopočtení správného tlaku nelze použít. Teprve po přidání kvartických členů do rozvoje se ve výrazech objeví i členy $\mathcal{O}(M^2)$. Bohužel, pro tento případ jsou již sešívací podmínky (5.8) velmi složité a nepodařilo se nám je přesně vyřešit. Museli jsme tedy postupovat iterativně. Vnitřní metrické funkce jsme proto uvažovali ve tvaru

$$\alpha_{\text{in}} = \alpha_0 + \frac{\alpha_2}{2}\tilde{r}^2 + \alpha_4\tilde{r}^4,\tag{5.15a}$$

$$\psi_{\text{in}} = \psi_0 + \frac{\psi_2}{2}\tilde{r}^2 + \psi_4\tilde{r}^4,\tag{5.15b}$$

kde α_4, ψ_4 označují příslušné koeficienty z rozvoju (5.9) a (5.10), do kterých jsme v první iteraci dosadili z (5.12) a (5.13). Pak jsme již mohli řešit sešívací podmínky (5.8) pro neznámé konstanty $\alpha_0, \alpha_2, \psi_0, \psi_2$. Následně jsme pro všech šest konstant spočetli jejich rozvoj v M na okolí nuly (ze stejných důvodů jako výše). Dostali jsme

$$\alpha_0 = 1 - \frac{3M}{2a} + \frac{3(9k_1 + 22k_2 - 6k_3)M^2}{40a^2(k_1 + 2k_2)} + \mathcal{O}(M^3), \quad (5.16a)$$

$$\alpha_2 = \frac{M}{a^3} + \frac{3(k_1 - 2k_2 + 6k_3)M^2}{10a^4(k_1 + 2k_2)} + \mathcal{O}(M^3), \quad (5.16b)$$

$$\alpha_4 = -\frac{(13k_1 + 14k_2 + 18k_3)M^2}{40a^6(k_1 + 2k_2)} + \mathcal{O}(M^3), \quad (5.16c)$$

$$\psi_0 = 1 + \frac{3M}{4a} + \frac{3(9k_1 + 14k_2 + 6k_3)M^2}{160a^2(k_1 + 2k_2)} + \mathcal{O}(M^3), \quad (5.16d)$$

$$\psi_2 = -\frac{M}{2a^3} - \frac{3(9k_1 + 14k_2 + 6k_3)M^2}{40a^4(k_1 + 2k_2)} + \mathcal{O}(M^3), \quad (5.16e)$$

$$\psi_4 = \frac{3(9k_1 + 14k_2 + 6k_3)M^2}{160a^6(k_1 + 2k_2)} + \mathcal{O}(M^3). \quad (5.16f)$$

Provedeme-li obdobným způsobem druhou iteraci za použití výsledků (5.16a) až (5.16d), zjistíme, že se rozvoje všech konstant až do řádu $\mathcal{O}(M^2)$ nijak nezmění. Požadovaného řádu přesnosti pro určení radiálního tlaku v newtonovské limitě jsme tak dosáhli již po první iteraci. Ten spočteme dosazením metrických funkcí (5.15) s konstantami (5.16) do radiální složky Einsteinova tenzoru (2.19). Rozvojem získaného výrazu pro radiální tlak nakonec dostaneme

$$p_r = \frac{3(4k_1 + 6k_2 + 3k_3)M^2}{40\pi a^6(k_1 + 2k_2)} (a^2 - r^2) + \mathcal{O}(M^3). \quad (5.17)$$

Má-li se tento tlak shodovat s tlakem (1.21) z klasické teorie (ve které položíme $G = 1$), musí mezi parametry k_1, k_2, k_3 platit vztah

$$k_3 = \frac{1}{3}(k_1 + 4k_2). \quad (5.18)$$

Tlak je však na povrchu nulový pro jakoukoliv volbu parametrů.

Obdržené výsledky pro kvartické funkce $\alpha_{\text{in}}, \psi_{\text{in}}$ můžeme použít i ke spočtení úhlových tlaků. Stačí je dosadit do úhlových složek Einsteinova tenzoru (2.19), odkud v prvním přiblížení dostaneme

$$p_\theta = p_\phi = \frac{3((4k_1 + 6k_2 + 3k_3)a^2 - (3k_1 + 2k_2 + 6k_3)r^2)M^2}{40\pi a^6(k_1 + 2k_2)} + \mathcal{O}(M^3). \quad (5.19)$$

Mohlo by být rozumné a přirozené očekávat, že v klasické limitě si budou úhlové tlaky p_θ, p_ϕ rovny radiálnímu tlaku p_r . Je tedy velmi zajímavé si povšimnout, že toto očekávání je naplněno právě tehdy, když je splněna podmínka (5.18).

5.3 Pseudospektrální metoda řešení obyčejných diferenciálních rovnic

Při hledání řešení (4.14) regulárního v počátku se jako vhodná ukazuje tzv. pseudospektrální metoda, která je detailně popsána v Boydově knize [13]. Její princip spočívá v rozvoji přesného řešení do vhodně zvolených báзовých funkcí. V našem případě budeme přesné řešení diferenciální rovnice $Lu(x) = f(x)$ na intervalu (a, b) s p okrajovými podmínkami (L je diferenciální operátor řádu p) aproximovat pomocí řady

$$P_N(x) = \sum_{k=0}^N a_k T_k(x), \quad (5.20)$$

kde $N > p$ a $T_k(x)$ jsou Chebyshevovy polynomy, které se ukazují být obecně nejvhodnější báзовé funkce pro neperiodické okrajové problémy. Ty jsou definovány rekurentně jako

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \end{aligned} \quad (5.21)$$

K nalezení $N+1$ neznámých koeficientů rozvoje a_k máme k dispozici p okrajových podmínek, které redukuje počet neznámých na $N+1-p$. Zbylé neznámé určíme dosazením řady (5.20) do řešené diferenciální rovnice v $N+1-p$ vhodně zvolených, tzv. kolokačních bodech $x = x_i$. Tímto řešením diferenciální rovnice s okrajovými podmínkami převedeme na problém hledání koeficientů polynomu $P_N(x)$. Máme tedy soustavu algebraických rovnic

$$\begin{aligned} LP_N(x_i) &= f(x_i), \quad i \in \{1, \dots, N+1-p\} \\ &+ p \text{ okrajových podmínek,} \end{aligned} \quad (5.22)$$

jejímž vyřešením nalezneme všechny koeficienty a_k .

Důležitá je ovšem otázka volby kolokačních bodů. Ekvidistantní rozložení kolokačních bodů v intervalu například vede k tomu, že řada (5.20) na jeho okrajích přesné řešení aproximuje pouze s velkou chybou, která navíc roste se zvyšujícím se N . Pro chybu interpolačního polynomu $P_N(x)$ totiž platí

$$f(x) - P_N(x) = \frac{1}{(N+1)!} f^{(N+1)}(\xi) \prod_{i=0}^N (x - x_i), \quad (5.23)$$

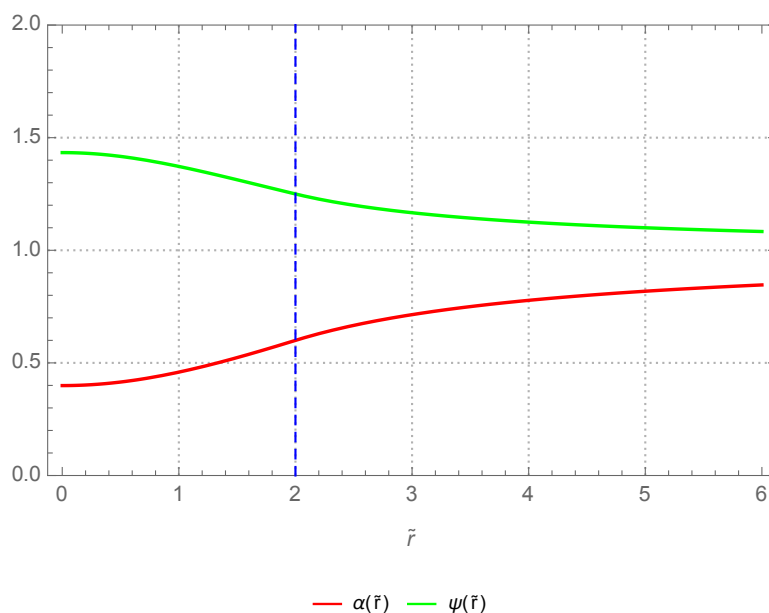
kde $\xi \in (a, b)$. Je vidět, že její velikost lze kontrolovat pouze rozložením kolokačních bodů x_i . Boyd [13] vysvětluje, že velikost interpolační chyby lze významně snížit koncentrací většiny kolokačních bodů na krajích intervalu. Chyba je minimální pro tzv. Chebyshevovu síť danou předpisem

$$x_i = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a) \cos\left(\frac{2i-1}{2N}\pi\right), \quad i \in \{1, \dots, N+1-p\}, \quad (5.24)$$

která se proto u pseudospektrální metody nejčastěji využívá.

5.4 Různá vnitřní řešení pro Schwarzschildovu externí metriku

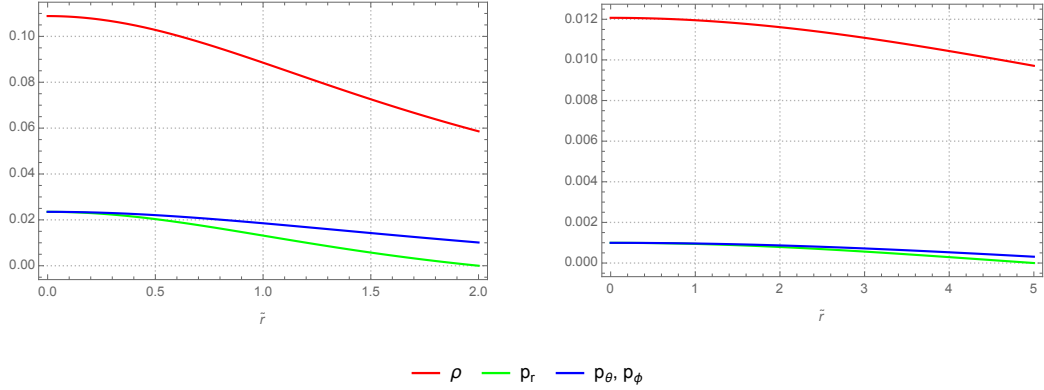
Pro účely této práce byl sepsán program z přílohy A.3, který k řešení našich okrajových problémů využívá právě představenou pseudospektrální metodu. Programu je třeba zadat nastavení parametrů k_1 , k_2 , k_3 a poloměr navázání \tilde{a} , ze kterého následně dopočítá konkrétní okrajové podmínky (5.8). Díky okrajovým podmínkám v počátku víme, že řešením musí být sudé funkce. Řada (5.20) tedy může obsahovat pouze sudé Chebyshevovy polynomy $T_{2k}(x)$. Maximální stupeň interpolačních polynomů aproximující vnitřní řešení α_{in} , ψ_{in} a počet jeho koeficientů zadáme pomocí čísla N (stupeň polynomu je pak $2N$). Při zadání příliš malého navazovacího poloměru program selhává. Zda regulární řešení vůbec neexistuje, nebo nám jej pouze silná nelinearita rovnic nedovolila nalézt však nevíme. Pro $N = 10$ se nám například pro nastavení parametrů $k_1 = 1$, $k_2 = -\frac{5}{4}$, $k_3 = -\frac{4}{3}$ i potom, co jsme funkci FindRoot (která hledá koeficienty interpolačních polynomů) zadali maximální počet iterací roven 10^5 , nepodařilo najít spojitě řešení pro poloměr navázání menší než $\tilde{a} \sim 0,73M$. Minimální poloměr, pro který program ještě funguje, však závisí na konkrétním nastavení parametrů k_1 , k_2 , k_3 . Je též zajímavé se přesvědčit, že skutečně nelze nalézt žádné řešení, není-li splněna nerovnost (5.11).



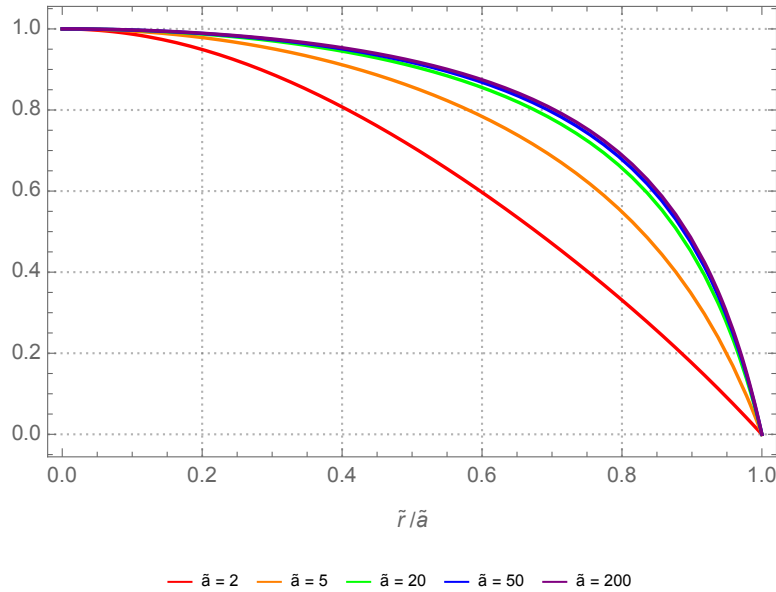
Obrázek 5.1: Řešení problému pro nastavení parametrů $k_1 = 1$, $k_2 = k_3 = 0$. Poloměr navázání je $\tilde{a} = 2M$.

Grafický výstup programu pro rovnice (5.6), (5.7) s navazovacím poloměrem $\tilde{a} = 2M$ je na obrázku 5.1. Vidíme, že na příslušném poloměru vnitřní řešení skutečně hladce navazuje na Schwarzschildovo řešení (2.23). Získané vnitřní řešení nyní můžeme dosadit do Einsteinova tenzoru (2.19) a spočítat tak hustotu a tlaky v tělese. Výsledky pro dva různé poloměry jsou ukázány na obrázku 5.2. Je též zajímavé se podívat, jak se chovají poměry radiálního tlaku p_r a úhlových tlaků p_θ , p_ϕ pro rostoucí poloměr tělesa \tilde{a} . To je znázorněno na obrázku 5.3. Poměr zjevně pro $\tilde{a} \rightarrow \infty$ nekonverguje k jedničce a radiální a úhlové tlaky se tak

v newtonovské limitě pro $k_1 = 1$, $k_2 = k_3 = 0$ liší. Zbývá diskutovat energetické podmínky a stanovit minimální rozměry tělesa. Slabá i silná energetická podmínka je splněna vždy, neboť hustota i všechny tlaky jsou pro všechny poloměry nezáporné. Nejmenší poloměr, při kterém je ještě splněna dominantní energetická podmínka, byl numericky stanoven na $\tilde{a} \approx 0,99803M$.



Obrázek 5.2: Hustota a tlaky uvnitř tělesa pro poloměry $\tilde{a} = 2M$ (vlevo) a $\tilde{a} = 5M$ (vpravo) s nastavením parametrů $k_1 = 1$, $k_2 = k_3 = 0$.



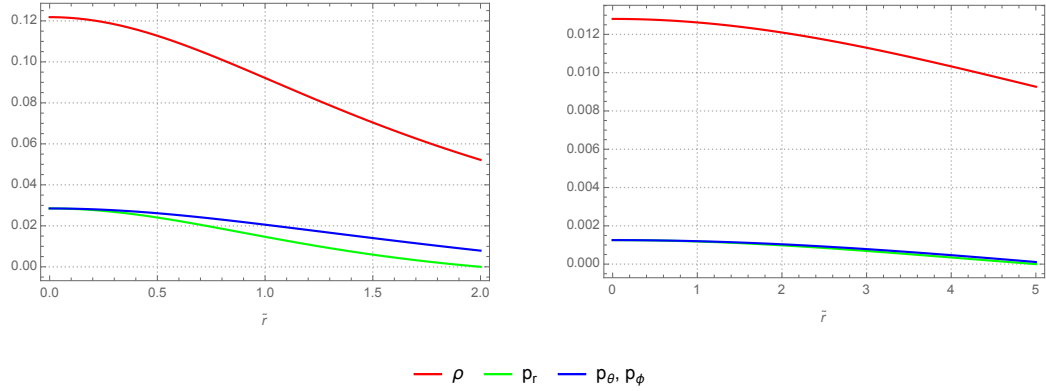
Obrázek 5.3: Poměr radiálního a úhlových tlaků pro nastavení parametrů $k_1 = 1$, $k_2 = k_3 = 0$.

Věnujme se nyní případu nastavení parametrů, kdy jsou splněny obě nalezené restriktce (4.40) a (5.18). Mezi konstantami pak platí vztah

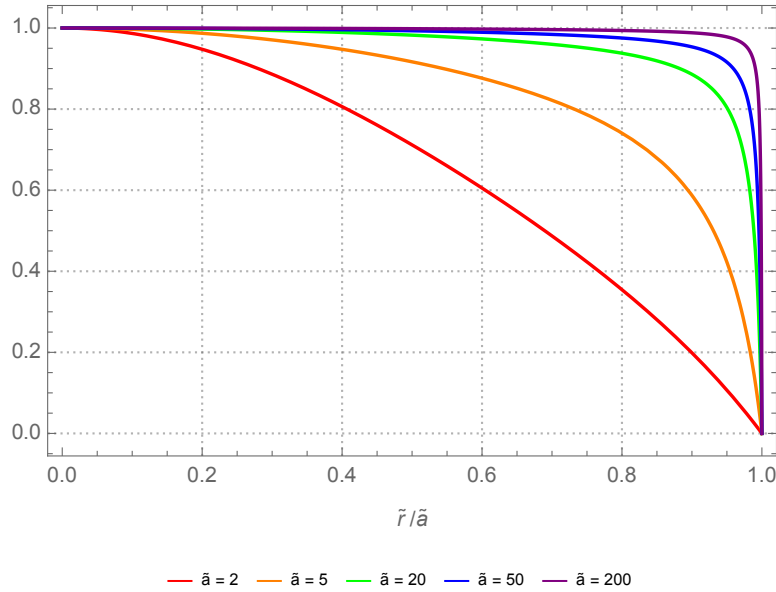
$$k_2 = -\frac{5}{4}k_1, \quad k_3 = -\frac{4}{3}k_1. \quad (5.25)$$

Konstantu k_1 potom bez jakékoliv újmy na obecnosti můžeme volit rovnu jedné (teorie má efektivně pouze dva volné parametry). Za pomoci programu z přílohy A.3 opět získáme vnitřní řešení (vizuálně velmi podobné tomu znázorněnému na obrázku 5.1) a podobně jako výše dopočteme jemu odpovídající hustotu

a tlaky, jejichž grafy jsou na obrázku 5.4. Na rozdíl od předchozího případu však poměry radiálního a úhlových tlaků s rostoucím poloměrem \tilde{a} konvergují k jedničce, což je ukázáno na obrázku 5.5. Všechny tři tlaky se tak dle očekávání z podkapitoly 5.2 v newtonovské limitě rovnají. Zkusme ještě najít energetické podmínky k nalezení minimálních rozměrů tělesa. Slabá i silná energetická podmínka jsou opět splněny vždy. Naproti tomu dominantní energetická podmínka je splněna pouze pro poloměry větší než $\tilde{a} \approx 0,86856M$.



Obrázek 5.4: Hustota a tlaky uvnitř tělesa pro poloměry $\tilde{a} = 2M$ (vlevo) a $\tilde{a} = 5M$ (vpravo) s nastavením parametrů $k_1 = 1$, $k_2 = -\frac{5}{4}$, $k_3 = -\frac{4}{3}$.



Obrázek 5.5: Poměr radiálního a úhlových tlaků pro nastavení parametrů $k_1 = 1$, $k_2 = -\frac{5}{4}$, $k_3 = -\frac{4}{3}$.

Z dominantní energetické podmínky byl ještě určen minimální poloměr tělesa pro volbu parametrů $k_1 = 1$, $k_2 = \frac{1}{2}$, $k_3 = -\frac{1}{6}$, která odpovídá rovnicím získaných variací Kretschmannova skaláru (4.6). Ten byl stanoven na $\tilde{a} \approx 1,09983M$. Minimální fyzikálně přípustný rozměr tělesa je tedy zřejmě závislý na parametrech k_1 , k_2 , k_3 .

Závěr

Problematika nahrazování singularit regulárním vnitřním řešením byla nejdříve ilustrována v rámci klasické lineární teorie gravitace. Vysvětlili jsme, že regulární vnitřní potenciál lze vždy najít jako řešení variační úlohy, která je ekvivalentní bi-Laplaceově rovnici s Dirichletovými hraničními podmínkami. Následně jsme si ukázali aplikaci tohoto postupu na případ sféricky symetrického potenciálu a případy tří axiálně symetrických potenciálů.

Dále jsme zrekapitulovali pokusy o regularizaci Schwarzschildova a Curzonova řešení ve Weylových souřadnicích z práce [1], resp. článku [7]. Diskusi těchto řešení jsme rozšířili o grafy znázorňující rozložení jim příslušných hustot a tlaků. Také jsme našli “siločáry” hlavních směrů tlaků. Rovněž byl krátce diskutován příklad regularizace Schwarzschildova řešení v izotropních souřadnicích. Výsledky byly využity k ilustraci využití energetických podmínek ke stanovení minimálního možného rozměru tělesa.

Pak jsme již přistoupili k zobecnění variačního přístupu k nahrazování singularit známého z klasické teorie gravitace. Za pomoci fyzikální intuice a z požadavku, aby nová teorie v limitě slabých polí a malých rychlostí dávala stejné výsledky jako klasická, jsme odhadli, že relativistický funkcionál by měl obecně být složen z tří kvadratických křivostních invariantů - z kvadrátů Ricciho a Weylova tenzoru a z kvadrátu skalární křivosti, přičemž váhu jejich zastoupení v lineární kombinaci jsme vyjádřili pomocí parametrů k_1, k_2, k_3 . Také jsme použitím tenzoru vnější křivosti zobecnili podmínky navázání. Dále jsme uvedli Euler-Lagrangeovu rovnici zobecněného funkcionálu a dokázali jsme, že v newtonovské limitě pro všechna k_1, k_2, k_3 splňující

$$k_1 - \frac{4}{3}k_2 + 2k_3 = 0$$

přechází na známou bi-Laplaceovu rovnici.

V poslední kapitole jsme pak novou teorii aplikovali na sféricky symetrické Schwarzschildovo řešení. Její rovnice jsme bez újmy na obecnosti vyjádřili v izotropních souřadnicích a následně jsme provedli jejich newtonovskou, resp. post-newtonovskou analýzu. Porovnáním získaných hustot a tlaků s klasickými výsledky těchto veličin jsme obdržely další omezení volných parametrů

$$k_3 = \frac{1}{3}(k_1 + 4k_2).$$

Použitím obou podmínek jsme pak mezi parametry teorie dostali vztah

$$k_2 = -\frac{5}{4}k_1, \quad k_3 = -\frac{4}{3}k_1.$$

Pro tuto a další volby parametrů jsme nakonec za použití pseudospektrální metody našli aproximaci přesného řešení relativistického okrajového problému.

Pro různá nastavení parametrů k_1 , k_2 , k_3 jsme též z energetických podmínek numericky určili minimální fyzikálně přípustný poloměr gravitujícího tělesa.

Nalezení vnitřního řešení nahrazujícího singularitu ve Schwarzschildově řešení je pouze první ukázkou aplikace nově zavedené teorie. Získané výsledky, včetně získané restrikce na volné parametry, by navíc bylo dobré ověřit vyřešením variační úlohy v jiných, například Weylových, souřadnicích. Též je potřeba teorii aplikovat na další příklady prostoročasů z Weylovy třídy, především pak na Curzonovo, ale například i na Reissner–Nordströmovo řešení, a přesvědčit se, že dává smysluplné výsledky. Z matematického i fyzikálního hlediska by pak bylo zajímavé diskutovat, za jakých podmínek řešení variační úlohy existuje, a zda-li je zajištěna jeho jednoznačnost a regularita.

Seznam použité literatury

- [1] Papajčík, M. Regulární zdroje prostoročasu se singularitami. Bakalářská práce (Bc.), Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Ústav teoretické fyziky, Praha, 2019.
- [2] Verchota, G. The dirichlet problem for the biharmonic equation in C^1 domains. *Indiana University Mathematics Journal*, 36(4):867–895, 1987.
- [3] Gazzola, F., Grunau, H.-C. a Sweers, G. *Polyharmonic Boundary Value Problems*. Lecture Notes in Mathematics. Springer, Berlin, Heidelberg, 2010. ISBN 978-3-642-12244-6.
- [4] Wald, R. M. *General relativity*. University of Chicago Press, Chicago, 1984. ISBN 0-226-87033-2.
- [5] Stephani, H., Kramer, D., MacCallum, M., Hoenselaers, C. a Herlt, E. *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2 vydání, 2003. ISBN 978-0-511-53518-5.
- [6] Podolský, J. a Griffiths, J. B. *Exact space-times in Einstein's general relativity*. Cambridge University Press, 2009. ISBN 978-0-521-88927-8.
- [7] Bonnor, W. B. An interior solution for curzon spacetime. *General Relativity and Gravitation*, 45(7):1403–1410, 2013.
- [8] Misner, C. W., Thorne, K. S. a Wheeler, J. A. *Gravitation*. Princeton University Press, San Francisco: W. H. Freeman, 1973. ISBN 0-7167-0344-0.
- [9] Cherubini, C., Bini, D., Capozziello, S. a Ruffini, R. Second order scalar invariants of the riemann tensor: Applications to black hole spacetimes. *International Journal of Modern Physics*, 2003.
- [10] Doležel, T. On junction conditions in gravity theories with higher curvature terms. *World Scientific*, pages 2055–2056, 12 2002.
- [11] Švarc, R., Podolský, J., Pravda, V. a Pravdová, A. Exact black holes in quadratic gravity with any cosmological constant. *Physical Review Letters*, 121, 12 2018. doi: 10.1103/PhysRevLett.121.231104.
- [12] Karamazov, M. Exact spacetimes in modified theories of gravity. Diplomová práce (Mgr.), Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Ústav teoretické fyziky, Praha, 2017.

- [13] Boyd, J. P. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. DOVER Publications, 2000. ISBN 978-3-540-51487-9.
- [14] Martín-García, J. M. *xAct: Efficient tensor computer algebra for the Wolfram Language*, 2002-2021. <http://www.xact.es>.
- [15] Ledvinka, T. Konzultace s vedoucím práce, 2021.

Příloha A

Výpočty v programu Mathematica

A.1 Výpočet Einsteinova tenzoru a jeho vlastních čísel pro Weylovu metriku

Program pro výpočet složek Einsteinova tenzoru a jeho vlastních hodnot pro obecnou Weylovu metriku ve sférických souřadnicích vytvořený za pomoci softwarového balíku *xAct* [14]. Program byl sepsán na základě [15].

```
<< xAct`xTensor`
Needs["xAct`xCoba`"]

DefManifold[M, 4, {a, b, c, d, e, f}]
DefChart[Sph, M, {0, 1, 2, 3}, {t[], r[],  $\theta$ [],  $\phi$ []}
$CIndexForm = True;

DefScalarFunction[ $\nu$ ]
DefScalarFunction[ $\zeta$ ]

ds2 = -Exp[2  $\nu$ [r[],  $\theta$ []] dt^2 +
  Exp[2  $\zeta$ [r[],  $\theta$ []] - 2  $\nu$ [r[],  $\theta$ []] (dr^2 +
    r[]^2 d $\theta$ ^2) +
  r[]^2 Sin[ $\theta$ []]^2 Exp[-2  $\nu$ [r[],  $\theta$ []] d $\phi$ ^2

ds2Matrix =
  CoefficientArrays[ds2, {dt, dr, d $\theta$ , d $\phi$ },
    "Symmetric" -> True][[3]] // Normal // Simplify;
MatrixForm[%]

metricg = CTensor[ds2Matrix, {-Sph, -Sph}];
metricg[-a, -b]
SetCMetric[metricg, Sph, SignatureOfMetric -> {3, 1, 0}]
MetricCompute[metricg, Sph,
  "Einstein"[-1, -1]]
```

```

cd = CovDOfMetric[metricg];

pdsim := {f_(k,l)[r[],  $\theta$ []} :-> Subscript@@Join[{f}, Table[r, k],
  Table[ $\theta$ , l]], r[] :-> r,  $\theta$ []} :->  $\theta$ , f_(k,l)[r[],  $\theta$ []} :-> f}

EinsteinTensor = (Einstein[cd][-a, b] // Head)
  /. CTensor -> (#1 &)// Expand // Simplify;
% /. pdsim // MatrixForm // Expand // Simplify

matrixEinstein = {{Gtt, 0, 0, 0}, {0, Grr, Gr $\theta$ , 0}, {0,
  G $\theta$ r, G $\theta\theta$ , 0}, {0, 0, 0, G $\phi\phi$ }};
eigenValues = Eigenvalues[matrixEinstein];
% // Expand // Simplify

```

A.2 Výpočet Einsteinova tenzoru, kvadrátů křivostních invariantů a Euler-Lagrangeových rovnic v izotropních souřadnicích

Program pro výpočet složek Einsteinova tenzoru pro sféricky symetrickou metriku v izotropních souřadnicích, kvadratických invariantů $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$, $C_{\mu\nu\kappa\lambda}C^{\mu\nu\kappa\lambda}$ a R^2 a jim příslušných Euler-Lagrangeových rovnic vytvořený za pomoci softwarového balíku *xAct* [14]. Program byl sepsán na základě [15].

```

<< xAct`xTensor`
Needs["xAct`xCoba`"]
Needs["VariationalMethods`"]

DefManifold[M, 4, {a, b, c, d, e, f}]
DefChart[Sph, M, {0, 1, 2, 3}, {t[], r[],  $\theta$ [],  $\phi$ []}
$CIndexForm = True;

DefScalarFunction[ $\psi$ ]
DefScalarFunction[ $\alpha$ ]

ds2 = -  $\alpha$ [r[]]^2 dt^2 +  $\psi$ [r[]]^4 (dr^2 + r[]^2 d $\theta$ ^2 +
  r[]^2 Sin[ $\theta$ []]^2 d $\phi$ ^2)

ds2Matrix =
  CoefficientArrays[ds2, {dt, dr, d $\theta$ , d $\phi$ },
    "Symmetric" -> True][[3]] // Normal // Simplify;
MatrixForm[%]

metricg = CTensor[ds2Matrix, {-Sph, -Sph}];
metricg[-a, -b]
SetCMetric[metricg, Sph, SignatureOfMetric -> {3, 1, 0}]
MetricCompute[metricg, Sph,

```



```

"Einstein"[-1, -1]]
cd = CovDOfMetric[metricg];

pdsim := {f_(k)[r[]] :-> Subscript@@Join[{f}, Table[r, k]],
  r[] :-> r,  $\theta$ [] :->  $\theta$ , f_[r[]] :-> f}
rsim := {r[] :-> r,  $\theta$ [] :->  $\theta$ }

EinsteinTensor = (Einstein[cd][-a, b] // Head)
  /. CTensor -> (#1 &)// Expand // Simplify;
% /. pdsim // MatrixForm // Expand // Simplify

R2 = RicciScalar[cd][[1]]^2;
% /. pdsim // Simplify

RabRab = Ricci[cd][a, b] Ricci[cd][-a, -b];
% /. pdsim // Expand // Simplify

W2 = Weyl[cd][a, b, c, d] Weyl[cd][-a, -b, -c, -d];
% /. pdsim // Expand // Simplify

detg12 =  $\alpha$ [r[]]  $\psi$ [r[]]^6 r[]^2*
  Sin[ $\theta$ []]; (* odmocnina z det g *)

Akce = k1*W2 + k2*RabRab + k3*R2 // Expand // Simplify;
% /. pdsim

{AkceRovnice1,
 AkceRovnice2} = {EulerEquations[Akce*detg12,  $\alpha$ [r[]], r[]],
 EulerEquations[Akce*detg12,  $\psi$ [r[]], r[]]} /.rsim

```

A.3 Řešení variačních rovnic spektrální meto- dou

Program řešící variační rovnice (4.14) v izotropických souřadnicích (pro obecné parametry k_1, k_2, k_3 spočtené v příloze A.2) s okrajovými podmínkami (5.8). Program byl sepsán na základě knihy [13] a konzultace s vedoucím práce [15].

```

 $\psi$ S[r_] = (1 + 1/2/r);
 $\psi$ S1[r_] = D[ (1 + 1/2/r), r];
 $\alpha$ S[r_] = (1 - 1/2/r)/(1 + 1/2/r);
 $\alpha$ S1[r_] = D[(1 - 1/2/r)/(1 + 1/2/r), r];

reseniRovnic[a_?NumberQ, N_Integer,
 OptionsPattern[{pq -> {p[0] -> 1, q[0] -> 1}}]] :=
 Block[{f $\alpha$ , f $\psi$ , nezname, drat, okrajPodminky, difRovnice,
  spktrReseni, chebRoots01, pocetKolokacnichBodu,

```

```

colocationPoints, okrajPodmPQ, residual, pocetNeznamych,
rovnicePQ, nezname0, reseni, pocOdhad},

If[N < 3, Print["Pocet koeficientu musi byt >2"]; Abort[]];

f $\alpha$  = Sum[p[k] ChebyshevT[ 2 k, r/a], {k, 0, N - 1}];
f $\psi$  = Sum[ q[k] ChebyshevT[ 2 k, r/a], {k, 0, N - 1}];
nezname = Table[ {p[k], q[k]}, {k, 0, N - 1}] // Flatten;
drat[f_, x_] := D[f[r], r] /. r -> x; (*derivace f v bode x*)

chebRoots01[nC_Integer] :=
Table[ Cos[ (2 k + 1) Pi/4/ nC ], {k, 0, nC - 1}] //
N;(*kladne koreny Subscript[T, 2N]*)

okrajPodminky = { $\alpha$ [a] ==  $\alpha$ S[a],  $\psi$ [a] ==  $\psi$ S[
a], drat[ $\alpha$ , a] ==  $\alpha$ S1[a],
drat[ $\psi$ , a] ==  $\psi$ S1[a]};

difRovnice = {AkceRovnice1, AkceRovnice2};
spktrReseni = { $\alpha$  ->
Function[r, Evaluate@f $\alpha$ ],  $\psi$  ->
Function[r, Evaluate@f $\psi$ ]};

okrajPodmPQ = okrajPodminky /. spktrReseni;
residual = difRovnice /. spktrReseni;
pocetNeznamych = Length@nezname;

pocetKolokacnichBodu = (pocetNeznamych - 4)/2;
colocationPoints = a* chebRoots01[pocetKolokacnichBodu];

rovnicePQ =
Join[ residual /. ({r -> #} &) /@ colocationPoints, okrajPodmPQ]
//Flatten;

pocOdhad = OptionValue[pq];
nezname0 =
Transpose[ {nezname,
nezname /. pocOdhad /. {p[k_] -> 0, q[k_] -> 0}}];
reseni = FindRoot[ Evaluate@rovnicePQ, Evaluate@nezname0,
MaxIterations -> 1000];
(*Print[Length@rovnicePQ," ", Length@nezname0," ",pocetNeznamych,
" ",okrajPodmPQ];*)
{pq ->
reseni,  $\alpha$  -> (f $\alpha$  /. reseni),  $\psi$  -> (f $\psi$  /.reseni)}
]

polomer = 2.0;

```

```
With[{a = polomer},
  ran10 = reseniRovnic[a, 10];

  kombi = If[
    r > a, { $\psi$ S[r],  $\alpha$ S[r]}, { $\psi$ ,  $\alpha$ } /. ran10];
  Plot[kombi , {r, 0, 3 a}, PlotRange -> {0, 2},
    PlotTheme -> "Detailed", PlotLegends -> None,
    PlotStyle -> {Green, Red}, FrameLabel -> {OverTilde[r]}]
]
```