



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jiří Vrecion

De Sitterovská speciální relativita

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Otakar Svítek, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Obecná fyzika

Praha 2021

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Chtěl bych poděkovat panu doktoru Otakaru Svítkovi za odborné vedení práce a za veškerou pomoc a rady, které při vytváření práce poskytl. Dále bych chtěl poděkovat rodině za podporu při vytváření práce.

Název práce: De Sitterovská speciální relativita

Autor: Jiří Vrecion

Ústav: Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Otakar Svítek, Ph.D., Ústav teoretické fyziky

Abstrakt: Tato práce se zabývá de Sitterovým prostorem jako alternativou k Minkovskému prostoročasu, který je standardně základem pro budování teorií popisujících látku a pole (například kvantové teorie pole). Podrobněji je analyzován problém hmoty na de Sitterově prostoru. Je zde uveden potřebný matematický aparát, od faktorových grup, přes Lieovy grupy a algebry, až po Casimirovy operátory. V závěru práce je ukázáno, že de Sitterův prostor je faktorprostor $dS(1,3) = \frac{SO(1,4)}{SO(1,3)}$, což je minimálně z matematického pohledu přirozenější faktorizace než $\frac{Poincaré}{SO(1,3)}$ vedoucí k Minkovskému. Jako motivace práce je stručně popsána takzvaná konformní cyklická kosmologie Rogera Penrose, která by vlastnosti de Sitterovské relativity mohla využít.

Klíčová slova: de Sitterův prostor, de Sitterova grupa, hmota na de Sitterově prostoru, kosmologická konstanta

Title: De Sitter special relativity

Author: Jiří Vrecion

Institute: Institute of Theoretical Physics

Supervisor: RNDr. Otakar Svítek, Ph.D., Institute of Theoretical Physics

Abstract: This thesis deals with de Sitter space as an alternative to Minkowski space, which is generally used in theories describing matter and fields (for example quantum field theory). The problem of mass in de Sitter space is analyzed in more detail. The mathematical apparatus needed in this thesis, from factor groups, through Lie groups and algebras to Casimir operators, is also mentioned. In the final part it is shown, that de Sitter space is a factorgroup $dS(1,3) = \frac{SO(1,4)}{SO(1,3)}$, which is at least from mathematical standpoint much more natural factorization than $\frac{Poincaré}{SO(1,3)}$, which leads to Minkowski. Conformal cyclic cosmology developed by Roger Penrose is briefly described as a motivation for this thesis. This theory could benefit from some properties of de Sitter relativity.

Keywords: de Sitter space, de Sitter group, mass in de Sitter space, cosmological constant

Obsah

1	Úvod do de Sitterova prostoru	2
2	Motivace	4
3	Matematický úvod	6
3.1	Faktorové grupy	6
3.1.1	Třídy	6
3.1.2	Normální/invariantní podgrupy	7
3.1.3	Pravé a levé rozkladové třídy (R/L cosets)	8
3.1.4	Faktorová grupa	9
3.2	Lieovy grupy	9
3.2.1	Geometrická reprezentace	10
3.2.2	Vektorová pole	10
3.2.3	Lioeva závorka	11
3.2.4	Lioeva grupa a její algebra	11
3.2.5	Grupové akce	12
3.2.6	Levé posunutí	12
3.2.7	Levoinvariantní pole	12
4	Pokročilejší matematický aparát a jeho aplikace	14
4.1	Generátory Lieovy grupy	14
4.1.1	Lioeva algebra Poincarého grupy	15
4.1.2	Lioeva algebra de Sitterovy grupy	16
4.2	Casimirovy operátory	16
4.2.1	Casimirovy operátory pro Poincarého grupu	16
4.2.2	Casimirovy operátory na de Sitterově prostoru	16
4.3	Souřadnice na de Sitterově prostoru	17
4.3.1	Souřadnice dané řezy hyperboloidu pomocí 3-sféry	18
4.3.2	Sférické souřadnice	18
4.3.3	Konformně ploché souřadnice	19
5	De Sitterův prostor jako faktorprostor a možná definice hmoty v něm	20
5.1	Faktorprostor $dS(1,3)$	20
5.2	Garidiova definice hmoty	21
	Závěr	22
	Seznam použité literatury	24

1. Úvod do de Sitterova prostoru

S konceptem de Sitterova prostoru přišel roku 1917 nizozemský matematik a fyzik Willem de Sitter (1872 - 1934). Vychází z řešení slavných Einsteinových rovnic

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

kde $R_{\mu\nu}$ je Ricciho tenzor, R je Ricciho skalár, $g_{\mu\nu}$ je metrika prostoročasu, G je Newtonova gravitační konstanta, c je rychlost světla, $T_{\mu\nu}$ je tenzor energie a hybnosti a Λ je kosmologická konstanta. Dlouho byla spornou součástí Einsteinových rovnic. Albert Einstein (1879 - 1955) ji do rovnic přidal, aby jejich řešením mohl být statický vesmír (v jeho době byl vědeckou komunitou uznávaný názor, že se vesmír nerozpíná ani nesmršťuje). Jenže roku 1931 přišel americký astronom Edwin Hubble (1889 - 1953) se zjištěním, že se vesmír rozpíná. Einstein tedy ze svých rovnic Λ odstranil, protože se zdálo, že je v teorii navíc.

V dnešní době kosmologickou konstantu do rovnic zahrnujeme. Nejprve se předpokládalo, že by Λ představovala hustotu energie vákua. Tato interpretace je ale problematická, neboť dopočítaná hodnota této veličiny se výrazně neshoduje s tou naměřenou. Jiná, modernější interpretace je, že kosmologická konstanta představuje vliv temné energie [1].

Uvažujeme-li vesmír bez hmoty, tak vidíme, že v rovnici (1.1) dostaneme nulovou pravou stranu a jediným zdrojem zakřivení bude Λ , pro jejíž kladnou hodnotu existuje maximálně symetrické řešení, které nazýváme de Sitterův vesmír [2]. Je to nejjednodušší model našeho vesmíru, který je ve shodě s pozorovanou, exponenciálně zrychlující se expanzí a tvrdí (jak je vidět z rovnice (1.1)), že i prázdný prostor je zakřivený a Λ je jeho fundamentální parametr [1].

Pro různé skupiny řešení Einsteinových rovnic je nutné zavést vhodné prostory a grupy. V klasické Newtonově fyzice hraje důležitou roli Eukleidovský prostor a Galileova grupa. Jejím hlavním nedostatkem je neomezenost rychlosti světla. Ve speciální teorii relativity má zásadní roli Poincarého grupa a Minkowského prostor. Minkowského prostor je sice nezakřivený a nebere v potaz existenci Λ , ale už obsahuje časovou dimenzi, která je pevně spojena s těmi prostorovými [1] [3]. Pro kladnou hodnotu kosmologické konstanty a absenci hmoty bude řešením Einsteinových rovnic de Sitterův prostor a de Sitterova grupa, značená dS(1,3). Budou v ní vystupovat volné parametry Λ a c , které musí být pro daný prostor změřeny [1]. Z teorie víme pouze, že obě hodnoty budou konečné a nenulové. Díky zakřivení a novým grupám se zde musí změnit klasická představa pro hybnost a energii, stejně jako vztahy mezi nimi [2].

Minkowského prostor je díky své homogenitě invariantní vůči posunutí. To samozřejmě nebude platit pro de Sitterův prostor. Ten bude invariantní vůči kombinaci translace a vlastní konformní transformace [2], což je takové zobrazení, které i přes zkreslení vzdáleností zachovává úhel mezi směrovými vektory. Zároveň si ho díky jeho konstantnímu zakřivení můžeme představit jako hyperboloid. Pro něj, stejně jako například u popisu sféry, bude vhodné přejít do prostoru, který je plochý a má vyšší dimenzi. Využijeme tedy pěti-dimenzionálního Minkowského prostoru M(1,4), do kterého ho můžeme vnořit a vhodně popsat.

Vyvstává otázka, jaký zvolit souřadnicový systém. Prostor, který je homo-

genní, konstantně zakřivenou varietou nemůže mít homogenní souřadnice. Kdyby totiž metrický tenzor nebyl závislý na bodech variety, musel by být prostor plochý. Do úvahy přichází sférické, hyperbolické nebo kartézské souřadnice [1]. Jejich konkrétním tvarem a využitím se ještě budeme zabývat v dalších kapitolách.

2. Motivace

De Sitterův prostor, jak je již zmíněno v úvodu, je nejjednodušším řešením Einsteinových rovnic s kosmologickou konstantou při absenci hmoty. Čtenář by tedy mohl nabýt dojmu, že tento prostor nemůže mít reálné využití a slouží jen jako aproximace našeho vesmíru. Opak je však pravdou. De Sitterův prostor je stavebním kamenem konformní cyklické kosmologie (dále jen CCC). S touto myšlenkou přišel Sir Roger Penrose (1931 - současnost) v roce 2006 v článku *Before the big bang : an outrageous new perspective and its implications for particle physics* a následně ji popularizoval v roce 2010 ve své knize *Cycles of time : An Extraordinary New View of the Universe*. Tato teorie říká, že náš vesmír vzniká a zaniká v cyklech. Jeden takový cyklus má označení aeon, který začíná velkým třeskem a končí přeškálováním celého vesmíru zpět do bodu, ze kterého začal [4]. Penrose si všiml, že vesmír na začátku a na konci jde při splnění určitých předpokladů "napojit" pomocí konformního zobrazení [5] (zobrazení zachovávající úhly ale ne vzdálenosti). V konformní prostoročasové geometrii nemá jedna konkrétní metrika g_{ab} výsadní postavení. Roli zde hraje třída ekvivalentních metrik \hat{g}_{ab} . Dvě metriky $g_1, g_2 \in \hat{g}_{ab}$ jsou ekvivalentní, pokud existuje takové hladké kladné skalární pole Ω , že $g_1 = \Omega^2 g_2$ [4]. Z pohledu relativity to znamená, že vůči konformnímu zobrazení jsou invariantní jen světelné kužely. Pokud tedy ve vesmíru nejsou objekty, které by se pohybovaly po časupodobných křivkách, tak prostoročas nemůže mít pevně definovanou metriku a jediné, co můžeme určit pro daný prostor jsou ony světelné kužely. Vesmír se pak v principu může přeškálovat (zatím blíže nespecifikovaným mechanismem) zpět do jednoho bodu.

Proto je potřeba, aby byla naprostá většina energie ve vesmíru uložena v kinetické energii [4]. Tento požadavek se může zdát problematický, neboť experimenty jako Super-Kamiokande ukazují, že se protony a elektrony, na rozdíl od např. volných neutronů a mionů (poločasy rozpadu těchto částic jsou známé a jejich hodnoty jsou $2.2\mu s$ [6] pro mion a $879.4s$ [6] pro neutron) s velkou pravděpodobností nerozpadají. CCC řeší problém přebytku hmoty dvěma způsoby. Prvním jsou černé díry. Moderní kosmologické modely se shodují na tom, že s postupem času pohltní černé díry většinu hmoty, kterou pak vyzáří Hawkingovou radiací v podobě fotonů [4]. Druhý způsob využívá vlastností de Sitterova prostoru. Víme totiž, že se mu náš vesmír bude limitně blížit. Díky exponenciálnímu rozpínání se od sebe veškerá hmota oddálí natolik, že její příspěvek do Einsteinových rovnic bude zanedbatelný oproti kosmologické konstantě. Jenže tento prostor je speciální v tom, že se na něm nezachovává hmotnost [7]. CCC tedy doufá, že zákon zachování hmotnosti přestane v daleké budoucnosti platit a tím se potenciálně zbaví i částic, které by unikly pohlcení černou dírou.

Druhý způsob působí dost exoticky, ale má matematický základ, který využívá takzvaných Casimirových operátorů. [7]

Definice 1 (Casimirův operátor). [7] *Casimirovým operátorem na Lieově algebře (tento pojem je detailněji vysvětlen níže v matematické sekci) nazveme operátor C , který splňuje $[C, v] = 0$ pro všechny prvky v z Lieovy algebry.*

Z toho vidíme, že operátor, který by komutoval s každým prvkem námi zkoumané Lieovy algebry bude velmi důležitý, protože se očividně jedná o invariantní veličinu. Tyto operátory využívá mimo jiné i teorie kvantového pole k definování

částic a jejich vlastností, jako je například klidová hmotnost či spin [7]. Ukazuje se ale, že hmota v de Sitterově prostoru je problematická. Nejen, že jí na tomto prostoru neodpovídá žádný z Casimirových operátorů, ale dokonce ani není pořádně jasné, jak ji definovat [7]. Zatím se asi dá říct jen to, že pojem hmoty v de Sitterově prostoru má význam tehdy, je-li vztažen k Minkovskému prostoru. Pro zakřivení prostoročasu jdoucí do nuly přechází de Sitterova grupa do Poincarého grupy, ve které je hmota dobře definovaná [7]. Je tedy přirozené předpokládat, že se hmota v pozdním stádiu vývoje našeho aeonu nebude zachovávat.

Na první pohled tedy tato teorie působí rozumně, ale musí být testovatelná, jinak pozbývá smyslu. Jak ale zjistit, jestli našemu aeonu předcházela nějaký jiný, když nás od něj dělí velký třesk? Odpověď by se mohla skrývat v reliktním záření a takzvaných Hawkingových bodech [8]. Pro jednoduchost předpokládejme, že na konci aeonu zbyde jen jedna černá díra a při jejím odpaření proběhne smrštění s následným velkým třeskem. Tím by se tato energie koncentrovala a po expanzi vesmíru bychom v reliktním záření pozorovali pík s vyšší hodnotou energie ve srovnání s okolím, který by měl přibližně Gaussovský profil [8]. Reálně ale bude takových supermasivních černých děr více, proto bychom měli pozorovat více píků. A přesně takovéto oblasti se střední hodnotou teploty vyšší než jejich okolí našel analýzou dat reliktního záření Penrose spolu s Gurzadyanem v roce 2010 s jistotou 6σ [9]. Když se ale nezávisle na sobě pokusily 3 skupiny fyziků ověřit tyto výsledky, tak dostaly výrazně menší jistotu, která spíše odpovídá šumu (např [10]). Za výrazný rozdíl v jistotě může nestandardní metoda analýzy dat použita Penrosem a Gurzadyanem. Ti ale argumentovali, že se jimi použitá metoda lépe hodí pro daný problém. Další analýza, která by v reliktním záření pozorovala tento fenomén, byla provedena týmem Roger Penrose, Daniel An, Krzysztof Antoni Meissner a Pawel Nurowski v roce 2018 [4]. Nicméně analýza z roku 2020 [11] opět dostává výrazně nižší jistotu, než jaká byla uvedena v článku z roku 2018.

Další jev, který bychom měli podle CCC pozorovat, jsou kružnice v reliktním záření s trochu odlišnou teplotou od okolí [4]. Za předpokladu, že by na konci předchozího aeonu spolu kolidovaly supermasivní černé díry, tak by vyzářily velké množství energie v relativně krátké době v podobě gravitačních vln (existence gravitačních vln byla potvrzena v roce 2015 zařízením LIGO [12]), kterým v principu nic nebrání v tom, aby prošly do našeho aeonu. Jak moc by se energie promítla v pozorovaném záření by bylo ovlivněno především tím, jak dlouho před začátkem nového aeonu ke kolizi došlo. Efekt, který jsme teoreticky schopni pozorovat, se dá přirovnat ke kapkám, které dopadají na vodní hladinu [4]. Každá kapka vytvoří soustředné kružnice, které se budou po hladině šířit a budou spolu interferovat. Najít však tyto kružnice v reliktním záření je nesmírně těžký úkol. Nejen, že je potřeba velká přesnost měření, ale pokud se složí dohromady příliš mnoho takovýchto kružnic, tak bude výsledný pozorovaný obraz prakticky nerozeznatelný od šumu.

Je vidět, že je tato teorie postavena na vratkých základech, ale je to na druhou stranu jedna z mála moderních teorií, která dává testovatelné předpovědi. Za předpokladu, že by se v reliktním záření opravdu vyskytovaly píky a kružnice s rozdílnou teplotou od okolí, její význam by významně vzrostl.

3. Matematický úvod

V této kapitole zavedeme matematické prostředky, které budou využívány skrze práci. Nejprve zavedeme některé pojmy na úrovni konečných grup, kde je jejich pochopení jednodušší. Následně pokročíme k Lieovým grupám, které se přímo týkají tématu práce.

3.1 Faktorové grupy

Prvním důležitým pojmem jsou faktorové grupy. K tomu, abychom je však mohli zadefinovat budeme potřebovat vybudovat vhodný aparát pro jejich popis. Konkrétně zavedeme třídy, invariantní podgrupy a rozkladové třídy.

3.1.1 Třídy

Definice 2 (Sdružený prvek). *Prvek $T \in G$ je sdružený prvku $T' \in G$, pokud existuje X takové, že platí $T' = XT X^{-1}$*

Chceme, aby bylo sdružení relací ekvivalence. Budeme tedy požadovat, aby prvky a, b, c grupy G splňovaly následující podmínky.

1. reflexivitu tj. $a \sim a \forall a \in G$
2. symetrii tj. $a \sim b$ potom $b \sim a$
3. tranzitivnost tj. $a \sim b \ \& \ b \sim c \Rightarrow a \sim c$

Definice 3 (Třídy sdružených prvků). [13] *Množina vzájemně sdružených prvků z G , pro jejíž prvky platí $(g) \equiv \{hgh^{-1} | \forall h \in G\}$ se nazývá třída sdružených prvků.*

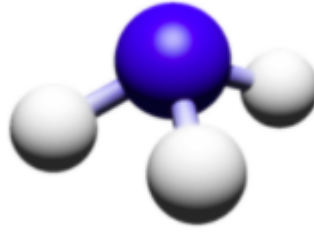
Předtím, než si uvedeme vlastnosti takto definovaných tříd, bude vhodné zadefinovat abelovskou grupu, která je často označována jako komutativní.

Definice 4 (Abelovská grupa). [14] *Aby grupa G byla abelovká, musí splňovat, že pro $\forall T, X \in G$ platí $XT X^{-1} = X X^{-1} T = T$*

Teorém 1. [13] *O vlastnostech třídy združených prvků*

1. žádný prvek není součástí 2 a více tříd
2. identita tvoří samostatnou třídu
3. každý prvek tvoří vlastní třídu, jeli grupa abelovská

Jako příklad tříd sdružených prvků poslouží grupa symetrií molekuly methyly CH_3 . Tato molekula je ukázána na obrázku 3.1.



Obrázek 3.1: Molekula CH_4 ; Převzato z: <https://www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/consider-ammonia-molecule-nh3-c3v-symmetry-group-isomorphic-dihedral-group-d3-symmetric-g-q29636947>

K rozlišení molekul se, mimo mnoha jiných způsobů, využívá tzv. bodové grupy symetrie. K jejímu určení nám pomůže například [15]. Bodová grupa symetrie námi použité grupy je C_{3v} a obsahuje následující symetrie.

1. E - identita
2. C_3, C_3^2 - rotace okolo hlavní osy o 120° a její násobek
3. $\sigma_v, \sigma_{v'}, \sigma_{v''}$ - zrcadlení přes příslušné roviny

Její třídy sdružených prvků jsou

$$(E) = E$$

$$(C_3) = C_3, C_3^2$$

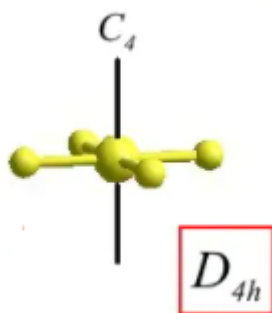
$$(\sigma_v) = \sigma_v, \sigma_{v'}, \sigma_{v''}$$

3.1.2 Normální/invariantní podgrupy

Definice 5 (Invariantní podgrupa). *Je-li grupa H podgrupou grupy G a platí pro ni, že $\{ghg^{-1} \in H | \forall h \in H \ \& \ g \in G\}$, pak ji nazveme invariantní (nebo normální) podgrupou*

Teorém 2. [14] *H je invariantní podgrupa grupy G právě tehdy, když se skládá z úplných tříd sdružených prvků. Navíc, vždy existují tzv. triviální normální podgrupy. Je to identita E a samotná grupa G .*

Pro lepší vizualizaci následujícího příkladu je na obrázku 3.2. ukázána molekula, jejíž bodová grupa symetrie je D_{4h} .



Obrázek 3.2: Bodová grupa symetrie D_{4h} ; Převzato z: <https://www.slideshare.net/ZuhriyatusSholichah/the-determination-of-point-groups>

Vratme se k demonstraci normální podgrupy, kde využijeme krystalografické grupy D_4 , jejíž prvky symetrie jsou

1. E - identita
2. C_{2x}, C_{2y}, C_{2z} - rotace okolo os x, y, z o 180°
3. C_{4y}, C_{4y}^{-1} - pravotočivá nebo levotočivá rotace o 90° a jejich násobky
4. C_{2c}, C_{2d} - rotace okolo os c, d o 180° . Osy c, d jsou v rovině xz a jsou na sebe kolmé a vůči osám x, z jsou otočené o 45°

Z definice 2.1.4 lze nahlédnout, že její invariantní podgrupy budou následovné.

$$\{E\}, \{E, C_{2y}\}, \{E, C_{2x}, C_{2y}, C_{2z}\}, \{E, C_{2x}, C_{4y}, C_4^{-1}\}, \{E, C_{2y}, C_{2c}, C_{2d}\}, \\ \{E, C_{2x}, C_{2y}, C_{2z}, C_{2c}, C_{2d}, C_{4y}, C_4^{-1}\}$$

První a poslední uvedené grupy jsou E a samotná D_4 , jak bylo zmíněno v teorému 1.

3.1.3 Pravé a levé rozkladové třídy (R/L cosets)

Definice 6 (Rozkladová třída). [14] *Je-li H podgrupou G , pak je množina $gH = \{gh, \forall h \in H\}$ levou rozkladovou třídou a množina $Hg = \{hg, \forall h \in H\}$ pravou rozkladovou třídou vůči G . $g \in G$ je pevné a h probíhá celou podgrupu H*

Teorém 3. [13] *Rozkladové třídy mají následující vlastnosti*

1. *je-li $g \in H$, pak $Hg = H$*
2. *není-li g prvkem H , pak Hg není podgrupa G , je to jen množina*
3. *každý element G je prvkem nějaké rozkladové třídy*
4. *2 rozkladové třídy jsou buď totožné, nebo nemají jediný prvek stejný*
5. *pro konečné grupy G a H je počet rozkladových tříd $\#g/\#h$, kde $\#g$ a $\#h$ představují řád příslušné grupy.*

Definice 7 (Součin levých rozkladových tříd). *Součin levých rozkladových tříd (obdobně by byl definovaný součin pravých rozkladových tříd) vzhledem k normální podgrupě G je definován jako $g_1H * g_2H = (g_1g_2)H$*

Jako příklad, na kterém ukážeme rozkladové třídy, využijeme krystalografickou grupu D_4 . Vezmeme například její podgrupu $S := \{E, C_{2x}\}$. Její pravé rozkladové třídy jsou následovné.

$$SE = SC_{2x} = \{E, C_{2x}\}$$

$$SC_{2y} = SC_{2z} = \{C_{2y}, C_{2z}\}$$

$$SC_{4y} = SC_{2d} = \{C_{4y}, C_{2d}\}$$

$$SC_{4y}^{-1} = SC_{2c} = \{C_4^{-1}, C_{2c}\}$$

A levé rozkladové třídy jsou

$$ES = C_{2x}S = \{E, C_{2x}\}$$

$$C_{2y}S = C_{2z}S = \{C_{2y}, C_{2z}\}$$

$$C_{4y}S = C_{2c}S = \{C_{4y}, C_{2c}\}$$

$$C_{4y}^{-1}S = C_{2d}S = \{C_4^{-1}, C_{2d}\}$$

Stojí zde za povšimnutí, že se obecně pravé a levé rozkladové třídy nerovnají.

3.1.4 Faktorová grupa

Definice 8 (Faktorová grupa). [14] *Množina všech různých levých rozkladových tříd vzhledem k normální podgrupě H tvoří grupu. Jako operaci skládání použijeme součin rozkladových tříd, viz definice 2.1.6. Taková grupa se nazývá faktorová.*

Pro následující teorém je vhodné zmínit, že *prostá* je taková grupa, která neobsahuje žádnou netriviální normální podgrupu a *poloprostá* je taková grupa, která neobsahuje žádnou netriviální normální abelovskou podgrupu. Je tedy zřejmé, že každá prostá grupa je i poloprostou, nikoliv však obráceně.

Definice 9 (Algebraická struktura). *Algebraická struktura je uspořádaná dvojice (M, O) , kde O je operace na neprázdné množině M . Pak řekneme, že M je nosič algebraické struktury.*

Teorém 4. [14] *Každá grupa, která není prostá ani poloprostá a obsahuje normální podgrupu lze rozložit na normální a faktorovou podgrupu, přičemž se zde zachovává algebraická struktura a existuje na ní homomorfní zobrazení.*

Pro ukázkou faktorové grupy opět využijeme krystalografickou grupu D_4 . Vezmeme její invariantní podgrupu $S := \{E, C_{2y}\}$. Potom příslušná faktorová grupa bude mít 4 prvky.

$$SE = SC_{2y} = \{E, C_{2y}\}$$

$$SC_{2x} = SC_{2z} = \{C_{2x}, C_{2z}\}$$

$$SC_{4y} = SC_{4y}^{-1} = \{C_{4y}, C_{4y}^{-1}\}$$

$$SC_{2d} = SC_{2c} = \{C_{2d}, C_{2c}\}$$

3.2 Lieovy grupy

V minulé kapitole jsme se zabývali vlastnostmi grup, které měly diskrétní prvky. V této kapitole přejdeme na spojité (často označovány jako Lieovy) grupy. Takovou grupou je například grupa rotací o libovolný úhel. Využívají se 2 způsoby popisu těchto grup - starší maticový a moderní geometrický. U prvního popisu by mohl nastat problém, neboť spojitá grupa nemusí být obecně popsána maticí. To zatím ve fyzice není problém, protože grupy které mají fyzikální význam mají maticovou reprezentaci, ale pro obecný popis je to velký nedostatek. Pro moderní geometrický přístup využijeme následujících definic.

3.2.1 Geometrická reprezentace

Nejprve musíme zadefinovat vhodný prostor.

Definice 10 (Topologický prostor). [13] *Topologický prostor se skládá z množiny X a takzvané topologie τ , což je kolekce otevřených podmnožin vůči X . Prostor (X, τ) musí splňovat následující axiomy*

1. $X \in \tau; \emptyset \in \tau$
2. $\bigcap_{\alpha \in A} \tau_\alpha \in \tau$ pro konečnou množinu A
3. $\bigcup_i \tau_i \in \tau$ pro $i \in \mathbb{N}$

Dále řekneme, že je topologický prostor souvislý, pokud nemůže být rozdělený na 2 disjunktní otevřené množiny a je kompaktní, pokud \forall pokrytí obsahuje konečné podpokrytí.

Definice 11 (Souřadnicová mapa). *Souřadnicová mapa na podmnožině variety $U \subset M$ je homomorfní zobrazení $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Nazveme ho globální mapou, pokud $U = M$.*

Dalším přirozeným krokem je zadefinovat objekt, který sdružuje více map dohromady.

Definice 12 (Atlas). *Souborem map (U_i, ψ_i) , který splňuje následující axiom*

1. (U_i, ψ_i) tvoří diferencovatelnou strukturu třídy C^k na varietě M (je-li $k = \infty$, pak se jedná o hladkou varietu)

nazveme atlasem.

Definice 13 (Křivka). [14] *Křivka $\Gamma(t) \in \Omega$ závislá na parametru t na varietě M je hladké zobrazení $\Gamma : \Omega \rightarrow M$, kde Ω je otevřený interval na \mathbb{R} .*

Dále řekneme, že 2 křivky jsou tečné v bodě $p \in M$, pokud splňují

1. $\Gamma_1(0) = \Gamma_2(0) = p$
2. \exists takové lokální souřadnice x^μ , že platí $\left. \frac{dx^\mu(\Gamma_1(t))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{dx^\mu(\Gamma_2(t))}{dt} \right|_{t=0}$

Definice 14 (Tečný bundl). [16] *Soubor tečných křivek splňujících výše uvedené podmínky tvoří v bodě $p \in M$ vektorový prostor tečný k varietě M , který se nazývá tečný bundl $T_p M$*

Bázi tohoto prostoru tvoří derivace podle jednotlivých souřadnic $\frac{\partial}{\partial x}$.

3.2.2 Vektorová pole

Definice 15 (Vektorové pole). [14] *Hladké přiřazení tečného vektoru $V_p \in T_p M$ v každém bodě variety $p \in M$ se nazývá vektorové pole na varietě M*

Definice 16 (Integrální křivka). [14] *Integrální křivka k vektorovému poli $V \in VFLD(M)$, kde $VFLD(M)$ je zkratka pro vektorový prostor vektorových polí na varietě M , procházející bodem $p \in M$ je křivka $\Gamma(-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$, která splňuje*

1. $\Gamma(0) = p$

2. $\forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$ je tečná k příslušným vektorům $V_{\Gamma(t)}$,

tedy $\frac{dx^\mu(\Gamma(t))}{dt} = V^\mu(\Gamma(t)) \quad \forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$

Řekneme, že je vektorový prostor úplný, pokud lze každou integrální křivku procházející libovolným bodem $p \in M$ rozšířit na celou varietu $t \in \mathbb{R}$.

3.2.3 Lieova závorka

Definice 17 (Lieova závorka). [14] *Lieova závorka pro vektorová pole $V, W \in VFLD(M)$, značena $[V, W] \in VFLD(M)$, je vektorové pole a v bodě $p \in M$ je definována jako*

$$[V, W] : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}; \quad [V, W]_p(f) = V_p(Wf) - W_p(Vf),$$

kde V_p a W_p jsou vektory (což jsou v našem případě zároveň diferenciální operátory, které derivují podle V v bodě p). Dále požadujeme, aby byla

1. antisymetrická, tj. $[V, W] = -[W, V]$
2. splňovala Jacobiho identitu, tj. pro $U, V, W \in VFLD(M)$ platí $[U, [V, W]] + [V, [W, U]] + [W, [U, V]] = 0$

Takto definovaný komutátor spolu s vektorovým prostorem bude tvořit níže definovanou Lieovu algebru. Je zde ale problém, neboť její dimenze je ∞ . Budeme tedy hledat nějaký podprostor, který bude mít potřebnou dimenzi.

3.2.4 Lieova grupa a její algebra

Definice 18 (Lieova algebra). [16] *Množinu, která splňuje*

1. *Množina je grupou*
2. *Je diferencovatelná hladká varieta, na které jsou produkty dvou jejích prvků a inverzní prvek hladká zobrazení*

nazveme reálnou Lieovou grupou \mathbb{G} .

Příklady Lieových grup jsou například již zmiňovaná kružnice či sféra, vektorový prostor R^n nebo lineární grupy (takové, pro které existuje maticová reprezentace).

Definice 19 (Reálná Lieova algebra). [16] *Reálná Lieova algebra \mathbb{L} je reálný lineární vektorový prostor s bilineární operací $[\cdot, \cdot]$. To je komutátor, který splňuje $\forall A, B \in \mathbb{L}$*

1. $[A, B] \in \mathbb{L}$ (uzavřenost)
2. $[\alpha A + \beta B, C] = \alpha[A, C] + \beta[B, C]$ (linearitu)
3. $[A, B] = -[B, A]$ (antisymetrii)
4. $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$ (Jacobiho identitu)

Fyzikálním příkladem Lieovy algebry jsou například Poissonovy závorky.

3.2.5 Grupové akce

Dále se budeme věnovat grupovým akcím.

Definice 20 (Grupová akce). [16] *Tento pojem představuje působení grupy G na množinu M , to znamená, že existuje takové zobrazení $\phi : G \times M \rightarrow M$; $\phi(g,m) \equiv T(g)m \equiv gm$, které splňuje $\forall g,h \in G \forall m \in M$*

1. $T(g)T(h)m = T(gh)m$

2. $T(e)m = m$

Definice 21 (Orbita prvku). [16] *Orbitu prvku $m \in M$ pro akci, kdy G působí na množinu M definujeme jako*

$$Gm = \{T(g)m \mid g \in G\} \subset M$$

Orbita je tedy množina prvků, kterých lze dosáhnout z bodu m . Je také relací ekvivalence na varietě M , neboť orbity libovolných dvou bodů jsou buď identické nebo disjunktní (tedy jejich průnik je prázdná množina).

Definice 22 (Stabilizér). *Mějme grupu G a její podgrupu G_x , která působí na množině M . G_x je pak složena z takových elementů $g \in G$, které nechají prvek x nezměněný*

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$$

Takto definované G_x se pak nazývá stabilizér prvku x .

3.2.6 Levé posunutí

Definice 23 (Levé posunutí). [14] *Diffeomorfismus (neboli hladký izomorfismus mezi dvěma hladkými varietami) na Lieově grupě \mathbb{G} , který splňuje*

1. $L_h : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G} \mid g \rightarrow hg$ pro $h \in \mathbb{G}$ fixní a g probíhá grupu

nazveme levým posunutím. Je to vlastně působení grupy na sebe samu.

3.2.7 Levoinvariantní pole

Definice 24 (Zobrazení push forward). [14] *Zobrazení, které je indukováno zobrazením $\Phi : M \rightarrow N$ a je definováno jako*

1. $\Phi_* T_p M \rightarrow T_{\Phi(p)} N$, kde $T_p M$ představuje tečný prostor variety M v bodě $p \in M$

2. $\Phi_* \left(\frac{d(\Gamma(t))}{dt} \right) = \frac{d(\Phi(\Gamma(t)))}{dt}$,

nazveme zobrazení push forward.

Tedy se vektor definovaný křivkou Γ zobrazí na vektor definovaný obrazem křivky Γ . Toto zobrazení využijeme v následující definici

Definice 25 (Levoinvariantní vektorové pole). [14] *Vektorové pole $V \in VFLD(M)$ na Lieově grupě \mathbb{G} je levoinvariantní, pokud platí*

1. $\forall g \in \mathbb{G} : (Lg)_* V = V \Leftrightarrow (Lg)V_{g'} = V_{gg'}$

Na pravé straně ekvivalence je tedy řečeno, že zapůsobíme-li zobrazením push forward na konkrétní vektor vyčíslený v bodě g' , dostaneme vektor vyčíslený v bodě gg' .

Je-li V levoinvariantní vektorové pole, pak je plně určeno vektorem v jednom bodě. To znamená, že si tento vektor můžeme vhodně zvolit jako $v_e \in T_e \mathbb{G}$, kde v_e je vektor z tečného prostoru jednotky (e). Vektor vyčíslený v libovolném jiném bodě dostaneme jako $v_g = (Lg)_* v_e$.

Teorém 5. *Množina levoinvariantních vektorových polí $\mathcal{L}(\mathbb{G})$ na \mathbb{G} tvoří lineární vektorový prostor izomorfní k $T_e \mathbb{G}$. To znamená, že $\dim \mathcal{L}(\mathbb{G}) = \dim \mathbb{G}$*

Důsledky [16] jsou takové, že

1. $\mathcal{L}(\mathbb{G})$ je uzavřené vůči Lieově závorce
2. $\mathcal{L}(\mathbb{G})$ má strukturu Lieovy algebry \mathbb{G}
3. $\mathcal{L}(\mathbb{G}) \sim T_e(\mathbb{G})$

Potom můžeme říct, že $T_e \mathbb{G}$ s komutátorem $[V_e, W_e] = [V, W]_e$, kde $[V, W]_e$ je komutátor vyčíslený v e , je reálná Lieova algebra prostoru \mathbb{G} .

4. Pokročilejší matematický aparát a jeho aplikace

V této části zavedeme některé pojmy důležité pro aplikaci Lieových grup ve fyzice a uijeme je pro Poincarého a de Sitterovu grupu. Dále ukážeme některé výhodné souřadnice na de Sitterově hyperboloidu.

4.1 Generátory Lieovy grupy

V této sekci ukážeme, jak spolu souvisí Lieovy algebry a Lieovy grupy. Budeme zde využívat maticové reprezentace.

Definice 26 (Reprezentace). [7] *Reprezentací T grupy G v lineárním prostoru L na poli P , které představuje například \mathbb{R} nebo \mathbb{C} , je homomorfismus $T : G \rightarrow GL(L, P)$. $GL(L, P)$ je grupa lineárních transformací na L . Toto zobrazení musí splňovat následující vztahy*

1. $T(g_1g_2) = T(g_1)T(g_2)$
2. $T(e) = E$

kde E je operátor identity na prostoru L .

Uvažujme n -dimenzionální Lieovu grupu G , jejíž prvky budou záviset na parametrech α_i . Potom $g = g(\alpha)$ a $g(0) = e$. Předpokládejme, že tato grupová akce bude reprezentována takovými maticemi D s rozměrem $d \times d$, které splňují $D(g(\alpha)) = D(\alpha)$ a $D(0) = E$. Takovéto matice vždy existují pro lineární grupy. Uděláme-li rozvoj okolo E pro infinitesimálně malý příspěvek $\delta\alpha$, tak dostaneme [7]

$$D(\delta\alpha) = E + i\delta\alpha_a X^a + \dots,$$

kde index a probíhá přes prvky multiindexu α . X^a se standardně nazývají Killinovy vektory nebo generátory grupy a můžeme je definovat následujícím vztahem

$$X^a = -i \frac{\partial D(\alpha)}{\partial \alpha_a}.$$

Přeznačíme-li $\delta\alpha$ na $\frac{\alpha}{m}$ a zároveň umocníme $D(\delta\alpha)$ na m , tak dostaneme vztah

$$D(\alpha) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(E + \frac{i\alpha_a X^a}{m} \right)^m,$$

ve kterém rozpoznáme exponencielu. Pro vhodně zvolené multiindexy α budou X^a lineárně nezávislé a budou tvořit vektorová pole. Ta, spolu s násobením z definice 19 budou tvořit Lieovu algebru \mathcal{G} , jejíž dimenze bude rovna počtu generátorů.

4.1.1 Lieova algebra Poincarého grupy

První se podíváme na generátory Lorentzovy grupy $SO(1,3)$, neboť spolu Poincarého a Lorentzova grupa úzce souvisí. Generátory J^{mn} generují rotace v rovině m, n . Boosty pak budou generovány generátory $K_m \equiv J_{m0}$. Tyto generátory musí splňovat komutační relace, které mají dvě možná vyjádření [7]. První možná podoba relací, dodefinujeme-li metriku $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ s determinanem $\det(\eta^{\mu\nu}) = -1$, vypadá následovně

$$1. [J_{\mu\nu}, J_{\lambda\sigma}] = i(\eta_{\mu\sigma}J_{\lambda\nu} - \eta_{\mu\lambda}J_{\sigma\nu} + \eta_{\nu\sigma}J_{\mu\lambda} - \eta_{\nu\lambda}J_{\mu\sigma}).$$

Druhý možný zápis komutační relace je

1. $[J_m, J_n] = i\epsilon_{mnl}J^l$
2. $[K_m, J_n] = i\epsilon_{mnl}K^l$
3. $[K_m, K_n] = -i\epsilon_{mnl}J^l$

ϵ zde představuje Levi-Civitův permutační symbol. Ten nabývá buď hodnot ± 1 v závislosti na sudosti či lichosti permutace, nebo hodnoty 0, jsou-li alespoň 2 z jeho indexů stejné.

Nekomutativnost boostů je spojena s Thomasovou precesí. To je jev, který byl použit Thomasem Llewellynem (1903 - 1992) pro přesnější počítání spektrálních čar atomů. Thomas si uvědomil, že na výsledek bude mít vliv oběh elektronu okolo jádra. Popsal ho však jen pro oběh po sféře. Později ho zobecnil Eugene Wigner (1902 - 1995). Bylo tedy zjištěno, že když složíme 2 Lorentzovy boosty působící v různých směrech, tak překvapivě nedostaneme zpět jen Lorentzův boost, ale jeho kombinaci s prostorovou rotací. Tato rotace je nazývána Thomasovou a z matematického hlediska je důsledkem nekomutativnosti Lorentzových transformací.

Abychom dostaly generátory Poincarého grupy, tak využijeme, že jedna z jejích podgrup je právě Lorentzova. Vystává otázka, co přidat ke generátorům Lorentzovy grupy, abychom dostali námi hledanou Poincarého. Ukáže se, že odpovědí je generátor posunutí P_μ . Ten bude splňovat následující komutační relaci [7]

$$1. [P_\mu, J_{\lambda\sigma}] = i(P_\lambda\eta_{\mu\sigma} - P_\sigma\eta_{\mu\lambda}),$$

kterou můžeme alternativně zapsat jako

1. $[P^0, J_n] = 0$
2. $[P_m, J_n] = i\epsilon_{mnl}P^l$
3. $[P_m, K_n] = i\delta_{mn}P^0$
4. $[P^0, K_n] = iP_n$

4.1.2 Lieova algebra de Sitterovy grupy

Grupa symetrie de Sitterova prostoru je grupa $SO(1,4)$, jejíž generátory

$$K_{\alpha\beta} = i \left(x_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\beta} - x_\beta \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right),$$

které, jak již bylo zmíněno, jsou často označovány jako Killingovy vektory, splňují komutační pravidla pro ortogonální grupy [7]

$$1. \quad i[K_{\alpha\beta}K_{\gamma\delta}] = \eta_{\alpha\gamma}K_{\beta\delta} - \eta_{\alpha\delta}K_{\beta\gamma} - \eta_{\beta\gamma}K_{\alpha\delta} + \eta_{\beta\delta}K_{\alpha\gamma}.$$

4.2 Casimirovy operátory

4.2.1 Casimirovy operátory pro Poincarého grupu

V této sekci ukážeme, jak vypadají Casimirovy operátory, které jsme zavedli v *definici* 1, pro Poincarého grupu. Využijeme-li generátorů z předchozí kapitoly, tak dostaneme pro Casimirovy operátory následující vztahy.

Definice 27 (Kvadratický Casimirův operátor). [17] *První Casimirův operátor Poincarého algebry, občas nazývaný jako kvadratický. Tento operátor souvisí s klidovou hmotností a je definovaný jako kvadrát hybnosti*

$$C_2 = -P^\mu P_\mu.$$

Zajímavé pozorování je, že vlastní čísla c_2 operátoru C_2 nejsou pozitivně definitní [7]. Pokud bychom s ním počítali, tak musíme brát v úvahu 3 hodnoty vlastních čísel c_2 , a to ($c_2 > 0$), ($c_2 = 0$) a ($c_2 < 0$). Těmto možnostem pak odpovídá časupodobný, světelný a prostorupodobný interval.

Definice 28 (Kvartický Casimirův operátor). [17] *Druhým Casimirovým operátorem je operátor čtvrtého stupně splňující následující rovnici*

$$C_4 = -\frac{P^2 J_{\mu\nu} J^{\mu\nu}}{2} + J_{\mu\rho} P^\rho J^{\mu\sigma} P_\sigma.$$

Speciálně ve 4 dimenzích se tento operátor dá vyjádřit jako kvadrát takzvaného Pauliho-Lubanskiho vektoru.

Definice 29 (Pauliho-Lubanskiho vektor). [17] *Pauliho-Lubanskiho vektor W^μ je definovaný jako $W^\mu := \frac{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} J_{\nu\rho} P_\sigma}{2}$.*

S jeho použitím pak tedy můžeme přepsat druhý z Casimirových operátorů do úhlednějšího vztahu

$$C_4 = W_\mu W^\mu.$$

4.2.2 Casimirovy operátory na de Sitterově prostoru

Definice 30 (Casimirův operátor Q_1). [7] *První z Casimirových operátorů na tomto prostoru definujeme jako*

$$Q_1 = -\frac{K_{\alpha\beta} K^{\alpha\beta}}{2}$$

Definice 31 (Casimirův operátor Q_2). [7] *Druhý z Casimirových operátorů napíšeme elegantním vztahem. Abychom to ale mohli udělat, tak si zdefinujeme pomocný vektor W^α jako*

$$W^\alpha = \frac{\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta\zeta} K_{\beta\gamma} K_{\delta\zeta}}{8}$$

Pomocí tohoto vztahu můžeme Casimirův operátor vyjádřit jako

$$Q_2 = -W_\alpha W^\alpha$$

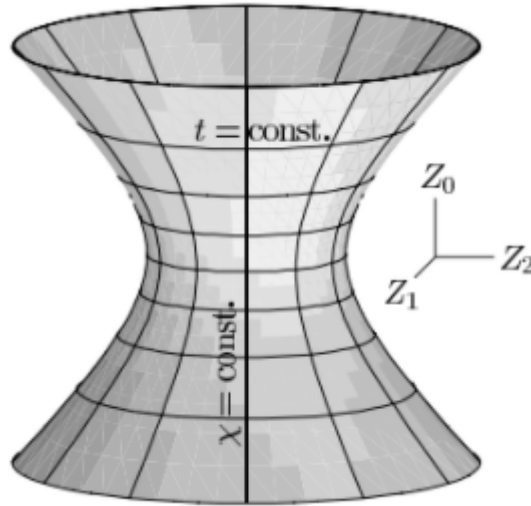
Oba operátory opět souvisí se zachovávanou se veličinou. V Poincarého grupě byla jednou z těchto veličin hmotnost, ale zde tomu tak není. Díky neexistenci zákona zachování hmoty tak hraje de Sitterův prostor důležitou roli v CCC, protože by mohl pomoci s přeměnou hmotných částic na nehmotné.

4.3 Souřadnice na de Sitterově prostoru

Jak již bylo zmíněno, de Sitterův prostoročas je varieta, která může být zobrazena jako hyperboloid vnořený do 5-ti Minkovského prostoročasu, daný rovnicí [18]

$$-X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = a^2,$$

kde a můžeme vyjádřit pomocí kosmologické konstanty jako $a = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}$. De Sitterův prostor je znázorněn na obrázku 4.1.



Obrázek 4.1: Znázornění de Sitterova prostoru; Převzato z: [18]

Pro metrický tenzor zde platí následující vztah

$$ds^2 = -dX_0^2 + dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2 + dX_4^2$$

Chceme-li s hyperboloidem pracovat, musíme na něm zvolit nějaké souřadnice. Možností je neomezeně, my však ukážeme 3 nejméně používané.

4.3.1 Souřadnice dané řezu hyperboloidu pomocí 3-sféry

Tyto souřadnice jsou, vzhledem k objektu se kterým pracujeme, první možností, která každého napadne. Jsou definovány následovně [18]

$$\begin{aligned} Z_0 &= a \sinh\left(\frac{t}{a}\right), \\ Z_1 &= a \cosh\left(\frac{t}{a}\right) \cos(\chi), \\ Z_2 &= a \cosh\left(\frac{t}{a}\right) \sin(\chi) \cos(\theta), \\ Z_3 &= a \cosh\left(\frac{t}{a}\right) \sin(\chi) \sin(\theta) \cos(\phi), \\ Z_4 &= a \cosh\left(\frac{t}{a}\right) \sin(\chi) \sin(\theta) \sin(\phi). \end{aligned}$$

Rozsah parametrů, na kterých jsou závislé, zvolíme jako : $t \in (-\infty, \infty)$, $\chi \in [0, \pi]$, $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi]$. Vztah pro metrický tenzor pak v těchto souřadnicích nabyde tvaru [18]

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 \cosh^2\left(\frac{t}{a}\right) (d\chi^2 + \sin^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2))$$

Pozorovateli v těchto souřadnicích by se prostoročas jevil jako uzavřený, sféricky symetrický vesmír expandující v čase. Rychlost expanze by byla úměrná faktoru $\cosh\left(\frac{t}{a}\right)$.

4.3.2 Sférické souřadnice

Další možností jsou sférické souřadnice, které zavedeme předpisem [18]

$$\begin{aligned} Z_0 &= \sqrt{a^2 - R^2} \sinh\left(\frac{t}{a}\right), \\ Z_1 &= \sqrt{a^2 - R^2} \cosh\left(\frac{t}{a}\right), \\ Z_2 &= R \cos(\theta), \\ Z_3 &= R \sin(\theta) \cos(\phi), \\ Z_4 &= R \sin(\theta) \sin(\phi), \end{aligned}$$

kde rozmezí parametrů použitých ve sférických souřadnicích je následovné : $t \in (-\infty, \infty)$, $R \in [0, a]$, $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi]$. Potom [18]

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{\Lambda}{3}R^2\right) dt^2 + \left(1 - \frac{\Lambda}{3}R^2\right)^{-1} dR^2 + R^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2)$$

4.3.3 Konformně ploché souřadnice

Poslední souřadnice, které zmíníme, připomínají ty kartézské. Vztahy, které je definují, jsou následovné [18]

$$Z_0 = \frac{a^2 + s}{2\eta_0},$$

$$Z_1 = \frac{a^2 - s}{2\eta_0},$$

$$Z_2 = \frac{ax}{\eta_0},$$

$$Z_3 = \frac{ay}{\eta_0},$$

$$Z_4 = \frac{az}{\eta_0},$$

kde rozsah parametrů je : $\eta_0, x, y, z \in (-\infty, \infty)$. Parametry zároveň musí splňovat $s = -\eta_0^2 + x^2 + y^2 + z^2$. Potom [18]

$$ds^2 = \frac{a^2}{\eta_0^2}(-d\eta_0^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

Pro pozorovatele v těchto souřadnicích by se de Sitterův prostoročas jevil jako by byl složený z plochých prostorových částí.

5. De Sitterův prostor jako faktorprostor a možná definice hmoty v něm

V této části provedeme explicitní konstrukci reprezentace de Sitterova prostoru pomocí faktorizace grup a následně ukážeme možnou definici hmoty řešící absenci vhodného Casimirova operátoru.

5.1 Faktorprostor $dS(1,3)$

Je známo, že de Sitterův prostor $dS(1,3)$ lze zapsat jako faktorová grupa $\frac{SO(1,4)}{SO(1,3)}$. Platnost tohoto vztahu ukážeme v následujících pěti krocích.

1. Nejprve ukážeme, že pro libovolný vektor $v \in dS(1,3)$ existuje taková matice $g \in SO(1,4)$, že $g(v) = e_1 = (0,1,0,0,0)$. Vektor je zvolený tak, aby reprezentoval bod v invariantní hyperbole, kterou známe ze speciální teorie relativity. Tento hyperboloid bude časupodobný a představuje tedy de Sitterův prostor. Důležitá vlastnost tohoto hyperboloidu je, že se mezi jejími body můžeme pohybovat za pomoci Lorentzovy transformace. Z nich je složená grupa $SO(1,4)$ (obsahuje rotace a boosty). Z toho plyne, že se můžeme z libovolného bodu hyperboloidu dostat do $(0,1,0,0,0)$ působením prvků z $SO(1,4)$. Hyperboloid reprezentující de Sitterův prostor je tedy orbita prvku e_1 při působení grupy $SO(1,4)$.
2. Dále ukážeme, že stabilizér $G_{e_1} \in SO(1,4)$ vektoru e_1 je izomorfní $SO(1,3)$. Z definice stabilizéru (*definice 22*) víme, že musí být reprezentován maticí $M \in SO(1,4)$. Matice M bude mít rozměr 5×5 a musí na vektor $(0,1,0,0,0)$ působit jako identita. Bude tedy mít druhý řádek a sloupec nulový, až na pozici M_{22} , která bude rovna jedničce. Na zbytek matice je kladena jediná podmínka, a to že M musí být podmnožina $SO(1,4)$. Bude tedy obsahovat jen Lorentzovy transformace. Takováto matice bude zachovávat 5-ti rozměrný Minkovského prostoročasový interval. Je vidět, že se jedná o grupu $SO(1,3)$ reprezentovanou maticí, která je vnořená do vyšší dimenze.
3. V dalším kroku je potřeba definovat zobrazení $f : \frac{SO(1,4)}{SO(1,3)} \rightarrow dS(1,3)$, které bude hladké a bude zobrazovat $g \in SO(1,4)$ na $g(e_1)$. Mohli bychom explicitně definovat zobrazení, které by to splňovalo (například stereografickou projekci) a podívat se na jeho konkrétní vlastnosti, my ale použijeme obecnější postup a podíváme se na vlastnosti všech zobrazení splňujících výše zmíněné požadavky. Hladkost zobrazení je zde očividná. Libovolnou Lorentzovu transformaci lze rozložit na rotace a boosty, které jsou hladce závislé na námi zvolených úhlech a rychlostech.
4. Na konec je třeba ukázat, že je zobrazení $f : \frac{SO(1,4)}{SO(1,3)} \rightarrow dS(1,3)$ bijektivní. To se nejjednodušeji udělá tak, že ukážeme surjektivnost a injektivnost zobrazení. Začneme surjektivností. Je potřeba ukázat, že každému obrazu

odpovídá alespoň jeden vzor. Zde se využije bod 1. Známe-li alespoň jeden bod na hyperboloidu (e_1) , tak víme, že na každý další bod se dostaneme pomocí Lorentzovi transformace. Ty jsou ale obsaženy v $SO(1,4)$. Z toho plyne, že pro každý bod z $dS(1,3)$ bude existovat vzor.

5. Injektivnost (různým vzorům zobrazení přiřadí různé obrazy) se ukáže pomocí bodu 2. Zde vyjdeme z vlastnosti faktorových grup. Mějme grupu G a její normální podgrupu H . Faktorizace nám dá, velmi zjednodušeně, grupu $\frac{G}{H}$, která si ponechá strukturu grupy G , ale nebude obsahovat prvky podgrupy H . V bodu 2 jsme ukázali, že stabilizér je izomorfní grupě $SO(1,3)$. Z *definice* 22 ale víme, že stabilizér přiřadí jednomu obrazu více vzorů. Kdybychom uvažovali jen grupu $SO(1,4)$, tak by každý bod měl nejednoznačný vzor díky podgrupě $SO(1,3)$. Když ale faktorizací tuto vlastnost odstraníme, tak dostáváme jednoznačný vztah mezi vzorem a obrazem. Zobrazení je tedy injektivní a v kombinaci s bodem 4 je jasné, že je i bijektivní.

Tím jsme ukázali, že vskutku můžeme $dS(1,3)$ vyjádřit jako $\frac{SO(1,4)}{SO(1,3)}$

5.2 Garidiova definice hmoty

Abychom si mohli uvést možnou definici hmoty na de Sitterově prostoru, tak se první musíme podívat na vlastní čísla Casimirova operátoru Q^1 a Q^2 a na reprezentace hlavní série. Vlastní čísla vyjádříme pomocí parametrů (p, q) , kde $q \in \mathbb{C}$ a $2p \in \mathbb{N}$. Vztah mezi parametry a vlastními čísly operátorů je následovný [7]

$$\begin{aligned} q^1 &= [-p(p+1) - (q+1)(q-2)], \\ q^2 &= [-p(p+1)q(q-1)]. \end{aligned}$$

Když si zavedeme nový parametr $\nu \in \mathbb{R}$, tak potom při využití vztahu $(p, q) = (p, \frac{1}{2} + i\nu)$ můžeme Casimirovy operátory přepsat na [7]

$$\begin{aligned} q^1 &= [(\frac{9}{4} + \nu^2) - p(p+1)]E, \\ q^2 &= [(\frac{1}{4} + \nu^2)p(p+1)]E. \end{aligned}$$

Garidi si uvědomil, že v principu lze definovat hmotu na de Sitterově prostoru ve vztahu k hmotnosti na Minkovského prostoru. Přirozeně pak požaduje aby parametr, který odpovídá hmotě, byl reálný. Chtěli bychom tedy vlastní čísla q^1 Casimirova operátoru Q^1 spojit s hmotností. Ukáže se, že to můžeme provést v limitě $\Lambda \rightarrow 0$. Podíváme se na základní stav hmotnosti. Hledáme tedy p, q takové, aby hmotnost byla co nejmenší. To je splněno pro $p = q$. Zdefinujeme pomocnou veličinu $H \equiv \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}$. Hmotu na de Sitterově prostoru je pak definována jako [7]

$$m_H^2 \equiv H^2(q^1 - q_{q=p}^1) = q^1 H^2 + 2(p^2 - 1)H^2 = H^2[(p - q)(p + q - 1)].$$

Hmotnost v Poincarého grupě m se dá díky vztahu generátorů a Casimirových operátorů vyjádřit jako $m = \nu H$. Tento vztah musí platit i při přechodu od de Sitterovy k Poincarého grupě pomocí $H \rightarrow 0$ a $\nu \rightarrow 0$. To vede na škálování $q \sim \frac{im}{H}$. V limitě $H \rightarrow 0$ máme tedy $m_H^2 \rightarrow m^2$. Na základě tohoto zjištění můžeme říct, že $Q^1 \rightarrow C^2$ pro $\Lambda \rightarrow 0$.

Závěr

V této práci jsme se podívali na fyzikální i matematický popis de Sitterova prostoru a jeho význam. Hlavním bodem této práce je formulace de Sitterova prostoru jako $dS(1,3) = \frac{SO(1,4)}{SO(1,3)}$ a rozebrání problému s definicí a významem hmoty.

V úvodu jsme se seznámili a krátce si připomněli základní pojmy, na kterých stojí tato práce: Einsteinovy rovnice, kosmologická konstanta, její význam a interpretace, Galileova, Poincarého a de Sitterova grupa a představa de Sitterova prostoru jako hyperboloidu.

V motivaci práce jsme se podívali na zajímavou teorii konformní cyklické kosmologie (CCC), se kterou přišel sir Roger Penrose. Podle ní se náš vesmír vyvíjí a zaniká v cyklech, které jsou mezi sebou napojeny konformním zobrazením. Ukázali jsme, že pro napojení hraje důležitou roli světelný kužel a třídy ekvivalentních metrik. Dále jsme se podívali, co se ve vesmíru musí stát, aby k tomu mohlo dojít. Konkrétně, je potřeba aby v budoucnosti byla energie uložena v kinetické složce, takže musí z vesmíru vymizet všechna hmota. Většina hmoty by se měla přeměnit na energii za pomoci černých děr. Zbytek se nezachová kvůli zajímavé vlastnosti de Sitterova prostoru, který souvisí s Casimirovými operátory. Pro jejich pochopení a pro schopnost s nimi pracovat je však důležité se podívat na matematiku, která je vhodně popisuje.

Ještě předtím, než jsme se soustředili na matematický aparát, jsme se podívali na pozorování, která by mohla CCC potvrdit či vyvrátit. Samozřejmě, hlavní cíl naší pozornosti bude reliktní záření. Jako pozůstatek velkého třesku může obsahovat stopy o existenci předešlého vesmíru. V tomto záření hledáme buď místa, která svým tvarem připomínají kruh nebo soustředné kružnice. Oba útvary se vyznačují tím, že mají odlišnou teplotu ve srovnání s okolím. Pokud by tyto jevy byly v reliktním záření pozorovány s dostatečně velkou jistotou, pak by CCC byla jediná z moderních teorií, která by vysvětlovala jejich existenci.

Pro formulaci de Sitterova prostoru jsou esenciální faktorové grupy. Než jsme je však mohli definovat, museli jsme si zavést několik pojmů. První na řadě byly normální podgrupy, na které jsme se podívali i s využitím úplných tříd sdružených prvků. Pak jsme mohli přejít k pravým a levým rozkladovým třídám. Obě třídy jsme definovali jen pro úplnost, dále používáme jen levé rozkladové třídy. Stojí za připomenutí, že je jen otázkou konvence, jaké rozkladové třídy použijeme pro tvrzení, která následují. Fyzika musí být pro obě možnosti stejná. Poté jsme se konečně dostali k faktorovým grupám a jejich vlastnostem. Pro důležité koncepty v této části jsme pro lepší pochopení uvedli ilustrační příklad.

Dále jsme se podívali na modernější přístup k fyzice za pomoci Lieových grup a Lieových algeber. Tato matematická teorie z konce 19. století hraje velmi důležitou roli v moderním pojetí fyziky a pohledu na ní. Existují dva pohledy na Lieovy grupy. První, starší, využívá maticové reprezentace grup a novější přístup se na tuto problematiku dívá z geometrického hlediska. Před samotnou definicí Lieovy grupy a algebry je potřeba zavést pojmy, na kterých stojí. Těmi jsou například topologický prostor, tečný bundl, vektorová pole, křivka, integální křivka a Lieova závorka.

Dále jsme se podívali na grupové akce, kde byla zdůrazněna důležitost orbity

prvku a stabilizéru. Na konec této kapitoly jsme zadefinovali, co je to levé posunutí a jak souvisí s levoinvariantním polem.

Ve třetí kapitole jsme se dostali k hlavní části práce. Nejprve jsme se podívali na to, jak je definována reprezentace Lieovy grupy. Zde jsme se poprvé setkali s generátory Lieovy grupy. Generátory jsou bází Lieovy algebry a pomocí exponentního zobrazení z nich dostaneme Lieovu grupu. Po zavedení generátorů jsme zaměřili svoji pozornost nejdříve na Poincarého grupu a poté na de Sitterovu.

Dále jsme zmínili význam a důležitost Casimirových operátorů, které reprezentují zachovávací se veličiny. Ukázali jsme jejich tvar pro námi využívané grupy, jmenovitě Poincarého a de Sitterovu. Pro první ze zmíněných grup je Casimirov operátor C_2 spojen s hmotou. To samé se ale nedá říci o kterémkoliv z Casimirových operátorů na de Sitterově prostoru, neboť zde pojem hmoty nemá jasně daný význam. Pokusu o její definování se věnujeme v závěru práce. Garidi se pokusil dát hmotě na de Sitterově prostoru význam tím, že ji spojil s klidovou hmotností v Poincarého grupě, tj. v limitě pro $\Lambda \rightarrow 0$.

Dalším tématem jsou souřadnice na de Sitterově prostoru. Vzhledem k tomu, že může být vnímán jako hyperboloid, tak nejpřirozenější, i když ne vždy nejvhodnější, volbou budou souřadnice dané řezu hyperboloidu pomocí 3-sféry. Další často používané možnosti jsou sférické a konformně ploché souřadnice.

Tím jsme se dostali k hlavní části práce, faktoro prostoru $dS(1,3) = \frac{SO(1,4)}{SO(1,3)}$. To je tvrzení, které lze najít v mnoha učebnicích či článcích. Nikde ale není ukázané explicitně, proč tento vztah platí. Nejbližší tomu měla kniha [19], ale důkaz byl pro trochu odlišný faktorprostor. Navíc prakticky nebyl rozepsán a bylo tedy složité aplikovat postup z knihy na náš případ. Také byl proveden za pomoci stereografické projekce, kterou je složité zobecnit do vyšších dimenzí, takže tento důkaz ztrácí na obecnosti. V důkazu provedeném v této práci jsme platnost vztahu ukázali v 5-ti krocích. V nich jsme využili vlastností invariantního hyperboloidu ze speciální teorie relativity, konkrétně jeho uzavřenost vůči Lorentzově transformaci, určili vektor, pro který je hyperboloid časupodobný a určili jeho stabilizér. Pak jsme definovali obecné zobrazení $f : \frac{SO(1,4)}{SO(1,3)} \rightarrow dS(1,3)$ a ukázali jsme, že je hladké a bijektivní. Tím jsme ukázali platnost vztahu pro $dS(1,3)$.

Seznam použité literatury

- [1] CACCIATORI S. , GORINI V. a KAMENSHCHIK A. Special Relativity in the 21st century. *Annalen der Physik* [online]. 2018, 17(9-10), 1-40 [cit. 2021-7-19]. Dostupné z: <https://arxiv.org/pdf/0807.3009.pdf>
- [2] ALDROVANDI R., ALMEIDA J. P. B., a PEREIRA J. G. Some Implications of the Cosmological Constant to Fundamental Physics. *AIP Conference Proceedings* [online]. 2007, 910, 1-24 [cit. 2021-7-21]. Dostupné z: <https://arxiv.org/pdf/gr-qc/0702065.pdf>
- [3] ALDROVANDI R., ALMEIDA J. P. B., a PEREIRA J. G. De Sitter special relativity. *Class. Quantum Grav.* [online]. 2007, 24(1385), 1-24 [cit. 2021-7-21]. Dostupné z: <https://arxiv.org/pdf/gr-qc/0606122.pdf>
- [4] PENROSE R. The basic ideas of conformal cyclic cosmology. *AIP Conference Proceedings* 1446, 233-243 (2012) [online]. [cit. 2021-6-27] Dostupné z: <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.4727997>
- [5] ARAUJO A., JENNEN H., PEREIRA J.G. et al. On the spacetime connecting two aeons in conformal cyclic cosmology. *Gen. Relativ. Gravit.* 47, 151 (2015), 1-15. [online]. [cit. 2021-6-27] Dostupné z: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10714-015-1991-4>
- [6] Particle data group [online]. 2020 [cit. 2021-7-3]. Dostupné z: https://pdg.lbl.gov/2021/listings/contents_listings.html
- [7] BOERS M. Group theory and de Sitter QFT: The Concept of Mass. Groningen, 2013. Master's Thesis. University of Groningen. Vedoucí práce Dr. DIEDERIK R.
- [8] AN D., MEISSNER K. A., NUROWSKI P., PENROSE R. Apparent evidence for Hawking points in the CMB Sky. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 495, 3 (2020), 3403-3408. [online] [cit. 2021-6-29] Dostupné z: <https://arxiv.org/pdf/1808.01740v4.pdf>
- [9] PENROSE R. a V. G. GURZADYAN. Concentric circles in WMAP data may provide evidence of violent pre-Big-Bang activity [online]. 2010, , 1-7 [cit. 2021-6-30]. Dostupné z: <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1011/1011.3706.pdf>
- [10] MOSS A., SCOTT D. a ZIBIN J. Z. No evidence for anomalously low variance circles on the sky. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* [online]. 2011, 07.04.2011, 2011(04), 1-4 [cit. 2021-6-30]. Dostupné z: <https://arxiv.org/pdf/1012.1305v3.pdf>
- [11] JOW D. L. a SCOTT D. Re-evaluating evidence for Hawking points in the CMB. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* [online]. 2020, 2020(03), 1-10 [cit. 2021-6-30]. Dostupné z: <https://arxiv.org/pdf/1909.09672.pdf>
- [12] ABBOTT ET AL. (LIGO SCIENTIFIC COLLABORATION AND VIRGO COLLABORATION), B. P. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Physical Review Letters* [online]. 2016, 11.2.2016, 116, 1-16 [cit. 2021-7-10]. Dostupné z: <https://journals.aps.org/prl/pdf/10.1103/PhysRevLett.116.061102>
- [13] ISHAM C. J. Modern Differential Geometry for Physicists. 2. London: World Scientific Publishing Co. Ptc., 1999. ISBN 981-02-3555-0.

- [14] KOLORENČ P. studijní text k semináři NTMF061 : Teorie grup a její aplikace ve fyzice [online] [cit. 2020-03-22]
URL: <<http://utf.mff.cuni.cz/kolorenc/#grupy>>
- [15] BUTLER P. H. Point Group Symmetry Applications: Methods and Tables. 2. Wien: Springer US, 2011. ISBN 1461331439.
- [16] CORNWELL J. F. Group Theory in Physics. 1. San Diego: Harcourt Brace & Company, Publishers, 1997. ISBN 0-12-189800-8.
- [17] BEKAERT X. a BOULANGER N. The unitary representations of the Poincare group in any spacetime dimension [online]. , 1-5 [cit. 2021-7-10]. Dostupné z: <https://arxiv.org/pdf/hep-th/0611263.pdf>
- [18] PODOLSKÝ J., a GRIFFITHS J. B. Exact Space-Times in Einstein's General Relativity. New York: Cambridge university press, 2009. ISBN 978-0-511-63386-7
- [19] FRÈ P. G. Gravity, a Geometrical Course: Volume 2: Black Holes, Cosmology and Introduction to Supergravity. Dordrecht Heidelberg New York London: Springer, 2013. ISBN 978-94-007-5442-3.