Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Zavádění obsahu mnohoúhelníků, zejména metodou uvolňování parametru, v primární škole

Introducing the area of polygons, particularly by method of releasing parameter in primary schools

Luděk Kovář

Vedoucí diplomové práce:	Mgr. Jaroslava Kloboučková
Studijní program:	Učitelství pro základní školy (M7503)
Studijní obor:	I. ST (7503T047)

2016

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma „Zavádění obsahu mnohoúhelníků, zejména metodou uvolňování parametru, v primární škole“ vypracoval pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Praha, 9. 12. 2016

……………………………..

podpis

Poděkování

Děkuji Mgr. J. Kloboučkové za odborné vedení této práce, za cenné rady a věcné připomínky. Poděkování patří i mé rodině a přátelům, kteří mě podporovali po celou dobu studia. Poděkování patří také vedení fakultní základní školy, která mi umožnila provedení experimentu a zpracování celé diplomové práce. V neposlední řadě děkuji i všem žákům, kteří se účastnili celého experimentu v jakékoliv jeho fázi.

ABSTRAKT

Tato práce se zabývá popisem konstruktivisticky vedené výuky matematiky ve třetím ročníku základní školy se zaměřením na geometrii a konkrétně na jeden ze způsobů zavádění obsahu obecného trojúhelníku, který vyjadřuje vztah mezi stranou a příslušnou výškou a tímto obsahem. V práci popisuji šest konkrétních výukových hodin od jejich přípravy, popisu průběhu a vlastní reflexe, analyzuji v nich některé kognitivní jevy a zabývám se i sociálními vztahy mezi žáky. Dále uvádím podrobný rozbor úloh ze závěrečného diagnostického testu, kde se snažím ověřit úspěšnost takto vedené výuky. Po čtyřech letech se snažím o ověření trvalosti takto získaných poznatků v mysli žáků, což dokumentuji rozborem dalších úloh. Průběh celého experimentu byl veden metodou uvolňování parametru. Jednotlivé vyučovací hodiny byly v souladu s uvedenými etapami této metody popsané v odborné literatuře. V práci uvádím, že jsem ověřil použitelnost této metody i ve výuce matematiky již ve třetím ročníku základní školy.

KLÍČOVÁ SLOVA

styly výuky, obvod a obsah, čtvercová síť, mnohoúhelník, parametr, metoda uvolňování parametru

ABSTRACT

This thesis deals with the description of constructive approach to teaching mathematics in the third grade of primary school. Teaching mathematics is focused on geometry, specifically on one way of introducing the area of the scalene triangle which describes the relation between a side and its height and corresponding area. In the thesis I describe six particular lessons, their preparation, process of their realization and my own reflections. In these lessons, I analyse some cognitive phenomena as well as social relationships among pupils. Furthermore, I present a detailed examination of tasks from the final diagnostic test, in which I aim towards proving success of this method of teaching mathematics. After four years, I attempt to verify the permanency of the knowledge pupils gained in these particular lessons. I illustrate this by presenting analysis of additional exercises. The whole experimental process was led within the method of releasing parameter. Individual lessons were in accordance with given stages of this method, as described in specialised literature. I verified that the above mentioned method is applicable in teaching mathematics even in the third grade of the primary school.

KEYWORDS

bla teachingstyles, perimeter and area,square grid, polygon, method of releasing parameter

Obsah

1 Úvod

Téma své diplomové práce jsem vybral s ohledem na dvě oblasti – svou zálibu k matematice, kterou jsem znovu nabyl díky studiu na Pedagogické fakultě Karlovy univerzity v Praze, a své dosavadní zkušenosti s prací mezi dětmi mladšího školního věku.

Prvotní myšlenkou pro volbu tématu práce byla moje vlastní neznalost toho, jak objevit pro mě neznámý vzorec. Po vlastní zkušenosti s metodou objevování vzorců mě zaujal nápad vyzkoušet, zda jsou žáci mladšího školního věku také schopni objevit pro ně neznámý vzorec. Tuto hypotézu jsem se rozhodl ověřit s dětmi v tehdejším 3. ročníku 1. stupně základní školy. Během svého studia jsem se totiž setkával s žáky i studenty různého věku a různého předchozího vzdělání, kteří při řešení úloh z tematického celku obvod/obsah spoléhali především na svou paměť. Nevyužívali a ani se nesnažili zapojit svou představivost, která je dle mého názoru v dětském věku jedním z hlavních prostředků pro strategii řešení těchto úloh. Právě tímto tematickým celkem a jeho didaktikou jsem se rozhodl zabývat v této práci.

Při zadávání tématu diplomové práce jsem měl na mysli především tyto otázky: Proč vlastně žák mladšího školního věku oba pojmy navzájem zaměňuje? Proč má leckdy problém se správným užitím vzorce? Proč žák nerozumí vztahům mezi jednotlivými parametry vzorce? Proč používá vzorec pouze jako mechanický prostředek k dosažení správného výsledku? Proč si poradí většinou jen se standardními úlohami a nestandardní vůbec nezačne řešit? Brzy jsem pochopil, že vytváření jednotlivých pojmů ve vědomí žáků je složitý a dlouhodobý proces, který nelze urychlit formálním přijetím vzorce, že vznik pojmu ve vědomí žáka je důsledkem aktivní práce, že v pojmotvorném poznávacím procesu je potřeba dodržet všechny jeho etapy tj. synkretickou, předmětnou, intuitivně-abstraktní a strukturální.

Při přípravě práce jsem se potýkal s problematikou nedostatku publikací zabývajících se metodou systematického prohledávání, a to metodou uvolňování parametru.

V teoretické části práce se krátce zabývám podobou závazných osnov českého školství před schválením RVP ZV, tedy před rokem 2005, a dále zakotvením vzdělávací oblasti

Matematika a její aplikace v dnešní podobě RVP ZV. Zaměřuji se i na jednotlivé výstupy prvního a druhého období, i na to, jak jsou tyto výstupy ve výuce naplňovány. Dále se zabývám jednotlivými styly výuky, které ovlivňují pojmotvorný proces žáků a uvádím rozdíly mezi nimi. Zajímavé pro mě bylo i zjištění, že v sémantických úlohách je žák schopen určit, zda se jedná o obvod či obsah. Pokud však úloha není zasazena do kontextu běžného života, dochází často k záměně obou pojmů tudíž i vzorců uchopených pamětně.Proto jsem se také podrobněji zabýval etymologickým významem klíčových slov obvod a obsah a jejich možnými významy v různém kontextu českého jazyka. V poslední kapitole teoretické části uvádím své vlastní použití metody uvolňování parametru při „objevení“ neznámého vzorce. Při svém dosavadním studiu jsem poznal Heronův vzorec pro výpočet obsahu obecného trojúhelníku i vzorec pro výpočet obsahu obecného lichoběžníku. Nejdříve jsem se snažil pro sebe odvodit Heronův vzorec, což však nebylo korunováno úspěchem, a proto jsem úspěšně odvodil vzorec pro výpočet obsahu obecného lichoběžníku.

V praktické části se zabývám vlastním kvalitativním výzkumem uskutečněným ve 3. ročníku jedné základní školy v Praze. Popisuji zde, jak se v jednotlivých experimentech snažím dovést žáky k objevení a pochopení vztahů mezi stranou a výškou v obecném trojúhelníku, aby byli schopni aktivně využívat vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníku. S žáky jsem pracoval v osmi vyučovacích hodinách a na konci výzkumu jim byl předložen diagnostický test. V této části práce popisuji metody výzkumu, přípravy jednotlivých experimentů s důležitými kognitivními poznatky žáků, a dílčí i celkové výsledky celého výzkumu.

1.1 Stanovení cílů práce

Hlavním cílem této diplomové práce je zavedení obsahu mnohoúhelníku zejména metodou uvolňování parametru v primární škole. V souladu s názvem práce a s tématy, kterými se v ní zabývám, jsem stanovil dílčí cíle této práce.

1) *„Definovat kritická místa ve výuce daného tematického celku (z pohledu učiva, učebnic, učitelů a především samotných žáků), která mohou působit negativně na porozumění tematického celku obvod a obsah mnohoúhelníků.“*

Za kritická místa ve výuce daného celku považuji etymologický význam obou pojmů a koncepci tematického celku v učebnicích různých nakladatelství s ohledem na propedeutiku tematického celku, na pochopení pojmů a na vyvození vzorce pro výpočet obvodu a obsahu.

2) *„Hlouběji porozumět metodě uvolňování parametru a užívat jí jako nástroj pro hluboké porozumění jednotlivým vzorcům z rovinné geometrie."*

Vlastní poznatky a výpočty pro vyvození obecného vzorce pro výpočet obsahu mnohoúhelníku jakožto nástroje pro hlubší poznání metody systematického postupu hledání vzorce.

3) *„Připravit a zrealizovat dlouhodobý kvalitativní výzkum týkající se obsahu trojúhelníku z pohledu vztahu mezi stranou a příslušnou výškou (uskutečnit sérii experimentů, které dovedou běžnou třídu žáků nejen k pasivní znalosti vztahu S=z*v/2, ale které budou tomuto vztahu skutečně také rozumět a užívat jej ve smysluplných situacích běžného života)."*

S ohledem na zvolenou věkovou kategorii účastníků experimentu a s ohledem na rozsáhlost problematiky týkající se obsahu mnohoúhelníků, jsem se zaměřil pouze na problematiku trojúhelníků.

1.2 Vlastní cesta k matematice a didaktice matematiky

Moje vlastní zkušenost s matematikou začala v sedmi letech, kdy jsem nastoupil na sídlištní základní školu v Praze, kde bylo otevřeno pět prvních tříd. Na celém prvním stupni patřila matematika mezi mé oblíbené vyučovací předměty. V současné době po důkladnějším studiu didaktiky matematiky, se domnívám, že vyučující, kteří se na mé výuce matematiky podíleli, zřejmě nepřinášeli do výuky žádné prvky konstruktivismu a výuka probíhala transmisivně-instruktivním stylem výuky. I přesto u mě matematika neztrácela na oblibě. Uvědomuji si, že jsem si vytvořil myšlenkové spoje u aditivních i multiplikativních početních operací jejich častým mechanickým opakováním. Podobné to zřejmě bylo i s geometrií, tedy i s tematickým celkem obvod/obsah. Matně si vybavuji, že nám byl předložen rovinný útvar např. čtverce a jeho průvodní jevy formou pouček, které bylo nutno se naučit. Pokud se jednalo o obvod či obsah nějakého rovinného útvaru, byl vždy v učebnici v rámečku uveden vzorec, který jsme se učili aplikovat na různé situace z běžného života.

Na druhém stupni základní školy pokračovala výuka transmisivně-instruktivním stylem, což dnes již snad mohu více posoudit, protože mi utkvěly v paměti i konkrétní situace z výuky matematiky. Nevzpomínám si, že by frontální výuka byla někdy obohacena o nějaké prvky konstruktivismu, neuvědomuji si, že bychom v hodinách matematiky zažívali radost z objevu, sdílet poznatky mezi spolužáky bylo nepředstavitelné. Naopak si velmi dobře vzpomínám, že jsme po celou dobu výuky seděli v lavicích a opisovali z tabule vše, co na ní vyučující napsal, výjimečně šel některý z šikovnějších žáků k tabuli vypočítat nějakou úlohu. Prohloubení učiva tematického celku obvodu a obsahu spočívalo opět v mechanickém užití vzorce v jednotlivých úlohách. Nikdy nedošlo k odvození vzorce ani ze strany vyučujícího, natož abychom se o tuto činnost někdy pokoušeli my žáci. Za celé čtyři roky byla výuka naší třídy nejen v matematice neustále přizpůsobována slabším žákům a vedena v tempu, které jim vyhovovalo. Důsledkem toho bylo, že většina třídy „jela učivo podle učebnice“. Individuální přístup ke zdatnějším žákům vyučující nepraktikoval, a proto jejich mentální aktivita stagnovala nebo dokonce klesala. S obdobnými pocity stagnace a nezájmu o předmět jsem přešel na čtyřleté gymnázium s všeobecným zaměřením v Praze.

Na gymnáziu nepatřila matematika již k mým oblíbeným předmětům. Vyučovací hodiny jsem proseděl s nezájmem a snažil se zapsat postupy, vzorce a úlohy z tabule. Moje vlastní aktivita byla nulová. Jediné odvětví matematiky, které ve mně vzbuzovalo zájem, byla geometrie, kde jsem uplatnil svou představivost. I u ní se však projevoval předchozí vliv transmisivně-instruktivního stylu výuky, a tak jsem měl například problém s konvekčním zápisem konstrukce, ač jsem neměl problém představit si výsledný rovinný útvar. Výuka tematického celku obvod a obsah probíhala obdobně jako na základní škole, úlohy však byly náročnější, a tak se začala naplno projevovat neznalost jednotlivých vztahů mezi parametry vzorce. Znalost samotného vzorce byla díky mechanickému opakování zautomatizována, ale nepochopení vlastního významu vzorce vedlo často k chybnému dosazení. V maturitním ročníku jsem na matematiku zanevřel úplně a vyučující se s tímto přístupem smířila u všech žáků, kteří z předmětu nematurovali.

Po gymnáziu jsem začal studovat na Pedagogické fakultě Karlovy univerzity v Praze obor Učitelství pro 1. stupeň ZŠ a vrátil jsem se tedy k matematice do doby, kdy jsem k ní měl ještě kladný vztah. Kladný vztah k tomuto předmětu v daném období byl umocněn novým pojetím matematiky pro 1. stupeň a to s Hejného metodou. Vyučující ji na jednotlivých seminářích přímo praktikovali, takže studenti měli možnost vyzkoušet sami na sobě, jak podněcuje k myšlení každého žáka ve třídě. Hejného metoda mě zaujala již v prvním ročníku studia a znovu ve mně probudila zájem o tento předmět. Postupně jsem byl seznámen s jednotlivými prostředími a se samotnou koncepcí celé metody. Přednášky a cvičení nebyly vedeny tak, jak jsem byl doposud zvyklý, nebyly pouze o mechanické práci a memorování poznatků jako na střední škole, ale pomocí nepřímého vedení vyučujících jsme veškeré zákonitosti a vztahy objevovali sami. V hodinách matematiky jsem zažíval pro mne úplně novou zkušenost „radost z objevování", kterou jsem měl možnost zažívat skoro každou přednášku či cvičení. Poprvé jsem se prakticky seznámil s konstruktivistickým stylem výuky. Sám jsem se pak snažil své hodiny na praxích vést v duchu konstruktivismu a dovolit žákům zažívat stejnou radost, jakou ve mně, po letech strávených v českém školství, vzbudila nová koncepce výuky matematiky.

Logickým vyústěním těchto zkušeností byla snaha vyzkoušet, zda to, co fungovalo na studentech, bude fungovat i na žácích mladšího školního věku. Nezbytným předpokladem pro úspěšnou přípravu všech experimentů, bylo podrobné nastudování odpovídající literatury a její zpracování v teoretické části.

2 Teoretická část

V teoretické části se budu nejprve zabývat vzdělávacím oborem Matematika a její aplikace zakotveným v platné podobě Rámcově vzdělávacího programu pro základní vzdělávání (dále jen RVP ZV). Nejprve se krátce zaměřím na podobu tehdy platných osnov před vznikem RVP ZV. Poté uvedu charakteristiku vzdělávací oblasti a zaměřím se na její cíle a výstupy, které by měly být žákem zvládnuty po ukončení 1. stupně základní školy. Na základě studia odborné literatury vymezím jednotlivé styly výuky, které jsem zmínil již v úvodu této práce tj. transmisivní, instruktivní a konstruktivistický styl výuky. Uvedu nejprve charakteristiku jednotlivých stylů výuky se zaměřením na jejich výhody a nevýhody a pokusím se je vzájemně porovnat z pohledu učitel-žák. Pokusím se začlenit styl výuky třídy, kde jsem prováděl experimenty, do některé z uvedených charakteristik. Dále se v této části zaměřím na kritická místa ve výuce tematického celku obvod/obsah. Jak jsem předeslal výše, jedním z kritických míst ve výuce je podobnost obou pojmů z významového hlediska českého jazyka. Například v anglickém jazyce jsou oba výrazy diametrálně odlišné a pro obdobné etymologické významy v českém jazyce existují v anglickém jazyce různé pojmy. Do této kapitoly jsem zařadil i porovnání koncepce tematického celku v učebnicích pro 1. stupeň základní školy různých nakladatelství s ohledem na teorii generického modelu. Posledním tématem teoretické části je mé vlastní seznámení s metodou systematického prohledávání – metodou uvolňování parametru. S metodou jsem se poprvé seznámil při výuce na Pedagogické fakultě Karlovy univerzity v Praze. Nejprve jsem odvodil většinu vzorců, se kterými jsem se formálně seznámil na 1. a 2. stupni při vlastní výuce. Zde uvádím odvození vztahů pro obsah obecného lichoběžníku, jehož významu jsem teprve po jeho odvození skutečně porozuměl. Uvádím i neúspěšný pokus o odvození obecného vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníku na základě znalosti délek tří stran, tzv. Heronova vzorce.

2.1 Matematika a její aplikace v RVP ZV

Tato kapitola se zabývá vznikem RVP ZV, který ovlivňuje současnou podobu školství. Jako jedna ze vzdělávacích oblastí v něm je zakotvena Matematika a její aplikace. Jsou zde uvedeny její cíle a výstupy, které by si měli žáci v průběhu každého období osvojit.

2.1.1 Vznik vzdělávacích programů a RVP ZV

Vývojem primárního vzdělávání v České republice se po roce 1989 zabývá především Spilková (2005) a na ní navazuje ve své diplomové práci Pažourková (2007). Obě uvádějí, že snaha o reformu českého školství se začala projevovat po roce 1989 tak, aby byla v souladu s domácími tradicemi i s vývojovými trendy a tendencemi školství v západní Evropě. Pro státní školy začaly platit od školního roku 1991/1992 upravené učební osnovy. Ty přinesly uvolnění a větší prostor pro autonomii učitele, který mohl začít zařazovat do výuky nové metody a formy práce např. prvky konstruktivismu, skupinové nebo projektové vyučování. Velkou změnu pro učitele však přineslo zrušení státního monopolu na učebnice vydávané dosud v nakladatelství SPN, což sebou ale přineslo větší zodpovědnost jednotlivých škol s ohledem na problematiku kvality a kritérií při výběru vhodných učebnic.

V roce 1995 byl vytvořen Standard základního vzdělávání, který vznikl v návaznosti na program rozvoje vzdělávací soustavy České republiky vypracovaný MŠMT ČR, pod názvem Kvalita a odpovědnost. Tento Standard vyjadřoval představu o společenské podobě povinné školní docházky, o sledovaných cílech a vzdělávacím obsahu zprostředkovaném všem žákům. Sledované cíle odpovídají věkovému stupni a zralosti žáků.

Školní rok 1996/1997 přinesl, kromě prodloužení povinné školní docházky na 1. stupni základní školy o jeden rok, také schválení tří vzdělávacích programů pro základní vzdělávání, které nahradily dosavadní učební osnovy. Jedná se o programy Obecná škola, Základní škola, Národní škola.

Program Obecná škola má učivo matematiky rozděleno do čtyř tematických celků, kde jedním z nich je geometrie. Ta je zcela opřena o vlastní zkušenost žáků a vede k dosažení jak řemeslných dovedností, tak především k rozvoji geometrické představivosti a orientace v prostoru.

„*Matematické vzdělání je na obecné škole založeno na rozvíjení vlastních zkušeností žáka a vychází z přirozené touhy dětí předškolního věku počítat a kreslit. Žáci v matematice se učí řešením úloh a činnostmi.*“ (Vzdělávací program OBECNÁ ŠKOLA 1996, s. 11)

Program Základní škola zpracoval Výzkumný ústav pedagogický v Praze a stal se nejrozšířenějším programem v republice. Tematický celek obvod se objevuje v osnovách třetího ročníku, kdy se žáci učí určit obvod jednoduchého obrazce (trojúhelník, čtverec, obdélník) sečtením délek jeho stran. Ve čtvrtém ročníku uvádějí osnovy učivo obsah čtverce a obdélníku.

„*Matematika prostřednictvím matematických znaků, útvarů a pojmů uvádí žáky do číselných a prostorových vztahů ve skutečnosti, učí je logickému, kritickému a přesnému myšlení a usuzování. Poznatky a dovednosti získané v matematice jsou nezbytné pro životní praxi žáka i pro jeho další vzdělávací orientaci.*“ (Vzdělávací program ZÁKLADNÍ ŠKOLA 1996, s. 11)

Program Národní škola patří k nejméně využívaným v praxi. Učivo tematického celku obvod a obsah je obsaženo v 5. ročníku v oblasti geometrie, kdy by měli žáci zvládnout určit obvod trojúhelníku a čtyřúhelníků a obsah čtverce a obdélníku.

Rok 2001 přinesl zásadní změnu v reformě školství vznikem Národního programu rozvoje vzdělávání – Bílé knihy, jakožto uceleného konceptu vzdělávání v České republice. Tento dokument se věnuje klíčovým otázkám vzdělávání. Podporované metody a formy práce vedou k výuce kritického myšlení, kooperativní a projektové výuce a v neposlední řadě i ke spolupráci mezi učiteli. Bílá kniha se stala podkladem pro vznik nového školského zákona z roku 2004.

V návaznosti na Bílou knihu vzniká v letech 2001 – 2004 zásadní kurikulární dokument Rámcově vzdělávací program základního vzdělávání (dále jen RVP ZV), který konkretizuje požadavky státu na oblast základního vzdělávání závazným vymezením cílů, obsahu učiva v širších oblastech a očekávaných výstupů, které si mají žáci osvojit do konce daného vzdělávacího období. Učivo a výstupy nejsou v tomto dokumentu formulovány dle jednotlivých ročníků, ale jsou členěny pro několik ročníku dohromady (1. – 3. ročník, 4. – 5. ročník a 6. – 9. ročník).

2.1.2 Charakteristika vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace

RVP ZV je postaven podle Spilkové (2005) na čtyřech základních cílech vzdělávání a to učit se poznávat, učit se jednat, učit se žít společně a učit se být.

RVP ZV je státem vymezený rámec, který zvyšuje autonomii škol při sestavování vlastního Školního vzdělávacího programu (dále jen ŠVP). Vzdělávací obsah RVP ZV je rozdělen do devíti orientačních oblastí, které propojují více obsahově blízkých vzdělávacích oborů. Jednou z těchto vzdělávacích oblastí, je Matematika a její aplikace. Pro svůj neodmyslitelný přínos prostupuje celým základním vzděláváním. Jakožto oblast založená na aktivní činnosti žáků, na jejich logickém myšlení a na seznamování se s pojmy, algoritmy a postupy řešení, jim napomáhá rozvíjet matematickou gramotnost.

Pojmu matematická gramotnost většinou rozumíme na intuitivní úrovni a v poslední době se s ním často setkáváme. V odborných publikacích či článcích se můžeme setkat s několika definicemi tohoto pojmu, nejvíce citované je tvrzení, které bylo zpracováno Výzkumným ústavem pedagogickým v Praze pro mezinárodní výzkum OECD PISA a které říká, že: „*Matematická gramotnost je schopnost jedince poznat a pochopit roli, kterou hraje matematika ve světě, dělat dobře podložené úsudky a proniknout do matematiky tak, aby splňovala jeho životní potřeby jako tvořivého, zainteresovaného a přemýšlivého občana.*“ (Kolektiv autorů 2010, s. 22)

V materiálech české školní inspekce je matematická gramotnost definována s ohledem na definici z evropského referenčního rámce takto: „*Matematická schopnost je připravenost využívat sčítání, odčítání, násobení, dělení a procenta při výpočtech prováděných zpaměti nebo v psané podobě k řešení problémů v různých každodenních situacích. Důraz je kladen na proces činnosti, jakož i na znalosti. Matematická schopnost zahrnuje připravenost a ochotu používat na různých úrovních matematické způsoby myšlení (logické a prostorové myšlení) a prezentace (vzorec, modely, obrazce, grafy/diagramy).*“ (Klíčové kompetence pro celoživotní vzdělávání 2005)

O vymezení pojmu matematické gramotnosti se pokusil i Kuřina (2007): „*Matematickou gramotností na úrovni n-té třídy k-tého stupně školy rozumíme schopnost porozumět matematickému textu (slovnímu, symbolickému nebo obrázkovému), schopnost vybavovat si potřebné matematické pojmy, postupy a teorie a dovednost řešit úlohy, které nemají problémový charakter. K řešení úloh problémového charakteru je třeba určitá míra tvořivosti, která představuje vyšší úroveň matematické gramotnosti. Tato úroveň patrně nemůže být požadována od celé populace. Základní matematické gramotnosti by ovšem měl dosáhnout každý absolvent příslušného typu školy*."

Průcha (2009) ve své pedagogické encyklopedii definuje matematickou gramotnost takto: „*Matematická gramotnost (někdy též numerická) je definována jako způsobilost rozpoznat a pochopit matematiku, zabývat se jí a být schopen podložených soudů o úloze matematiky v soukromém životě jednotlivce v zaměstnání, ve společnosti.* (Průcha 2009, s. 225)

Úroveň matematické gramotnosti se projevuje při používání matematických znalostí a dovedností k vymezování, formulování a řešení problémů, zapadajících do různých kontextů. V publikaci Gramotnosti ve vzdělání (kolektiv autorů, 2010) má matematická gramotnost tři složky. *Situace a kontexty,* při jejichž řešení žáci aplikují získané znalosti a dovednosti z matematiky. Používání a aplikace matematických znalostí v různých situacích a kontextech, zapadajících do běžného života občana, patří k jedné z nejdůležitějších složek matematické gramotnosti. K řešení problémů využíváme sedm různých *kompetencí*: „matematické uvažování, argumentaci a komunikaci, využívání matematického jazyka, užívání různých pomůcek a nástrojů, modelování a vymezování problémů a jejich řešení". Třetí složkou je *matematický obsah*, který nám pomáhá formulovat matematickou podstatu problému. Do této složky spadá kvantita, jakožto znalost významu čísel, jejich různé reprezentace a početní operace s nimi, ať zpaměti, písemně nebo formou odhadů. Orientace v prostoru, zastoupení rovinných i prostorových útvarů a těles, jejich metrické a polohové vlastnosti a jejich konstrukce. Další strukturou jsou vztahy a změny. Do této struktury spadá práce s proměnou, závislosti a vztahy, znaky dělitelnosti, rovnice a nerovnice a jejich ekvivalentní úpravy, schopnost vyjádření vztahů pomocí grafů nebo tabulek. Poslední složkou je neurčitost, do které spadá práce s daty, jejich sběr a analýza a následná prezentace a jejich znázornění. Také sem spadá kombinatorika a pravděpodobnost. Toto komplexní vymezení matematické gramotnosti je pevně začleněno v RVP ZV v jednotlivých cílech vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace.

Tato vzdělávací oblast je v RVP ZV rozdělena na čtyři tematické okruhy, které se snaží naplňovat všechny kompetence matematické gramotnosti. Na první tematický okruh platný pro 1. stupeň *Čísla a početní operace*, navazuje na 2. stupni tematický okruh *Číslo a proměnná*. Dalším tematickým okruhem jsou *Závislosti, vztahy a práce s daty*. Posledním tematickým okruhem jsou *Nestandardní aplikační úlohy a problémy*.

Pro tuto práci je důležitým tematickým okruhem *Geometrie v rovině a v prostoru*. Žáci se seznamují s osobnostmi rovinných útvarů a jejich zastoupením v reálném životě. Poznávají průvodní jevy objektů a sledují jejich rozdíly či shody. Žák se v prvním období primárního vzdělávání seznámí se základními rovinnými útvary: čtverec, obdélník, čtyřúhelník, trojúhelník a mnohoúhelník. Prohlubuje se jeho cit pro orientaci v rovině i prostoru. Získávání znalosti odhadování, porovnávání a měření délek, velikosti úhlů, obvodu a obsahu vede žáky k užívání těchto znalostí při řešení polohových a metrických úloh z běžných životních situací.

Tematický celek Matematika a její aplikace zachycuje v různé míře všech sedm kompetencí z vymezení pojmu matematické gramotnosti. „*Není však dostatečně zdůrazněna matematická komunikace (schopnost porozumět písemným i ústním matematickým sdělením a vyjadřovat se jednoznačně a srozumitelně k matematickým otázkám a problémům, a to ústně i písemně).*“ (Kolektiv autorů 2010, s. 23 – 24)

2.1.3 Cíle a výstupy vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace

Cíle vzdělávací oblasti mají vymezený směr k rozvíjení klíčových kompetencí žáka. Tyto cíle vedou žáka k užití logického myšlení, matematických znalostí a dovedností, k řešení problémů reálného života modelováním těchto situací a poznatkem, že realita je mnohem složitější než její matematický model. Žák pomocí přesného a stručného vyjadřování, k němuž používá matematického jazyka a symboliky, provádí rozbor situací a problémů, volí správnou strategii řešení a vyhodnotí správnost výsledku vzhledem k jeho podmínkám. Cíle vzdělávací oblasti mají za úkol rozvíjet všestrannost jedince jakožto myslícího občana a vedou k rozvoji paměti, prostorové představivosti, abstraktního a exaktního myšlení, kombinatorického i logického myšlení. Cíle také rozvíjejí klíčové kompetence sociální za pomoci kooperativní a skupinové výuky. Žák získává důvěru ve vlastní schopnosti při řešení jednotlivých úloh, rozvíjí se u něj systematičnost práce, vytrvalost a přesnost při argumentaci řešení či vyvracení hypotéz pomocí protikladů.

Cíle jsou naplňovány jednotlivými výstupy každého tematického okruhu. Očekávané výstupy týkající se tematického celku obvod/obsah jsou zformulovány v tematickém okruhu *Geometrie v rovině a v prostoru* až ve druhém období tj. pro 4. – 5. ročník. V prvním období tj. 1. – 3. ročník se očekávané výstupy zaměřují pouze na seznámení se s pojmy rovinné i prostorové geometrie. Tematický celek obvod/obsah naplňuje ve výuce tyto očekávané výstupy vhodnou propedeutikou již od prvního ročníku.

„*M-5-3-02 žák sčítá a odčítá graficky úsečky; určí délku lomené čáry, obvod mnohoúhelníku sečtením délek jeho stran.*“

„*M-5-3-04 žák určí obsah obrazce pomocí čtvercové sítě a užívá základní jednotky obsahu.*“ (RVP ZV)

Oběma očekávaným výstupům druhého období předcházejí všechny tři výstupy z prvního období, které by měly sloužit nejen jako propedeutika tematického celku obvod/obsah. Při plnění těchto výstupů žák poznává jednotlivé rovinné i prostorové objekty a utváří si jejich představu jakožto pojmu doprovázeného jeho průvodními jevy, které objevuje společně s ním.

„*M-3-3-01 žák rozezná, pojmenuje, vymodeluje a popíše základní rovinné útvary a jednoduchá tělesa; nachází v realitě jejich reprezentaci.*“

„*M-3-3-02 žák porovná velikosti útvarů, měří a odhaduje délku úsečky.*“

„*M-3-3-03 žák rozezná a vymodeluje jednoduché souměrné útvary v rovině.*“ (RVP ZV)

Tyto očekávané výstupy seznamují žáky se základními rovinnými i prostorovými útvary a jednotlivými pojmy, se kterými se setká v prvním vzdělávacím období. Žák tyto objekty nachází v reálném životě, poznává jejich vlastnosti, porovnává je a odhaduje, následně měří, jejich velikosti. S tematickým celkem obvod/obsah se dle očekávaných výstupů seznámí až v druhém vzdělávacím období. Výuka tematického celku však obsahuje kritická místa, která žákům činí problémy a kterým se věnuje poslední kapitola teoretické části této práce.

2.2 Didaktické přístupy k vyučování matematiky (konstruktivistický, transmisivní, instruktivní)

„Průměrný učitel vypráví. Dobrý učitel vysvětluje. Výborný učitel ukazuje. Nejlepší učitel inspiruje.“ – Charles Farrar Browne

Didaktickým přístupem se rozumí individuální specifický způsob vyučování a výchovy, jímž učitel pracuje. Každý učitel přistupuje k vyučování individuálně a tento didaktický přístup je ovlivněn učitelovou osobností, jeho teoretickými a praktickými vědomostmi i jeho vlastním pojetím výuky. Učebním stylem žáka se rozumí individuální a specifický způsob, jakým je schopen a ochoten přijímat nové poznatky, pracovní postupy, zkušenosti a vědomosti. Každý žák přistupuje ke svému učení individuálně a tento učební styl je ovlivněn vrozenými předpoklady, výchovou, zájmy a motivací i vlivy prostředí. Didaktický přístup učitele a učební styl žáka jsou ve vzájemné interakci, přesto mohou být ve značné míře kompatibilní. Didaktický přístup učitele je většinou mnohem flexibilnější než učební styl žáka. V průběhu vlastní praxe učitele se jeho didaktický přístup může měnit v závislosti na učebním stylu žáka tak, aby byl pro žáka co nejefektivnější, a zároveň učební styl žáka se často přizpůsobuje didaktickému přístupu učitele.

Didaktický přístup učitele můžeme charakterizovat takto: *„Projevuje se konkrétními strategiemi a způsoby řízení učební činnosti žáků, volbou organizačních forem výuky, vyučovacích metod a postupů, preferencí určitých typů materiálních didaktických prostředků a volbou základních komunikačních schémat během vyučování.“* (Škoda, Doudlík 2011, s. 68)

Učební styl žáka můžeme charakterizovat takto: *„Jemné, relativně stálé projevy individuality člověka v mnoha situacích učení. Jsou to svébytné postupy při učení, které jedinec v daném období života preferuje. Svébytnost se projevuje orientovaností aktivit,* *motivovaností jedince, strukturou a pořadím vykonávaných aktivit, hloubkou učení, propracovaností postupů a pružností jejich používání. Vyvíjí se z vrozeného základu, ale obohacují se a proměňují během jedincova života jednak bezděčně, jednak záměrně (na základě vnějšího řízení i autoregulace).*" (Průcha, Walterová, Mareš 2009, s. 293 – 294)

Tato práce se bude zabývat třemi didaktickými přístupy, které klasifikuje ve své práci Hejný (2014) tj. instruktivní, transmisivní a konstruktivistický didaktický přístup nebo jak jsou pojmenovány M. Hejným edukační styly. Pro názvosloví učitelova pojetí výuky neexistuje žádný obecně platný úzus, záleží na chápání samotného autora dané odborné publikace. Pokud učitelovo pojetí výuky chápe tento autor úzce jako jeho styl výuky v kolektivním vzdělávání, řadí pojmy k vyučovacím stylům stejně jako Škoda, Doudlík (2011). Pokud je chápe jako obecnější vzdělávací principy, pak je řadí do edukačních stylů stejně jako Hejný (2014). Pokud je autor chápe jako samotnou filozofii výuky, řadí je k didaktickým stylům stejně jako Hejný, Kuřina (2009).

Tato práce zachovává v jednotlivých kapitolách názvosloví autorů citovaných publikací. Osobně se přikláním k přiřazení dle Hejný, Kuřina (2009) a chápu učitelovo pojetí výuky jako filozofii, která je formována jak v průběhu studia učitelského povolání tak v následné praxi, které vychází z životních zkušeností učitele i z jeho osobnosti.

2.2.1 Různé didaktické přístupy při výuce Pythagorovy věty

Přesvědčení učitele výrazně ovlivňuje vzdělávací proces žáka. Toto přesvědčení si učitel formuje v průběhu své přípravy na zvolené povolání a v průběhu pedagogické praxe. Hejný a Kuřina (2009) ve své publikaci prezentují výsledky experimentu, který se zabýval didaktickými přístupy učitele ve výuce matematiky na základní škole. Pět různých didaktických přístupů zkoumali tím, že pozorovali učitele při zavádění vzorce pro výpočet Pythagorovy věty.

V prvním přístupu A byli žáci seznámeni se vzorcem pro výpočet přepony v pravoúhlém trojúhelníku na dvou modelových úlohách. Dále jim byly představeny všechny obměny tohoto vzorce v tab. 1 (příloha 2). Nakonec měli žáci za úkol samostatně vyřešit jednu úlohu, která neměla sémantický podtext. Podle autorů se k přístupu A přikloní takový učitele, který vnímá matematiku jako užitečný nástroj do praxe, protože je jednoduchá, jasně sdělitelná a aplikovatelná. Učitel dává žákovi jasnou instrukci, jakým způsobem má jím zadané úlohy řešit.

V přístupu B se žáci opět seznámí s formálním vzorcem v tab. 2 (příloha 3). Potom je úkolem žáků vyřešit sérii tří úloh, v nichž zjistí velikost přepony a výsledky doplní do tabulky. Podle autorů se k přístupu B přikloní takový učitel, který chce žákům ukázat matematiku jako svět myšlenek. Zdůvodňování je založeno na empirické zkušenosti žáka a úlohy slouží k ověření teoretických poznatků z různých oblastí geometrie.

V přístupu C je žákům zadána nejprve manipulativní úloha, která vede k vytvoření představy o Pythagorově větě, ale kde se o ní ještě nemluví. Další dvě úlohy jsou založeny na znalosti pojmu obsah, kdy je úkolem žáků vypočítat obsah rovinného útvaru složeného z několika pravoúhlých trojúhelníků. Výsledky obou úloh navzájem porovnávají. Až po těchto třech úlohách přichází vlastní poučka a vztah pro Pythagorovu větu doplněné aplikační úlohou. Podle autorů se k přístupu C přikloní takový učitel, pro kterého je geometrie logicky strukturována a její podstatou je zdůvodnit tvrzení pomocí geometrické aplikace.

V přístupu D se vzorec objeví až u páté úlohy, není však uveden v tabulce jako moudro, které si musí žák zapamatovat, ale je uveden otázkou: „*V každém pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami a, b a přeponou c platí* $c^2 = a^2 + b^2$. *Proč?*“ (Hejný, Kuřina 2009, s. 57). Následuje řešená manipulativní úloha, ze které vyplývá, že součet obsahů čtverců nad odvěsnami je stejný jako obsah čtverce nad přeponou (příloha 4). Této úloze předchází tři úlohy vedoucí k budování pojmu Pythagorovy věty. Podle autorů se k přístupu D přikloní takový učitel, který chápe, že geometrie je součástí matematiky a školská matematika je obrazem obecných matematických myšlenek. Také věří, že v matematice je podstatné zdůvodňování závislostí. Aplikace a teorii staví na stejnou rovinu triviálnosti.

Poslední pátý přístup E začíná úlohou z praktického života, kdy je nutno vyřešit, zda je možné do místnosti nastěhovat skříň, známe-li všechny rozměry skříně, vchodu i místnosti. Poté je nabídnut obrázek, ze kterého vyplývá možné řešení této reálné situace. V následující úloze žák konstruuje Pythagorejské trojúhelníky ze zadaných odvěsen a měří délku přepony. Dále počítá hodnotu vztahů $a^2 + b^2$ a c^2 a zjišťuje, že tyto výsledky se shodují pro danou Pythagorejskou trojici. Vyvstává zde domněnka, že: *„V pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami a, b a přeponou délky c platí:* $c^2 = a^2 + b^2$.“ V následujících úlohách žáci tuto domněnku ověřují. Podle autorů se k přístupu E přikloní takový učitel, který bere matematiku jako soubor problémů z reálného života, které vedou k formulaci hypotéz a jejich následnému ověřování. Učitel si uvědomuje, že pro výuku matematiky je potřeba vytvářet tvořivé prostředí.

2.2.2 Vyučovací styly dle publikace Škoda a Doudlík (Psychodidaktika, 2011)

Škoda a Doudlík (2011) klasifikovali devět pohledů na vyučovací styl učitele dle několika různých autorů. U každého stylu uvedli práce učitele a práce žáka, jejich vzájemnou interakce a míru zapojení do výuky.

Globální vyučovací styl vnímá potřeby a chování žáků v kontextu běžných situací. Učitel paidotrop je s žáky v blízkém kontaktu, je vůči nim empatický, přizpůsobuje se potřebám žáků, nikoli potřebám učiva. *Analytický vyučovací styl* je analogický ke globálnímu. Učitel vnímá jednotlivé potřeby žáků jako odlišné od kontextu. Je v roli logotropa a je zaměřen spíše na vědní obor než na samotného žáka. Jeho zaměření na výkon neoceňuje vlastní snahu a kreativitu žáka. Tyto dva styly jsou klasifikovány dle typologie Witkina.

Manažerský (exekutivní) vyučovací styl uvádí učitele do role manažera, který vnímá žáky jako neposkvrněný materiál a je potřeba obohatit je o znalosti v podobě objektivních informací. Tento učitel nevnímá individuální potřeby žáků, mnohem více se zaměřuje na učivo a vyučovací metody. Za nejdůležitější pokládá získávání odborných znalostí a veškerá individuální zkušenost žáků je chápána jako nežádoucí. Na druhou stranu je učitel s tímto vyučovacím stylem dobrý organizátor a systematik a svým žákům poskytuje adekvátní zpětnou vazbu. *Facilitační vyučovací styl* používá učitel, který se zaměřuje na potřeby svých žáků a na rozvoj jejich individuálních schopností a dovedností. Učitel si uvědomuje žákovu předešlou zkušenost a rozvoj a vede jej k uvědomění si těchto jeho dosavadních poznatků, proto pro takového učitele není cílem výuky zvládnutí učiva. Na rozdíl od učitele manažerského stylu se facilitační styl zabývá vzájemnou interakcí mezi učitelem a žáky a jejich vzájemnými vztahy. *Liberální (pragmatický) vyučovací styl* se naopak zaměřuje na zvládnutí učiva a na jednotlivé cíle vzdělání, které jsou učivem ovlivněny. Učitel se snaží o dosažení určitých znalostí a jejich návaznost a využití v situacích z reálného života. Vyučovací metody nebo vzájemné vztahy učitele s žáky jsou vedlejší. Učitel s liberálním vyučovacím stylem může své žáky přetěžovat v důsledku přílišného lpění na poznatcích, které přinášejí jednotlivé vědní obory, didaktická redukce je většinou neadekvátně chápána vzhledem k věkové úrovni žáků. Manažerský, facilitační a liberální styl je klasifikován dle typologie Fenstermachera a Soltise.

Monarchistický vyučovací styl je orientován na vytyčený cíl a jedinou cestu k němu, nepřipouští žádné alternativní cesty. Učitel s monarchistickým vyučovacím stylem bývá netolerantní, s tendencí zjednodušovat problémy, neboť se nezajímá o jejich příčiny. V *Hierarchickém vyučovacím stylu* systematicky dochází k plnění jednotlivých cílů. Tento styl je analogií ke stylu monarchistickému. Učitelé přistupují k řešení problémů systematicky, jsou tolerantní a rozhodní. *Oligarchický vyučovací styl* je nerozhodný, vše se mu zdá stejně důležité a neumí si systematicky vymezit dané cíle. Při řešení problémů mají učitelé oligarchové sklon k nepřehlednosti a složitosti. *Anarchistický vyučovací styl* se vyznačuje nejednoznačně vymezenými cíli, neboť se snaží vymezit velké množství cílů. Řešení problémů je náhodné a nevyzpytatelné, vedoucí od zbrklých a ukvapených rozhodnutí k váhavým a vágním. Monarchistický, hierarchický, oligarchický a anarchistický styl je klasifikován dle typologie Sternberga, který je klasifikoval jako tzv. intelektové styly.

2.2.3 Instruktivní didaktický přístup

Hejný (2014) uvádí, že pro instruktivní didaktický přístup je typické, že výuka nového učiva je zahájena učitelovým výkladem. Tento výklad začíná u obecného poznatku a jeho následné aplikaci při řešení standardních úloh. Dále se učitel snaží vést žáky nácvikem a často i mnemotechnickými pomůckami k osvojení tohoto poznatku. Učitel s instruktivním didaktickým přístupem vyžaduje pouze ty strategie řešení, které žákům sám předvedl a nepřipouští žádné alternativní cesty, neboť žáci s předurčením k matematice svými alternativními postupy pletou slabší jedince. Komunikace mezi žáky ve třídě je považována za vyrušování. Kreativita a tvořivost žáka není rozvíjena v kognitivní ani v osobní oblasti. Kreativní žák je učitelem za své postupy kárán, protože použité strategie nejsou v souladu s učitelovými postupy. Žák potom chápe vlastní tvořivost jako nežádoucí jev. Nejužitečnější metodou k osvojení nových poznatků je pro žáka tudíž nápodoba. Jeho poznatky mají proto pouze formální charakter. Pro učitele s tímto didaktickým přístupem k matematice je hlavním cílem školské matematiky předat žákům spolehlivé a jasné postupy vedoucí k řešení standardních úloh. Velký důraz klade na pamětné procvičení binárních operací. Výuku je vedena systematicky a frontálně, kdy učitel vysvětluje, a žáci si vštěpují do paměti učitelův výklad. Vůči žákům vystupuje autoritativně, pokud se ptá, očekává rychlou odpověď nebo si odpoví sám. Pokud se ptá žák, učitel zopakuje to, co již přednesl dříve, mnohdy stručněji. Práce učitele spočívá v předvádění řešitelských postupů, rozfázovaných na etapy, které žákům pomohou řešit úlohy standardních typů. Při postupu řešení poté vyžaduje jeho přesnost dle předvedených etap, protože rozfázování řešitelského postupu považuje pro žáka jako nejlepší nástroj pro vštípení nových poznatků. Výsledky žáků jsou důsledkem práce učitele, neboť on, jakožto nositel pravdy, jim vštípil své znalosti a předvedl řešitelské postupy.

2.2.4 Transmisivní didaktický přístup

Hejný (2014) uvádí, že pro transmisivní didaktický přístup je také typické, že výuka nového učiva je zahájena učitelovým výkladem. Žákovi je předkládán hotový a jasně utříbený poznatek. Jeho přijetí je však velmi náročná činnost. Učiteli se jeho poznatky zdají logické a snadno pochopitelné. Ale pro žáka samozřejmostí nejsou, a tak se musí k jednotlivým etapám opakovaně vracet. Žák si totiž musí o nových poznatcích vytvořit vlastní představu a musí ji zasadit do struktury svých dosavadních znalostí. Učitel vstupuje do žákova myšlenkového procesu různými radami nebo mnemotechnickými pomůckami, čímž mu znemožňuje získání dostatečného množství izolovaných modelů k následnému abstraktnímu zdvihu. Žák tyto poznatky ukládá do vědomí jako formální znalosti. Jeho kreativita je chválena, ale tento žák nedostává prostor pro vysvětlení svých myšlenkových postupů třídě. Stojí za tím opět spíše obava, že by nové řešitelské postupy pletly slabší žáky. Zřídka kdy dochází k převzetí netradičního řešitelského postupu od spolužáka. Pokud žák své netradiční řešitelské postupy používá sám, učitel proti tomu nic nenamítá. Učitel s transmisivním didaktickým přístupem k matematice je přesvědčen o tom, že pouze žák s předpoklady k matematice může objevit její vztahy a zákonitosti. Slabšímu žákovi musí stejně učivo vysvětlit, neboť badatelské postupy jsou zdlouhavé, zpočátku velmi nepřesné a obtížně formulovatelné a tento žák může být z toho všeho dezorientován. Transmisivní didaktický přístup je brán jako předávání poznatků učitele, jakožto nositele pravdy, žákovi, který na začátku svého poznání neví. Výsledky žáků jsou tedy opět důsledkem práce učitele, jakožto nositele pravdy, který jim vštípil své znalosti a předvedl řešitelské postupy.

2.2.5 Konstruktivistický didaktický přístup

Konstruktivistický didaktický přístup Hejný (2014) vychází z opačného pojetí než transmisivní, tedy žák ví a učitel vytváří každému žákovi optimální pracovní klima k tomu, aby dosáhnul na co nejvyšší úroveň ve svém vývoji. Jde o styl vyučování, který je otevřen předchozím zkušenostem žáka. Díky práci učitele se žák nenudí a může zažít radost z úspěchu. Učitel s ním tuto radost sdílí a spoluprožívá. Podporuje ho s odkazem na jeho dřívější úspěchy. Učitel moderuje vzájemnou diskuzi žáků ve třídě, která je nedílnou a žádoucí součástí vyučování. S chybou pracuje promyšleně, vede žáka k jejímu odhalení, i k odhalení její příčiny. Nezavrhuje tedy chybná řešení, nechává žáka interpretovat vlastní myšlenky a strategie řešení. Takto většinou sám žák chybu objeví a opraví, nebo tak učiní jiný žák. Učitel zůstává v diskuzích nestranný, nepřiklání se k žádnému názoru a ponechává svobodu volby žákům. Tímto postupem přispívá ke kritickému myšlení žáků a jejich demokratickému chování, neboť jim ponechává možnost volby, ke kterým řešitelským algoritmům se přikloní. Demonstrací a podporou různosti názorů prohlubuje žákův vhled do matematiky a umožňuje mu konstruovat vlastní matematické poznatky. Žák má dostatečný prostor pro své myšlenkové pochody, učitel jim do nich nevstupuje a nepodsouvá své postupy řešení, ale přispívá pomocnými otázkami v případě, když žák neví, kudy dál. Učitel se zaměřuje na individualitu žáka. Ten dostává úlohy přiměřené své úrovni znalostí, takže i slabší žák může prožít radost z objevu. Výsledky žáků jsou tedy důsledkem práce samotných žáků, kteří sami objeví rozlišné řešitelské postupy. Učitel je pouze jejich průvodcem při těchto objevech.

„*Vlastním přístupem k matematice vede žáky k potřebě rozumět matematice, tedy k potřebě experimentovat, hledat a odvozovat zákonitosti, komunikovat se spolužáky,* *formulovat vlastní myšlenky a interpretovat myšlenky spolužáků a hledat argumenty.*" (Hejný 2014, s. 127)

2.3 Kritická místa ve výuce tematického celku obvod/obsah

Za kritická místa ve výuce matematiky považují Rendl a Vondrová (2013) ty oblasti, *„… v nichž žáci často a opakovaně selhávají, která nezvládnou na takové úrovni, aby se jejich matematická gramotnost produktivně rozvíjela a aby mohla být tvořivě využívána v každodenním životě."* (Rendl, Vondrová 2013, s. 8)

Kritická místa ve výuce matematiky s ohledem na geometrii i s ohledem na tematický celek obvod a obsah můžeme vysledovat i při podrobnějším zkoumání výsledků mezinárodního šetření TIMSS v jednotlivých letech. Těchto mezinárodních šetření se Česká republika zúčastnila v letech 1995, 2007 a 2011 a výsledky těchto šetření jsou k dispozici. Poslední šetření proběhlo v roce 2015 a v době zpracování této diplomové práce nebyly výsledky k dispozici.

V roce 1995 dosáhli čeští žáci nadprůměrných výsledků v oblasti matematiky i přírodovědy. V roce 2007 zaznamenala ČR statisticky největší propad ve výsledcích v obou předmětech, v matematice se dokonce jednalo o největší zhoršení ze všech zúčastněných zemí. V roce 2011 se naopak čeští žáci zlepšili ve všech oblastech učiva matematiky i ve všech dovednostech. Sledovány byly tři oblasti učiva, a to čísla, geometrie a data. Největšího zlepšení dosáhli žáci v oblasti učiva práce s daty. Kromě oblastí učiva jsou zde sledovány i tři okruhy žákovských dovedností, a to prokazování znalostí, používání znalostí a uvažování. V projektu jsou rozsáhle zastoupeny také úlohy z oblasti geometrie, týkající se obrazců a těles. Rendl a Vondrová (2014, s. 30) ve své studii uvádějí, že průměrná úspěšnost českých žáků v této oblasti byla například v roce 2007 pouze 38,7% a více než polovina uvedených výsledků (z 20 zadaných úloh) byla označena jako slabé či velmi slabé. Z posledních známých výsledků z roku 2011 vyplývá, že čeští žáci jsou v učivu školské geometrie na stejné úrovni jako v ostatním učivu školské matematiky.

Jedním z kritických míst školské geometrie v oblasti míry je etymologický význam slov obvod a obsah, což je podrobně popsáno v kapitole 2.3.2. Druhým z kritických míst je nesoulad tezí poznávacího procesu v geometrii a zpracování geometrického učiva v učebnicích matematiky. Teorie generického modelu jako součást poznávacího procesu žáka bude stručně uvedena v kapitole 2.3.1. Nesoulad spočívá v tom, že v učebnicích není odděleno budování konceptu od uvedení vzorce, čímž je narušen žákův poznávací proces. Porovnání koncepce tematického celku v učebnicích vybraných nakladatelství s ohledem na teorii generického modelu bude uvedeno v kapitole 2.3.3.

2.3.1 Teorie generického modelu

Vygotskij a Piaget (In Hejný 2014) definují pojmotvorný proces jako výsledek činnosti člověka a jeho komunikace s jinými lidmi, čímž dozrávají vyšší psychické funkce a jedinec si osvojuje vědecké pojmy a jejich významy. Pojmotvorný proces je součástí rozvoje celé psychiky jedince. Ve vědomí se nevytváří pouze izolované pojmy, ale strukturalizovaná schémata založená na sémantických poznatcích.

Pokud se chceme vyhnout formálním poznatkům ve vyučování matematiky, čímž rozumíme pamětné osvojování si např. matematických vzorců bez porozumění vztahů jednotlivých parametrů vzorce, musíme pracovat v pojmotvorném procesu s izolovanými (dříve separovanými) modely jednotlivých pojmů matematiky. Tento proces můžeme popsat pomocí čtyř etap. Hlavní náplní *synkretické etapy* je práce s izolovanými modely. Nedochází v ní zatím k rozlišování podstatných průvodních jevů matematických pojmů, dochází pouze k asociaci s budoucími pojmy. V *etapě předmětných představ* dochází k postupné diferenciaci matematického pojmu, který má stále ještě oporu v reálných situacích. Stále dochází k manipulaci při utváření pojmu. V další *etapě intuitivně-abstraktních představ* postupně dochází k myšlenkovým operacím, které nahrazují vlastní manuální činnost. Dochází k abstrakčnímu zdvihu a pojem se stává prvkem představ. Poslední *etapa strukturálních představ* se zabývá dalším rozvojem struktury. Primárního vzdělávání se týkají pouze první tři etapy.

Koncepci poznávacího procesu – teorii generického modelu (dále už jen TGM) – vytvořil v letech 1942 – 1977 středoškolský učitel Vít Hejný. Podrobně ji rozpracoval vědecký tým kolem jeho syna Milana Hejného. Vít Hejný si začal pokládat otázku, proč mají žáci tendenci zvládnout učivo matematiky pamětně bez pochopení vztahů a zákonitostí. Podle něj se na tomto jevu velkou měrou podílí časový tlak na žáka při řešení úloh a předčasné vybavení žáka mechanickými nástroji k řešení matematických situací. Jeho syn Milan Hejný uvádí, že: „*Vyučování je zaměřeno na nácvik řešitelských procedur standardních úloh a paměťové učení se faktům, algoritmům, definicím, tvrzením, důkazům a vzorcům. Ve studijním stylu studenta převládá imitace a reprodukce nad spekulací a tvořivostí. Znalosti studentů jsou uchovány pamětí jako víceméně izolovaná fakta, jsou nedostatečně strukturovány a jejich aplikační síle je nízká. Takové znalosti nazýváme formální.*“ (Hejný, Novotná, Stehlíková 2004, s. 23)

Poznávací proces budování matematických pojmů rozkládá Hejný (2014) do pěti hladin a dvou kognitivních zdvihů (mezi druhou a třetí, mezi třetí a čtvrtou hladinou). První hladinou je hladina motivace. Druhou hladinou je hladina izolovaných modelů, která kognitivním zdvihem přechází do třetí hladiny generického modelu. Ta přechází druhým kognitivním zdvihem do hladiny abstraktních poznatků. Poslední pátou hladinou je hladina krystalizace. Poslední hladina však není přesné označení, neboť ke krystalizaci dochází již s prvním generickým modelem.

Vnitřní motivace a touha po vědění dává žákovi energii k hlubšímu a komplexnějšímu poznání. Pokud je žák k poznávání nucen, nejedná se o motivaci, ale o stimulaci. V takovém případě přijímá žák poznatky na úrovni pamětných poznatků jako izolované (separované) modely a nedochází k jejich zobecnění a abstrakci. Vnitřní motivace žáka je předpokladem k jeho aktivní činnosti a touze po poznání. Pokud žák nemá motivaci k učení, tj. nemá chuť ani potřebu se učit, nezačne s budováním poznatkových struktur, neboť k tomu je zapotřebí jeho aktivita. Žák je k učení motivován přirozeně vnějšími vlivy prostředí. Každé dítě má silnou potřebu poznávat vjemy okolního světa a je přirozeně zvídavé. Pokud tuto vnitřní motivaci nepodpoříme vhodnými didaktickými situacemi, nedojde k stimulaci poznávacího procesu. „*Motivace je předpokladem zahájení procesu učení, představuje jeho úspěšný start.*“ (Hejný, Kuřina 2009, s. 129)

Hladinu izolovaných modelů rozděluje Hejný (2014) do čtyř podetap. Označuje ji jako proces získávání izolovaných (separovaných) poznatků po dlouhou dobu. U získávání izolovaných modelů nemluvíme pouze o hromadění jednotlivých poznatků, ale také o terminologickém zpřesňování jednotlivých pojmů matematiky. Celá etapa může trvat zlomek vteřiny nebo i celé měsíce. V první podetapě přichází první konkrétní zkušenost, která je zárodkem příštího poznání. V druhé podetapě nastává přísun dalších izolovaných modelů ukládaných do vědomí jako izolované (separované) poznatky.

Většinu takových poznatků provází manipulativní činnost. V druhé podetapě ustrne poznávací proces nejčastěji, protože pro další podetapu je zapotřebí již objevitelského kroku, díky němuž dochází k objevu. Ve třetí podetapě začínají některé izolované modely poukazovat na jiné a vzniká myšlenka stejnosti těchto modelů shlukovaných do jedné skupiny. Ve čtvrté podetapě dochází k určování této stejnosti bez blíže specifikovaných vlastností. Toto určení vede k vytvoření komunity izolovaných modelů. Jirotková (2010) označuje další obohacování souboru izolovaných modelů jako pátou podetapu, i když ve vědomí žáka již mohl vzniknout generický model.

Dostatečné množství izolovaných modelů je nutné pro upevnění výsledného poznání. Mezi jednotlivými izolovanými modely se mohou vyskytovat i modely překvapivé, zdánlivé či ne-modely (Jirotková, 2010). Překvapivým modelem rozumíme takový, který se tváří, že není daným objektem nebo takový, o němž jsme netušili, že existuje. Takovým překvapivým modelem může být například otočený čtverec, jehož strany nejsou ve svislé a vodorovné poloze, ale naopak jsou v této poloze jeho úhlopříčky. Model zdánlivý se může jako model jevit, přesto jím není. Jako příklad uvádí Jirotková (2010) opět tentýž otočený čtverec, který se mnohým může jevit jako kosočtverec. „*Pod ne-modelem rozumíme takový jev, který ilustruje komplement zkoumaného objektu*.“ (Jirotková 2010, s. 20). Ne-modelem čtverce je obrazec ve čtvercové síti, jehož body mají souřadnice A (0;0), B (3;1), C (3;4) a D (0;3).

Mezi hladinou izolovaných modelů a hladinou generického modelu dochází k prvnímu abstraktnímu zdvihu, kdy z komunity izolovaných modelů, která se utvořila ve čtvrté podetapě hladiny izolovaných modelů, vzniká procesem zobecnění model generický. Hladina generického modelu je pak etapou nalézání společných vlastností a vzájemných souvislostí komunity izolovaných modelů, která je často doprovázena AHA-efektem. Generický model zastupuje jisté skupiny izolovaných modelů a pro tuto skupinu se stává vzorem. Roli vzoru nemusí zastávat pouze generický model, ale také poznatek, který se do žákova vědomí dostal pouhou nápodobou a který není výsledkem konstruování stejnosti mezi izolovanými modely. Pokud se do vědomí žáka dostane poznatek bez tvorby generického modelu z komunity modelů izolovaných, je tento poznatek pouze formální.

Hejný (2014) rozeznává tři typy generického modelu: generický model procesuální, částečně konceptuální a konceptuální. Plně konceptuální generický model je nejvyšším stupněm z nabízených. Generický model procesuální je jakýmsi prvotním návodem, složeným z prvních mnoha izolovaných modelů. Pokud žák objeví jakési obecné pravidlo pro některé části úlohy, dostal se již na úroveň generického modelu částečně konceptuálního. Pro obecný vztah mezi všemi částmi úlohy musí žák využít jak procesuální, tak konceptuální generický model, aby se dostal na úroveň generického modelu, který je již plně konceptuální. Samozřejmě, že existují konceptuální generické modely, které žák získal bez předchozího získání procesuálního nebo částečně konceptuálního generického modelu.

Mezi hladinou generického modelu a hladinou abstrakčního poznatku dochází k dalšímu abstrakčnímu zdvihu. Děje se tak tehdy, když do poznatku, formulovaném na konkrétní situaci, zavedeme jako obecné číslo proměnnou. Tento abstrakční zdvih je doprovázen i změnou matematického jazyka, který vede žáka k užití písmen. Jazyk písmen je naplno zaveden až na druhém stupni primární školy, na první stupni se žák potkává pouze s některými prvky ve dvou kontextech. Ve slovních úlohách řešených za pomoci rovnice označuje písmeno neznámou hodnotu, číslo, které je hledáno. Druhým případem jsou vztahy v geometrii. Žák se potkává s jazykem písmen ve vztazích doprovázené především obvod a obsah mnohoúhelníků.

Jak již bylo uvedeno výše, označení „poslední“ hladina pro krystalizaci není zcela přesné. Hladina krystalizace se objevuje s prvním generickým modelem, v některých případech se může objevit i u izolovaných modelů. Posloupnost jednotlivých hladin úplně neodpovídá skutečnému průběhu poznávacího procesu žáka. Krystalizace má permanentní průběh. Po celou dobu poznávacího procesu zákonitosti mezi jednotlivými poznatky, neboť nový poznatek se neotiskne pouze do jedné hladiny, ale může ovlivnit několik hladin najednou.

2.3.2 Etymologický význam slov „obvod“ a „obsah“

Jedním z kritických míst matematiky ve výuce tematického celku obvod a obsah jsou bezpochyby oba pojmy z hlediska mateřského jazyka. S tím se ztotožňuje i Jirotková, Kloboučková in Rendl, Vondrová (2013), když tvrdí: „*Většina tradičně koncipovaných* *učebnic neodděluje budování konceptu obsah a obvod od uvedení vzorce jako návodu na výpočet obsahu či obvodu. Tyto pojmy jsou jak v učebnicích, tak velmi často i ve školské praxi zaváděny rovnou ve vazbě na vzorce. Tento přístup nutně vede k uchopení pojmů a vztahů pamětí, což v důsledku zase znamená nezbytné časté opakování.*“ (Rendl, Vondrová 2013, s. 45)

Slovník spisovné češtiny pro školu a veřejnost (Filipec, Daněk, Machač, Mejstřík, 2005) vymezuje lexikální stránku obou heslových slov, přestože nemůže „…*obsáhnout všechna slova a slovní spojení, která znají jednotlivý uživatelé jazyka a specialisté.*“ (Filipec, Daněk, Machač, Mejstřík, 2005). Heslové slovo obvod je zde uvedeno ve čtyřech různých základních etymologických významech (tab. 3.1) se dvěma příponami vystihujícími odpovídající adjektiva (obvodový, obvodní). Heslové slovo obsah je zde uvedeno v pěti různých základních etymologických významech (tab. 3.2) s jednou příponou vystihující odpovídající adjektivum (obsahový).

Slovník současné češtiny (autorský kol. pracovníků Lingea s.r.o., 2011) uvádí heslové slovo obvod ve čtyřech různých základních etymologických významech (tab. 3.1) se dvěma příponami vystihujícími odpovídající adjektiva (obvodový, obvodní). Heslové slovo obsah je zde uvedeno v šesti různých základních etymologických významech (tab. 3.2).

Slovník českých synonym (Pala, Všianský, 2000) uvádí heslové slovo obvod ve dvou různých základních etymologických významech (tab. 3.1)se dvěma příponami vystihujícími odpovídající adjektiva (obvodový, obvodní). Heslové slovo obsah je zde uvedeno v pěti různých základních etymologických významech (tab. 3.2)s pěti příponami vystihujícími odpovídající adjektiva (obsáhlý, obsahový, obsažný)či verba (obsáhnout, obsahovat).

Zatímco v českém jazyce není možné vyjádřit různé významové nuance jedním slovem, některé cizí jazyky toto umožňují např. anglický a německý jazyk viz tab. 3.1 a 3.2.

Tab. 3.1.

OBVOD jako …			
Český jazyk	Příklad	Anglický jazyk	Německý jazyk
…čára, ohraničující určitou plochu (délka hraniční křivky rovinného útvaru)	• Hranice lesa nebo louky • Ohraničení plochy čtverce, obdélníku, trojúhelníku (součet všech délek stran těchto útvarů)	perimeter	der Umfang
…celková délka	• Obvod pasu nebo kmene • Míry prsa-pas-boky	girt	der Umfang
…skupina elektrických prvků tvořících uzavřený okruh pro elektrický proud	• Elektrický obvod • Integrovaný obvod	circuit	das Netzwerk
…určité území nebo správní celek	• Volební obvod • Poštovní obvod • Obvod Prahy • Obvodní lékař	distrikt nebo periphery	der Distrikt nebo der Peripherie

Tab. 3.2.

OBSAH jako…			
Český jazyk	Příklad	Anglický jazyk	Německý jazyk
…něco, co vyplňuje vnitřek, náplň nádoby nebo jiného předmětu	• Voda ve sklenici • Šaty ve skříni	content	das Gehalt
… velikost plochy nebo část trojrozměrného prostoru	• Rozloha území nebo plochy	area	der Flächeninhalt
… množství určité složky v látce	• Obsah alkoholu v krvi • Obsah cukrů v těle	content	das Gehalt
… smysl jazykového sdělení nebo stručný výtah nejdůležitějších informací textu	• Obsah knihy • Umělecký obsah díla	content	der Inhalt
…výtah nejdůležitějších informací	• Stručný obsah článku	resume	das Inhaltsverzeichnis
… soubor témat knihy nebo práce, kapitol s udáním čísla strany, na které začínají	• Obsah u diplomové práce • Obsah učiva v učebnicích	content	das Inhaltsverzeichnis

Jak jsem ukázal, český jazyk využívá pro vyjádření mnoha skutečností z reálného života jednoho a téhož pojmu. Pojem obvod i obsah vyjadřuje dle slovníků minimálně čtyři/pět různých základních situací, a přesto je stále používáno jedno a totéž označení. Anglický či německý jazyk využívají naopak více jednoslovných pojmů, většině různých situací náleží jiný výraz.

2.3.3 Porovnání koncepce tematického celku v učebnicích vybraných nakladatelství s ohledem na TGM

Průcha (2009) považuje učebnice za nejstarší materiální vzdělávací prostředek z historického hlediska. Zmiňuje první texty instruktivního typu, které se objevují u starověkých kultur, jako byli Řekové nebo Egypťané. Po vynalezení knihtisku v 15. století se začaly učebnice hojně využívat jako základní didaktická pomůcka. Od tohoto mezníku uplynulo několik staletí, a přesto jsou i v dnešní době učebnice jednou z nejvyužívanějších pomůcek v dnešním školství. Jednou z jejich funkcí je prezentace části plánovaného obsahu vzdělávání. Další využití mají bezesporu pro žáka, jakožto zdroj informací pro osvojení vlastních poznatků. Samozřejmě, že jsou i nedílnou pomůckou pro učitele, kterým pomáhají s plánováním učiva a formulováním očekávaných výstupů.

Každá struktura učebnice má dvě složky, verbální a obrazovou, které bychom dále mohli rozlišit na tři komponenty:

- *Prezentace učiva*, zahrnující shrnutí učiva, obrazové prezentace k danému tématu, výkladové testy apod.
- *Řízení učiva*, zahrnující doplňková cvičení, otázky a úkoly k daným tématům.
- *Orientace v učebnici*, zahrnující rejstřík a členění na jednotlivé lekce, kapitoly či podkapitoly.

Jedním z cílů této práce bylo definovat kritická místa ve výuce tematického celku i z pohledu učebnic. Pro splnění tohoto cíle jsem zvolil tři řady učebnic – Nakladatelství Alter, nakladatelství Prodos a Nakladatelství Fraus. V textu užívám pojem Nakladatelství Alter, čímž mám na mysli kolektiv autorů: Landová, Tůmová, Blažková, Matoušková, Vaňurová, Eichlerová, Staudková, Vlček, Justová. Pod pojmem nakladatelství Prodos mám na mysli autory: Molnár, Mikulenková. Učebnicovou řadu Nakladatelství Fraus sestavil kolektiv autorů: Hejný, Jirotková, Slezáková, Michnová, Bomerová, čímž se na ně v textu pod tímto pojmem odkazuji.

Učebnicová řada pro výuku matematiky z Nakladatelství Alter je v České republice asi nejhojněji využívanou řadou. Naproti tomu podle učebnicové řady Nakladatelství Fraus není výuka matematiky na školách ještě tolik rozšířena. Já osobně jsem se s ní setkal při výuce na fakultní základní škole v Praze, kde je používána na celém prvním stupni.

Většina nakladatelství ve svých učebnicových řadách neodděluje proces budování konceptu tematického celku obvod a obsah od zavedení vzorce, jakožto nástroje pro výpočet míry. Tento vzorec je pak pro žáky formálním poznatkem a mají problémy s jeho aplikací v úlohách z reálného života. K určitému pojmu je přiřazen vzorec, tedy pro žáka abstraktní představa, který kvůli nedostatečnému množství izolovaných modelů není pro žáky zcela uchopitelný. V takovém případě může žák získat dojem, že vzorec je neodmyslitelnou součástí obou pojmů (Jirotková, Kloboučková in Rendl, Vondrová 2013).

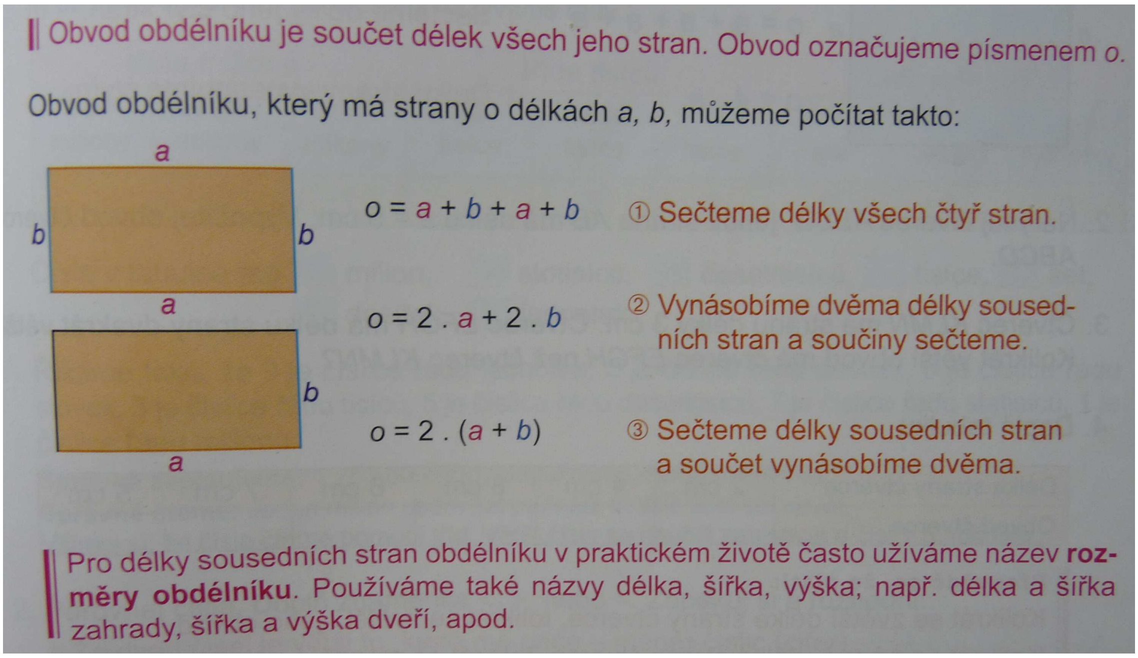
Leč obvod i obsah daného obrazce existuje nezávisle na vzorci. Tento postup vede zpravidla k pamětnému uchopení obou pojmů a vztahů mezi nimi. Toto uchopení je tedy potřeba neustále procvičovat a po delší době bez opakování se z paměti může vytratit. Tomuto jevu nebrání ani koncepce učebnic jednotlivých nakladatelství, které se k tematickému celku vrací vždy až po delším časovém úseku.

I) Stručná analýza učebnicové řady Nakladatelství Alter

V učebnicové řadě Nakladatelství Alter se žáci od konce prvního ročníku a v průběhu druhého ročníku seznamují s rovinnými útvary a prostorovými tělesy. Rozlišují a identifikují je v obrázcích. V obou ročnících bychom našli úlohy, které mají propedeutický potenciál k tematickému celku obvod nebo obsah rovinného útvaru. Záleží jen na učiteli, jak tyto úlohy zařadí do výuky a zda je využije více než jen k procvičení pamětného počítání. Ve třetím ročníku se žáci seznamují s průvodními jevy (počet vrcholů, počet stran, délky stran) rovinných útvarů. Každému útvaru je vždy věnována jedna strana učebnice.

Nakladatelství Alter se tematickému celku obvod a obsah věnuje až na konci čtvrtého ročníku, kde začíná obvodem trojúhelníku na s. 96. Zde je v růžovém rámečku uvedeno, že: „*Obvod trojúhelníku vypočítáme: o = a + b + c.*“ (Blažková, Matoušková, Vaňurová 2009, s. 96). Tomuto tématu je věnována celá strana v části geometrie. O několik stránek dále se učebnice věnuje obvodu obdélníku a následně čtverce.

Na příslušné stránce je vždy uvedena ukázkově vyřešená úloha na dané téma. Také zde nalezneme definici obvodu daného útvaru a samozřejmě graficky znázornění vzorec.


Obvod obdélníku je součet délek všech jeho stran. Obvod označujeme písmenem o.

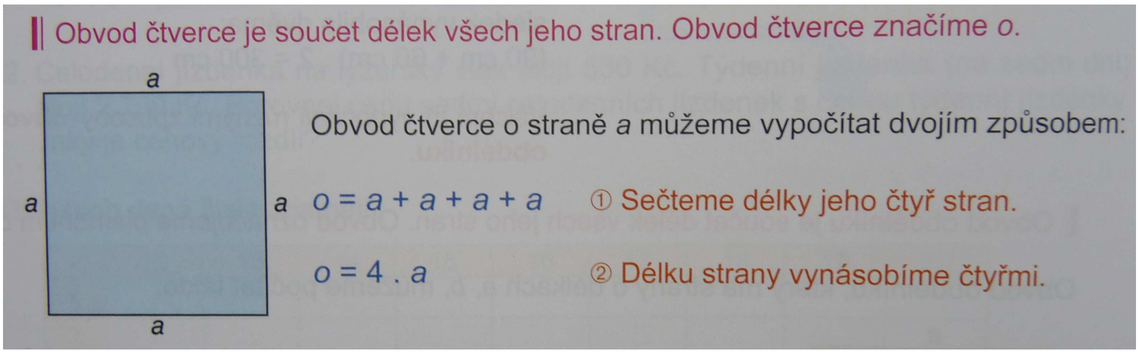
Obvod obdélníku, který má strany o délkách a, b, můžeme počítat takto:

$o = a + b + a + b$ ① Sečteme délky všech čtyř stran.

$o = 2 . a + 2 . b$ ② Vynásobíme dvěma délky sousedních stran a součiny sečteme.

$o = 2 . (a + b)$ ③ Sečteme délky sousedních stran a součet vynásobíme dvěma.

Pro délky sousedních stran obdélníku v praktickém životě často užíváme název **rozměry obdélníku**. Používáme také názvy délka, šířka, výška; např. délka a šířka zahrady, šířka a výška dveří, apod.


Obvod čtverce je součet délek všech jeho stran. Obvod čtverce značíme o.

Obvod čtverce o straně a můžeme vypočítat dvojím způsobem:

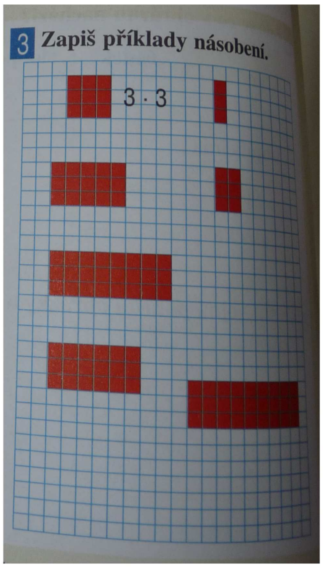
$o = a + a + a + a$ ① Sečteme délky jeho čtyř stran.

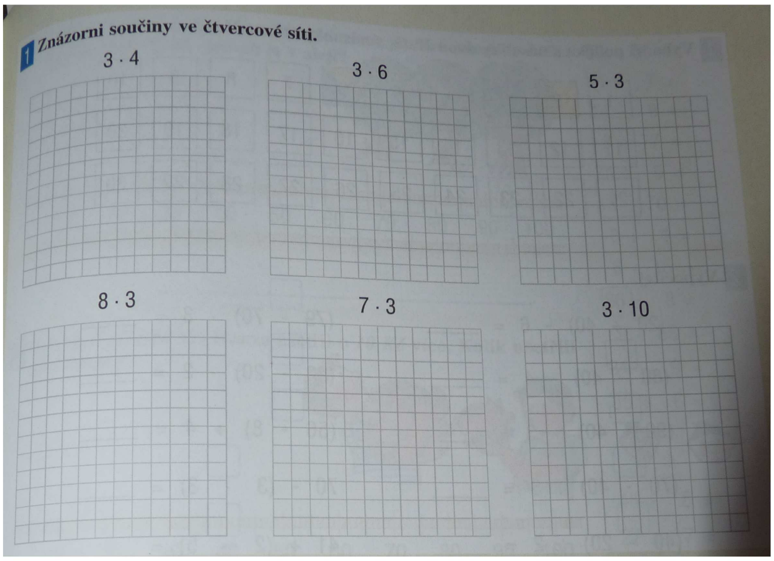
$o = 4 . a$ ② Délku strany vynásobíme čtyřmi.

Tematický celek obsah rovinných útvarů nalezneme v učebnicové řadě nakladatelství Alter až v pátém ročníku. Obsahu obdélníku a čtverce je tu věnována jedna společná strana, na které opět nalezneme formální vzorec pro výpočet obsahu obou obrazců. Obsahu trojúhelníku se tato učebnicová řada na prvním stupni nevěnuje vůbec. Na konci pátého ročníku se ještě objeví téma *Obsahy složitějších obrazců*, kde žáci určují obsahy obrazců složených ze dvou či tří čtyřúhelníků. Žákům je opět představen názorný postup, jak správně určit číselný výsledek. Systematickému upevňování daného učiva se může učitel věnovat samozřejmě podstatně častěji, než je uvedeno v učebnici, ale záleží to pouze na jeho přesvědčení a tomu odpovídajícímu stylu výuky.

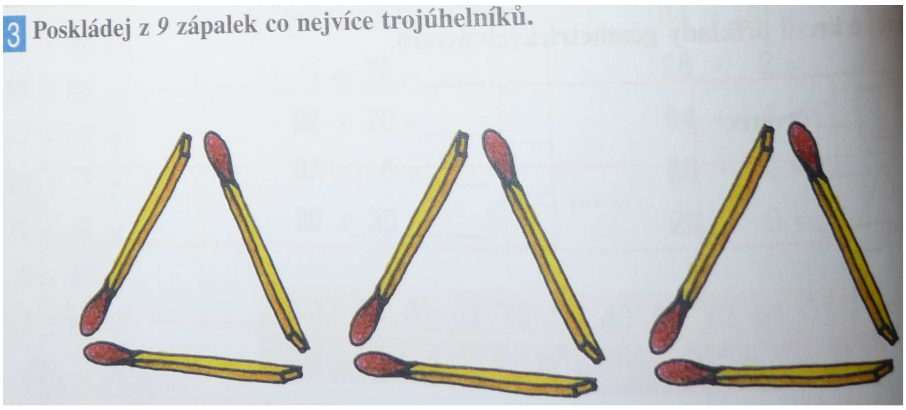
II) Stručná analýza učebnicové řady nakladatelství Prodos

V učebnicové řadě nakladatelství Prodos v prvním ročníku, se žáci seznamují s rovinnými útvary, identifikují je v obrázcích, kreslí je, vybarvují je. Ve druhém ročníku pokračují v obdobných činnostech. V tomto ročníku nalezneme několik úloh, které mají propedeutický potenciál k tematickému celku obsah mnohoúhelníků. Zda bude tento potenciál využit, závisí opět především na učiteli a na jeho rozhodnutí, zda úlohu využije pouze k pamětnému počítání a znázorňování součinu. Obě uvedené úlohy přesto rozvíjí představu o čtyřúhelníku a jeho obsahu.

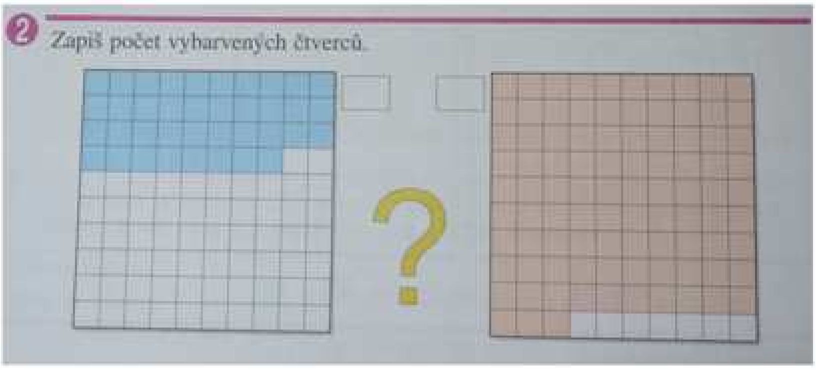


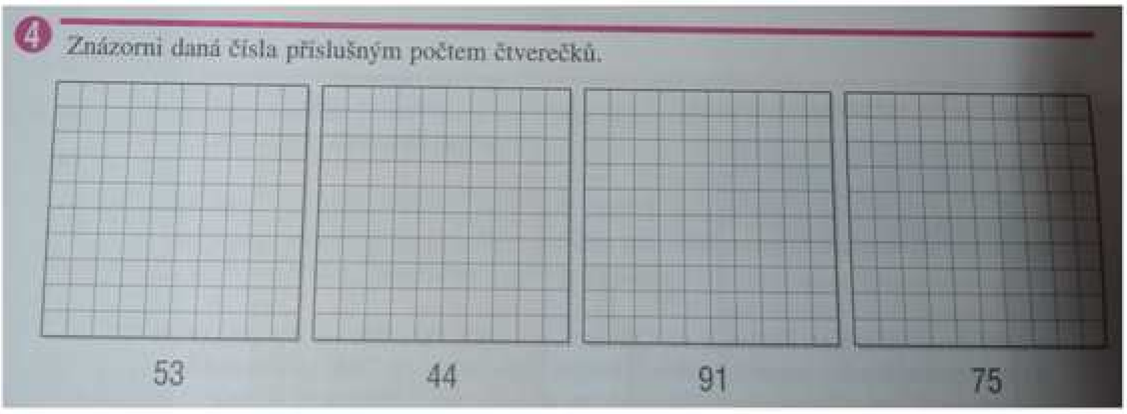


Za propedeutickou úlohu tematického celku obvod trojúhelníku bychom mohli považovat úlohu z prostředí sirkových hlavolamů. Žáci zde manipulativní činností vytvářejí trojúhelníky, čímž získávají představu o jejich „hranici“ – obvodu. Takových úloh je v obou ročnících minimum.



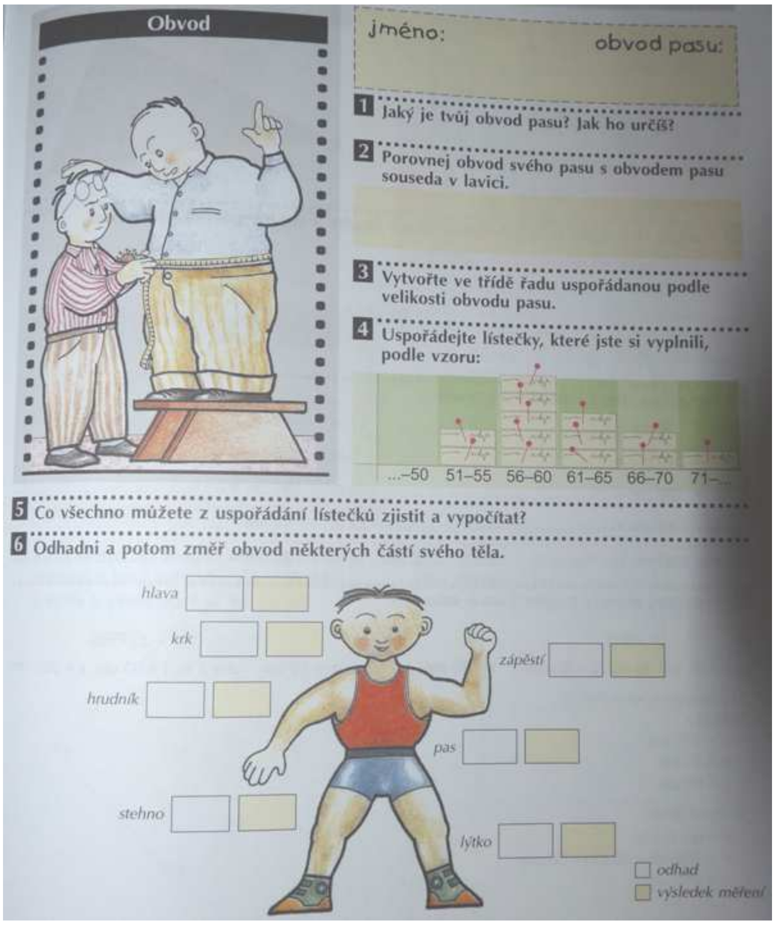
Ve třetím ročníku se objevují propedeutické úlohy vedoucí k budování pojmu obsah mnohoúhelníku. Jednotkou v těchto úlohách je základní čtverec mříže. Žáci v těchto úlohách určují obsah vybarveného mnohoúhelníku nebo provádí inverzní operaci, zakreslují příslušný mnohoúhelník do mříže podle počtu zadaných čtverečků. I když jsou tyto úlohy primárně určeny k vyjádření čísla v desítkové soustavě, je možné v nich vidět i právě propedeutiku obsahu mnohoúhelníku ve čtvercové síti.





V průběhu třetího ročníku se žáci seznámí se základními rovinnými útvary a s jejich průvodními jevy (počet vrcholů, počet stran, délky stran). Koncem tohoto ročníku se také objeví učivo tematického celku obvod a obsah. Stejně jako v učebnicové řadě Nakladatelství Alter, i zde se začíná s obvodem trojúhelníku. Tomuto tématu je věnována jedna strana, kde je žák nejprve seznámen s formální podobou vzorce pro výpočet obvodu trojúhelníku. V úvodním rámečku máme napsanou poučku: „*Obvod trojúhelníku vypočteme tak, že sečteme délky jeho stran.*“, a ukázkový příklad se vzorcem o = |AB| + |BC| + |CA|. (Molnár, Mikulenková 2007, s. 51). Ten pak žák bude aplikovat ve čtyřech strukturálních úlohách.

Ve čtvrtém ročníku se žáci seznámí i s učivem obvod čtverce a obdélníku na stránkách 41 – 47. První stránka je věnována sémantickým úlohám na měření obvodu částí těla. Na dalších stránkách se již převážně setkáváme se strukturálními úlohami, kde se po žácích vyžaduje aplikace formálního vzorce. Ten je uveden vždy v malém rámečku.



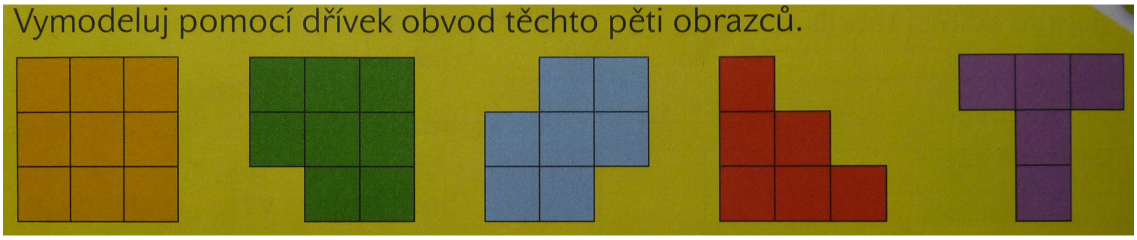
Než se žáci seznámí s pojmem obsah čtverce a obdélníku, věnují se tématu jednotkového čtverce. Poté je jim představen formální vzorec pro výpočet obsahu čtverce a následně obdélníku. Žáci tyto vzorce aplikují na úlohy převážně strukturálního rázu.

Pátý ročník se převážně zaměřuje na aplikaci vzorce v různých strukturálních úlohách. Žáci měří jednotlivé délky stran mnohoúhelníků a určují jejich obvod. Tento ročník se také zaměřuje na konstrukční úlohy a výpočet obvodu po sestrojení daného útvaru. Obsah rovinných obrazců se v pátém ročníku vyskytuje zřídka, hlavně při přechodu na učivo povrchu.

III) Stručná analýza učebnicové řady Nakladatelství Fraus

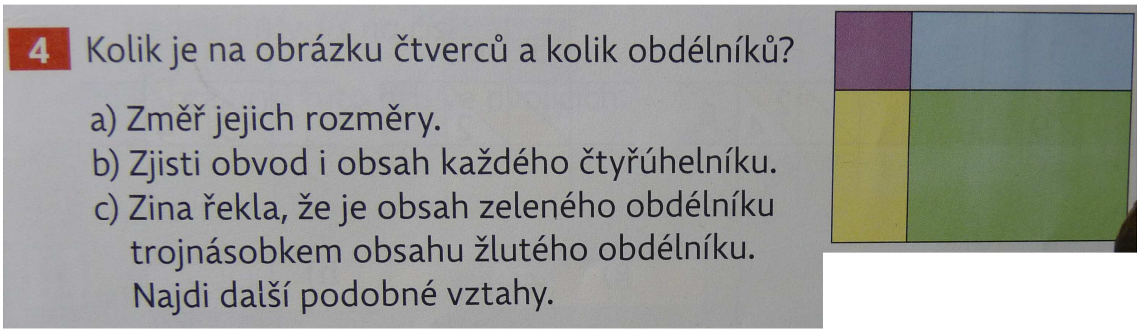
Již v prvním ročníku učebnicové řady Nakladatelství Fraus se setkáváme s třemi prostředími, která budují pojem obvod či obsah. Tato propedeutická prostředí (origami, dřívka, parkety) jsou v učebnicích pro 1. ročník probírána opakovaně a u následujícího typu úloh se prohlubuje vhled do daného prostředí. Tato učebnicová řada se tematickému celku obvod a obsah nevěnuje pouze v určité části vzdělávání v daném ročníku, jako tomu bylo u řad výše zmíněných, ale opakovaně se k tématu vrací a prohlubuje žákům vzhled do dané problematiky. Pravidelné opakování prostředí má i tu výhodu, že žák, který při řešení některých úloh ve třídě chyběl, se po návratu rychle zorientuje. V prostředí origami a parket žáci budují pojem obsahu, v prostředí dřívkové matematiky zase pojem obvod. Žáci získávají zkušenosti s tímto tematickým celkem manipulativní činností a jejich poznatky jsou tedy trvalejší, nikoliv formální.

Ve druhém ročníku se k výše zmíněným prostředím přidají další činnosti, jejichž propedeutický potenciál je využit k prohlubování poznatků tematického celku obvod a obsah. Žáci tyto poznatky prohlubují při měření délek, skládání rovinných útvarů, práci ve čtvercové síti a na geobordu a při určování obvodu a obsahu v úlohách s plnou čtvercovou sítí, s naznačenou čtvercovou sítí nebo pouze s rozměry. Pojem obvod je použit až na začátku třetího dílu na str. 10, bez vysvětlování tohoto pojmu, bez uvedení jakéhokoliv formálního vzorce nebo postupu.

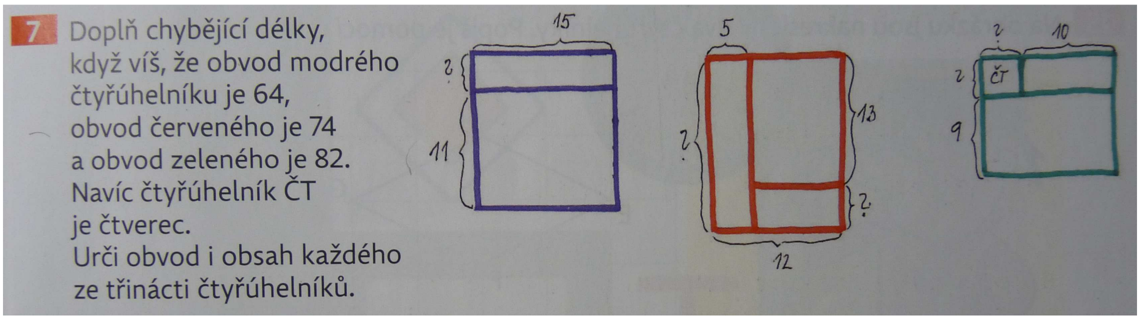


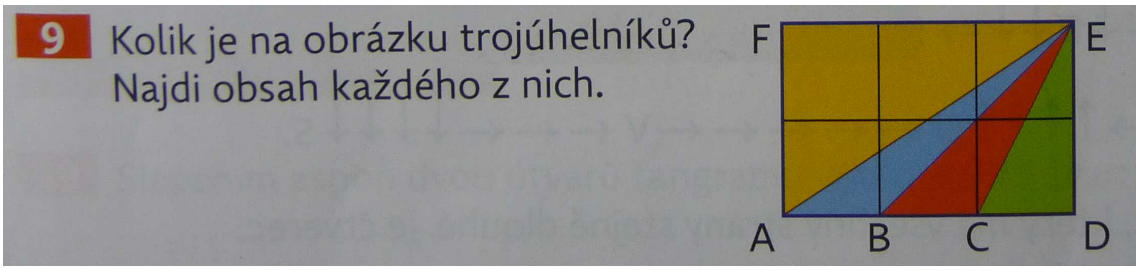
V následujících ročnících získávají žáci hlubší vhled do jednotlivých prostředí z předešlých ročníků. Ve čtvrtém ročníku přibudou činnosti s částí obsahu jako zlomku. V pátém ročníku již nejsou úlohy z prostředí dřívek, ale objevují se již úlohy se standardními jednotkami obvodu a obsahu.

V následujících ukázkách demonstruji postupné zvyšování náročnosti při skládání tvarů a práci s délkami stran a obvodem či obsahem mnohoúhelníků. První ukázka je ze třetího ročníku učebnicové řady ze str. 23.

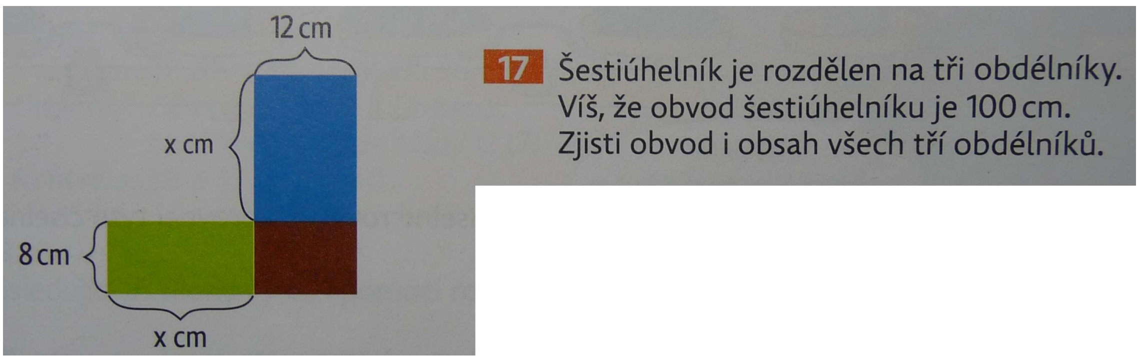


Další dvě ukázky jsou ze čtvrtého ročníku ze str. 29.





Třetí ukázka je z pátého ročníku ze str. 46.



V učebnicové řadě Nakladatelství Fraus je dostatek propedeutických úloh, které samy o sobě umožňují využít svého potenciálu. Tohoto potenciálu je využito vlastní žákovskou aktivitou, manipulativní činností a vlastním objevováním. Tato učebnicová řada neseznamuje žáky s formální podobou vzorců a nepředkládá jim formální postupy k řešení úloh.

2.4 Metoda systematického postupu hledání vzorce – metoda uvolňování parametru

V praktické části jsem použil metodu systematického hledání vzorce – metodu uvolňování parametru. S touto metodou jsem se seznámil až při vysokoškolském studiu. Vlastní experiment, který jsem sestavil, realizoval a popsal v praktické části této práce, je v souladu s jednotlivými etapami této metody.

2.4.1 Metoda objevování a řízeného objevování

V didaktickém přístupu orientovaného na učitele se od žáka očekává, že si osvojí nabízené pojmy, principy a metody a bude si je pamatovat a správně užívat. Metoda objevování je zaměřena na žáka a na jeho vlastní objevování pojmů, principů a metod, i když s přispěním učitele a jeho přípravy. Metoda objevování musí být velmi pečlivě připravena a provedena. Pro žáky představuje náročný leč zvládnutelný a zábavný úkol, z pohledu učitele jde o aktivní formu učení, při kterém žák učivu porozumí. Metoda objevování je motivující pro všechny žáky na různých úrovních kognitivního vývoje. Na učiteli záleží, zda se přípravě bude věnovat a práci dostatečně promyslí a bude jí dobře řídit. Při nedbalém promyšlení a špatném řízení „*… se žáci nic nenaučí, budou zmateni a frustrování a jediným výsledkem bude ztráta času a zmaření dobré vůle.*“ (Petty 1996, s. 228). Metodě objevování vede žáky k učení s porozuměním, jak naznačuje schéma (příloha 5). Také se jedná o metodu, na níž má největší podíl v řízení žák, jak naznačuje diagram (příloha 6).

G. Petty (1996) ve své publikaci uvádí sedm zásad pro správné užití metody objevování. Úkol musí být vymyšlen tak, aby ho byli schopni plnit všichni žáci, aby měli všechny potřebné znalosti a dovednosti. Zadání musí být jasné, aby každý žák věděl, co se po něm žádá. Je dobré ve třídě toto zadání umístit na viditelné místo po celou dobu objevování. Úkol musí být splnitelný pro všechny žáky, což znamená, že některým je potřeba v průběhu práce vypomoci. Každé objevování je tím pádem řízené, ale záleží na míře aktivity učitele. Průběh práce žáků je zapotřebí sledovat. Pokud by učitel nesledoval průběh jejich práce, mohli by strávit hodiny bezvýslednou prací. Učitel musí s žáky komunikovat po celou dobu jejich objevování, ptát se na jejich řešitelské postupy, musí být schopný jim poradit pomocí otázek, pokud nevědí, kterým směrem se v bádání vydat. Učitel tak může kontrolovat, zda jsou postupy žáků proveditelné a žáci neopomenou podstatné kroky vedoucí k objevu. Žáci se mnohé naučí ze svých vlastních chyb, je ale zapotřebí, aby celou dobu nestrávili nesmyslnými pokusy a jejich práce nevedla k cíli. V takovém případě by měl učitel nepřímo nasměrovat jejich myšlenkové pochody směrem, kterým se mají ubírat. Pro učitele je důležité zvolit téma, kde žáci nebudou znát odpověď během prvních pár minut. V kolektivu jsou vždy žáci na různých úrovních kognitivního vývoje, a proto je možné vymyslet těm, kteří budou v objevování rychlejší, náročnější úkol. Aby měli šanci dojít k cíli všichni, potřebují k práci dostatek času. Většinou je potřeba dvojnásobek předpokládaného času, který se zprvu zdál dostatečný. Na závěr je velmi důležité shrnutí poznatků, kterých žáci dosáhli. Je podstatné shrnout a objasnit hlavní body práce tím, že je žáci uvedou v souvislostech se zjištěním, ke kterým dospěli. Žáci, kteří jsou zvyklí na transmisivní nebo instruktivní didaktický přístup, si musí metodu objevování procvičovat opakovaně, aby v ní byli schopni efektivně pracovat.

Jako každá metoda tak i tato má své výhody a nevýhody. Mnohým se zdá, že tato metoda učí žáky objevovat chybná řešení a dělá jim zmatek v dosavadních znalostech. Tato kritika však padá na hlavu učitele, neboť ten nesmí dopustit, aby měli žáci po skončení práce hlavu plnou mylných představ a poznatků. Učitel se musí vyvarovat všem úskalím, které přináší jakákoliv metoda. Stejně jako je vytýkáno konstruktivistickému přístupu v matematice i této metodě je vytýkáno, že je cesta k objevu zdlouhavá. Správným vedením však může učitel tuto nevýhodu do značné míry omezit. Důležitým nedostatkem metody je však fakt, že tato metoda sama o sobě nestačí k osvojení praktických či intelektuálních dovedností. Ty musí být podloženy dosavadními znalostmi a zkušenostmi žáků. Také se jedná o skupinovou práci a s ní přichází riziko, že ne všichni žáci budou při badatelské činnosti aktivní. Pokud však budou práci alespoň přihlížet, může pro ně být podobně přínosná jako pro aktivní žáky.

Pokud je metoda objevování užívána správně vede žáky k aktivní práci. Je pro ně motivující a zábavná. Prostřednictvím žákových dosavadních znalostí a zkušeností je dovede k jasnému pochopení učiva. Od žáků vyžaduje vyšší myšlenkové procesy na úrovni tvůrčí myšlenky, analýzy a syntézy a hodnocení vlastního počínání. Jiné tradičnější metody od žáků nevyžadují vyšší myšlenkové procesy, ale pouze to, aby dával pozor a přednášenou látku chápal. Tato metoda podněcuje žáky k vnímání učení jako k činnosti, jež jsou sami strůjci. Vnitřní motivace žáků je podporována vlastní radostí z objevu a řešitelského postupu.

2.4.2 Metoda uvolňování parametru

S metodou uvolňování parametru jsem se seznámil ve skriptech *Čtverečkovaný papír jako most mezi geometrií a aritmetikou* (Hejný, Jirotková 1999), kde je této metodě věnována kapitola 3.2 (Metoda uvolňování souřadnic). Autoři zde vysvětlují princip metody na konkrétní úloze vedoucí k nalezení souřadnic obrazu bodu ve středové souměrnosti, je-li zadán právě střed souměrnosti a vzor bodu pomocí obou svých souřadnic.

„Podstata této metody spočívá v tom, že ze čtyř měnících se souřadnic j, k, l, m některé tři fixujeme a pouze jednu necháme volnou, to znamená - necháme probíhat přirozená, resp. celá čísla. Tím odhalíme část zákonitostí. Z těchto získáme zákonitost obecnější. Proces zobecňování opakujeme a nacházíme stále obecnější zákonitosti, až nakonec dospějeme k hledanému obecnému ‚vzorci'. Je to metoda zdlouhavá, ale právě proto přístupná téměř všem žákům." (Hejný, Jirotková 1999, s. 29)

Zaujalo mě její použití při výuce geometrie na VŠ pro odvození vztahu Pythagorovy věty, kdy mnohé spolužačky skutečně teprve nyní objevily, co vlastně Pythagorova věta znamená a jaké jsou její možnosti využití.

Rozhodl jsem se vyzkoušet metodu i ve vlastním samostudiu. V prvním ambiciózním záchvěvu jsem chtěl pro sebe objevit Heronův vzorec $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, kde $s = (a+b+c)/2$, se kterým jsem se pasivně seznámil na střední škole, ale nikdy jsem nerozuměl tomu, proč takto funguje. Snažil jsem se na čtverečkovaném papíře o jeho objevení metodou uvolňování parametru. Pokusil jsem se zadat pevnou jednu stranu a plynule proměňovat výšku, čímž vznikaly trojúhelníky se dvěma stranami určenými iracionálními čísly. Tato skutečnost byla největší překážkou pro zobecnění nalezených zákonitostí nejen na čtverečkovaném, ale i bílém papíru. Bohužel se mi nepodařilo dospět k odvození tohoto vzorce ani na čtverečkovaném, ani na bílém papíru.

Dalším pokusem bylo objevit pro sebe vztah pro určení obsahu pravoúhlého lichoběžníku, který také běžně nepoužívám, proto si jeho přesnou podobou nejsem nikdy příliš jistý. Zde už jsem byl podstatně úspěšnější. Obecný postup metody uvolňování parametru (jako parametr nebudu brát v úvahu pouze souřadnice, ale jakýkoliv číselně vyjádřitelný parametr), který je ve výše uvedených skriptech pospán na jiné úloze, objasním a současně budu ilustrovat na vlastním pracovním postupu, pro větší názornost jsem si zvolil speciální případ lichoběžníku – pravoúhlý lichoběžník. Obsah lichoběžníku (S) závisí na délkách dvou jeho rovnoběžných stran (a, c) a na jeho výšce (v). Jedná se tedy o tři parametry, ze kterých je potřeba dva fixovat a třetí bude volný, tedy jeho velikost se bude měnit v oboru přirozených čísel. (Neuvažuji mezní situaci, kdy je jeden z údajů roven nule, protože nepracuji se souřadnicemi, neberu v úvahu ani záporná a desetinná čísla). Jako základní pravoúhlý lichoběžník jsem zvolil ten, pro který platí: $a = 2$ (dílky čtverečkovaného papíru), $c = 1$, $v = 1$. Za základní jednotku délky považuji délku strany nejmenšího čtverce ve čtverečkovaném papíru. Výšku v a délku strany c považuji za pevné parametry, délku strany a považuji za volnou proměnnou a nechám ji probíhat v oboru přirozených čísel.

Jirotková (1999) popisuje, že je vhodné metodu rozčlenit do několika etap, jejichž počet závisí na trpělivosti a erudici autora. Každá etapa má však předem dané jednotlivé fáze. Fázi č. 1 nazývá experimentem. Obecně to znamená, že autor vyřeší několik praktických úloh. Pro mě to znamenalo sestrojit dostatečné množství pravoúhlých lichoběžníků a určit jejich obsah, přičemž všechny lichoběžníky byly pravoúhlé a jejich tři výše uvedené rozměry byly dány přirozeným číslem. U každého jsem si zapsal všechny důležité číselné údaje (a, c, v, S) (obr. lichoběžníku s obsahem).

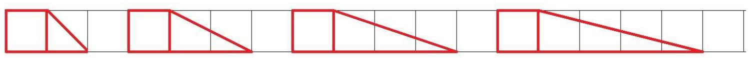
Fázi č. 2 označuje Jirotková (1999) jako evidence experimentů. Jedná se vlastně o uspořádání všech získaných výsledků do přehledné tabulky. V této fázi je také důležité roztřídit experimentálně nalezené lichoběžníky podle předem stanoveného kritéria, čímž jsou pevné parametry a postupně probíhající volné parametry. Tyto výsledky jsem uspořádal do tabulek a uvádím k nim i odpovídající lichoběžníky, kterých se výsledky týkají.

Fáze č. 3 je nazvána jako odhalení zákonitostí tabulky. Jedná se vlastně o doplnění některých údajů, které se neobjevily v experimentálně zjištěných údajích, ale které je možné logicky doplnit. Jirotková (1999) toto nazývá jako znalost v činnosti. V každé části pro c = 1 jsem si skutečně nakreslil jen čtyři, později jen tři (i když uvádím pro přehlednost také čtyři) lichoběžníky, kde jsem postupně zvyšoval velikost výšky a dopočítal obsah. Do tabulek (4.1. – 4.3.) jsem pak doplnil chybějící údaje bez vlastního znázorňování daného lichoběžníku.

Fáze č. 4 je popsána jako návod pro spolužáka, kterému slovně vysvětlíme, jak je možné získat další údaje do tabulky bez nutnosti znázorňování daného objektu. Většinou tento návod odpovídá konkrétním obrázků a konkrétním číslům. Odborně tuto fázi nazýváme verbalizací. Pro moji tabulku 4.1 to znamená toto: „Vezmi délku delší rovnoběžné strany, zmenši ji o jednotku, vyděl dvěma, čímž získáš obsah pravoúhlého trojúhelníku, pak přidej celou jedničku (obsah čtverce 1 x 1)“. Pro tabulku 4.2 se tento postup podstatně změnil: „Vezmi délku delší rovnoběžné strany a zvětši ji o jedna“. V další tabulce se verbalizace opět liší, teprve zde dojde použití opravdu všech relevantních údajů: „Vezmi délku delší rovnoběžné strany, zmenši ji o jednotku, vynásob výškou tři a vyděl dvěma, čímž získáš obsah pravoúhlého trojúhelníku. Pak přidej tři (obsah obdélníku 1 x 3)“.

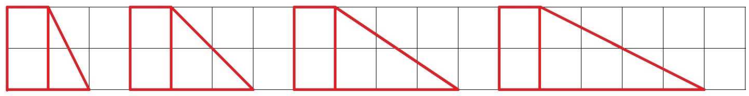
Tab. 4.1.

a	2	3	4	5	6	7	a
c	1	1	1	1	1	1	c
v	1	1	1	1	1	1	v
S	1,5	2	2,5	3	3,5	4	1 + [(a – 1) * 1] / 2



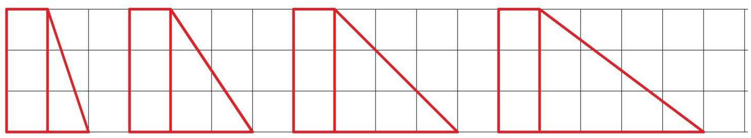
Tab. 4.2.

a	2	3	4	5	6	7	a
c	1	1	1	1	1	1	c
v	2	2	2	2	2	2	v
S	3	4	5	6	7	8	2 + [(a – 1) * 2] / 2 = 2 + (a – 1)



Tab. 4.3.

a	2	3	4	5	6	7	a
c	1	1	1	1	1	1	c
v	3	3	3	3	3	3	v
S	4,5	6	7,5	9	10,5	12	3 + [(a – 1) * 3] / 2



Pokud všechny uvedené návody převedeme do symbolického jazyka, nacházíme se ve fázi č. 5 nazvané jako symbolizace. Toto je již fáze, do které se žáci na prvním stupni obvykle nedostanou, ani ve vyšších ročnících neprobíhá nijak rychle. Nutností je použití jazyka formální algebry. K tomu dojde při zkracování slovně vyjádřeného návodu, např. návod: „Vezmi délku delší rovnoběžné strany, zmenši ji o jednotku, vynásob výškou tři a vyděl dvěma, čímž získáš obsah pravoúhlého trojúhelníku. Pak přidej tři.“ je možné zkrátit takto: str. – 1 = výsl.1; výsl.1 *3 a celé /2 + 3 = výsledek. Z tohoto zkracování pak vznikne několik různých záznamů téhož výsledku.

Poznání, že různě vyjádřené (verbálně nebo symbolicky) dílčí výsledky jsou vlastně totéž, nazýváme abstrakce a jedná se o fázi č. 6.

První etapa celého procesu končí poslední fází č. 7, což je nazýváno jako formulace výsledku. Jedná se o zapsání posledního sloupce uvedených tabulek, tedy pro v = 3 je to vztah S = 3 + [(a – 1) * 3] / 2, který symbolicky vyjadřuje způsob výpočtu obsahu lichoběžníku o výšce 3 a o libovolně velké délce delší rovnoběžné strany.

Jednotlivé tabulky 4.1 – 4.3 znázorňují opakování prvních tří fází se všemi svými etapami. Takto bych mohl postupovat dále a nechat probíhat délku delší rovnoběžné strany více hodnotami, což je ale zbytečné, protože ze vztahů v posledním sloupci všech tabulek dokážu vyjádřit obecnější zákonitost. K jejímu vyjádření slouží tabulka 4.4, kde jsou přehledně uspořádány dílčí výsledky a je zobecněna i druhá proměnná, tedy výška lichoběžníku jako 3 + [(a – 1) * 3] / 2.

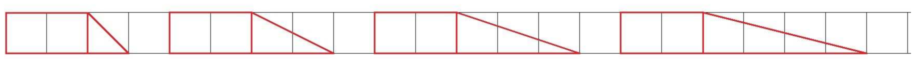
Tab. 4.4.

v	1	2	3	4	v
S	1+[(a–1)*1] /2	2+[(a–1)*2] /2	3+[(a–1)*3] /2	4+[(a–1)*4] /2	v + [(a – 1) * v] / 2

Dále je potřeba uvolnit další proměnnou, a to délku kratší strany c. V prvních třech tabulkách byla uvedena její konstantní délka jedna jednotka. Stejný proces jsem zopakoval ještě pro c = 2, což zde uvádím pouze jako tabulky 5.1 – 5.4 a pak ještě pro c = 3, což jsem uvedl do tabulek 6.1 – 6.4. Zde již nebylo pro mě nutno počítat tolik skutečných obsahů, ale většinu údajů jsem doplnil rovnou do přehledných tabulek a ilustrační obrázky jsem doplnil až později, u některých došlo k ověření výsledků.

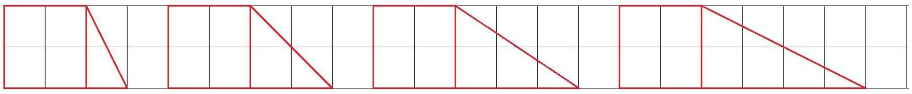
Tab. 5.1.

a	3	4	5	6	7	a
c	2	2	2	2	2	c
v	1	1	1	1	1	v
S	2,5	3	3,5	4	4,5	2 + [(a – 2) * 1] / 2



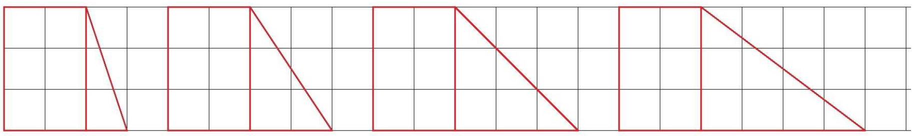
Tab. 5.2.

a	3	4	5	6	7	a
c	2	2	2	2	2	c
v	2	2	2	2	2	v
S	5	6	7	8	9	4 + [(a – 2) * 2] / 2



Tab. 5.3.

a	3	4	5	6	7	a
c	2	2	2	2	2	c
v	3	3	3	3	3	v
S	7,5	9	10,5	12	13,5	6 + [(a – 2) * 3] / 2

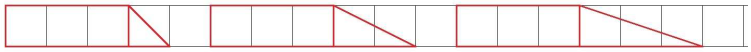


Tab. 5.4.

v	1	2	3	4	v
S	2+[(a–2)*1] /2	4+[(a–2)*2] /2	6+[(a–2)*3] /2	8+[(a–2)*4] /2	v*2 + [(a – 2) * v] / 2

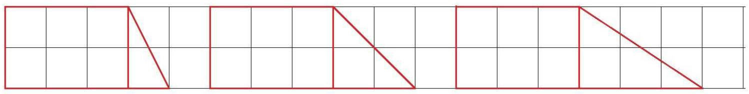
Tab. 6.1.

a	4	5	6	7	a
c	3	3	3	3	c
v	1	1	1	1	v
S	3,5	4	4,5	5	3 + [(a – 3) * 1] / 2



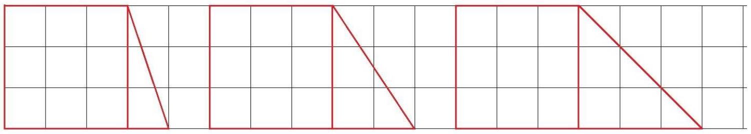
Tab. 6.2.

a	4	5	6	7	a
c	3	3	3	3	c
v	2	2	2	2	v
S	7	8	9	10	6 + [(a – 3) * 2] / 2



Tab. 6.3.

a	4	5	6	7	a
c	3	3	3	3	c
v	3	3	3	3	v
S	10,5	12	13,5	15	9 + [(a – 3) * 3] / 2



Tab. 6.4.

v	1	2	3	4	v
S	3+[(a–3)*1] /2	6+[(a–3)*2] /2	9+[(a–3)*3] /2	12+[(a–3)*4] /2	v*3 + [(a – 3) * v] / 2

Jak jsem již uvedl, počet etap závisí na trpělivosti a erudici řešitele. V podstatě by mi stačily dvě etapy, třetí jsem provedl jen „cvičně“, pro ověření, že vše platí tak, jak má.

Poslední etapa celého objevitelského procesu se týká finálního zobecnění. Zde bylo potřeba si uvědomit, že obsah lichoběžníku závisí nejen na délce delší rovnoběžné strany a na velikosti výšky, ale také na délce kratší rovnoběžné strany. Ostatně jsem také tuto stranu nechal probíhat přirozenými čísly. Proto jsem si nyní sepsal všechny tři dílčí výsledky a pokusil se provést poslední zobecnění:

Pro c = 1 platí: S = v + [(a – 1) * v] / 2

Pro c = 2 platí: S = v*2 + [(a – 2) * v] / 2

Pro c = 3 platí: S = v*3 + [(a – 3) * v] / 2

Tyto tři údaje jsem si pouze sepsal z dílčích výsledků jednotlivých etap. Následně jsem pokračoval zcela analogicky.

Pro c = 4 bude platit: S = v*4 + [(a – 4) * v] / 2

Pro c = 5 bude platit: S = v*5 + [(a – 5) * v] / 2

Pro c = 6 bude platit: S = v*6 + [(a – 6) * v] / 2

Obecně tedy pro každé c bude platit: **S = v*c + [(a – c) * v] / 2**

Posledním úkolem tedy bylo pokusit se pochopit, případně ověřit, že jsem získal analogický zápis pro výpočet trojúhelníku. Po formálních úpravách složeného výrazu na pravé straně rovnosti jsem skutečně dospěl k poznání, že se jedná o stejný vztah, který je uváděn v každé učebnici matematiky pro základní školu, tedy S = [v*(a+c)]/2. Tím byl můj vlastní objevitelský proces úspěšně završen.

V praktické části uvádím, jak jsem jednotlivé fáze jednotlivých etap metody uvolňování parametru zařazoval do výuky matematiky ve třetím ročníku. Především jsem kladl důraz na experimentální fázi při zjišťování obsahu trojúhelníků, na evidenci získaných údajů, na odhalení závislostí mezi obsahy jednotlivých trojúhelníků a na verbalizaci. K symbolizaci ani dalším etapám žáci při vedení experimentů pochopitelně ještě v té době nedospěli.

3 Praktická část

Všechny experimenty uváděné v této práci byly realizovány během školního roku 2012/2013. Prodleva se zpracováním byla způsobena rodinnými důvody, stěhováním od rodičů a nástupem do nového zaměstnání a plného nasazení v něm. Přesto mi přišly tyto údaje natolik cenné, že jsem se rozhodl je zpracovat. Také jsem využil toho, že jsem nastoupil na stejnou základní školu, kde experiment dříve probíhal, a tudíž jsem mohl po letech ověřit znalosti, získané v průběhu experimentu, u stejné skupiny žáků.

Hlavní část experimentu probíhala od 5. 10. 2012 do 2. 4. 2013 na základní škole FZŠ Táborská 45 v Praze – Nuslích se žáky tehdejšího třetího ročníku v sedmi vyučovacích hodinách. Experiment byl tedy součástí výuky podle školního rozvrhu, odpovídal školnímu vzdělávacímu programu, i když jej mírně rozšiřoval. Experimentální výuky se vždy zúčastnili všichni přítomní žáci dané třídy, a to nejvýše 12 chlapců a 14 dívek, přičemž v některých hodinách nebyli přítomni všichni žáci.

Dodatečná část experimentu se uskutečnila 7. 10. 2016 na téže základní škole s obdobnou skupinou žáků, kteří již navštěvovali sedmý ročník, v jedné vyučovací hodině. Jednalo se o skupinu stejných žáků (nikdo nepřibyl), několik žáků se během čtvrtého, pátého a šestého ročníku odstěhovalo nebo bylo přijato na víceleté gymnázium. Experimentu se tedy zúčastnili všichni přítomní žáci, tedy 5 chlapců a 12 dívek.

3.1 Popis experimentu

Jednotlivé experimenty jsou řazeny chronologicky a číslovány kódem 20XX/20XX_0X_MA, který znamená školní rok, ve kterém experiment probíhal a chronologické pořadí dané hodiny. Ke každému experimentu jsem zpracoval *Protokol experimentu*, kde uvádím komentovaný scénář hodiny s očekávaným průběhem jednotlivých aktivit, samozřejmostí je odhad časové náročnosti. Kromě toho v něm uvádím dílčí cíl každého experimentu včetně úloh vedoucích k jeho naplnění. Poté popisuji průběh části hodiny odpovídající uvedenému experimentu a uvádím žákovská řešení. Všechny stěžejní argumenty žáků a všechny zajímavé situace, které jsem takto vyhodnotil, dokumentuji v textu odpovídajícím doslovným přepisem žákovské diskuze.

Dále v něm uvedu reflexi dané části hodiny a na závěr shrnu všechny kognitivní, sociální i osobnostní jevy zúčastněných žáků, které jsem dokázal evidovat a identifikovat.

V popisu jednotlivých experimentů používám žákovskou terminologii při uvádění jednotek obvodu i obsahu. Jako jednotku obvodu uvádím dřívka, jako jednotku obsahu uvádím čtverečky. Také používám pro zjednodušení orientace ve všech pracovních listech i terminologii, která odkazuje na umístění na pracovní ploše tj. vodorovná a svislá strana. Všechna jména jsou uváděny pod pseudonymy z důvodu ochrany osobních údajů žáků.

3.1.1 Protokol experimentu 2012/2013_01_MA

Datum uskutečnění: 5. 10. 2012

Škola: FZŠ Táborská, Táborská 45, Praha 4

Třída: 3. B

Vyučující: Luděk Kovář

Počet přítomných žáků: 16 (7 chlapců, 9 dívek)

Délka experimentu: 45 minut

Téma hodiny: Mnohoúhelník

Cíle hodiny: Žák určí obvod a obsah mnohoúhelníku ve čtvercové síti

Vedlejší cíle: Žák zaznamená dílčí výsledky do tabulky

Pomůcky: Čtvercová síť, figurky, barevné papírové čtverce, dřívka

a) Příprava na hodinu:

Předpokládaný průběh (včetně odhadu časové náročnosti):

<u>1. skupinová práce – vytvoření mnohoúhelníku 15 minut</u>

Žáky necháme, ať se rozdělí do stejně početných skupin. Každá skupina dostane čtvercovou síť a 5 kamínků.

Úkolem je vytvořit na papíře společnou zahradu (mnohoúhelník) tak, aby pro každou figurku připadl jeden záhon (čtvereček). Dalším úkolem je určit obvod a obsah této zahrady a výsledky zaznamenat do tabulky na tabuli.

<u>Předpokládaný průběh aktivity</u>

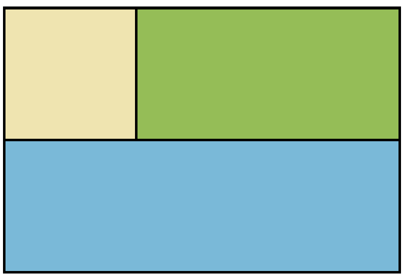
Žáci budou nejprve diskutovat nad všemi variantami stejně početných skupin. Předpokládám, že budou schopni rozdělit se do dvojic, čtveřic a osmic. K další práci necháme žáky ve čtveřicích.

Dále předpokládám, že společně v aktivitě vymezíme pojem společné zahrady (mnohoúhelníku). Určíme si, co je a co není zahrada a proč. Předpokládám, že se objeví útvary, kde jednotlivé záhony (čtverečky) nebudou navzájem spojené stranou, ale pouze vrcholem. Nebo spolu nebudou sousedit vůbec.

Předpokládám, že žáci budou určovat obvod své zahrady tak, že budou počítat jednotlivé strany čtverců, jakoby na ně pokládali dřívka. Někteří si dřívka vezmou jako pomůcku a obvod určí manuálně. Obsah určí tak, že spočítají počet čtverců. Předpokládám, že v hodině zazní, že všechny zahrady mají stejný obsah, protože všechny skupiny dostaly stejný počet kamínků, ale že obvod se různí podle tvaru zahrady.

<u>2. společná práce – počet čtverců a obdélníků v čtyřúhelníku 5 minut</u>

Každý žák dostane papírové čtverce (1x žlutý, 2x zelený a 3x modrý). Vytvoří z nich zahradu podle vzoru. Diskuze s žáky o počtu čtverců a obdélníků v útvaru.



<u>Předpokládaný průběh aktivity</u>

Žákům rozdám barevné čtverce, s vytvořením čtyřúhelníku podle předlohy nebudou mít žádné potíže.

Předpokládám, že ve čtyřúhelníku žáci objeví jeden čtverec. Mohly by nastat komplikace s počtem čtverců, kdy budou počítat všech šest čtverců, ze kterých čtyřúhelník složili a ne pouze jeden, který je na obrázku v učebnici.

Dále předpokládám, že žáci objeví všechny čtyři obdélníky, pokud si při hledání čtverců vysvětlíme, že hledáme v obrázku z učebnice. Žáci by mohli brát obdélník 3 x 1 (celý modrý) a obdélník 3 x 1 (složený z obdélníku 2 x 1 a čtverce 1 x 1) jako shodné.

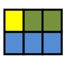
3. skupinová práce – zavedení pojmu rozměr čtyřúhelníku 15 minut

U všech nalezených útvarů určíme obvod, obsah a rozměr tohoto útvaru. Každá skupina půjde zapsat údaje jednoho z nich do tabulky na tabuli.

Předpokládaný průběh aktivity

Nepředpokládám, že při určování obvodu a obsahu čtyřúhelníků vyvstanou nějaké potíže. Předpokládám, že potíže nastanou s pojmem rozměr. Žáci se s tímto pojmem ještě nesetkali. Na začátku aktivity se jich zeptám, zda jsou schopni určit rozměr některého útvaru. Pokud budou žáci tápat, opustíme tuto diskuzi a přejdeme k určování obvodu a obsahu. V průběhu společné kontroly budu při diskuzi používat rozměry jednotlivých čtyřúhelníků. Na konci se poté žáků opět zeptám, zda jsou schopni určit rozměr některého útvaru.

Tabulka č. 1 (Vzorové řešení úlohy 3)

	Rozměr	**Obvod**	**Obsah**
	**1 x 1**	**4**	**1**
	**2 x 1**	**6**	**2**
	**3 x 1**	**8**	**3**
	**3 x 1**	**8**	**3**
	**3 x 2**	**10**	**6**

4. společná diskuze – zlomky 10 minut

Na tabuli budou připravené čtyři barevné čtyřúhelníky o rozměrech 3 x 2. Jeden stejně barevný jako v učebnici, další jednobarevné (žlutý, zelený, modrý).

Zeptáme se žáků, kolik čtverců potřebujeme na vytvoření jednotlivých čtyřúhelníků. Dále povedeme diskuzi, jakou část barevné zahrady tvoří žlutý, zelený a modrý čtyřúhelník.

Předpokládaný průběh aktivity

Předpokládám, že žáci nebudou mít problém s určením poloviny. Větší problém by jim mohla dělat třetina a šestina. Žáky se k těmto pojmům případně pokusíme dovést návodnými otázkami.

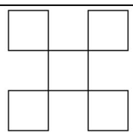
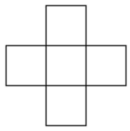
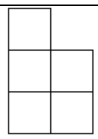
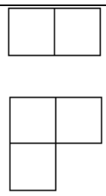
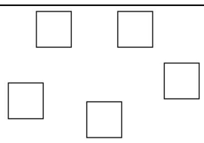
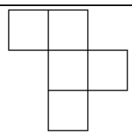
b) Popis průběhu:

Fakultní učitel mě nejprve žákům představil a uvedl, že dnešní hodinu budou pracovat se mnou. Žáci dostali první úkol, rozdělit se do stejně početných skupin. Žáci se rozdělili do čtveřic, ale diskutovali i o dvojicích. Dokonce zazněl i návrh rozdělit se do osmic. K další práci zůstali ve čtveřicích a sedli si k jednomu z pracovních hnízd. Každá skupina měla k dispozici čtvercovou síť a pět barevných kamínků. Úkolem skupiny bylo vytvořit společnou zahradu tak, aby pro každý kamínek měly jeden záhon. Po skončení práce zaznamenal vyslanec každé skupiny číselné výsledky do předem připravené tabulky na tabuli. Následovala společná diskuze nad výsledky. Hlavní téma diskuze bylo, zda se jedná či nejedná o společnou zahradu. S žáky jsme společně definovali společnou zahradu, tudíž pojem mnohoúhelníku. Společně jsme zkontrolovali doplněné obvody a obsahy a vysvětlili si, jaké strategie žáci použili.

Tabulka s výsledky žáků

Tabulka č. 2 (Žákovská řešení úlohy 1)

Do tabulky jsem přidal sloupec „Opravený nákres“, který zachycuje opravená řešení skupin po diskuzi ve třídě. Obvod a obsah, který je uveden v závorce, také znamená opravené řešení.

Skupina	Nákres	Opravený nákres	Obvod	Obsah
A			12	9 (5)
B			10	5
C			18	5
D			20 (12)	5

Na další aktivitu si žáci sedli na své místo v lavici a každý dostal šest barevných čtverců. Všichni si sestavili čtyřúhelník podle učebnice. Diskutovali jsme společně o počtu čtverců a obdélníků v tomto čtyřúhelníku. Ptal jsem se žáků, zda by dokázali u některého útvaru určit jeho rozměry. Žáci na tuto otázku neuměli odpovědět, tak jsme přešli k další části aktivity. Z každého pracovního hnízda šel poté jeden žák zakreslit jeden z útvarů do tabulky a určil jeho obvod a obsah. Při společné kontrole jsem pro pojmenování jednotlivých útvarů používal jejich rozměry. Po kontrole, která proběhla už po zvonění, jsem se opět zeptal žáků, zda by dokázali určit rozměry některého z útvarů. Poslední aktivitu týkající se zlomků jsme v této hodině nestihli.

c) Reflexe:

Podle předpokladu byli žáci schopni rozdělit se do stejně početných skupin. Většina čtveřic vznikla na základě přátelských vztahů mezi žáky. Zbyla jedna dvojice chlapců a jedna dvojice dívek, kteří byli nuceni vytvořit společně pracovní skupinu. Jelikož tato čtveřice nevznikla na základě přátelských vztahů, nebyla schopna v dalším úkolu spolupracovat, což se odrazilo při jejich společném řešení. V jednotlivých skupinách byli schopni vytvořit zahradu s pěti záhony. Ale ne všechny vytvořené zahrady byly zahradami společnými, což se ukázalo v následné diskuzi. Násilně vytvořená skupina nevyřešila úkol podle zadaných parametrů, ale vznikla samostatná chlapecká a dívčí zahrada. Společně s žáky jsme se dopracovali k vymezení pojmu zahrady (mnohoúhelníku), kdy jsme se shodli na tom, že všechny sousední záhony (jednotlivé čtverečky) se musí dotýkat vždy stranou a ne pouze vrcholem, čemuž neodpovídaly všechny návrhy řešení. Některé skupiny své řešení opravily již v průběhu diskuze. Násilně vytvořená skupina uznala, že jejich řešení neodpovídá všem parametrům zadání a že vytvořili dvě samostatné zahrady, ale své řešení neopravili a dále trvali na původním návrhu.

Doslovný přepis žákovské diskuze – 2012/2013_01_MA 15:44 –18:23:

Vít09: *„Tím pádem to není zahrada.“*(nákres skupiny A)

Experimentátor27: *„Tím pádem to není zahrada?“*

Vít10: *„Jich je pět.“*

Experimentátor28: *„Je to pět zahrad? A co tady?“*(nákres skupiny D)

Jaroslav06: *„Taky je to špatně, to jsou sousedi.“*

Experimentátor29: *„To jsou sousedský. A tady je jedna zahrada?“* (nákres skupiny C)

Vasil10: *„Ne, dvě.“*

Žák01: *„Tři.“*

Experimentátor30: *„Tři?“*

Vít11: *„Ale pane učiteli, ale oni tam mají špatně napsaný obvod.“*

Experimentátor31: *„K tomu se dostaneme, teď řešíme, jestli je to zahrada. Takže tady jsou dvě zahrady?“*

Jaroslav07: *„Jo.“*

Experimentátor32: *„A tady?“*(nákres skupiny B)

Vasil11: *„Jedna.“*

Experimentátor33: *„Je to zahrada? A proč tohle je zahrada* (nákres skupiny B) *a tohle není zahrada?“* (nákres skupiny A)

Jaroslav08: *„Obě jsou zahrady. Naše je královská zahrada.“*

Experimentátor34: *„Jo vaše je královská. A teď, když se na to koukneme z pohledu matematiků? Proč o tomhle obrazci řekneme, že je to zahrada a o tomhle, že není? Vít to tady říkal.“*

Patrik05: *„No protože to modrý jako nevypadá jako zahrada.“*

Vasil12: *„A to červený jako vypadá jako zahrada, Patriku?“*

Patrik06: *„Prosím?“*

Vasil13: *„To červený vypadá jako zahrada?“*

Experimentátor35: *„Vít tady říkal, že tohle je co?* (Jaroslav09: *„Já už vím, já to chci opravit.“*) *Že to vypadá jako?“*

Jaroslav10: *„Já vím, jak to jde opravit. Vždycky to posuneme o jedno políčko buď nahoru, nebo doprava.“*

Experimentátor36: *„Tohle? Tak je to vaše, tak to pojď opravit. Jak to myslíš.“… „Tak, o tomhle bychom řekli, že je taky zahrada už? Kluci, s tímhle už byste souhlasili, že je to zahrada?“*

Vasil14: *„Ale s tím předtím taky.“*

Experimentátor37: *„Tak, domluvíme se na tom, že zahrada, když má být vaše společná, tak musíte, ze všech těch čtverečků moct přejít k sobě, to znamená, že ty čtverečky se musí dotýkat čím?“*

Jaroslav11: *„Rohem.“*

Vít12: *„Rohem právě ne, to nám nestačilo tady, jak jsme měli."*

Vasil15: *„Krajem."*

Experimentátor38: *„Stranou. Krajem. Okrajem vždycky toho čtverečku se musí dotýkat navzájem, aby to byla jedna zahrada. Tak a kluci, sedí tam obvod a obsah? Tady u té vaší nové."*

S určováním obvodu neměli žáci větších problémů. Někteří opravdu použili jako pomůcku dřívka, jiní pouze spočítali počet stran základních čtverců na hranici zahrady. Vždy se jednalo o počítání číselné řady po jedné s ukázáním na odpovídající stranu základního čtverce. Navzájem si přepočítali skutečné obvody svých navrhovaných zahrad, případně opravili numerické chyby autorů. Nikdo s žáků se nepozastavil nad různou číselnou hodnotou jednotlivých obvodů zahrad a nikdo nepřišel s žádnou strategií vedoucí k zjednodušení výpočtu.

Doslovný přepis žákovské diskuze – 2012/2013_01_MA 18:55 – 19:17:

Experimentátor41: *„Aničko, jak jste přišli na obvod deset?"*

Augusta05: *„No, my jsme tady spočítali kolik…* (Učitel06: *„Běž to ukázat na tabuli, Aničko, ať tě všichni vidí."*) *My jsme si spočítali tady ty čárky a vyšlo nám deset."*

Doslovný přepis žákovské diskuze – 2012/2013_01_MA 19:45 – 20:11:

Experimentátor44: *„Tak kluci, co ta vaše zahrada? Jaký má obvod?"*(nákres skupiny A)

Jaroslav12: *„Třináct."*

Experimentátor45: *„Třináct?* (Jaroslav13: *„Dvanáct."*) *A jak jste to počítali vy? Tak to pojďte taky ukázat, jak jste to počítali. Vasil to spočítal?"*

Vasil17: *„Raz, dva, tři, čtyři,* (Učitel08: *„Martino, Andreo, dívejte se!"*) *pět, šest, sedm, osm, devět, deset, jedenáct…Dvanáct. Takže dvanáct."*

Po zapsání všech číselných výsledků určujících obsah a po zjištění, že se vždy jedná o stejnou hodnotu, zaznělo ve třídě, že je jasné, že bude obsah 5, pokud mají všechny skupiny k dispozici 5 kamínků.

Doslovný přepis žákovské diskuze – 2012/2013_01_MA 20:33 – 20:44:

Vít12: *„To je jasný, že tady ta zahrada, že je tam těch pět."*

Experimentátor49: *„A je to u všech zahrad? Všichni máte obsah pět?"*

Vít13: *„Jo."*

Augusta07: *„Všichni musí mít pět, když tam musí být pět záhonů."*

Doslovný přepis žákovské diskuze – 2012/2013_01_MA 23:35 –24:00:

Augusta09: *„To nejde, protože* (Experimentátor64: *„Co nejde?"*) *aby tam nebylo pět obsah, protože kdybychom to dali od sebe, tak by to byly dvě zahrady a máme pět kamínků, takže to nejde."*

Experimentátor65: *„Takže aby na každý kamínek vycházel jeden čtvereček* (Augusta10: *„Tak musí být pět obsah."*) *tak musí být vždycky pět obsah."*

Vasil29: *„Je pět kamínků, musí být pět obsah."*

U další aktivity žáci sestavili požadovaný útvar z barevných čtverečků podle předlohy z učebnice. Překvapilo mě, že velmi rychle objevili všechny čtyři obdélníky a jeden čtverec a dokonce to spolužákům dokázali velmi dobře vysvětlit a popsat. Po mém prvním dotazu na počet čtverců zazněla dvě řešení – jeden čtverec, šest čtverců. Jedna žákyně vysvětlila, že vidí jeden čtverec žluté barvy, proti čemuž konstatovala druhá žákyně, že takových čtverců, ze kterých předlohu sestavila, je tam šest. Jeden z žáků vyslovil argument, že je potřeba se dívat na útvary stejné barvy jako v učebnici. Poté se všichni shodli na řešení jednoho čtverce.

Po mém druhém dotazu na počet obdélníků zazněl tak silný argument, proti němuž nenašel nikdo žádný argument.

Doslovným přepisem žákovské diskuze – 2012/2013_01_MA 35:46 – 36:18:

Experimentátor91: „Tak, kolik je tam obdélníků? Kdo našel nějaký obdélník? Patriku?"

Patrik19: „Čtyři."

Experimentátor92: „Čtyři?"

Patrik20: „No, jeden ten velký, pak ten modrý, pak ten zelený a pak ten žlutý a zelený."

Antonie14: „Ten žlutý je čtverec, to není obdélník.“

Vasil33: „Ale můžeš to spojit.“

Experimentátor93: „Tak kolik? Má Patrik pravdu? (Třída07: „Jo.“) Takže souhlasíme se čtyřmi obdélníky a jedním čtvercem?“

Doslovným přepisem žákovské diskuze – 2012/2013_01_MA 36:19 – 36:37:

Vasil34: *„Já nesouhlasím s jedním čtvercem.“*
Experimentátor94: *„Kolik máš čtverců?“*
Vasil35: *„Já jsem jich našel šest.“*
Experimentátor95: *„Šest? Tady, když se koukneš na tuhle zahradu? Augusto, proč ty tam vidíš jeden čtverec?“*

Augusta24: *„Protože tady na obrázku je jenom jeden a my jsme ten obrázek složili ze šesti, ale to nepočítáme.*

Experimentátor96: *„Který to je, ten jeden?“*

Augusta25: *„Ten žlutý.“*

Problém nastal s pojmem rozměr. Tento pojem byl pro žáky nový a na začátku jsem se zeptal, zda by dokázali u některého z útvarů určit jeho rozměr. Žáci si zřejmě pod tímto pojmem nedokázali nic představit a tak udávali obvod nebo obsah obrazce. Rozměr jsme tedy zatím opustili a určili obvod a obsah u jednotlivých obrazců (viz výše). Při společné kontrole jsem pak záměrně používal označení jednotlivých čtyřúhelníků pomocí jejich rozměrů a čekal jsem, zda tento jazyk po mě některý z žáků převezme. Na konci hodiny určil jeden z žáků rozměr jejich čtyřúhelníku, ale nevěděl, proč má takový rozměr. Pouze přejal to, jak jsem ho pojmenoval já.

Časový harmonogram hodiny nebyl dodržen, protože jsme s žáky věnovali více času diskuzi o zahradách, než jsem měl původně naplánováno v přípravě. Nevyšel tudíž čas na poslední aktivitu ani na společnou reflexi s žáky, která obvykle bývá součástí konstruktivisticky vedené hodiny a umožní žákům uvědomit si nabyté znalosti.

d) Seznam kognitivních jevů:

JEV	PROJEV	ODKAZ
Vymezení pojmu mnohoúhelník jako sjednocení základních čtverců se společnou stranou.	Čtverce pouze se společným vrcholem netvoří společnou zahradu.	2012/2013_01_MA 15:44 – 18:23
Obvod jako hranice objektu.	Počítání po jedné a ukazování odpovídajících stran základních čtverců.	2012/2013_01_MA 18:55 – 19:17 2012/2013_01_MA 19:45 – 20:11
Shodnost metaforického jazyka a odborné terminologie.	Obsah byl zadán počtem kamínků, tudíž je vždy stejný.	2012/2013_01_MA 20:33 – 20:44 2012/2013_01_MA 23:35 – 24:00
Počet čtverců v útvaru, určení jejich hranic.	Zdůvodnění podle odkazu na zadaný obrázek.	2012/2013_01_MA 36:19 – 36:37
Počet obdélníků v útvaru, určení jejich hranic.	Zdůvodnění pomocí vizualizace na lavici a vymezení jejich hranic.	2012/2013_01_MA 35:46 – 36:18

e) Seznam sociálních jevů:

- Tvorba skupin – na základě přátelských vztahů ve třídě
- Nespolupráce v heterogenní skupině – na základě násilného rozdělení do skupiny
- Přijetí argumentu pro vymezení pojmu – násilně vytvořená skupina akceptovala argument k vymezení pojmu, ale své řešení neopravila

3.1.2 Protokol experimentu 2012/2013_02_MA

Datum uskutečnění: 9. 11. 2012

Škola: FZŠ Táborská, Táborská 45, Praha 4

Třída: 3. B

Vyučující: Luděk Kovář

Počet přítomných žáků: 13 (5 chlapců, 8 dívek)

Délka experimentu: 35 minut

Téma hodiny: Proměny mnohoúhelníků

Cíle hodiny:Žák pomocí jednoho střihu vytvoří dva čtyřúhelníky, ze kterých sestaví jeden, určí jeho obvod a obsah před a po střihu

Vedlejší cíle:Žák určí obvod, obsah a rozměr rovinného obrazce

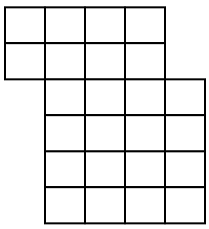
Pomůcky:Vystřihaný obrazec (úloha 1), barevné obrazce (úloha 2), vystřihané trojúhelníky (úloha 3)

a) Příprava na hodinu:

Předpokládaný průběh (včetně odhadu časové náročnosti):

1. Společná práce – střih mnohoúhelníku 5 minut

Každý žák dostane jeden vystřižený mnohoúhelník, pro každého stejné zadání. Určí jeho obvod a obsah. Jedním střihem dle vlastní volby vytvoří z mnohoúhelníku dva čtyřúhelníky, které složí do jednoho čtyřúhelníku. Určí obvod, obsah a rozměr nově vzniklého čtyřúhelníku.



Výsledky průběžně zapisujeme na tabuli. Řešení střihu žáci vysvětlí před tabulí.

Předpokládaný průběh aktivity

Předpokládám, že s určením obvodu a obsahu nebudou mít žáci problém, protože se jedná o mnohoúhelníky se všemi stranami v linkách. Doufám, že z předešlých hodin budou schopni určit rozměr čtyřúhelníku, ale očekávám, že někdo bude potřebovat opakovanou nápovědu.

Předpokládám, že žáci objeví alespoň dvě různá řešení střihu, ale nebudou dodržovat rozdělení na dva čtyřúhelníky. Jediné řešení, které odpovídá zadání a které podle mě žáci objeví, vznikne odstřižením obdélníku 4 x 2 a jeho posunutím. Předpokládám, *že někdo z žáků objeví některé ze čtyř dalších možností, které ale neodpovídají parametrům zadání. Očekávám, že nastane diskuze o termínu čtyřúhelník v zadání.*

2. Skupinová práce – střih mnohoúhelníku 20 minut

Žáci se rozdělí do čtyř skupin (A, B, C, D) a k dispozici mají čtyři typy mnohoúhelníků (A, B, C, D) ve více kopiích. Každá skupina určí obvod a obsah svého mnohoúhelníku a dílčí výsledky zaznamená na tabuli.

Poté mají ve skupině k dispozici pouze jeden střih tak, aby z mnohoúhelníku vytvořili dva čtyřúhelníky, ze kterých složí jeden, určí jeho obvod, obsah a rozměr. Jejich úkolem bude pokusit se nalézt více možných střihů, a proto mají k dispozici nejméně tři kopie mnohoúhelníku. Údaje zaznamenají na tabuli a společně si vysvětlíme postupy řešení. Diskutujeme, jak a proč se změnil obvod či obsah.

Předpokládaný průběh aktivity

Opět nepředpokládám, že by nastal problém s určováním obvodu či obsahu původního mnohoúhelníku. Žáci podle mě dokážou i vysvětlit, proč se obvod po střihu změní a obsah zůstane stejný. Po předchozí aktivitě budou schopni pojmenovat vzniklý čtyřúhelník pomocí jeho rozměrů.

Každý obrazec má právě jedno řešení, které splňuje všechny parametry zadání – jeden střih, rozdělení na dva čtyřúhelníky, vznik jednoho čtyřúhelníku. Předpokládám, že žáci objeví způsob, jak provést střih, aby bylo možné vytvořit hledaný čtyřúhelník, ale nebudou zohledňovat to, že musí vytvořit jedním střihem dva čtyřúhelníky, a nikoliv mnohoúhelníky. U skupiny A a C předpokládám, že najdou dva možné střihy a tudíž dva různé čtyřúhelníky. Obrazce B a D jsou pro objevení druhého střihu složitější a nepředpokládám, že ho žáci objeví.

3. Samostatná práce – střih pravoúhlého trojúhelníku 10minut

Každý žák dostane dva pravoúhlé trojúhelníky. Jedním střihem má vytvořit dva obrazce, ze kterých půjde složit čtverec o rozměrech 4x4. Své řešení žáci konzultují v pracovních hnízdech. Učitel hnízda obchází a s žáky diskutuje nad jejich řešeními.

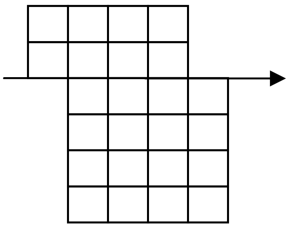
Předpokládaný průběh aktivity

Předpokládám, že najít řešení střihu v pravoúhlém trojúhelníku bude pro žáky náročnější než u mnohoúhelníků. Předpokládám, že u pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku, jehož přepona leží v lince, najde řešení více žáků než u obecného pravoúhlého trojúhelníku. Rovnoramenný trojúhelník nabádá k rozstřižení na poloviny, proto toto řešení podle mě objeví více žáků.

b) Popis průběhu:

Všem žákům byl rozdán stejný mnohoúhelník. Jejich úkolem bylo určit jeho obvod a obsah. Jednotlivé výsledky jsme zapsali na tabuli a v následné diskuzi ověřili a určili správný výsledek. Dále jsem zadal společný úkol, jedním střihem vytvořit z mnohoúhelníku dva čtyřúhelníky, ze kterých můžeme vytvořit jeden čtyřúhelník. U vzniklého čtyřúhelníku určili žáci, jak se změnil obvod a obsah.

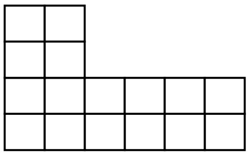
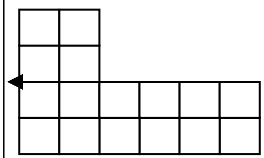
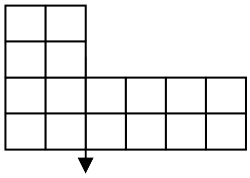
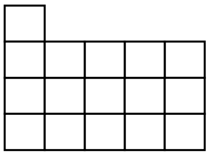
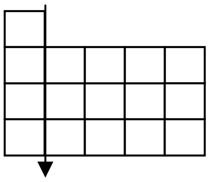
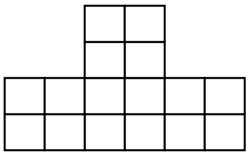
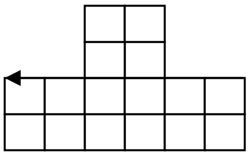
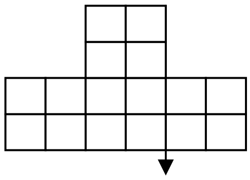
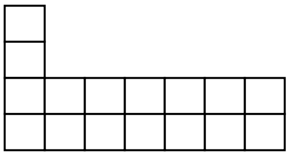
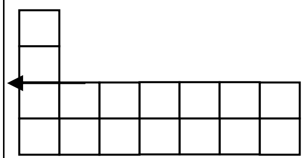
Řešení žáků, jak vedli střih mnohoúhelníku:



K další práci si žáci vytvořili skupiny po třech (vznikla jedna čtveřice). Skupina se usadila k jednomu pracovnímu hnízdu. Každý žák ve skupině dostal stejný mnohoúhelník. Každá skupina dostala jiný mnohoúhelník. U mnohoúhelníku určila jeho obvod a obsah. Dalším úkolem skupiny bylo, pomocí jednoho střihu vytvořit z mnohoúhelníku dva čtyřúhelníky, které je nutné složit do jednoho čtyřúhelníku. U nově vzniklého čtyřúhelníku je potřeba určit obvod a obsah a zapsat výsledky do tabulky na tabuli. Žáci postupně prezentovali svá řešení u tabule a vysvětlili své postupy. U vzniklých čtyřúhelníků jsme určili i jejich rozměr.

Žákovská řešení střihů:

Tabulka č. 3 (Žákovská řešení střihů v úloze 2)

Skupina	Původní mnohoúhelník	První střih	Druhý střih
A			
B			NE
C			
D			NE

NE – skupina neobjevila toto řešení

Tabulka s výsledky žáků:

Tabulka č. 4 (Žákovská řešení úlohy 2)

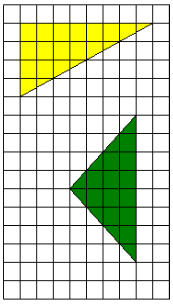
	Před střihem		**Po střihu**		
	Obvod	**Obsah**	**Obvod 4X4**	**Obvod 8X2**	**Obsah**
A)	20	16	16	20	16
B)	18	16	16	X	16
C)	20	16	16	20	16
D)	22	16	NE	20	16

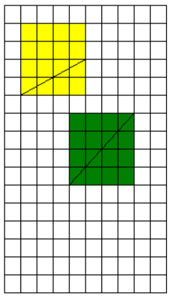
X – nelze vytvořit čtyřúhelník o rozměrech 8 x 2 jedním střihem

NE – skupina neobjevila toto řešení

V druhé části hodiny jsem žákům rozdal dva pravoúhlé trojúhelníky. Jejich úkolem bylo pomocí jednoho střihu vytvořit dva mnohoúhelníky, ze kterých by šel složit čtverec o rozměrech 4x4. Obcházel jsem jednotlivá pracovní hnízda a s žáky diskutoval nad jejich řešením. Na společnou kontrolu nedošlo.

Zadané pravoúhlé trojúhelníky a žákovské řešení střihů:





c) Reflexe:

Podle předpokladu neměli žáci problém určit obvod a obsah mnohoúhelníku v první aktivitě. Obvod určili sečtením všech stran základních čtverců na hranici a to počítáním po jedné, obsah určili sečtením všech čtverců v mnohoúhelníku.

Po zadání následující aktivity vyvstala otázka, co je to čtyřúhelník.

Doslovným přepisem žákovské diskuze – 2012/2013_02_MA 15:18 – 17:02:

Experimentátor23: „*Tak, máte všichni nůžky?*“ (Třída06: „*Jo, ano, ne.*“) „*Počkej, počkej, Jaroslave, a pozor. Teď máte k dispozici pouze jeden střih tak, abyste z tohoto mnohoúhelníku udělali dva čtyřúhelníky a ty spojili v jedno.*“ (Jaroslav11: „*A co je to čtyřúhelník.*“) „*Jo? Ale můžete udělat pouze jeden střih.*“

Učitel03: „*Jaroslave, nahlas tvojí otázku.*“

Jaroslav12: „*Co je to čtyřúhelník?*“

Experimentátor24: „*Čtyřúhelník, co je to čtyřúhelník?*“

Patrik04: „*Něco, co má čtyři rohy.*“

Experimentátor 25: „*Něco co má čtyři rohy. Jak ještě můžeme, co ještě můžeme říct o čtyřúhelníku? Jaký znáte čtyřúhelník třeba?*“

Patrik05: „ *Čtverec.*“

Experimentátor 26: „*Čtverec nebo?*“

Adéla01: „*Obdélník.*“

Patrik06: „*Kosočtverec.*“

Experimentátor 27: „*Kosočtverec. Tak koukněte se na to a určete si jeden střih, jenom jednou můžete střihnout.*“

Květa01: „*Já nevím.*“

Učitel04: „*Tak to zkazíš, no.*“

Patrik07: „*Já vím, jak bych udělal jeden čtyřúhelník. Teda dva čtyřúhelníky.*“

Experimentátor 28: „*A z těch dvou čtyřúhelníků budeš schopný složit jeden čtyřúhelník?*“ (Patrik08: „*Jo.*“) „*Tak to je ono. Tak to zkus.*“

Při aktivitě se nepotvrdil můj druhý předpoklad, že žáci objeví alespoň dvě různá řešení střihu. Celá třída objevila pouze jedno řešení, kdy odstřihli obdélník o rozměrech 4 x 2. U nově vzniklého čtyřúhelníku byli opět schopni určit obvod a vysvětlit, že se změnil oproti původnímu obrazci, protože se dvě strany základních čtverců na hranici zasunou do plochy vzniklého čtyřúhelníku a tudíž již netvoří hranici. Bez problému odůvodnili, že se obsah obrazce nemění, protože počet čtverečků zůstal i po střihu stejný.

Doslovným přepisem žákovské diskuze – 2012/2013_02_MA 19:16 – 20:42:

Experimentátor37: „*Jaký má tenhle ten nový obdélník náš obvod a obsah?*“

Patrik12: „*Obvod?*“

Experimentátor38: „*Obvod a obsah, jak se změnil*“ (Patrik13: „*Stejný bude mít.*“) „*Jak se změnil* (Štěpán01: „*Obsah bude mít stejný, ale obvod ne.*“) „*po tom střihu.*“
Patrik14: „*Dvacet.*“

Štěpán02: „*Dvacet.*“

Experimentátor39: „*A co má dvacet?*“

Patrik15: „*Obvod.*“

Štěpán03: „*Obvod.*“

Experimentátor40: „*A jak je to možný, když před tím měl dvacet dva?*“

Štěpán04: „*Já vím, protože před tím,* (Experimentátor41: „*Já vám ho dám takhle na tabuli, ať všichni vidíte zase ten původní.*“) *protože před tím, když byl takhle,* (Experimentátor42: „*Počkej, holky, poslouchejte Štěpána.*“) *když byl takhle, tak měl víc rohů.*“

Experimentátor43: „*Pojď to ukázat.*“

Štěpán05: „*Že tamten, se posune takhle, takže tady ty dvě se zasunou a už tam nebudou. A když se tamto změní, tak prostě, tady ta a tady ta mřížka už zmizí, protože se zazdí.*“

Rozměr nově vzniklého čtyřúhelníku již byli schopni určit díky zkušenostem z předešlých hodin matematiky a díky návodným otázkám jejich vyučující, která byla samozřejmě v hodině přítomna.

Doslovným přepisem žákovské diskuze – 2012/2013_02_MA 18:15 – 19:15:

Experimentátor30: „*Tak, teď se koukněte na ten svůj čtyřúhelník, který jste s i složili. Jaký má rozměr?*“

Patrik09: „*Co to je?*“

Učitelka05: „*Co to je rozměr?*“

Experimentátor31: „*Rozměr toho obdélníku, který je před vámi?*“

Vasil01: „*Obvod?*“

Učitelka06: „*Rozměr není obvod.*“

Experimentátor32: „*Rozměr jste si už říkali a minule jsme na něj taky naráželi spolu.*“

Učitelka07: „*A pak jsme to spolu dodělali. Co to je rozměr?*“

Patrik10: „*Já už jsem to zapomněl.*“

Učitelka08: „*Kdybych chtěl, abyste si všichni vzali tento čtyřúhelník, ale neukážu vám ho, tak jak bych to řekla?*“

Patrik11: „*Vezměte si obdélník.*“

Učitelka09: „*Jaký?*“

Jaroslav13: „*Má čtyři kostičky dole a dvě na stranu.*“

Učitelka10:„*A jak se to dá říct ještě jednoduše?*“

Vít07: „*Dva krát čtyři.*“

Květa02: „*Čtyři dva.*“

Experimentátor33: „*Dva krát čtyři nebo čtyři krát dva.*“

Učitelka11: „*Vidíte, že jsme to dělali.*“

Experimentátor34: „*Tak a jaký rozměr má ten čtyřúhelník.*“

Vít08: „*Já už vím. Šest krát čtyři.* (Experimentátor35: „*Šest krát čtyři.*“) *Nebo čtyři krát šest.*“

Experimentátor36: „*Tak, budeme se bavit o obdélníku šest krát čtyři.*“

V následující aktivitě opět nebyl problém s určováním obvodu či obsahu mnohoúhelníků, žáci postupovali podle naučených strategií a neobjevila se žádná nová či nějaké zjednodušení. Při hledání střihů se potvrdil můj předpoklad s počtem nalezených řešení. Skupiny, mající obrazec A a C, objevily dvě různá řešení střihu a určily oba obvody i obsah nově vzniklých čtyřúhelníků. Skupina, mající obrazec B, objevila jedno řešení střihu a bez problému určila obvod i obsah vzniklého čtyřúhelníku. Skupina, mající obrazec D, objevila jedno řešení střihu. Ze dvou vzniklých částí však nesložila čtyřúhelník a obvod a obsah určila pouze u jedné části původního obrazce.

Při společné kontrole jsme tedy ověřili jejich řešení a společně složili čtyřúhelník z obou částí původního obrazce. U tohoto čtyřúhelníku určila skupina obvod a obsah.

U poslední aktivity se můj předpoklad nepotvrdil, protože žáci objevili řešení střihu u obou pravoúhlých trojúhelníků. Bohužel jsme si jednotlivá řešení neukázali společně a nepopsali si strategie řešení, ale při práci v hnízdech o svých řešeních žáci diskutovali.

d) Seznam kognitivních jevů:

JEV	PROJEV	ODKAZ
Vymezení pojmu čtyřúhelník a uvedení známých příkladů.	Žákovskou definicí v mateřském jazyce.	2012/2013_02_MA 15:18 – 17:02
Respektování jedné z podmínek zadání.	Vytvoření čtyřúhelníku a šestiúhelníku.	Viz žákovské řešení skupina A a C
Určení rozměru obdélníku pomocí délek jednotlivých stran.	Odpovědi na návodné otázky kmenové vyučující.	2012/2013_02_MA 18:15 – 19:15

e) Seznam sociálních jevů:

- Neovlivnění práce ve skupinách náhodným dělením – skupiny vznikly na základě přátelských vztahů mezi žáky
- Přijetí argumentu spolužáka – na základě argumentů spolužáků skupina opravila své řešení

3.1.3 Protokol experimentu 2012/2013_03_MA

Škola: FZŠ Táborská, Táborská 45, Praha 4

Třída: 3. B

Počet žáků: 16 žáků (8 chlapců a 8 dívek)

Datum výuky: 23. 11. 2012

Délka výuky: 35 minut

Jméno vyučujícího: Luděk Kovář

Téma hodiny: Obsah pravoúhlého trojúhelníku

Cíle hodiny: Žák určí obsah pravoúhlých trojúhelníků se stejnou výškou

Vedlejší cíle: Žák objeví závislost mezi délkou strany a obsahem trojúhelníku

Pomůcky: Papírový trojúhelník (úloha 1), pracovní listy s trojúhelníky pro skupiny, pracovní listy pro jednotlivce

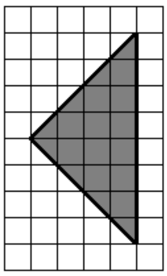
a) Příprava na hodinu:

Předpokládaný průběh (včetně odhadu časové náročnosti):

1. Společná práce – Obsah a střih pravoúhlého trojúhelníku 10 minut

Žáci do dvojice dostanou pravoúhlý trojúhelník, jeden demonstrační připevníme na tabuli. Zeptám se žáků, zda dokážou určit obsah trojúhelníku. Výsledky zapíšeme na tabuli.

Potom žáky vyzvu, aby jedním střihem, vytvořili dva mnohoúhelníky a složili z obou částí čtverec. Vyzvu žáky, aby určili obsah čtverce. Poté položím otázku týkající se obsahu původního trojúhelníku.



Předpokládaný průběh aktivity

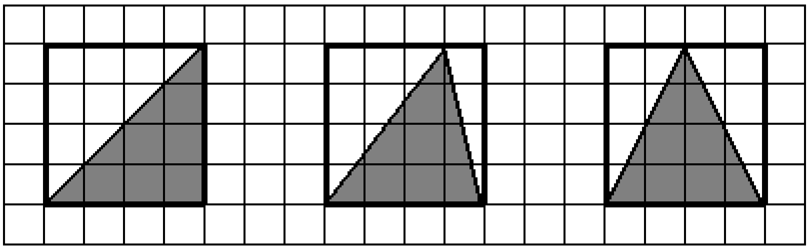
Předpokládám, že žáci budou mít problém s určením obsahu trojúhelníku. Někteří sečtou celé základní čtverce a zbylé poloviny budou skládat k sobě, čímž jim vyjde správný obsah.

Předpokládám, že se střihem nebudou mít žáci potíže, jelikož jsme se stejným trojúhelníkem pracovali v předchozí hodině. Obsah čtverce určí sečtením všech základních čtverců v něm. Předpokládám, že některým žákům dojde, že obsah čtverce a původního trojúhelníku je stejný, protože z rozstřiženého trojúhelníku můžeme složit čtverec, přičemž jsme žádnou část neubrali ani nepřidali.

2. Skupinová práce – Obsah trojúhelníků se stejnou výškou 15 minut

Žáky rozdělím do čtyř skupin. Každá skupina dostane pracovní list se třemi trojúhelníky se stejnou stranou a odpovídající výškou. Úkolem skupiny je určit obsah čtverce a obsah trojúhelníku v něm.

Společně zkontrolujeme výsledky. Zeptám se, jakou částí čtverce je každý z trojúhelníků. Ve skupině vždy vystřihnou šedivý trojúhelník i bílé části. Z bílých částí se pokusí složit stejný šedivý trojúhelník.



Předpokládaný průběh aktivity

Nepředpokládám, že by měly skupiny potíže s určením obsahu čtverce. Ten určí počítáním základních čtverců po jedné, případně jako součin délek stran.

Předpokládám, že u prvního trojúhelníku z obrázku využijí svou znalost poloviny a tudíž určí obsah trojúhelníku jako polovinu obsahu čtverce. U třetího trojúhelníku předpokládám, že žáci využijí svou zkušenost z předešlé aktivity. U druhého trojúhelníku je podle mého soudu nejtěžší určit obsah. Předpokládám, že někteří žáci se pokusí nějakým způsobem skládat k sobě části základních čtverců.

Po vystřižení bílých částí a jejich složení na šedivý trojúhelník předpokládám, že většina žáků pochopí, že šedivý trojúhelník představuje vždy polovinu čtverce a tudíž obsah trojúhelníku je vždy polovinou obsahu čtverce.

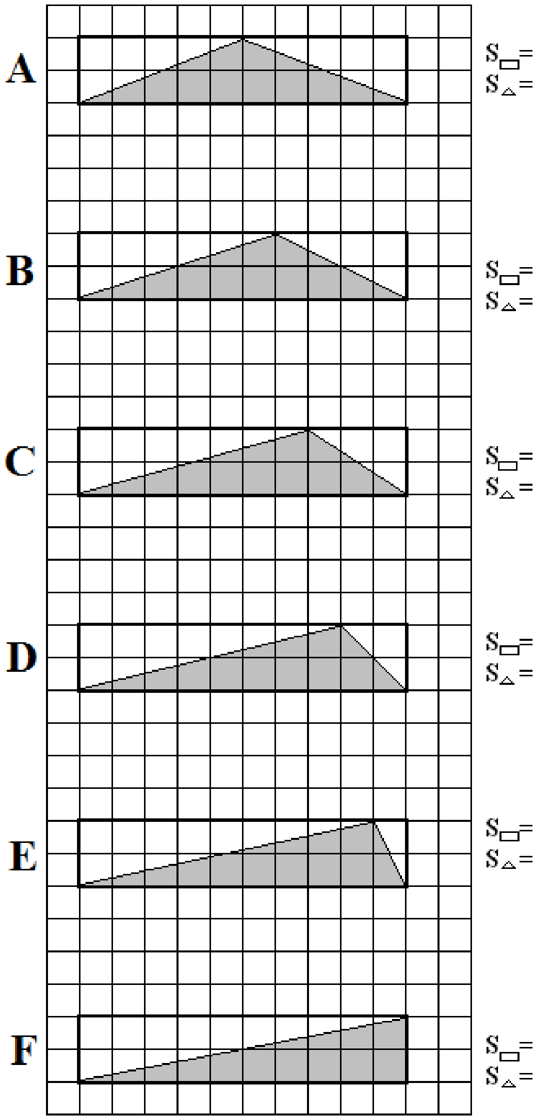
Nepředpokládám, že by některý žák objevil vztah mezi obsahem trojúhelníku a výškou, na základě stejných číselných výsledků všech obsahů jednotlivých trojúhelníků.

3. Práce pro jednotlivce – Obsah trojúhelníku se stejnou výškou 10 minut

Každý žák dostane pracovní list. Na pracovním listu jsou obdélníky a v každém je vepsaný trojúhelník. Všechny obdélníky jsou shodné, všechny trojúhelníky mají stejně dlouhou jednu stranu i odpovídající výšku. Úkolem žáků je určit obsah obdélníku a trojúhelníku v něm.

<u>Předpokládaný průběh aktivity</u>

Předpokládám, že všichni žáci určí obsah obdélníku sečtením základních čtverců. Někteří žáci určí obsahy všech jednotlivých trojúhelníků na základě předešlých zkušeností. U trojúhelníků A a F je zjevné, že jsou polovinou obdélníku, tudíž jejich obsah je polovinou obsahu obdélníku. U trojúhelníků B a D jdou jednotlivé části základních čtverců dobře složit do jednoho základního čtverce. U trojúhelníků C a E bude podle mého názoru pro žáky největší problém určit obsah.



b) Popis průběhu:

Žákům jsem do dvojic rozdal pravoúhlý trojúhelník ve čtvercové síti. Úkolem dvojic bylo určit obsah tohoto trojúhelníku. Při kontrole se rozběhla diskuze, jak vypočítat obsah trojúhelníku ve čtvercové síti. Žáci postupně argumentovali svá řešení u tabule.

Na další aktivitu byli žáci rozděleni do předem připravených skupin a usazeni do pracovních hnízd. Každá skupina dostala čtvercovou síť a v nezakreslené tři čtverce 4 x 4. Do každého čtverce byl vepsán trojúhelník. Všechny trojúhelníky měly stejně dlouhou stranu a příslušnou výšku. Úkolem skupiny bylo určit obsahy všech tří čtverců i trojúhelníků. Skupiny pracovaly a já jsem zatím překreslil obrázek na tabuli. Poté jsme společně určili obsahy čtverců i trojúhelníků. Žáci si vzali nůžky a vystřihli si dané čtverce. Také si vystřihli šedivé trojúhelníky a bílé části. Z bílých částí měli za úkol složit trojúhelník, který byl shodný s šedivým.

Na poslední aktivitu zbylo méně času, než kolik jí bylo vyhrazeno v odhadu časové náročnosti. Každý žák dostal pracovní list s šesti obdélníky a v každém byl vepsaný trojúhelník. Všechny obdélníky byly shodné, všechny trojúhelníky měly stejně dlouhou jednu stranu a k ní odpovídající výšku. Žáci si našli místo ve třídě a pracovali samostatně. Kdo vyplnil pracovní list, odevzdal ho.

c) Reflexe:

Žákům jsem do dvojic rozdal pracovní list se čtvercovou sítí. V ní byl sestrojen pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník. Žáci měli za úkol určit obsah tohoto trojúhelníku. Většina dvojic pracovala společně, někde převzal iniciativu jeden z žáků. Převážně se tak dělo ve dvojicích, kde společně pracoval jeden matematicky zdatnější a druhý méně zdatný žák.

Žáci vypočítali obsah trojúhelníku sečtením základních čtverců a sečtením polovin základních čtverců. Ve třídě se objevily dva výsledky, 16 (správný výsledek) a 20. Vyzval jsem dvojici s chybným výsledkem, aby vysvětlila svůj postup u tabule. Ukázalo se, že tito žáci počítali i poloviny základních čtverců jako jednu jednotku obsahu. Ostatní spolužáci hned začali argumentovat, že tento postup nevede k určení obsahu a před tabulí předvedli podle nich postup korektní.

Doslovným přepisem žákovské diskuze – 2012/2013_03_MA 14:57 – 15:49:

Štěpán03: *„Kdyby třeba jeden čtvereček měl jeden obsah, to je jenom tady to* (ukáže jeden základní čtverec), *no tak to musíš počítat po těch čtverečcích. Obsah znamená ty čtverečky."*

Vasil08: *„Ale tam nebylo určeno, co je obsah."*

Experimentátor21: *„Štěpáne, můžu počítat tenhle čtvereček?"*

Štěpán04: *„Jo."*

Vasil09: *„Tam nebylo určeno, co je obsah, nikdo neřekl, co je obsah."*

Experimentátor22: *„Vasile, tady toho trojúhelníku chceme obsah. Dokončíme, co říkal Štěpán. Když počítám tyhle čtverečky, Štěpáne, co udělám tady s tím* (polovina základního čtverce)*?"*

Vasil10: *„Nic."*

Štěpán05: *„Ten se počítá takhle. Jako je to půlka čtverečku, takže se musí počítat tady ty dvě a je to jako jeden čtvereček."*

Doslovným přepisem žákovské diskuze – 2012/2013_03_MA 16:03 – 16:22:

Experimentátor24: *„Tak, Vít to doplní."*

Vít04: *„To by vám nevyšlo, kdybyste to tady rozstřihli na půlku a složili, to by vám nevyšlo. Protože to byste počítali stejně ty rozpůlený nebo byste je počítali jako jeden?"*

Vasil s argumenty spolužáků nesouhlasil, i když mu to jasně a názorně předvedli. Nebylo uznáno jeho řešení a ostatní odmítal. Také v minulé hodině, když jsme s tímto tématem pracovali, chyběl, takže s proměnou rovinných útvarů nezískal vlastní zkušenost. Tím, že žáci stále dokola argumentovali své postupy, jsem úplně vynechal další část aktivity, která by možná Vasilovi pomohla a to rozstřižení trojúhelníku na dva shodné trojúhelníky, ze kterých se dá složit čtverec o rozměrech 4 x 4. Tak mu však své řešení vysvětloval u tabule jeden ze spolužáků.

Na další aktivitu jsem žáky rozdělil do předem připravených skupin. V každé skupině byl vždy alespoň jeden matematicky zdatnější žák. Každá skupina dostala papír se třemi čtverci o rozměrech 4 x 4. Ve čtvercích byly sestrojeny trojúhelníky, jejichž základna a k ní příslušná výška měly ve všech případech stejnou délku. Všichni dostali stejné zadání. Úkolem skupin bylo určit obsah čtverců i trojúhelníků.

V jedné skupině počítaly žákyně obsah čtverce součtem základních čtverců po jedné, jejich spolužák ve skupině je upozorňuje na to, že u dalších čtverců nemusí obsah počítat po čtverečcích, neboť všechny čtverce jsou stejné a tudíž mají stejný obsah. Obsah trojúhelníků počítali skládáním částí základních čtverců.

Doslovným přepisem žákovské diskuze – 2012/2013_03_MA 20:25 – 20:39:

Květa01: *„Jedna, dva, tři, čtyři, pět, šest, sedm, osm, devět, deset, jedenáct, dvanáct, třináct, čtrnáct, patnáct, šestnáct.“*

Martin01: *„Kolik máš?“*

Helena01: *„Celej čtverec má šestnáct.“*

Martin02: *„Tenhle taky.“*

Vít06: *„To je jasný, všechny mají šestnáct, jsou stejný.“*

Vasilova skupina počítala obsah čtverců jako součin svislé a vodorovné strany. K určení obsahu trojúhelníků opět použili postup, který je nepřivedl ke správnému výsledku, tudíž že počítali jakkoliv velké části základních čtverců jako jednu jednotku obsahu. Při společné kontrole jim ostatní skupiny jejich řešení opět nepřijaly a jednotliví žáci se jim snažili popsat korektní způsob pro určení obsahu trojúhelníku. Také při společné kontrole opět zaznělo, že obsahy čtverců jsou stejné, protože čtverce jsou shodné.

Doslovným přepisem žákovské diskuze – 2012/2013_03_MA 29:27 – 30:20:

Experimentátor49: *„Tak, druhý čtverec a trojúhelník. Jaký je obsah čtverce?“*

Jaroslav15: *„To je jasný.“*

Vít09: *„Šestnáct.“*

Experimentátor50: *„Šestnáct. Má někdo jiný obsah čtverce?“*

Vít10: *„Obsah čtverce, já myslel jako obsah celýho čtverce.“*

Experimentátor51: *„No, správně, obsah celého čtverce je šestnáct. S tím souhlasíme? Můžeme rovnou…“*

Vít11: „*Ty čtverce jsou úplně stejný.*“

Experimentátor52: „*Můžeme teda rovnou určit obsah tohohle čtverce?*“

Jaroslav05: „*Jasně. Jo, můžeme.*“

Vít12: „*To bude šestnáct.*“

Experimentátor53: „*Proč to bude všude šestnáct?*“

Štěpán12: „*Protože oni jsou za prvý stejný a za druhý tenhle ten čtverec 4 x 4 jsme už probírali minule.*“

Ani po dalších a dalších argumentech spolužáků Vasil nepřijal správné výsledky třídy a stále si trval na svém řešení, kdy počítal jakkoliv velké části základních čtverců jako jednu jednotku obsahu.

Na další část aktivity si ve skupině připravili nůžky. Žáci měli vystřihnout jednotlivé čtverce a vystřihnout z nich šedivé trojúhelníky i bílé části. Z těch se poté pokusili složit šedivé trojúhelníky. Žáci manipulací poskládali z bílých částí trojúhelník, který překryli šedivým trojúhelníkem a zjistili, že oba trojúhelníky jsou vždy shodné.

Na poslední aktivitu nezbylo tolik času, jako bylo počítáno v odhadu časové náročnosti, leč bylo pro mě důležité, aby si jí žáci zkusili. Každý dostal pracovní list, na kterém bylo šest obdélníků, a v každém byl vepsaný trojúhelník. Všechny obdélníky byly shodné, všechny trojúhelníky měly stejně dlouhou jednu stranu a k ní příslušnou výšku. Žáci pracovali samostatně. Do této aktivity zazvonilo, ale žáci svou práci dokončili. Na společnou kontrolu tedy bohužel čas nezbyl.

d) Seznam kognitivních jevů:

JEV	PROJEV	ODKAZ
Zachování obsahu útvaru při jeho proměně na jiný.	Rozstřižením obrazce a složením do jiného útvaru se obsah nezmění.	2012/2013_03_MA 16:03 – 16:22
Shodné útvary mají shodný obsah.	Pokud mají všechny čtverce rozměry 4 x 4, mají i stejný obsah.	2012/2013_03_MA 20:25 – 20:39 2012/2013_03_MA 29:27 – 30:20

e) Seznam sociálních jevů:

- Absence žáka v předešlé hodině – i přes důsledné vysvětlení správného postupu spolužáky, nepřijal jeden z žáků správné řešení

3.1.4 Protokol experimentu 2012/2013_04_MA

Škola: FZŠ Táborská, Táborská 45, Praha 4

Třída: 3. B

Počet žáků: 15 žáků (7 chlapců a 8 dívek)

Datum výuky: 13. 12. 2012

Délka výuky: 35 minut

Jméno vyučujícího: Luděk Kovář

Téma hodiny: Obsah pravoúhlého trojúhelníku se stejnou výškou

Cíle hodiny: Žák určí obsah pravoúhlých trojúhelníků se stejnou výškou

Vedlejší cíle:Žák objeví závislost mezi délkou strany a obsahem trojúhelníku

Pomůcky:Pracovní list pro každého žáka

a) Příprava na hodinu:

Předpokládaný průběh (včetně odhadu časové náročnosti):

1. Společná práce – společná jednotka obsahu 10minut

Každý žák dostane barevný čtverec. Čtverec má rozměry 6 x 6, ale není zakreslen ve čtverečkované mříži. Žáci mají za úkol vyznačit polovinu čtverce a určit obsah dané poloviny.

Výsledky si zapíšeme na tabuli. Jednotliví žáci vysvětlí svá řešení před tabulí a ukážou je na svých čtvercích.

Poté dostane každý žák čtverečkovaný papír se shodným čtvercem. Určí si jeho polovinu a její obsah. Zkontrolujeme společně výsledky s předešlými. Měli bychom se shodnout na tom, že potřebujeme všichni stejnou jednotku pro obsah.

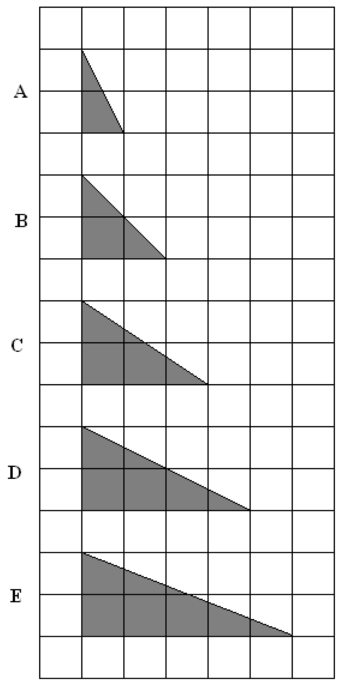
Předpokládaný průběh aktivity

Předpokládám, že žáci dokážou vytvořit polovinu čtverce jako obdélník i jako pravoúhlý trojúhelník. Pro vypočítání obsahu však budou potřebovat jednotky. Předpokládám, že si do čtverce zakreslí čtverečky a obsah určí součtem základních čtverců a dále součtem polovin základních čtverců.

Po vyznačení poloviny do čtvercové sítě již její obsah určí přesněji a výsledky se nebudou tolik lišit. Doufám, že ve třídě zazní, že potřebujeme k určení obsahu všichni stejnou jednotku, což jsou pro nás čtverečky.

2. Samostatná práce – obsah trojúhelníku se stejnou výškou 25minut

Každý žák dostane pracovní list, na němž je pět pravoúhlých trojúhelníků se stejnou výškou dvě dřívka. Vodorovná strana trojúhelníku se postupně zvětšuje a je vždy o jedno dřívko delší než u předešlého trojúhelníku.



Žáci pracují samostatně a pokusí se u každého trojúhelníku určit velikost svislé a vodorovné strany a jeho obsah. Pokud by byl někdo rychle hotový, může si do čtvercové sítě zakreslit trojúhelník, který by logicky následoval po trojúhelníku E.

Po dokončení pracovního listu zkontrolujeme žákovská řešení a číselné výsledky zapíšeme na tabuli do připravené tabulky.

<u>Předpokládaný průběh aktivity</u>

Předpokládám diskuzi ohledně vodorovné a svislé strany. Žáci si budou potřebovat tyto termíny připomenout a vysvětlit. Pokud by diskuze nevyvstala sama, položím otázku já. Dále předpokládám, že s určením délky jednotlivých stran nebudou mít větší potíže. Pochopí, že svislá strana je stále stejně dlouhá. Někteří pochopí i to, že se vodorovná strana zvětšuje vždy o jedno dřívko a nebudou jí tedy muset počítat u každé úlohy zvlášť.

Předpokládám, že obsah trojúhelníků budou žáci počítat sčítáním základních čtverců a částí zbylých základních čtverců. U úlohy B nebudou mít s určením obsahu potíže, neboť jsou zde jasně vidět dvě poloviny základního čtverce. U úlohy A a D by pro ně nemělo být těžké složit správné části základních čtverců k sobě, ač tyto netvoří polovinu. V úloze C a E mohou mít žáci větší potíže, neboť přepona trojúhelníku neprochází žádným mřížovým bodem. Přesto předpokládám, že se jim podaří z jednotlivých částí poskládat základní čtverce, čímž obsah také určí.

b) Popis průběhu:

Každý žák si vzal barevný čtverec. Žáci měli přeložit čtverec na polovinu a určit její obsah. Většina žáků si na papír zakreslila čtverečky, někteří k tomu použili pravítko. Potom vytvořili polovinu, vznikla polovina jako obdélník i jako pravoúhlý trojúhelník. Obsah poté počítali sečtením těchto čtverečků. Ve třídě se objevilo více různých výsledků obsahu. Žáci před tabulí argumentovali svá řešení, jak vytvořili polovinu a jak vypočítali její obsah.

Poté dostal každý žák čtvercovou síť s narýsovaným čtvercem stejné velikosti, tj. o rozměrech 6 x 6. Do tohoto čtverce si žáci vyznačili svou polovinu a měli znovu určit její obsah. Opět se ve třídě objevilo více různých výsledků a opět žáci dostali prostor argumentovat u tabule. Jeden žák počítal místo obsahu obvod čtverce, s čímž mu spolužáci poradili. Jeden z žáků poté vysvětlil, proč musí mít poloviny, ať jako obdélník nebo jako pravoúhlý trojúhelník, stejný obsah.

Na další aktivitu dostali všichni pracovní list, na němž bylo pět pravoúhlých trojúhelníků se stejnou výškou dvě dřívka. Vodorovná strana trojúhelníku se postupně zvětšovala a byla vždy o jedno dřívko delší než u předešlého trojúhelníku. Žáci pracovali samostatně. Některým stačilo k vyplnění pracovního listu pár minut a tak dostali za úkol, vytvořit další trojúhelníky, které by následovaly v řadě a určit jejich obsahy. U tabule jsme poté společně zkontrolovali výsledky z pracovního listu i výsledky rychlejších žáků.

c) Reflexe:

Každý žák si vybral jeden barevný papír tvaru čtverce. Na papíře nebyla narýsovaná čtvercová síť. Žáci měli přehnutím papíru vytvořit polovinu a určit její obsah. Někteří žáci si vzali pravítko a začali na čtverec rýsovat čtvercovou síť, jiní si ji načrtli. Jako polovinu vytvořili žáci obdélník a pravoúhlý trojúhelník. U tabule žáci prezentovali výsledky obsahu poloviny čtverce. Také vysvětlili, jak tuto polovinu vytvořili.

Doslovným přepisem žákovské diskuze – 2012/2013_04_MA 15:02 – 15:42:

Experimentátor13: *„Andreo, je to polovina, to co jsi udělala?“*

Andrea01: *„Ne.“*

Experimentátor14: *„Jo nebo ne?“*

Andrea02: *„Ne.“*

Experimentátor15: *„Proč ne, Andreo, proč myslíš, že to není polovina?“*

Andrea03: *„Tak je.“*

Experimentátor16: *„A proč to je a proč není? Co to znamená na polovinu?“*

Andrea04: *„Že je to stejný.“*

Experimentátor17: *„Že je to stejný a kolik je toho stejnýho?“*

Andrea05: *„Jedna a druhá část.“*

Experimentátor18: *„Jedna část a druhá část a máš takhle dvě stejné části?“*

Andrea06: *„Jo.“*

Experimentátor19: *„A je to teda polovina?“*

Andrea07: *„Jo.“*

Doslovným přepisem žákovské diskuze – 2012/2013_04_MA 17:00 – 18:23:

Experimentátor28: „*Tak, jak jste počítali ten obsah té poloviny? Vasile, tys byl první, máš 42, tak pojď.*“

Vasil04: „*Já jsem si tam nakreslil čtverečky a ty jsem počítal.*“

Vít02: „*Ale na tom čtverci si nemůžeš udělat pravý čtverečky.*“

Patrik04: „*Musíš tam mít nějaký jiný čtverečky.*“

Vít03: „*Musíme mít stejný čtverečky.*“

Patrik05: „*Já mám přibližně stejný čtverečky.*“

Experimentátor29: „*Tak, Patriku, ty jsi nesouhlasil s Vasilem…* (Učitel02: „*A Patrik byl první, kdo ten nápad s pravítkem měl, tak by teď měl Patrik ukázat, co vymyslel.*“)*…pojď.*“

Patrik06: „*Já jsem si nejdřív, podle pravítka, si udělal takhle čtverečky. Snažil jsem se co nejvíc, aby byly stejný. Pak jsem to přeložil, spočítal jsem si je a vyšlo mi 27.*“

Experimentátor30: „*Jsou opravdu stejný?*“

Patrik07: „*No úplně stejný nemůžou být, protože já nejsem robot.*“

Při argumentaci správného výsledku obsahu poloviny se žáci shodli na tom, že potřebují všichni stejnou jednotku pro obsah.

Doslovným přepisem žákovské diskuze – 2012/2013_04_MA 19:38 – 19:49:

Experimentátor43: „*Tak, bylo vidět, že co k tomu potřebujeme, abychom vypočítali ten obsah?*“

Patrik09: „*Pravítko.*“

Augusta01: „*Čtverečky.*“

Třída01: „*Čtverečky.*“

Experimentátor44: „*Čtverečky by se vám hodily nejvíc?*“

Patrik10: „*No.*“

Žáci tedy dostali čtvercovou síť, ve které byl nakreslen shodný čtverec. Vyznačili si v něm svou polovinu a znovu určili její obsah. Pro většinu žáků bylo jednoduché a vlastně i vůbec možné, určit obsah poloviny čtverce ve čtvercové síti. Přesto se objevilo více různých výsledků. Jeden žák si spletl pojmy obvod a obsah, určoval tedy obvod a ještě k tomu celého čtverce. S tímto mu spolužáci pomohli a vysvětlili mu, jak počítat obsah. Jiný z žáků, který vytvořil polovinu jako pravoúhlý trojúhelník, počítal části základních čtverců jako jednu jednotku obsahu. I s tímto mu spolužáci u tabule poradili.

Doslovným přepisem žákovské diskuze – 2012/2013_04_MA 22:15 – 23:39:

Experimentátor49: *„Viktor půjde ukázat, jak to počítal. Sledujte Viktora.“*

Viktor01: *„Jeden, dva, tři, čtyři, … dvacet čtyři, dvacet pět.“*

Experimentátor50: *„Tak teď dokonce 25, ale třída s tím nesouhlasí. Tak spíš Viktorovi poraďte nějak.“*

Augusta02: *„No že jak si tam vyznačil tu polovinu, tak že má spočítat jenom tu půlku a ne celej ten čtverec.“*

Experimentátor51: *„Zkusíš si spočítat jenom tu polovinu? Tady si to klidně zkus a ukaž to zase všem.“*

Viktor02: *„Jeden, dva, tři, čtyři, …sedmnáct, osmnáct.“*

Patrik11: *„Ale to uvnitř.“*

Experimentátor52: *„Ale co Viktor počítá?“*

Vasil07: *„Obvod.“*

Patrik12: *„Ty si počítal to okolo.“*

Vasil08: *„Ty musíš počítat to vevnitř.“*

Experimentátor53: *„Patriku, co teda počítal Viktor?“*

Patrik13: *„No ty čtverečky kolem toho.“*

Experimentátor54: *„Vasile, co to je?“*

Vasil09: *„To je obvod.“*

Doslovným přepisem žákovské diskuze – 2012/2013_04_MA 23:54 – 25:09:

Experimentátor57: *„Tak, výsledek 21 měl Vasil. Jak jsi počítal obsah poloviny? Tak, koukejte na Vasila, ten tam má trojúhelník, Viktor měl obdélník.“*

Vasil10: *„Jeden, dva, tři, čtyři, … dvacet, dvacet jedna.“*

Experimentátor58: *„Tak, Augusta se hlásila první.“*

Augusta03: *„On počítá trojúhelníky a ne čtverečky. A obsah je v čtverečcích.“*

Experimentátor59: *„Pojď mu to ukázat, který myslíš. Obsah je čtvereček a tys počítal trojúhelník.“*

Augusta04: *„Tyhle trojúhelníky musí spojovat, aby to byl čtvereček.“*

Vasil11: *„Ale stejně to je součást čtverečku.“*

Experimentátor60: *„Vasil říká, že je to součást čtverečku, ale co mu poradíme.“*

Patrik14: *„Ale není to ten čtvereček.“*

Štěpán01: *„Ale není to celej čtvereček.“*

Vasil12: *„Ale to nemusí být.“*

Třída02: *„Musí.“*

Jeden z žáků poté vysvětlil, proč musí mít obě poloviny, ať polovina tvaru obdélníku nebo polovina tvaru pravoúhlého trojúhelníku, stejný obsah. Obhájil tak i svůj výsledek obsahu poloviny, který byl správným řešením.

Doslovným přepisem žákovské diskuze – 2012/2013_04_MA 26:25 – 28:05:

Jaroslav03: *„Já mám ještě jeden důvod.“*

Experimentátor64: *„Ty máš ještě jeden důvod? Jaký?“*

Jaroslav04: *„Že to bude 18 a ne dvacet něco.“*

Experimentátor65: *„A proč teda? Tak si, Jaroslave, stoupni a řekni to nahlas.“*

Jaroslav05: *„Tak si, Vasile, představ* (hledá polovinu strany čtverce), *že to přeložíš tady. Takhle* (naznačí polovinu jako obdélník o rozměrech 6 x 3). *Tak spočítej tady to a bude to stejný jako takhle* (naznačí polovinu jako pravoúhlý trojúhelník).*“*

Experimentátor66: „*A ta část, co ukazuješ, je co?*“

Jaroslav06: „*Obdélník.*“

Experimentátor67: „*A z toho čtverce?*“

Jaroslav07: „*Půlka, taky.*“

Experimentátor68: „*A to, co tam měl Vasil označený?*“

Štěpán02: „*To je taky půlka.*“

Experimentátor69: „*Proč Jaroslav tvrdí, že obsah obdélníku a trojúhelníku má vycházet stejně?*“

Vít15: „*Protože obě dvě jsou poloviny, akorát že jsou v jiným tvaru.*“

Jaroslav08: „*Protože dvě poloviny, nemůžou mít jiný obsah.*“

Na další aktivitu dostal každý žák pracovní list, na němž bylo pět pravoúhlých trojúhelníků se stejnou výškou dvě dřívka. Vodorovná strana trojúhelníku se postupně zvětšovala a byla vždy o jedno dřívko delší než u předešlého trojúhelníku. Žáci si našli místo kdekoliv ve třídě a pracovali samostatně. Některým stačilo k vyplnění celého pracovního listu velmi málo času a tak dostali další úkol. Měli vytvořit další trojúhelníky, které by logicky následovaly v řadě a určit jejich obsahy. Společně u tabule jsme poté zkontrolovali výsledky. U prvních tří trojúhelníků žáci argumentovali svá řešení. U dalších trojúhelníků jsme se shodli na stejných výsledcích obsahů. Nebylo potřeba předvést strategie řešení před tabulí, neboť všichni postupovali vždy stejně, že spojovali části základních čtverců do jednotek obsahu a připočetli celé základní čtverce.

Doslovným přepisem žákovské diskuze – 2012/2013_04_MA 35:11 – 35:45:

Experimentátor83: „*Tak, koukneme na to. Kolik vám vyšel obsah prvního trojúhelníku? Viktore, pojď. Kolik ti vyšel obsah?*“

Viktor03: „*Jeden.*“

Experimentátor84: „*Napiš to tam. Viktore, jak jsi počítal?*“

Viktor04: „*No, já jsem si trochu pomohl, že tohle a tohle je spolu a vznikne z toho čtverec.*“

Doslovným přepisem žákovské diskuze – 2012/2013_04_MA 36:03 – 36:26:

Experimentátor86: *„Obsah dalšího trojúhelníku? Tak, Tatiano.“*

Tatiana01: *„Dva.“*

Experimentátor87: *„Dva. Jak jsi počítala? Nebo takhle, souhlasíme s dvojkou?“*

Třída03: *„Jo.“*

Experimentátor88: *„Povídej, jak jsi počítala.“*

Tatiana02: *„Tady je jeden celej čtvereček a dvě půlky, a když ty dvě půlky spojíš, tak ti z toho vznikne druhý čtvereček.“*

Doslovným přepisem žákovské diskuze – 2012/2013_04_MA 36:29 – 37:05:

Experimentátor89: *„Tak, další? Augusto.“*

Augusta06: *„Tři.“*

Experimentátor90: *„Vyšlo někomu ještě tři, souhlasíme s trojkou? Jak jsi počítala?“*

Augusta07: *„Tady je takovej malej, tak ten jsem spojila k tomuhle, kde chybí kousek, a tenhle trojúhelník jsem spojila k tomuhle a to jsou dva a ještě jeden čtvereček.“*

Také jsme zkontrolovali práci žáků, kteří měli rychleji vyplněný pracovní list. Společně jsme přišli na to, že trojúhelníky tvoří polovinu obdélníku se stejně dlouhou vodorovnou i svislou stranou a tudíž je obsah trojúhelníku polovinou obsahu obdélníku.

Doslovným přepisem žákovské diskuze – 2012/2013_04_MA 43:20 – 44:53:

Experimentátor102: *„Květa to udělala takhle* (zakreslila trojúhelník s délkou svislé strany dvě dřívka a vodorovné strany sedm dřívek). *Má to dobře nebo nemá?“*

Vasil19: *„Má.“*

Experimentátor103: *„Jaký je obsah toho trojúhelníku. Jak to, že Květa s jistotou tvrdí, že je obsah sedm?“*

Vít17: *„Protože ono stačí si spočítat ty dolní čtverečky, kolik to zabírá.“*

Experimentátor104: *„Čeho je to půlka? Ten trojúhelník je půlka něčeho. Čeho je to půlka?“*

Augusta08: *„Obdélníku."*

Experimentátor105: *„Obdélníku, Augusto, jakého? Jaké má rozměry? Kolik má ten obdélník na výšku?"*

Augusta09: *„Dva…*(Experimentátor106: *„Krát."*)*…sedm."*

Experimentátor107: *„Dva krát sedm a kolik je obsah celého toho obdélníku?"*

Patrik19: *„Čtrnáct."*

Experimentátor108: *„Čtrnáct. A půlka ze čtrnácti je ten trojúhelník."*

Vít18: *„Tak to musí být sedm."*

d) Seznam kognitivních jevů:

JEV	PROJEV	ODKAZ
Shodnost polovin.	Rozdělím čtyřúhelník na dvě stejně velké části, mám dvě poloviny tohoto čtyřúhelníku.	2012/2013_04_MA 15:02 – 15:42
Potřeba zavedení základní jednotky obsahu.	K určení obsahu potřebujeme stejně velké čtverečky.	2012/2013_04_MA 17:00 – 18:23
Záměna pojmů obvod a obsah.	Při obsahu musíme počítat to uvnitř, ne to okolo.	2012/2013_04_MA 22:15 – 23:39
Polovina celku má stále stejný obsah bez ohledu na tvar.	Polovina čtyřúhelníku ve tvaru obdélníku nebo trojúhelníku má pořád stejný obsah.	2012/2013_04_MA 26:25 – 28:05

e) Seznam sociálních jevů:

- Absence žáka v předešlém experimentu – stejný žák, který v předešlém experimentu nechtěl přijmout správný postup pro výpočet obsahu trojúhelníku, stále s tímto postupem nesouhlasí
- Pomoc spolužáka při záměně pojmů obvod/obsah

3.1.5 Protokol experimentu 2012/2013_05_MA

Škola: FZŠ Táborská, Táborská 45, Praha 4

Třída: 3. B

Počet žáků: 17 (7 chlapců, 10 dívek)

Datum výuky: 21. 02. 2013

Délka výuky: 45 minut

Jméno vyučujícího: Luděk Kovář

Téma hodiny: Obsah pravoúhlého trojúhelníku

Cíle hodiny: Žák určí obsah pravoúhlého trojúhelníku ve čtvercové síti

Vedlejší cíle: Žák se orientuje v tabulce

Pomůcky: Pracovní list s tabulkou, pracovní listy pro jednotlivé skupiny

a) Příprava na hodinu:

Předpokládaný průběh (včetně odhadu časové náročnosti):

1. Společná práce – doplnění číselných výsledků do tabulky 5 minut

Každý žák dostane pracovní list s tabulkou (viz 2012/2013_06_MA_Reflexe_tab. č. 6). Vysvětlíme si společně, co znamenají jednotlivé sloupce a jednotlivé řádky. Zopakujeme si, jaká strana trojúhelníku je svislá a jaká vodorovná.

Do tabulky společně doplníme výsledky z předešlého experimentu.

Předpokládaný průběh aktivity

Předpokládám, že doplnění výsledků nebude pro žáky problémem. Vysvětlení svislé a vodorovné strany bude pro žáky opakováním. U této aktivity nepředpokládám nějaké potíže.

2. Skupinová práce – Určení obsahu pravoúhlého trojúhelníku 30 minut

Žáky rozdělíme do předem připravených skupin. Každá skupina dostane pracovní list (viz přílohy 7 – 12). Na každém pracovním listu je vždy jedenáct pravoúhlých trojúhelníků. Délka svislé strany, tudíž výšky, je vždy fixována a vodorovná strana se postupně zvětšuje a je vždy o jedno dřívko delší než u předešlého trojúhelníku.

U jedenáctého trojúhelníku je naznačeno, že délka vodorovné strany je nekonečně dlouhá.

Žáci mají za úkol určit obsahy těchto trojúhelníků a výsledky zapsat do tabulky na pracovním listu.

<u>Předpokládaný průběh aktivity</u>

Předpokládám, že někteří žáci nebudou souhlasit s rozdělením do dané skupiny a to ovlivní jejich spolupráci. Přesto předpokládám, že každá skupina vyřeší prvních deset úloh na pracovním listu. Skupiny budou mít potíže s určením obsahu u trojúhelníku, kde neznají délku vodorovné strany. Toto zobecnění, tedy nalezení vztahu pro délku strany n, budou schopni určit pouze ve skupinách, kde jim budou předchozí výsledky obsahu trojúhelníků vycházet přirozeným, nikoliv desetinným číslem.

<u>3. Společná práce – Evidence dílčích výsledků do tabulky 10 minut</u>

Výsledky jednotlivých skupin zapíšeme postupně do tabulky na tabuli. Tyto výsledky si žáci průběžně zapisují do svých tabulek na pracovním listu.

<u>Předpokládaný průběh aktivity</u>

Předpokládám, že po úvodní aktivitě, kdy si vysvětlíme, co znamenají jednotlivé sloupce a řádky tabulky, nebudou mít žáci potíže se v tabulce orientovat. Doufám tedy, že stihneme zkontrolovat dílčí výsledky od všech skupin.

Předpokládám, že někdo objeví vztah, jak závisí obsah trojúhelníku na jeho výšce a vodorovné straně a ve třídě zazní v žákovské terminologii, že obsah pravoúhlého trojúhelníku se vypočítá jako polovina násobku vodorovné a svislé strany.

b) Popis průběhu:

Na začátku hodiny proběhl krátký brainstorming na téma čtverečkovaného papíru a obsahu. Žáci vyjmenovali všechny pojmy, které mají s tématem spojené a na které si vzpomněli. Poté si připravili pracovní listy z minulé hodiny. Každý žák dostal nový pracovní list s tabulkou, přečetli jsme si společně zadání úkolu a do tabulky jsme zapsali všechny dílčí výsledky získané v předešlé hodině.

Na další aktivitu byli žáci rozděleni do tříčlenných skupin (jedna dvojice). Každá skupina dostala pracovní list. Žáci ve skupině určovali obsahy pravoúhlých trojúhelníků. Po uplynutí časového limitu neměly ještě všechny skupiny dokončenou práci a vyžádaly si ještě několik minut na dokončení práce. Do tabulky na tabuli jsme tudíž stihli zapsat pouze dílčí výsledky první skupiny a na zapsání výsledků dalších skupin již v hodině nezbyl čas.

c) Reflexe:

Hodina začala brainstormingem na téma čtverečkovaného papíru a obsahu. Žáci si vzpomněli na pojmy jako papír, rozměr, tvary, čtverečky, půlka, čáry, trojúhelníky, čtverce, rohy.

Poté si vyndali z portfolia pracovní listy z minulé hodiny. Mezitím jsem jim rozdal nové pracovní listy s tabulkou, do které jsme zaznamenali výsledky z pracovního listu z minulé hodiny. Žáci na něm zopakovali, která strana je svislá a která vodorovná.

Doslovným přepisem žákovské diskuze – 2012/2013_05_MA 6:01 – 7:07:

Experimentátor06: Máme tam délku vodorovné strany a délku svislé strany v tom pracovním listě. Kolik má délka svislé strany dřívek? Jak je velká, dlouhá?

Vasil01: „Dva."

Experimentátor07: „Dva? Dva co?"

Vasil02: „Dva centimetry."

Učitel02: „Kolik dřívek je délka svislé strany, Vasile?"

Vasil03: „Dvě dřívka."

Experimentátor08: „Dvě dřívka. Vasko, jak si na to přišel?"

Vasil04: „No, protože svisle je jako dolů, takže stačí jako sem, kdybyste si položili dvě dřívka, tak se vám tam vejdou jenom dvě dřívka na tu svislou stranu. A tady ta dole tam je vlastně jenom jedna.

Experimentátor09: „A jaká je ta, ty si ukazoval, že tahle dolů je svislá a jak se říká té druhé?"

Vasil05: „Vodorovná."

Neodhadnul jsem, že žákům se bude v tabulce špatně orientovat a bude jim činit velký problém nalézt správné pole, kam zapsat příslušný výsledek. Při přepisování dílčích výsledků z minulé hodiny jsem tedy musel vše popisovat pomalu, zřetelně a žáci postupovali podle mých pokynů. Tato úvodní aktivita tedy zabrala více času, než pro ni bylo vymezeno podle odhadu časové náročnosti.

Doslovným přepisem žákovské diskuze – 2012/2013_05_MA 9:45 – 10:21:

Experimentátor23: „*K tomu zapisování. Všichni si najděte, že délka svislé strany je dvě dřívka. Máte to tam napsáno nahoře ve druhém sloupečku. Všichni máte nalezeno, že délka svislé strany je dvě dřívka?* (Třída02: „*Ano.*“) *A v tom prvním sloupečku vlevo máte napsáno, že délka vodorovné strany a pod tím je jedno dřívko. A to je přesně ten náš trojúhelník, který má délku svislé strany dvě dřívka a vodorovné strany jedno dřívko. Takže tam napíšeme jeho obsah.*“

Do tabulky jsme úspěšně zapsali dílčí výsledky z minulé hodiny tj. obsahy pravoúhlých trojúhelníků, u kterých byla fixována svislá strana (výška) a měla délku dvou dřívek a vodorovná strana se prodlužovala o jedno dřívko. V tabulce bylo další pole, kdy velikost vodorovné strany byla sto dvacet dřívek. Žáci měli určit, jaký obsah má takový trojúhelník. Několik žáků tento obsah dokázali odvodit díky předešlým výsledkům. Jeden z žáků dokázal ostatním svůj výsledek argumentovat.

Doslovným přepisem žákovské diskuze – 2012/2013_05_MA 18:01 – 19:24:

Experimentátor42: „*Tak přišel někdo na to, jaký obsah má trojúhelník, který má vodorovnou stranu sto dvacet dřívek? Kolik vám vyšlo? Komu vyšlo nějaký číslo, poslouchám.*“

Jaroslav06: „*Sto dvacet.*“

Vít07: „*Sto dvacet.*“

Vasil08: „*Sto dvacet.*“

Štěpán03: „*Sto dvacet.*“

Tatiana01: „*Sto dvacet.*“

Experimentátor43: „*Sto dvacet? A kdo si to nakreslil?*“

Vít08: „*Nikdo, protože je to moc velký.*“

Antonie01: „*To bysme potřebovali větší papír.*“

Experimentátor44: „*A jak jste na to teda přišli?*“

Vít09: „*Protože je to prostě logický. Já jsem přišel na to, že jak je dlouhý ten spodek těch* (Vasil09: „*Dřívek.*“) *dřívek, tak ono se překryje, ty políčka, co jsou vespod, to se překryje tím horním, pomocí těch kousků.*“

Učitel06: „*Antonie a Augusta neposlouchá zase, co Vít říká. Ještě jednou, Víte.*“

Vít10: „*Jakoby ten spodek, když si to vyskládám z těch dřívek, tak oni ty nad tím, tak ty jakoby doplní ty, který tam chybí ty díry.*“

Na další aktivitu jsem žáky rozdělil do předem připravených skupin. Z násilně vytvořených skupin se našlo pouze pár žáků, na kterých bylo při rozdělování vidět, že nejsou spokojeni s výběrem spolupracovníků, naštěstí to u žádné skupiny neovlivnilo vzájemnou spolupráci. Každá skupina dostala pracovní list. Na každém pracovním listu bylo jedenáct pravoúhlých trojúhelníků. Délka svislé strany, tudíž výšky, byla vždy fixována a vodorovná strana se postupně zvětšovala a byla vždy o jedno dřívko delší než u předešlého trojúhelníku. U jedenáctého trojúhelníku bylo naznačeno, že délka vodorovné strany je nekonečně dlouhá. Každá skupina měla fixovanou výšku jinak dlouhou. Skupiny měly na práci 5 minut. Po uplynutí časového limitu se však dožadovaly přidání času na práci, protože ještě nebyly hotovy. Na práci bylo přidáno ještě 8 minut.

Poté následovala společná kontrola. Na tabuli byla připravena tabulka, jakou měli všichni žáci na svých pracovních listech a do které jsme zaznamenávali hodnoty určených obsahů. První skupina, jejíž trojúhelníky měly svislou stranu dlouhou jedno dřívko, začala diktovat své výsledky. Obsah trojúhelníku o stranách jednoho dřívka jim vyšel půl čtverečku. Vyzval jsem tedy skupinu, aby tento výsledek došel někdo zapsat. Skupina zapsala výsledek jako *půlka*. To rozpoutalo diskuzi nad tím, jak tento výsledek správně zapsat. Někteří žáci nesouhlasili se zápisem a prohlašovali, že je výsledek špatně. Společně jsme se shodli na tom, že obsah počítáme ve čtvercích. *Půlka* tedy vyjadřuje polovinu jednoho čtverce.

Doslovným přepisem žákovské diskuze – 2012/2013_05_MA 39:49 – 42:25:

Experimentátor57: *„Tak, kdo měl svislou stranu jedno dřívko? Tak holky.“*

Antonie04: *„My to nevíme, my to nemáme zapsaný.“*

Experimentátor58: *„Ale máte to v tom pracovním listě.“*

Učitel07: *„To, co bude teď pan učitel psát na tabuli, si budete zapisovat do svých pracovních listů každý.“*

Experimentátor59: *„Všichni tady do té tabulky. Ostatní skupinky taky. Tak, holky měly jedno dřívko, je to tak? Kolik vám vyšel obsah trojúhelníku, když má svislou stranu jedno dřívko a vodorovnou taky jedno dřívko?“*

Antonie05: *„Půlka.“*

Experimentátor60: *„Půlka, jak to mám napsat?“*

Vasil13: *„Pět.“*

Vít18: *„Čárka pět.“*

Vasil14: *„Ne, nula.“*

Vít19: *„Nula čárka pět.“*

Experimentátor61: *„Holky, pojďte to napsat, jak jste to napsaly vy.“*

Zapíše slovem *půlka*.

Učitel08: *„Jde to takhle napsat?“*

Vasil15: *„Ne.“*

Patrik05: *„Jo.“*

Vít20: *„Protože má psát to číslo.“*

Učitel09: *„Nemáme psát čísla, máme psát, kolik je obsah.“*

Vít21: *„Ale jde to i jinak.“*

Experimentátor62: *„Víte, je tohle správný výsledek?“*

Vít22: *„Jo je, ale jde to ještě jinak.“*

Učitel10: „*Samozřejmě, ale teď to potřebujeme dát dohromady.*“

Vasil16: „*Nula celá pět.*“

Experimentátor63: „*Holky to zapsaly takhle, holky to vypočítaly takhle.*“

Jaroslav09: „*To nemůže takhle, protože čeho je to půlka?*“

Antonie06: „*No půlka čtverečku.*“

Učitel11: „*Mluvíme o čtverečcích. Tam jsme taky nepsali jeden čtvereček. Jsme se domluvili, že budeme počítat celý čtvereček.*“

Experimentátor64: „*To máme zavedený.*“

Jaroslav10: „*To může ale být třeba dva a půl.*“

Učitel12: „*Ano, ale oni mají půlka.*“

Experimentátor65: „*Holky, když máte vodorovnou stranu dva a svislou pořád jedna, kolik vám vyšel obsah toho trojúhelníku?*“

AntonieK07: „*Jednička.*“

Experimentátor66: „*Jednička, napíšu jedničku. Když máme vodorovnou stranu tři?*“

Antonie08: „*Jedna a půl.*“

Experimentátor67: „*Jedna a půl. Půjdeš to zapsat zase? Uvidíme, jak to zapíše.*“

Zapíše *1 a půl*.

Učitel13: „*Jedna a půl. Jeden čtvereček celý a půl.*“

Experimentátor68: „*Tak, vidíš to, Jaroslave? Tady už je jasný, že je jeden čtvereček a půlka dalšího čtverečku. Tady byla jenom půlka jednoho čtverečku, protože jsme se domluvili, že máme zavedenou jednotku, v které počítáme.*“

Vít23: „*Ale dá se to zapsat i jinak.*“

Skupina poté doplnila své zbývající výsledky a třída je zkontrolovala.

Tabulka s výsledky žáků:

Tabulka č. 5 (Řešení pracovního listu skupiny s délkou svislé strany 1 dřívko)

OBSAH TROJÚHELNÍKU		
Délka vodorovné strany	**Délka svislé strany je 1 dřívko**	**Délka svislé strany je 2 dřívka**
1 dřívko	PŮLKA	1
2 dřívka	1	2
3 dřívka	1 A PŮL	3
4 dřívka	2	4
5 dřívek	2 A PŮL	5
6 dřívek	3	
7 dřívek	3 A PŮL	
8 dřívek	4	
9 dřívek	4 A PŮL	
10 dřívek	5	

Sloupeček s délkou svislé strany 2 dřívka jsme doplnili v předešlé hodině.

U této přípravy mi zcela nevyšel odhad časové náročnosti. Nepředpokládal jsem, že žákům bude tolik činit potíže orientace v tabulce a zapisování do ní. Orientaci v tabulce jsme věnovali podstatně více času. Žáci také potřebovali více času na druhou aktivitu ve skupinách. V neposlední řadě jsme na konci hodiny strávili několik minut diskuzí nad správným zápisem výsledků do tabulky. Z těchto důvodů nebyl dodržen časový harmonogram a nezkontrolovali jsme výsledky ostatních skupin. Společnou kontrolu jsme tedy přesunuli na další hodinu.

Z nabytých zkušeností z praxe bych v dnešní době volil práci s tabulkou jiným způsobem. Každá skupina by dostala stejný pracovní list a pouze příslušný sloupec ze společné tabulky. Do něj by žáci zaznamenali výsledky obsahů svých trojúhelníků. Z částí tabulek bychom následně složili tabulku celou. Jednotlivé části by byly natištěny na formát papíru A3 a tudíž by na společnou tabulku všichni dobře viděli. Také by si ji mohli po skončení experimentu vyvěsit ve třídě.

d) Seznam kognitivních jevů:

JEV	PROJEV	ODKAZ
Orientace v horním a dolním záhlaví tabulky.	Experimentátor vysvětluje orientaci v tabulce krok po kroku z důvodu urychlení zápisu a orientace v tabulce, která nebyla hlavním cíle aktivity.	2012/2013_05_MA 9:45 – 10:21
Proměna pravoúhlého trojúhelníku na obdélník se stejnou délkou strany.	Skládáním částí základních čtverců na jednotku obsahu přemění žák pravoúhlý trojúhelník na čtyřúhelník se stejnou délkou vodorovné strany.	2012/2013_05_MA 18:01 – 19:24
Zápis desetinného čísla. Různé způsoby zápisu pro stejné hodnoty.	Zápis hodnoty obsahu slovně, nepřijetí takového výsledku, nutnost číselného vyjádření.	2012/2013_05_MA 39:49 – 42:25
Nutnost dohody na základní jednotce obsahu.	U slovního vyjádření hodnoty obsahu potřeba určení základní jednotky obsahu.	2012/2013_05_MA 39:49 – 42:25 Jaroslav09 Antonie06

e) Seznam sociálních jevů:

- Nesouhlas se slovním zápisem – potřeba číselného výsledku obsahu
- Násilné vytvoření skupin bez ovlivnění spolupráce – na některých žácích bylo vidět, že s rozdělením nesouhlasí, ale neovlivnilo to jejich spolupráci ve skupině
- Potřeba delšího času na práci – žáci si sami řekli o prodloužení časového limitu na práci, neboť s prací ještě nebyl nikdo ve třídě hotov

3.1.6 Protokol experimentu 2012/2013_06_MA

Škola: FZŠ Táborská, Táborská 45, Praha 4

Třída: 3. B

Počet žáků: 17 (8 chlapců, 9 dívek)

Datum výuky: 28. 02. 2013

Délka výuky: 45 minut

Jméno vyučujícího: Luděk Kovář

Téma hodiny: Obsah pravoúhlého trojúhelníku

Cíle hodiny: Žák určí vztah mezi stranou trojúhelníku a příslušnou výškou

Vedlejší cíle: Žák se orientuje v tabulce

Pomůcky: Pracovní list s tabulkou, pracovní listy pro jednotlivé skupiny

a) Příprava na hodinu:

Předpokládaný průběh (včetně odhadu časové náročnosti):

1. Společná práce – doplnění číselných výsledků do tabulky 10minut

Každý žák si připraví pracovní list s tabulkou na výpočty obsahů z minulé hodiny. Všichni vytvoří skupiny, ve kterých pracovali minulou hodinu a připraví si své pracovní listy. Žáky, kteří nebyli přítomni, přidělíme ke skupinám.

Do tabulky společně doplníme výsledky, které jsme na konci předešlé hodiny nestihli tj. výsledky první skupiny, která měla trojúhelníky s délkou svislé strany jedno dřívko. Zkusíme vyřešit, jaký obsah bude mít trojúhelník, který má délku svislé stany jedno/dvě dřívka a vodorovné strany sto dvacet dřívek.

Předpokládaný průběh aktivity

Předpokládám, že určení obsahu trojúhelníku s délkou svislé stany dvě dřívka a vodorovnou sto dvacet dřívek, zvládnou žáci odvodit, neboť obsah je stejné číslo jako délka vodorovné stany.

Předpokládám, že určení obsahu trojúhelníku s délkou svislé stany jedno dřívko a vodorovnou sto dvacet dřívek, také zvládnou žáci odvodit, neboť obsah je polovina délky vodorovné stany.

<u>2. Skupinová práce – Evidence dílčích výsledků to tabulky 30 minut</u>

Vždy jeden žák ze skupiny doplní do tabulky na tabuli výsledky obsahů jim zadaných trojúhelníků. Skupiny budou chodit k tabuli postupně a vždy zkontrolujeme doplněné výsledky.

Budeme vždy diskutovat o zákonitostech v daném sloupci i řádku.

<u>Předpokládaný průběh aktivity</u>

Předpokládám, že dílčí výsledky obsahů zadaných trojúhelníků budou mít žáci určené správně. Pokud se objeví numerická chyba, při společné kontrole ji žáci objeví.

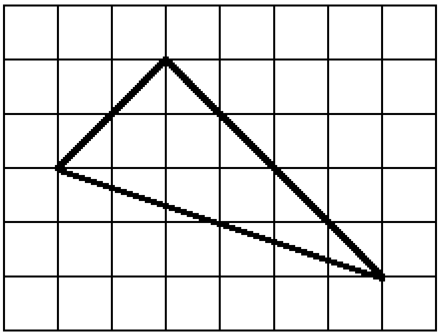
Předpokládám, že žáci objeví zákonitost ve sloupci. Tu by měly objevit skupiny. Zákonitost v řádku bude vidět až po doplnění několika sloupců. I tuto zákonitost předpokládám, že žáci objeví.

Doufám, že žáci objeví i to, že výsledky v určitých sloupcích a řádcích jsou stejné, tudíž že nezáleží na umístění trojúhelníku, ale na jeho rozměrech. Tato zákonitost by jim měla pomoci jak při doplnění tabulky, tak i při kontrole dalších dílčích výsledků ostatních skupin.

Předpokládám, že některý z žáků v této hodině již objeví vztah, jak závisí obsah trojúhelníku na jeho výšce a vodorovné straně a ve třídě zazní v žákovské terminologii, že obsah pravoúhlého trojúhelníku se vypočítá jako polovina součinu délky vodorovné a svislé strany.

<u>3. Společná práce – Obsah pravoúhlého trojúhelníku 10 minut</u>

Každý žák dostane čtvercovou síť a v ní zakreslený pravoúhlý trojúhelník, jehož základna ani výška neleží v mříži. Vzorový trojúhelník bude připevněn na tabuli. Žáci mají za úkol určit jeho obsah.



Společně zapíšeme všechny nabízené výsledky. Žáci budou svá řešení argumentovat u tabule a popíší své strategie řešení.

<u>Předpokládaný průběh aktivity</u>

Předpokládám, že žáci se pokusí určit obsah skládáním částí základních čtverců. Nepředpokládám, že by někdo použil strategii doplnění na čtyřúhelník a od obsahu čtyřúhelníku odčítal obsahy pravoúhlých trojúhelníků v něm.

b) Popis průběhu:

Na začátku hodiny jsem měl na tabuli přepsanou tabulku, kterou měli žáci na svých pracovních listech z předešlé hodiny. V tabulce byly zaznamenány dílčí výsledky obsahů, které jsme společně určili. Žáci utvořili stejné pracovní skupiny jako v minulé hodině.

Společně doplníme poslední výsledek prvního sloupce. Určíme tedy, jaký je obsah trojúhelníku se svislou stranou jedno dřívko a s vodorovnou stranou sto dvacet dřívek. Také společně zkontrolujeme výsledky obsahů trojúhelníků, kde si žáci volili délku vodorovné strany sami.

Skupina, jejíž trojúhelníky měly délku svislé strany tři dřívka, také doplnila své výsledky obsahů do tabulky. Výsledky ve sloupci ale nebyly kompletní, proto s chybějícími údaji členům této skupiny pomohla třída. Opět jsme zkusili určit obsah trojúhelníku, který má svislou stranu tři dřívka a vodorovnou stranu sto dvacet dřívek. Jeden z žáků vysvětlil svou strategii řešení u tabule.

Zbývající skupiny postupně doplnily své výsledky, všechny údaje jsme vždy společně zkontrolovali a diskutovali jsme nad správným řešením. Žáci postupně vysvětlovali své strategie řešení u tabule ostatním.

Po vyplnění tabulky na tabuli představil jeden žák svůj objev, kdy si všiml, že mezi oběma stranami a výsledným obsahem je nějaká závislost.

Na poslední aktivitu nezbyl čas, neboť žáci měli velkou potřebu diskutovat nad výsledky v tabulce a objevovat zákonitosti v ní. Přejít proto na další aktivitu se mi nejevilo právě vhodné.

c) Reflexe:

Žáci se rozdělili do pracovních skupin z minulého týdne a přichystali si potřebné pracovní listy. Na tabuli byla přichystaná tabulka, kterou měli žáci i před sebou na pracovním listu, kde byly doplněny dílčí výsledky z předešlých hodin.

Společně jsme určili obsah trojúhelníku, jehož délka svislé strany byla dvě dřívka a vodorovné strany sto dvacet dřívek. Podle předpokladu s tím žáci neměli problém. Také jsme úspěšně určili obsah trojúhelníku, jehož délka svislé strany byla jedno dřívko a vodorovné strany sto dvacet dřívek.

Doslovným přepisem žákovské diskuze – 2012/2013_06_MA 4:43 – 9:06:

Experimentátor10: „*K tý svislý straně* (jedno dřívko), *holky, když máme 120 dřívek* (vodorovná strana), *vypočítali jste to* (obsah trojúhelníku)?“

Antonie01: „*Ne.*“

Experimentátor11: „*Ví někdo jiný, když si představíte trojúhelník, který bude mít svislou stranu jedno dřívko a vodorovná strana bude sto dvacet dřívek.*“

Vasil03: „*To je nemožný.*“

Experimentátor12: „*Ale je to možný. Podívej se, kdybych nakreslil takhle hodně jemnou síť, tak tam těch sto dvacet čtverečků uděláme.*“

Antonie02: „*Já asi vím. Když je támhle ta desítka* (vodorovná strana deset dřívek) …(Experimentátor13: „*Pojď to ukázat.*“) *…tak se to udělá, aby se to rozpůlilo na půlku. Ale když je to lichý* (délka vodorovné strany) *tak tam musí být půlka. A tady je sto dvacet* (délka vodorovné strany), *tak by to mohlo být šedesát* (obsah).“

Experimentátor14: „*Souhlasíme s šedesáti?*“

Vasil04: „*Protože šedesát a šedesát je sto dvacet a když je tam vždycky půl a ještě jedna takže to musí být spolu, protože tam jsou vždycky dvě čísla.*“

Experimentátor15: „*A proč to platí jenom v tomhle sloupečku?*“

Vasil05: „*No protože vždycky je tam, tady je jedna a půl, takže to jedno číslo je tam jakoby dvakrát vždycky. Takže se to musí počítat i s tímhle (obsah šedesát), že to musí být dvakrát.*“

Experimentátor16: „*Takže kolik by měl obsah, kdybychom měli sto devatenáct dřívek?*“

Antonie03: „*To musí být něco a půl.*“

Experimentátor17: „*Když máme sto dvacet dřívek obsah šedesát, tak sto devatenáct bude?*“

Vít03: „*Padesát devět a půl.*“

Experimentátor18: „*Dobře, tak tady nám to sedí v tomhle sloupečku. V tomhle sloupečku už to bylo jinak. Tady v tom sloupečku, když mám sto devatenáct dřívek vodorovnou stranu, tak kolik by to bylo tady, obsah toho trojúhelníku? Máme trojúhelník, který má vodorovnou stranu sto devatenáct dřívek, svislou stranu už má dvě dřívka.*“

Vasil06: „*No tak to je zase sto devatenáct.*“

Experimentátor19: „*Sto devatenáct? Vychází nám to, souhlasíme s tím?*“

Vasil07: „*Protože to je to samý. Tady je vždycky to číslo* (myšlen obsah), *který je na začátku* (myšlena délka vodorovné strany).“

Experimentátor20: „*A proč je to v tomhle sloupečku takhle a v prvním je to menší?*“

Vasil08: „*Protože je tam svislá strana dvě dřívka.*“

Experimentátor21: „*Kvůli tý svislý straně?*“

Vasil kývá.

Do prvního sloupce si měli žáci zvolit délku vodorovné strany v intervalu daném podmínkou a určit obsah trojúhelníku. Zkontrolovali jsme společně obsahy u všech zvolených délek. Při kontrole prvního výsledku jeden z žáků objevil zákonitost mezi obsahem a vodorovnou stranu v prvním sloupci tabulky.

Doslovným přepisem žákovské diskuze – 2012/2013_06_MA 9:12 – 10:51:

Experimentátor23: *„Každý jste si tady měli vybrat vlastní délku. Byla tam nějaká podmínka.“*
Vasil09: *„Menší než dvacet a větší než třicet.“*

Augusta01: *„Menší než třicet a větší než dvacet.“*

Experimentátor24: *„Tak, jak říká Augusta, menší než třicet a větší než dvacet. Každý jste si vybrali vlastní. Tak chci slyšet nějaký návrhy.“*

Vasil10: *„Dvacet jedna.“*

Učitel03: *„Tak kdo má dvacet jedna vybráno tak si kontroluje.“*

Experimentátor25: *„Dvacet jedna. Když máme délku vodorovné strany dvacet jedna a svislou stranu máme jedno dřívko, jaký bude obsah?“*

Štěpán01: *„Deset a půl.“*

Vasil11: *„Jo, deset a půl.“*

Experimentátor26: *„Kdo si vybral vodorovnou stranu dvacet jedna dřívek a svislou jedno dřívko má obsah deset a půl. Jak si na to přišel, Štěpáne?“*

Štěpán02: *„Protože ono v tom prvním sloupci…* (Experimentátor27: *„Pojď nám to ukázat.“*) *…v tomhle prvním sloupci, tam je obsah vždycky polovina toho čísla* (vodorovné strany).“

Experimentátor28: *„Kterého čísla?“*

Štěpán03: *„Tady bude tohohle* (zvolená délka vodorovné strany dvacet jedna dřívek), *protože když tam dáme dvacet jedna, tak to můžeme rozdělit na dvě desítky a jednička nejde rozdělit celým číslem, takže to musíme rozdělit na půlky.“*

Dále jsme v hodině přešli k doplnění dalšího sloupce tabulky, kdy délka svislé strany byla tři dřívka. Při doplňování do tabulky se opět ozvali někteří žáci, že nesouhlasí se zápisem *1 a PŮL* a že se má výsledek zapisovat jinak. Opět jsme se shodli na tom, že výsledek je správný a zápis může být různý. Zápis výsledku *1 a PŮL* vyjadřuje, že je obsah trojúhelníku jeden celý čtvereček a půlka dalšího. S tím všichni souhlasili a uznali výsledek za správný, do pracovního listu si to každý zapsal tak, aby tomu rozuměl.

Skupina doplnila pouze prvních deset řádků, tj. kdy délka vodorovné strany byla 1 – 10 dřívek. S jejich výsledky třída souhlasila. Dále jsme určili obsah trojúhelníku s délkou svislé strany tři dřívka a vodorovné strany sto dvacet dřívek. Jeden z žáků při argumentaci svého výsledku objevil zákonitost v daném řádku tabulky.

Doslovným přepisem žákovské diskuze – 2012/2013_06_MA 17:55 – 18:37:

Experimentátor33: *„Tak, zase máte trojúhelník, kde máme tři dřívka* (svislá strana) *a tady bysme měli sto dvacet dřívek* (vodorovná strana). *Štěpáne?“*

Štěpán06: *„Podle mě sto osmdesát to bude, protože tady byl obsah pět* (svislá strana jedno dřívko a vodorovná strana deset dřívek) *a to je půlka desítky* (svislá strana dvě dřívka a vodorovná strana deset dřívek) *a pak se to pět, pokaždý se přidá ta pětka. A tady* (svislá strana jedno dřívko a vodorovná strana devět dřívek) *se zase přidá půlka tohohle* (svislá strana dvě dřívka a vodorovná strana devět dřívek). *Takže tady* (vodorovná strana sto dvacet dřívek) *se pokaždé přidá šedesát.“*

Díky objevení závislosti v řádku jsem vyzval k doplnění skupinu, která měla trojúhelníky s délkou svislé strany pět dřívek, a tudíž jsme ve vyplňování v tabulce přeskočili jeden sloupec. Tato skupina se na svých výsledcích nemohla shodnout. Jeden ze skupiny přišel zapsat své výsledky. Hned u prvního obsahu trojúhelníka s délkou svislé strany pět dřívek a vodorovné strany jedno dřívko měli všichni tři zástupci skupiny jiný výsledek. Každý dostal prostor argumentovat svůj výsledek.

U prvního zástupce skupiny se někteří ve třídě konečně dočkali svého zápisu desetinného čísla. S výsledkem však třída nesouhlasila. U trojúhelníku s délkou svislé strany pět dřívek a vodorovnou stranou jedno dřívko totiž tvrdil, že je obsah 2,2. Svou strategii řešení vysvětlil před tabulí poměrně nejasně a založenou ve značné míře na odhadu. Jeho řešení mu však rozporoval druhý ze skupiny. Ten jako argument použil závislost ve sloupci, kterou názorně ukázal a popsal.

Doslovným přepisem žákovské diskuze – 2012/2013_06_MA 18:54 – 25:49:

Experimentátor38: „Kdo měl, která skupinka měla svislou stranu pět? Vít, Jaroslav a Tatiana, jo? Tak pojďte někdo.“

Jaroslav07: „Ale my se nemůžeme domluvit.“

Experimentátor39: „Co máte.“

Jaroslav08: „My to máme špatně, zase.“

Experimentátor40: „Vy se nemůžete dohodnout. Tak uvidíme. Uvidíme, co má Vít a uvidíme, co máte vy.“

Vít jde zapisovat na tabuli své výsledky.

Martin01: „No hele, takhle se to píše.“

Vasil17: „No bravo, konečně to tak někdo píše.“

Experimentátor41: „Ale takhle si to klidně pište taky.

Štěpán07: „Jo, bravo.“

Vasil18: „Konečně to někdo psal správně.“

Experimentátor42: „Tohle je taky správně, Vasile.“

Vít mezi tím dopisuje své řešení do tabulky.

Experimentátor43: „Tak, Jaroslave, když s Tatianou s tím nesouhlasíte, tak se na to koukneme všichni. Mám svislou stranu pět dřívek, vodorovnou stranu jedno dřívko. Vít nám napsal dvě celý dvě (2,2).“

Jaroslav09: „Vždyť ani neví, co to znamená.“

Vít07: „Vím, to znamená, že to je ani ne půl. To je jakoby když se řekne čtvrt tak je to o takovej minibodíček míň.“

Experimentátor44: „Tak, tohle je o kousek míň než dva a čtvrt. To má Vít pravdu. A souhlasíme s tím, že obsah tohohle trojúhelníku je…“

Vít08: „Protože to by tady bylo, kdyby to bylo čtvrt, to by bylo dva čárka dva čárka dva no. Dva čárka dva čárka pět.“

Experimentátor45: „To necháme, Víte. Teď nás zajímá obsah toho trojúhelníku. Souhlasíme s Vítem, že obsah je 2,2?“

Učitel05: „Takže míň jak dvě a čtvrt.“

Experimentátor46: „Kolik máte vy, Tatiano s Jaroslavem.“

Jaroslav10: „Já myslím, že by to mělo být dva a půl.“

Experimentátor47: „Vy máte dva a půl?“

Učitel06: „Tatiana má tady tři a půl.“

Experimentátor48: „Tak já to napíšu.“

Vít09: „Ale to, já to můžu vysvětlit. Já to klidně ukážu na svým.“

Experimentátor49: „Tak ukaž.“

Vít10: „Protože, chápete. Tady se to počítá, že to je pět čtverečků dlouhý (myšleno svislá strana). A ty dva kousky dohromady, jsou dva čtverečky, jenže ten poslední je strašně pidi, ale fakt pidipidipidi a mě vychází, že to není ani čtvrt.“

Experimentátor50: „Vít tvrdí, že tady ten kousíček, že tohle není ani čtvrt.“

Vít11: „No ona tam je jenom takováhle čárka vůbec tam není vidět vůbec nic jinýho.“

Experimentátor51: „Jaroslave, jak tobě vyšlo dva a půl.“

Jaroslav11: „Počkejte, já se na něco…A Víte, jak si přišel na to, že je to zrovna dva celý dva, proč to třeba není dva celý jedna nebo celých tři?“

Vít12: „Protože dva celých jedna, to by bylo ještě menší, to by končilo někde tady, jenže ono se to táhne dál.“

Experimentátor52: „Jaroslave, pojď vysvětlit, jak ty si přišel na dva a půl.“

Jaroslav12: „Tady to a tohle je jedna a tady to a tohle je druhý a tohle je půlka.“ Vít13: „Jenže je poznat, že to není půl. Klidně to můžu ještě i ukázat, jestli chcete, že to není ani půl.“

Vít se svým pracovním listem obchází spolužáky.

Experimentátor53: „Tak, všichni koukají na tabuli, Víte, posaď se prosím. Tak všichni koukají na tabuli. Jaroslav tvrdí, že tyhle dvě části, když sečteme dohromady… (Jaroslav13: „Ne, tuhle a tuhle.“) …tak je to jeden čtvereček. Tak, který dva, když sečtu zase? (Jaroslav14: „Tyhle.“) Tak, to je druhý čtvereček. (Jaroslav15: „A tohle je půlka.“) A tohle tvrdí Jáchym, že je půlka.“

Třída02: „Ne ne, není to půlka.“

Vít14: „Je to trochu špatně nakreslený, ale to je jedno.“

Experimentátor54: „Není to úplně přesný.“

Patrik04: „Tak tím pádem to je půlka.“

Antonie05: „Nejsou to přesný čtverečky, takže se dá říct, že to docela je půlka.“

Experimentátor55: „Tak, já na tabuli nemám úplně přesný čtverečky, oni měli v pracovním listě přesný čtverečky, tohle je jenom nákres. Patrik mi tady říká, že je to dobře.“

Antonie06: „Já taky.“

Experimentátor56: „Tady holky taky.“

Nakonec dostal prostor i třetí zástupce skupiny, ten si výsledek opravil sám při argumentaci u tabule. Ze třídy se ozve žákyně, že si zkusila nakreslit tento trojúhelník a vyšel jí výsledek dva a půl. Svůj postup také vysvětlí u tabule a poukáže na pracovní list své skupiny (trojúhelníky s délkou svislé strany jedno dřívko). Nalezla tam shodný trojúhelník, ale otočený. Tento argument třídu přesvědčil o správnosti výsledku. Jedině první zástupce skupiny nepřijal tento výsledek za správný. Ne, že by s ním nesouhlasil, ale protože třída nepřijala jeho výsledek za správný.

Zkontrolovali jsme společně tedy i ostatní výsledky v tomto sloupci. Třída si byla u některých výsledků nejistá. Zástupce skupiny, který před tím určil jako jediný správný výsledek, opravil všechny ostatní a vysvětlil, jakou závislost ve sloupci objevil.

Doslovným přepisem žákovské diskuze – 2012/2013_06_MA 30:38 – 31:56:

Experimentátor73: *„Když mám tři dřívka* (vodorovná strana)*, souhlasíme s obsahem sedm?“*

Třída03: „*Ano. Já nevím.*“

Experimentátor74: „*Co má Jaroslav?*“

Jaroslav19: „*Já to nemám, já jsem to nestihl. Ale já si myslím, že se tam zase bude přidávat to dva a půl. Dva a půl a dva a půl je pět. A pět a zase plus dva a půl je sedm a půl.*“

Experimentátor75: „*Tak pokračuj dál, když máme čtyři dřívka dole, vodorovně.*“

Jaroslav20: „*Tak zase dva a půl…*“ Napíše výsledný obsah 10 čtverečků a opraví všechny ostatní výsledky.

Diskuze s žáky se dále zaměřila na závislost mezi obsahy v jednotlivých sloupcích. Díky této diskuzi ukázali žáci, že taková závislost funguje v každém sloupci. Při argumentaci se objevilo i to, že některé obsahy jsou v tabulce stejné, protože patří shodným trojúhelníkům, např. jeden žák ukázal na výsledný obsah trojúhelníku, který má svislou stranu jedno dřívko a vodorovnou strana pět dřívek a potom na výsledný obsah trojúhelníku, který má svislou stranu pět dřívek a vodorovnou stranu jedno dřívko.

Doslovným přepisem žákovské diskuze – 2012/2013_06_MA 34:41 – 36:43:

Učitel09: „*Koukněte se. Otázka pana učitele zněla, proč tady měl Jaroslav přidávat to dva a půl? Zkuste se kouknout na ty předchozí sloupce a zdůvodnit to, ať nemusíme nic kreslit a vysvětlovat, jestli to má Jáchym dobře, když přidával dva a půl.*“

Vasil20: „*Jedna a půl, tam bude dva a dva a půl.*“

Učitel10: „*Proč, Patriku?*“

Experimentátor82: „*Kde, Vasile?*“

Vasil21: „*Kdo je čtyřka?*“

Učitel11: „*Počkej, Vasile.*“

Patrik ukáže na výsledný obsah, když je svislá strana jedno dřívko a vodorovná strana pět dřívek a potom na výsledný obsah, když je svislá strana pět dřívek a vodorovná strana jedno dřívko.

Učitel12: *„Patriku, ale já se ptám, proč tady v tom sloupci máme přidávat dva a půl? Augusto?“*

Augusta04: *„No protože, tady je to půlka a pak je celý číslo pak je zase jako jedna a půl a tady bude zase celý číslo a tady je zase dva a půl.“*

Učitel13: *„Takže tady se přidávala půlka vždycky, tady v tom sloupci. Dívejte se všichni teď pořádně. Tady se brala půlka, první číslo, tak se všude přidávala půlka k tomu dalšímu.“*

Augusta05: *„Tady bylo první číslo celý…*(Učitel14: *„Jedna.“*) *…tak se všude přidávala jednička. Tady je jedna a půl, tak se to přidávalo.“*

Učitel15: *„A tady je dva a půl, tak se přidává dva a půl. Kolik asi bude tady* (svislá strana čtyři dřívka a vodorovná strana jedno dřívko)?“

Třída04: *„Já, já vím. Dvojka.“*

Učitel16: *„Kdo měl čtyřku, kdo měl čtyři dřívka? Andrea? Jaký máte první číslo?“*

Andrea01: *„Dva.“*

Učitel17: *„Dva, tak je to tak, jak to říkala tady Augusta. Jaký máte druhý číslo?“*

Andrea02: *„Čtyři.“*

Vasil22: *„Dva, čtyři, šest, osm, deset, dvanáct, čtrnáct, šestnáct.“*

Při této diskuzi jsme automaticky přešli ke skupině, jejíž trojúhelníky měly svislou stranu dlouhou čtyři dřívka. Jejich výsledky jsme zaznamenali do tabulky. Jeden z žáků v tabulce opět ukázal závislost mezi výslednými obsahy v jednotlivých řádcích. Když jsme objevili tyto zákonitosti mezi obsahem a svislou stranou a obsahem a vodorovnou stranou, pokračovali jsme dále v doplnění dílčích výsledků ostatních skupin. Po zapsání výsledků skupiny, jejíž trojúhelníky měly svislou stranu dlouhou šest dřívek, se jeden žák přihlásil, že objevil nový způsob, jak spočítat obsah trojúhelníku. Svůj způsob vysvětlil žákům před tabulí. Objevil závislost mezi obsahem pravoúhlého trojúhelníku a jeho vodorovnou stranou (základnou) a svislou stranou (výškou) a tedy žákovskou terminologií popsal vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku.

Doslovným přepisem žákovské diskuze – 2012/2013_06_MA 43:22 – 44:32:

Experimentátor98: *„Tak, Jaroslave, na co si přišel?“*

Jaroslav27: *„Jednou šest, je šest a z toho polovina je tři* (obsah trojúhelníku s délkou vodorovné strany jedno dřívko a svislé strany šest dřívek je roven třem). *Dvakrát šest, je dvanáct a z toho je polovina šest* (obsah trojúhelníku s délkou vodorovné strany dvě dřívka a svislé strany šest dřívek je roven šesti).*“*

Experimentátor99: *„Tak, Jaroslave, prosím tě, otoč se. Celá třída teď poslouchá a kouká na Jaroslava. Jaroslave, zopakuj to.“*

Jaroslav28: *„Jednou šest, je šest a z toho je polovina tři a to se napíše sem. Dvakrát šest, to je dvanáct a polovina z dvanáctky je šest. A takhle to jde i u pětky. Jednou pět je pět a polovina z toho je dva a půl.“*

Experimentátor100: *„Jde to třeba sedmkrát tři? Je kolik? Sedm krát tři je kolik?“*

Třída05: *„Dvacet jedna.“*

Experimentátor101: *„Dvacet jedna a půlka z toho je?“*

Vasil26: *„Je deset a půl.“*

Na poslední aktivitu nezbyl čas, neboť žáci měli velkou potřebu diskutovat nad výsledky v tabulce a objevovali zákonitosti v ní. Přejít proto na další aktivitu se mi nejevilo právě vhodné.

Tabulka č. 6 (Kompletní žákovské řešení všech skupin)

OBSAH TROJÚHELNÍKU						
Délka vodorovné strany	**Délka svislé strany je 1 dřívko**	**Délka svislé strany je 2 dřívka**	**Délka svislé strany je 3 dřívka**	**Délka svislé strany je 4 dřívka**	**Délka svislé strany je 5 dřívek**	**Délka svislé strany je 6 dřívek**
1 dřívko	PŮLKA	1	1 A PŮL	2	2,5	3
2 dřívka	1	2	3	4	5	6
3 dřívka	1 A PŮL	3	4 A PŮL	6	7,5	9
4 dřívka	2	4	6	8	10	12
5 dřívek	2 A PŮL	5	7 A PŮL	10	12,5	15
6 dřívek	3	6	9	12	15	18
7 dřívek	3 A PŮL	7	10 A PŮL	14	17,5	21
8 dřívek	4	8	12	16	20	24
9 dřívek	4 A PŮL	9	13 A PŮL	18	22,5	27
10 dřívek	5	10	15	20	25	30
120 dřívek	60	120	180	240	300	360

d) Seznam kognitivních jevů:

JEV	PROJEV	ODKAZ
Pokud je výška trojúhelníku jedno dřívko, je obsah trojúhelníku roven polovině délky příslušné strany výšky.	Vhled do výsledků v tabulce a popsání zákonitostí v ní.	2012/2013_06_MA 4:43 – 9:06 2012/2013_06_MA 9:12 – 10:51 Štěpán02
Pokud je výška trojúhelníku dvě dřívka, je obsah trojúhelníku číselně roven délce příslušné strany výšky.	Vhled do výsledků v tabulce a popsání zákonitostí v ní. Délka vodorovné strany má vždy stejnou hodnotu jako obsah trojúhelníku.	2012/2013_06_MA 4:43 – 9:06 Vasil07
Vztah mezi dvěma sousedními řádky se projeví v obsahu.	Vhled do výsledků v tabulce a popsání zákonitostí v řádku na předchozích výsledcích, kdy obsah se vždy zvyšuje o stejnou hodnotu.	2012/2013_06_MA 17:55 – 18:37
Vyjádření čtvrtiny plochy.	Žák cítí, že vyjádřená část základního čtverce je menší než čtvrtina a snaží se vyjádřit tento obsah desetinným číslem.	2012/2013_06_MA 18:54 – 25:49
Vztah mezi dvěma sousedními sloupci se projeví v obsahu.	Vhled do výsledků v tabulce a popsání zákonitostí ve sloupci na předchozích výsledcích, kdy obsah se vždy zvyšuje o stejnou hodnotu.	2012/2013_06_MA 30:38 – 31:56 2012/2013_06_MA 34:41 – 36:43
Obsah trojúhelníku jako polovina obsahu obdélníku.	Polovina součinu délek svislé a vodorovné strany.	2012/2013_06_MA 43:22 – 44:32

e) Seznam sociálních jevů:

- Korektní zápis desetinného čísla – někteří žáci pozitivně kvitovali zápis číselného výsledku desetinným číslem a ne slovně
- Nesouhlas jedince s přijetím výsledku – na základě neuznání jeho výsledku jako správného

3.1.7 Protokol experimentu 2012/2013_07_MA

Škola: FZŠ Táborská, Táborská 45, Praha 4

Třída: 3. B

Počet žáků: 16 (7 chlapců, 9 dívek)

Datum výuky: 02. 03. 2013

Délka výuky: 30 minut

Jméno vyučujícího: Luděk Kovář

Téma hodiny:

Cíle hodiny: Aplikuje získané znalosti a dovednosti

Pomůcky: Diagnostický test

a) Příprava na hodinu:

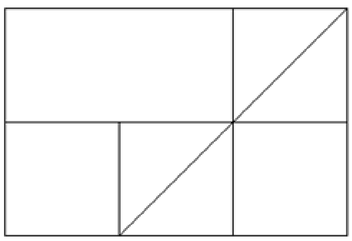
V této hodině dostali žáci k vyplnění diagnostický test. Žáci měli k vyplnění testu 30 minut čistého času. Tento test jsem sestavil z úloh, které prostupovaly celým experimentem, a tudíž jsme vše společně v některé z hodin řešili.

<u>**Úloha 1:**</u>Rozhodni, z kolika **čtverců**, **obdélníků** a **trojúhelníků** se skládá čtyřúhelník na obrázku 1.

Čtverec =

Obdélník =

Trojúhelník =



obr. 1

<u>Úloha 2:</u> Urči obvod, obsah a rozměr **největšího obdélník** a **největšího čtverce** z úlohy 1. U **největšího trojúhelníku** (z úlohy 1) určete pouze obsah. Hodnoty zapiš do tabulky.

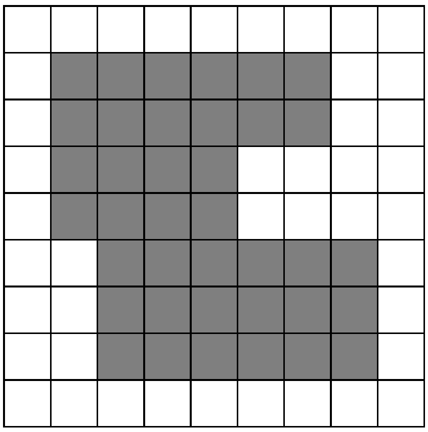
	Obvod	Obsah	Rozměr
Čtverec			
Obdélník			
Trojúhelník	X		X

<u>Volba úlohy</u>

Tyto dvě úlohy jsou vzájemně propojené. Cílem první úlohy bylo, aby žáci prokázali vhled do rovinného obrazce, což prokazují tím, že dokážou vyhledat tvarově stejné útvary. Předpokládám, že žáci objeví převážně čtyři menší čtverce, ale jeden větší ne. Že objeví čtyři menší trojúhelníky, ale jeden větší ne. Obdélníků je v první úloze sedm a nepředpokládám, že někdo objeví všechny.

Cílem druhé úlohy bylo, aby žáci prokázali, zda považují nejmenší čtverec v obrazci za jednotku obsahu. Předpokládám, že většina žáků si do obrazce načrtne vlastní čtvercovou síť. Také v úloze prokážou, že umí určit obsah trojúhelníku a u čtyřúhelníku určit i jeho obvod a rozměr. Tím potvrdí, zda našli tvarově stejné útvary.

<u>Úloha 3:</u> Ve čtverečkované síti urči **obvod** a **obsah** zahrady a **zapiš postup**, jak jsi počítal/a.



Obvod zahrady:

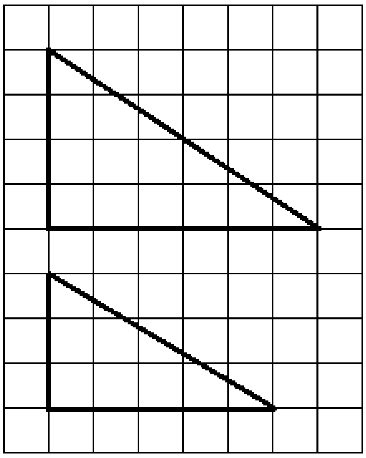
Obsah zahrady:

Postup:

Volba úlohy

Cílem této úlohy bylo ověřit, zda žáci rozumí pojmům obvod a obsah a že tyto pojmy vzájemně nezaměňují. Dalším cílem bylo ověřit, zda obvod a obsah mnohoúhelníku dokážou vyjádřit číselně. Předpokládám, že obvod určí jako součet délek stran základních čtverců, které tvoří hranici mnohoúhelníku. Obsah určí součtem všech základních čtverců.

Úloha 4: Urči **obsahy** trojúhelníků ve čtvercové síti na obrázku 2.



Obsah trojúhelníku =

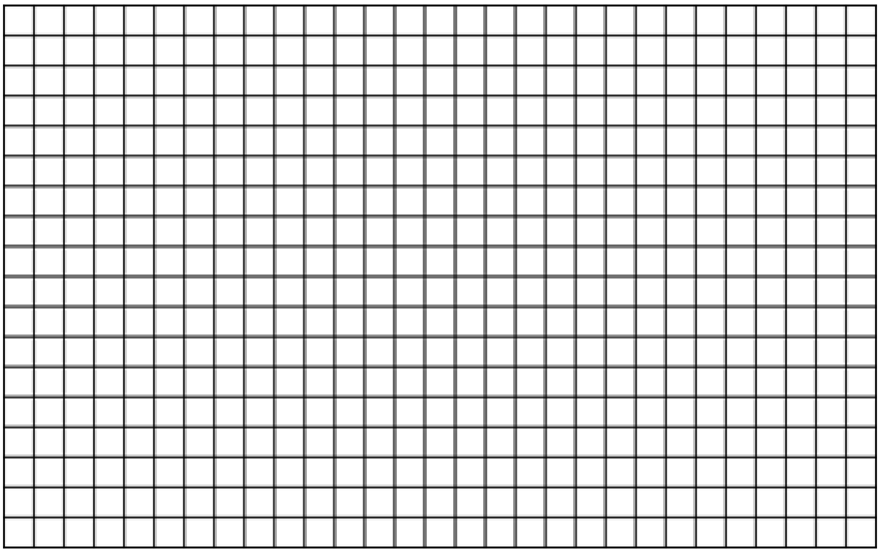
Obsah trojúhelníku =

obr. 2

Volba úlohy

Cílem této úlohy bylo ověřit, zda žáci použijí k řešení vhodný pracovní postup, který zazněl při vlastní výuce. Přepona pravoúhlého trojúhelníku rozdělí některé základní čtverce čtverečkovaného papíru na různé části, přičemž svislá a vodorovná strana leží v mříži. Jeden z trojúhelníků má obě odvěsny o jednotku kratší než druhý. Předpokládám, že žáci budou skládat části základních čtverců k sobě a tím získávat jednotku obsahu. U prvního trojúhelníku to bude snazší, neboť jeho přepona prochází mřížovým bodem. U druhého trojúhelníku tomu tak není. Doufám, že se jako řešení objeví i dokreslení do obdélníku a určení obsahu jako poloviny tohoto obdélníku.

<u>Úloha 5:</u> Jaký obsah má trojúhelník, jehož svislá strana měří 14 dřívek a jeho vodorovná strana měří 30 dřívek?



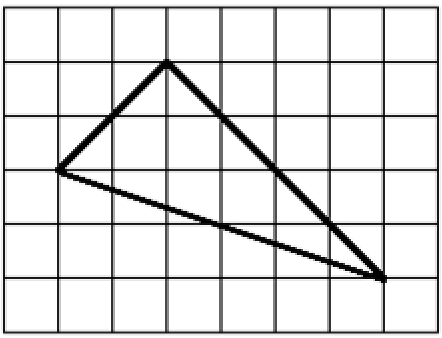
Obsah trojúhelníku =

<u>Volba úlohy</u>

Cílem této úlohy bylo ověřit, zda žáci vyřeší i úlohu, kterou není možné znázornit do připravené mříže. Úloha se nedá řešit manipulativně a je potřeba prokázat praktické použití vzorce pro výpočet obsahu pravoúhlého trojúhelníku. S její pomocí mohu zjistit, kteří žáci již nepotřebují nákres a uměli by vzorec aplikovat. Předpokládám ale, že si většina žáků dokreslí po straně ještě jednu řadu čtverců, aby si zadaný trojúhelník mohli zakreslit.

<u>Úloha 6:</u> Dokážeš **určit obsah** trojúhelníku ve čtvercové síti (obrázek 3)?

obr. 3



Obsah trojúhelníku =

Volba úlohy

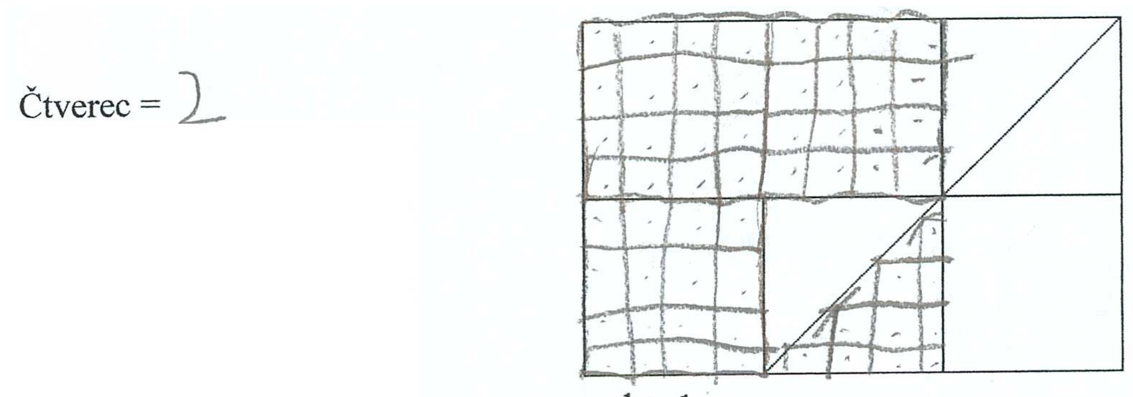
Cílem této úlohy bylo, zda žáci dokážou využít získané znalosti a aplikovat je na úlohu o něco obtížnější. Tuto úlohu nelze řešit pouze skládáním částí základních čtverců do jednotky obsahu, protože strany tohoto trojúhelníku nejsou součástí vodorovných ani svislých linek mříže. Předpokládám, že žáci přesto budou skládat k sobě části základních čtverců a nepodaří se jim tento obsah určit.

b) Výsledky diagnostického testu:

Po ukončení experimentu jsem se rozhodl diagnostický test vyhodnocovat po jednotlivých úlohách, protože je mi jasné, že z tak malého vzorku žákovských prací nemohu získat relevantní statistická data. V následujícím textu uvádím pracovní postupy některých žáků, ilustruji je kopií originálního řešení. Uvádím také chybná řešení a vlastní komentáře s jejich možným odůvodněním.

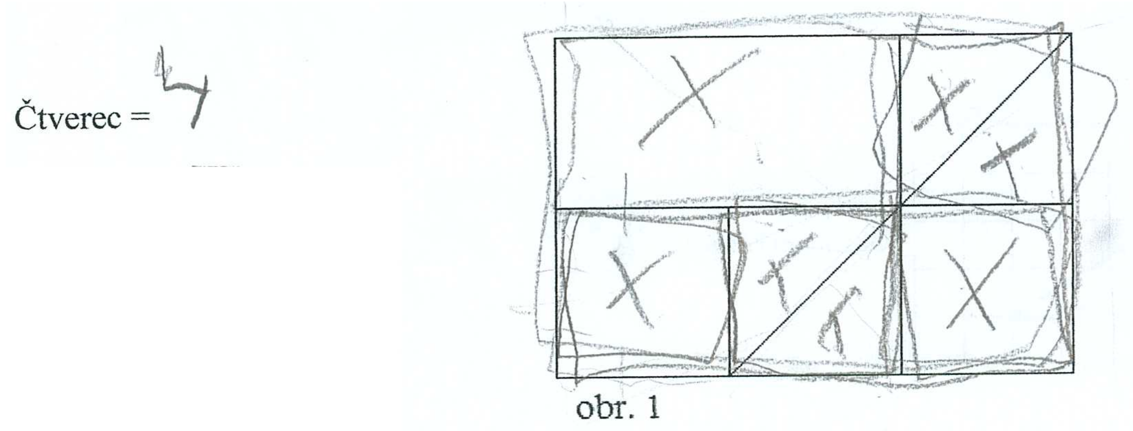
I. Výsledky z úlohy 1

Očekávaným výsledkem bylo určení pěti čtverců s dvěma různými délkami stran. Někteří žáci objevili pouze dva čtverce. Je pravděpodobné, že brali v úvahu nejmenší čtverce, a z nich pouze ty, které nebyly dále rozděleny úhlopříčkou. Takové čtverce jsou v grafickém zadání opravdu pouze dva. Toto řešení se ve třídě vyskytlo dvakrát.



obr. 1

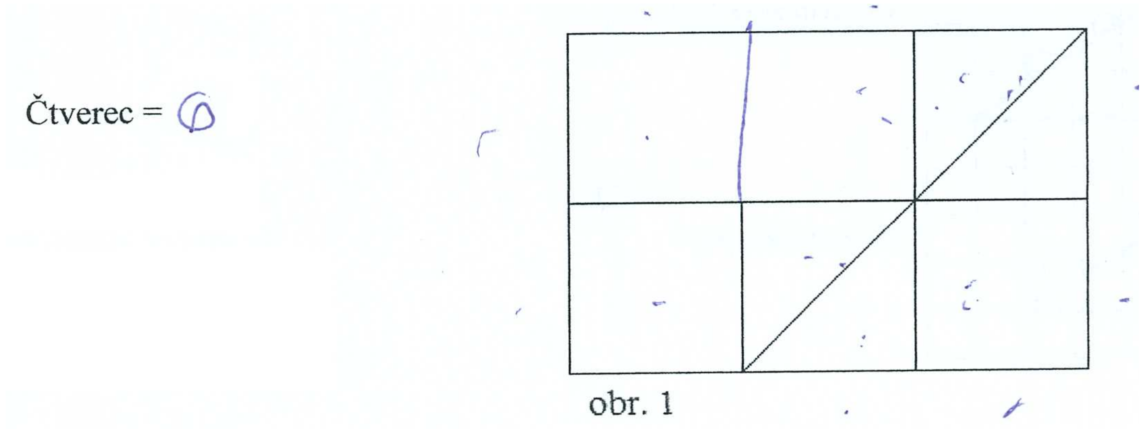
Další žáci objevili čtyři čtverce. Je pravděpodobné, že brali v úvahu pouze menší čtverce a neobjevili větší čtverec s rozměry 2 x 2. Ten je složen z obdélníku 1 x 2 a ze dvou čtverců 1 x 1. Takové řešení bylo ve třídě nejčastější a vyskytlo se devětkrát.



obr. 1

Správné řešení s pěti čtverci se ve třídě vyskytlo čtyřikrát. Tito žáci vyhodnotili všechny tvarově stejné čtverce v nabízeném čtyřúhelníku.

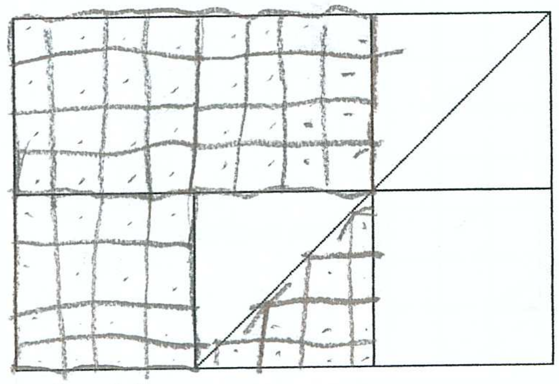
Poslední dva žáci objevili šest čtverců. Je pravděpodobné, že si v obdélníku 2 x 1 vyznačili kratší střední příčku, čímž ho rozdělili na dva čtverce. Poté počítali pouze všechny nejmenší čtverce, větší čtverce o rozměrech 2 x 2 nebrali v úvahu.



obr. 1

Očekávaným výsledkem bylo určení sedmi obdélníků se třemi různými rozměry (1 x 2, 1 x 3, 2 x 3). Jeden z žáků objevil pouze jeden obdélník. Je opět pravděpodobné, že bral v úvahu pouze obdélník, který nebyl dále rozdělen. Neskládal tudíž jednotlivé tvary tak, že vznikly i obdélníky větší než obdélník s rozměry 1 x 2. Toto řešení se objevilo u stejného žáka, který bral v potaz pouze dva nejmenší čtverce.

Obdélník = 1

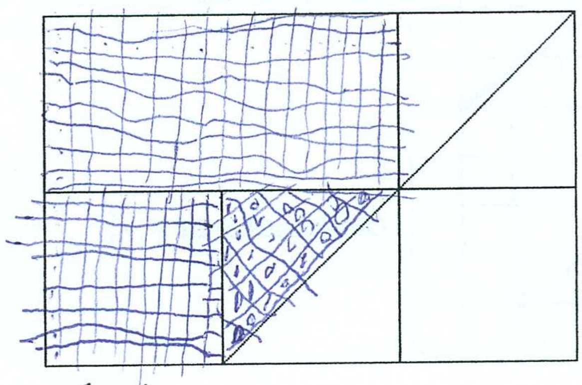


obr. 1

Další dva žáci objevili dva obdélníky. Předpokládám, že brali v úvahu pouze obdélník, který nebyl dále dělen a také celý nabízený čtyřúhelník, protože tvar zadaného obdélníku vidí jako dominantní.

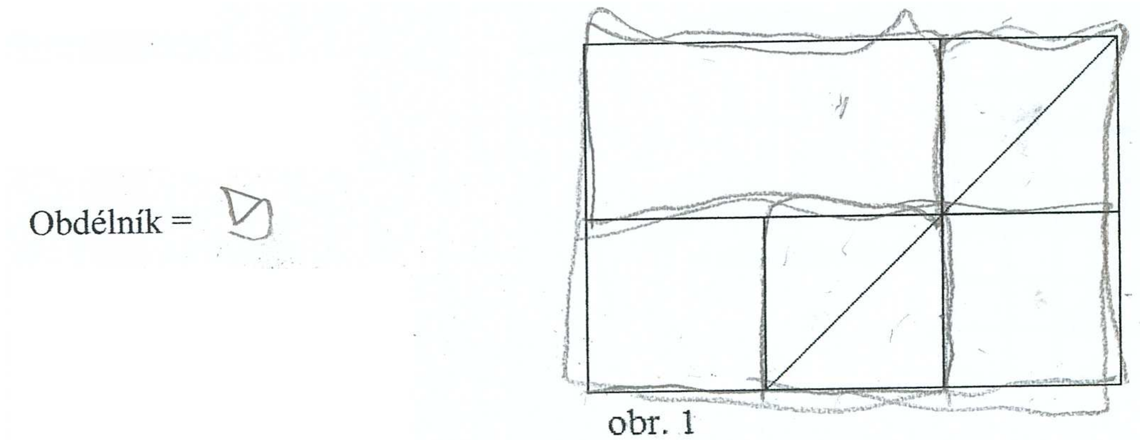
U třech žáků, kteří objevili tři obdélníky, je pravděpodobné, že brali v úvahu pouze obdélníky, které měly stejný rozměr i vodorovnou polohu jako obdélník, který nebyl v nabízeném čtyřúhelníku rozdělen a měl rozměr 2 x 1. Jeden z nich si do obdélníku vyznačil vlastní mříž, podle níž v následující úloze určoval jeho obvod, obsah a rozměr. Rozměr uvedl jako 9 x 15, což by odpovídalo jeho mříži.

Obdélník = 3



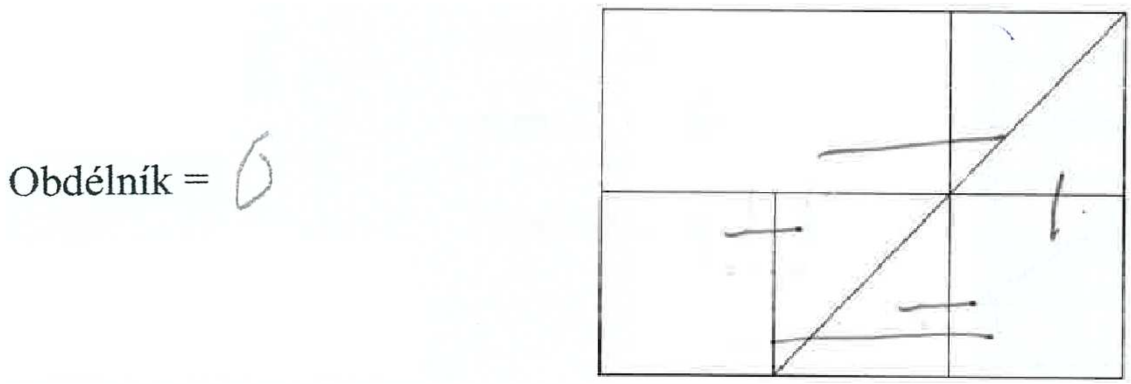
obr. 1

Někteří žáci objevili pět obdélníků. Je pravděpodobné, že brali v úvahu všechny obdélníky s rozměry 2 x 1, bez ohledu na jejich polohu a k tomu ještě celý nabízený čtyřúhelník jako dominantní vizuální vjem. Takové řešení bylo ve třídě nejčastější a vyskytlo se pětkrát.



obr. 1

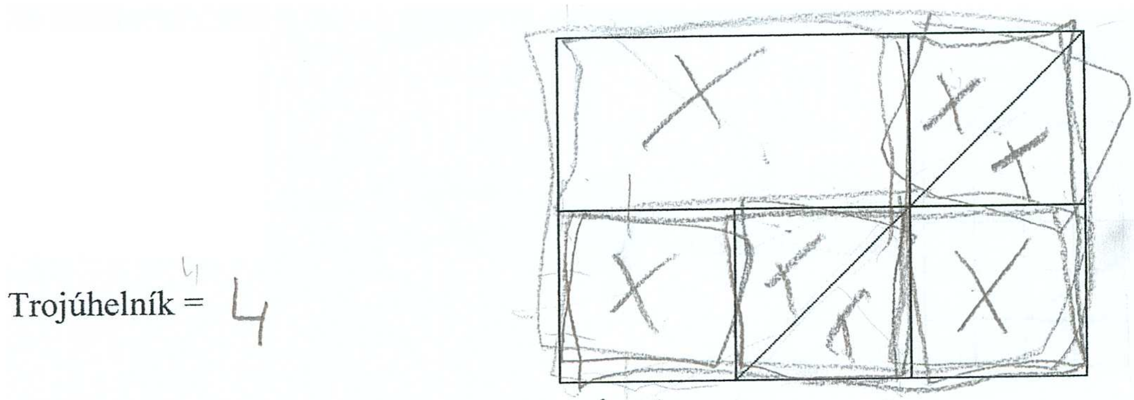
Další trojice žáků objevila šest obdélníků. Ve většině případů si tito žáci nezakreslili do obrazce své řešení, a tudíž není jasné, který z obdélníků nepočítali. V nabízené ukázce je jasné, že se žák soustředil na skládání jednotlivých obdélníků z různých čtyřúhelníků a vynechal ten dále nedělený obdélník s rozměry 2 x 1. Také je ale možné, že naopak vynechal nabízený čtyřúhelník, tedy obdélník o rozměrech 3 x 2.



Pouze jeden žák objevil sedm obdélníků, což odpovídá grafické podobě obrazce. Tento žák správně objevil všechny tvarově stejné obdélníky v nabízeném čtyřúhelníku. Měl patrně dobrý vhled do dané problematiky, neboť neměl potřebu si zakreslit svůj pracovní postup ani žádnou další poznámku k identifikaci správného počtu.

Poslední žák objevil osm obdélníků. Je pravděpodobné, že za obdélník považoval i čtverec o rozměrech 2 x 2. Bohužel si žák svůj postup do obrazce nezaznamenal a nedokážu tudíž odhadnout, zda je můj předpoklad správný.

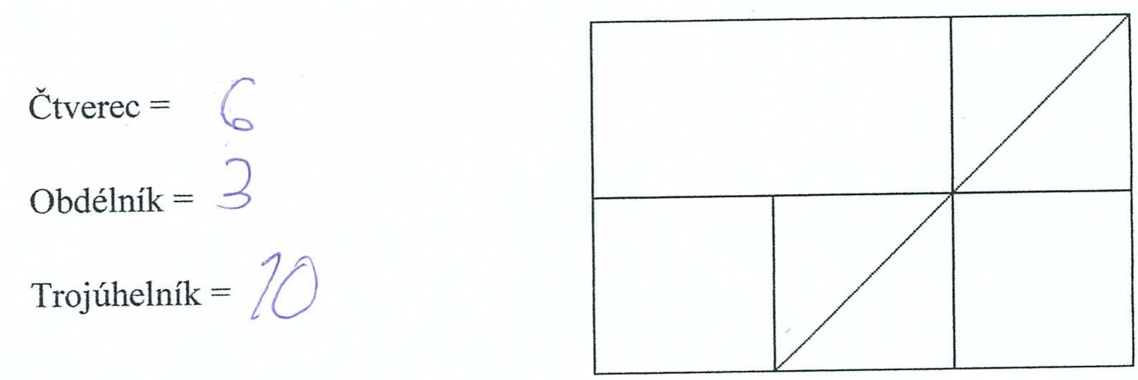
Očekávaným výsledkem bylo určení pěti rovnoramenných pravoúhlých trojúhelníků se dvěma různými délkami odvěsen. Nejmenší uváděný počet trojúhelníku (čtyři) uvedlo nejvíce, a to osm žáků. Je pravděpodobné, že brali v úvahu trojúhelníky, které nebyly dále děleny.



obr. 1

Tři žáci objevili pět trojúhelníků, což odpovídá grafické podobě obrazce. Tito žáci správně objevili všechny tvarově stejné trojúhelníky v nabízeném čtyřúhelníku. Žádný z nich neměl potřebu své řešení zaznamenat do obrazce.

Dva žáci uvedli jako své řešení deset trojúhelníků. Domnívám se, že stejně, jako jsou v obrazci rozpůleny dva čtverce, vizuálně si rozpůlili i další nedělené čtyřúhelníky, kterých je celkem pět, čímž jim vyšel tento zdánlivě nesmyslný výsledek. Bohužel ani jeden z žáků nezaznamenal svůj postup do obrazce. Oba žáci našli shodně i počty ostatních čtyřúhelníků, šest čtverců a tři obdélníky. Právě z uvedeného počtu čtverců jsem usoudil, jaký byl jejich pracovní postup.



obr. 1

Poslední tři žáci neobjevili žádný z trojúhelníků nebo nezaznamenali svůj výsledek do pracovního listu.

V této úloze se potvrdil můj předpoklad, že nejčastěji žáci objeví čtyři základní čtverce, a čtyři základní trojúhelníky. Také se potvrdil můj předpoklad, že jen velmi málo žáků objeví všech sedm obdélníků.

II. Výsledky z úlohy 2

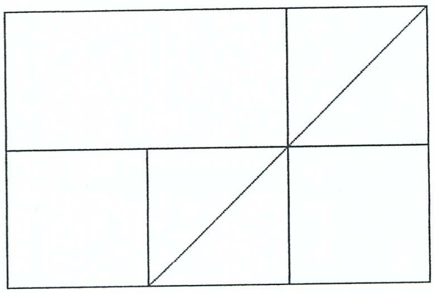
Výsledky ve druhé úloze se odvíjely od nalezených obrazců v první úloze. Číselné výsledky však nebyly sledovaným jevem. Žáci zde měli prokázat, zda považují nejmenší čtverec v obrazci za jednotku obsahu.

Deset žáků považovalo nejmenší čtverec za jednotku obsahu a devět z nich bylo díky tomu schopno dojít i k předpokládaným číselným výsledkům, desátý žák neuvedl žádný číselný výsledek. Je tedy možné, že nepovažuje nejmenší čtverec za jednotku obsahu, a proto si s úlohou nedokázal poradit.

Čtverec = 5

Obdélník = 7

Trojúhelník = 5



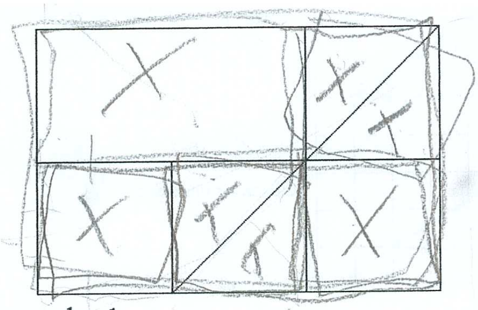
obr. 1

	Obvod	Obsah	Rozměr
Čtverec	8	4	2x2
Obdélník	10	6	2x3
Trojúhelník	X	0,5	X

Čtverec = 4

Obdélník = 5

Trojúhelník = 4



obr. 1

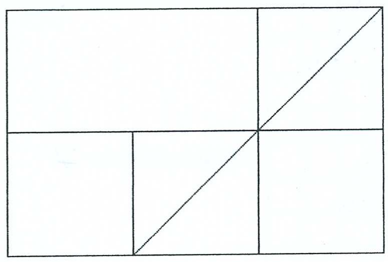
	Obvod	Obsah	Rozměr
Čtverec	4	1	1×1
Obdélník	10	6	2×3
Trojúhelník	X	9,5	X

Tento žák uvedl očekávaný číselný výsledek, ale za jednotku obvodu nepovažoval dřívka, nýbrž centimetry bez ohledu na jejich skutečný rozměr. To se objevilo pouze u jednoho žáka z celé třídy.

Čtverec = 4

Obdélník = 2

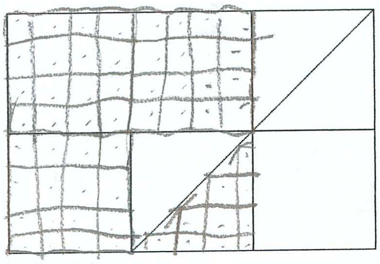
Trojúhelník = 4



obr. 1

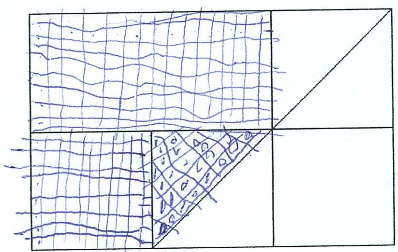
	Obvod	Obsah	Rozměr
Čtverec	8cm	4	8
Obdélník	10cm	6	10
Trojúhelník	X	2	X

Šest žáků nepovažovalo nejmenší čtverec za jednotku obsahu a měli potřebu doplnit si do obrazce vlastní mříž, podle které určovali obvod a obsah. Čtyři z těchto žáků byli schopni dojít k nějakým číselným výsledkům. Načrtnutá mříž se u jednotlivých žáků lišila. Někteří se snažili načrtnout mříž ve všech útvarech stejnou. Jiní si v každém mnohoúhelníku načrtli jinak hustou mříž, ač se snažili o to, aby byla ve všech přibližně stejná.



obr. 1

	Obvod	Obsah	Rozměr
Čtverec	16	32	
Obdélník	16	25	
Trojúhelník	X	13 A PŮL	X



obr. 1

	Obvod	Obsah	Rozměr
Čtverec	64	16	8X8
Obdélník	24	133	9X15
Trojúhelník	X	25	X

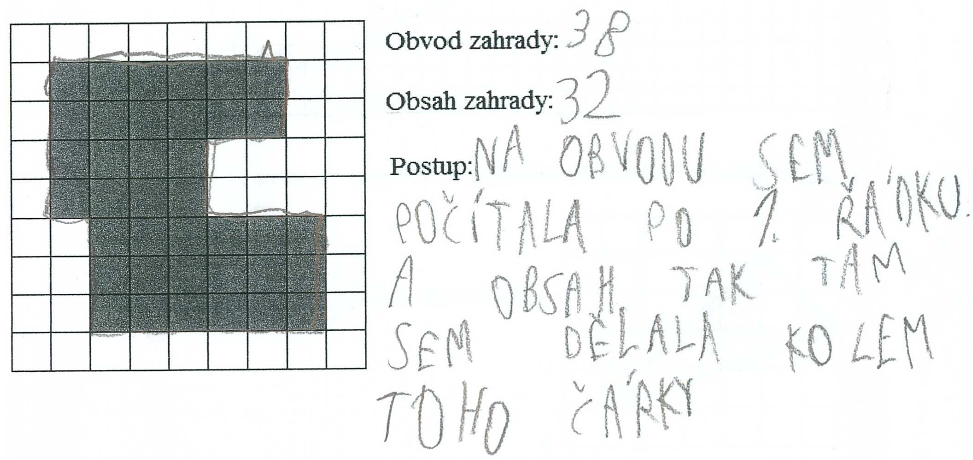
Dva zbývající žáci nebyli schopni podle své mříže dojít k žádným číselným výsledkům.

V této úloze se z větší části můj předpoklad nepotvrdil. Předpokládal jsem, že více žáků bude mít potřebu zakreslit si do obrazce vlastní mříž a podle ní teprve určovat číselné výsledky.

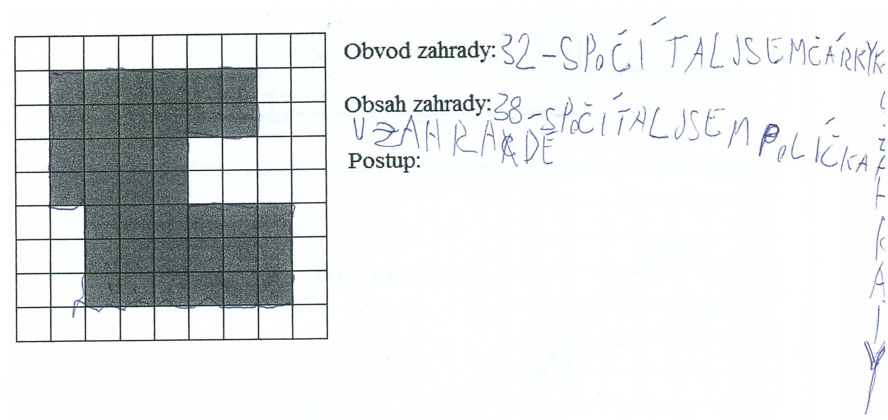
Většina žáků byla schopna určit u některých obrazců alespoň obvod nebo obsah. Nezáleží na tom, zda považovali nejmenší čtverec za jednotku obsahu či měli potřebu načrtnout si vlastní mříž. Číselné výsledky závisely na tom, zda žáci prokázali, že mají vhled do dané problematiky a našli tvarově stejné útvary. Největší problém dělalo žákům určit rozměr čtverce a obdélníku. Pouze sedm žáků bylo schopno správně uvést rozměry některého z čtyřúhelníků.

III. Výsledky z úlohy 3

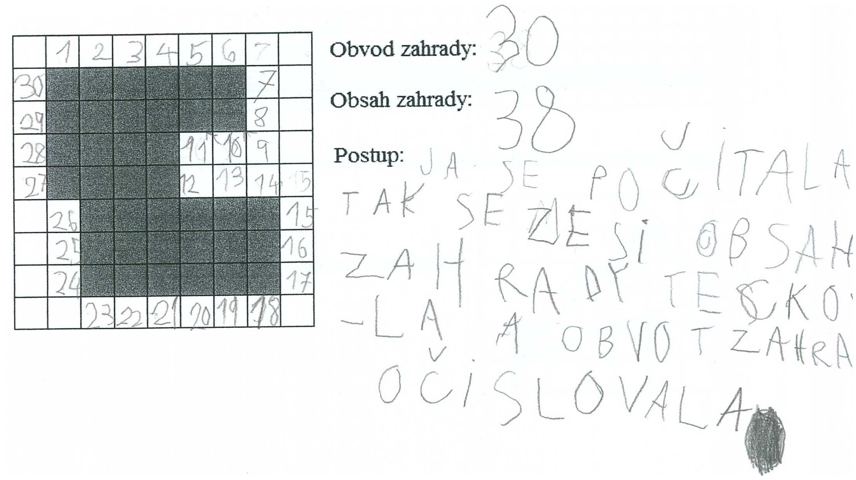
Tato úloha prokázala, že žáci nemají problém se záměnou pojmů obvod a obsah. Jeden z nich určil sice správně číselné výsledky, ale zaměnil oba pojmy, což je zřejmé z jeho popisu postupu. K záměně pojmů nedošlo u žádného jiného žáka. Pouze jediný žák tuto úlohu neřešil vůbec.

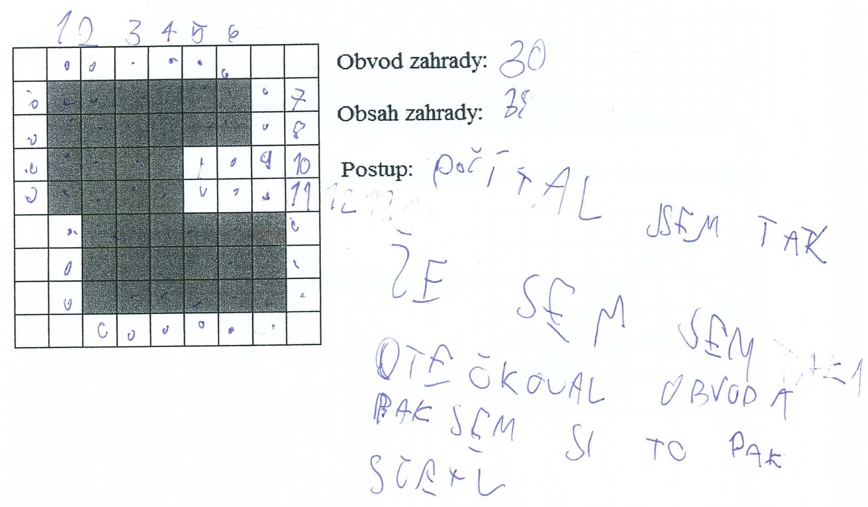


Číselně vyjádřený obvod určilo pouze pět žáků, deset žáků uvedlo číselný výsledek chybný. Je pravděpodobné, že chybné výsledky byly důsledkem numerických chyb vzniklých při součtu dílčích výsledků. Žáci k určení obvodu nejčastěji volili označení jednotlivých délek stran základních čtverců a jejich součet.

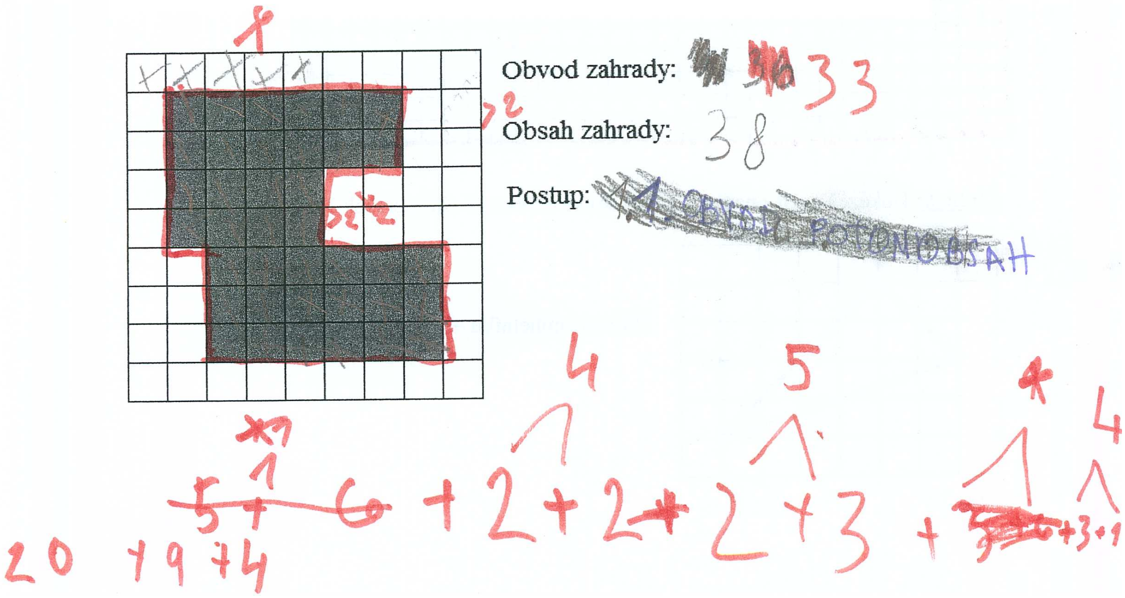


Častým jevem u chybných výsledků bylo chybné označení délek stran ve vnějších úhlech u vrcholu nekonvexního vnitřního úhlu, kde bylo potřeba počítat délku stran dvou základních čtverců. Usuzuji tak z toho, že se číselné výsledky lišily většinou s minimální odchylkou.



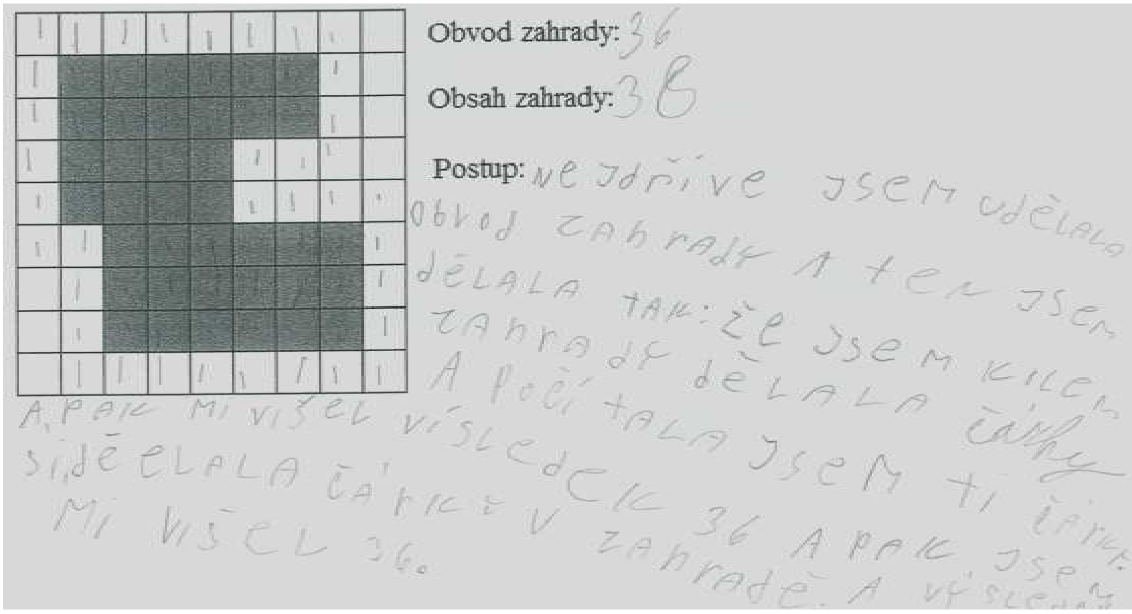


V prvním uvedeném žákovském řešení je zřejmé, že ve čtverečku, kde si žák zapsal číslo jedenáct, nepočítal další délku strany základního čtverce. Stejná chyba následovala hned ve čtverečku s číslem dvanáct. Tato chyba vznikla i u druhého uvedeného řešení, ve kterém žák používal k označení délek tečky.



U tohoto žákovského řešení se domnívám, že žák zvolil výchozí místo a domníval se, že bude připočítávat po jedné (číslo 5 ve škrtnutém záznamu) než dojde k určení celého obvodu. U páté jednotky si uvědomil, že by ho mohla jeho krátkodobá paměť zradit a měl potřebu své dílčí výsledky zapisovat. Další zapsaná čísla již vyjadřují délky jednotlivých stran v odpovídajícím pořadí. Poslední zapsané číslo je 1, což není napsáno na začátku řady, ale je započítáno do čísla 5. To si žák zřejmě neuvědomil, a proto je jeho výsledek o jedna větší. Škrtnuté dílčí výsledky zřejmě neznamenají opravu chyby, ale evidenci již zpracovaného rozměru.

Číselně vyjádřený obsah naopak určilo třináct žáků správně, dva žáci uvedli číselný výsledek chybný a pouze jeden žák úlohu neřešil vůbec. Jeden z chybných číselných výsledků byl způsoben již zmíněnou záměnou pojmů obvod a obsah. U druhého žáka se lišil výsledek pouze o dvě jednotky. Je tedy možné, že vznikl špatnou zrakovou analýzou obrazce nebo nejistotou při užívání číselné řady – počítání počtu základních čtverců po jednom.



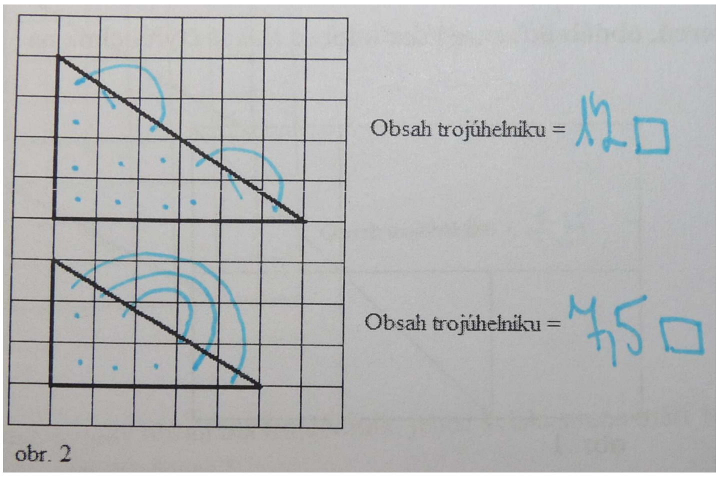
Většina žáků volila jako postup řešení počítání po jedné jakékoliv označení základních čtverců. Tato strategie jim byla blízká po celou dobu experimentu a v jednotlivých hodinách ji hojně používali všichni. Není tedy nikterak zavádějící, že většina žáků byla schopna určit správný číselný výsledek převážně u obsahu, s menší úspěšností u obvodu mnohoúhelníku.

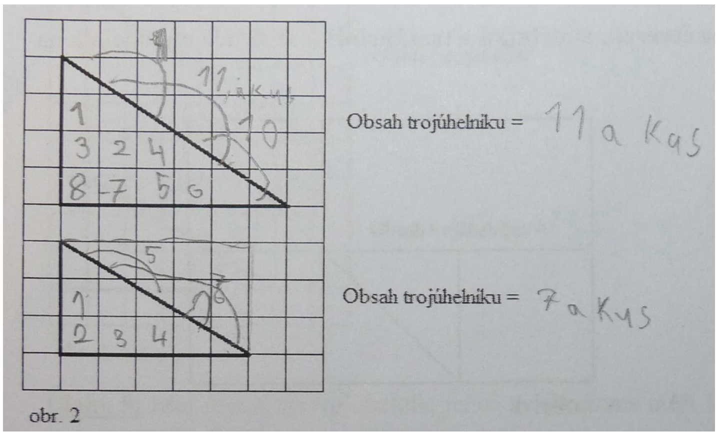
Podle mého předpokladu jsou žáci schopni číselně vyjádřit obvod i obsah. Řešitelské postupy byly voleny také podle mého předpokladu, ačkoliv ne vždy vedli ke správnosti výsledku. Obvod žáci nejčastěji řešili součtem délek stran základních čtverců tvořící hranici mnohoúhelníku, obsah zase součtem základních čtverců uvnitř mnohoúhelníku.

IV. Výsledky z úlohy 4

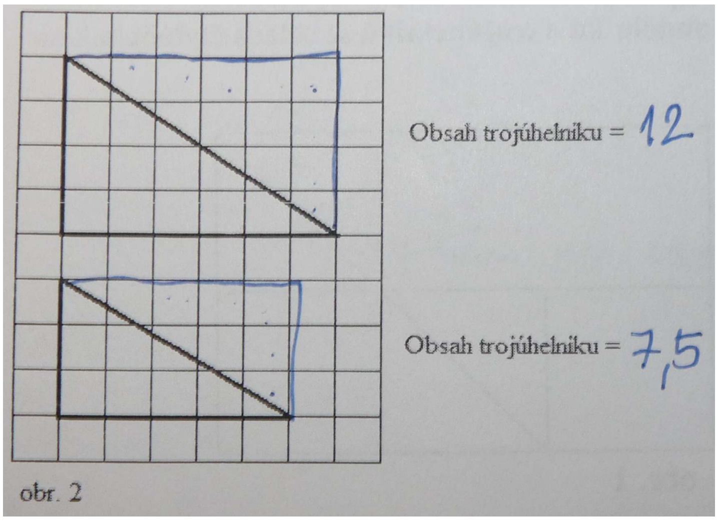
Tato úloha byla zaměřena na pracovní postup žáků při určování obsahu pravoúhlého trojúhelníku, který zazněl v průběhu vlastní výuky. Dva žáci úlohu neřešili vůbec. Jeden z žáků zaměnil pojmy obvod a obsah a u trojúhelníků určoval obvod.

Deset žáků určilo správný číselný výsledek u prvního trojúhelníku. Jako pracovní postup převážně volili sčítání základních čtverců a částí základních čtverců. Tato metoda však nevedla ke správnému číselnému výsledku u všech žáků.

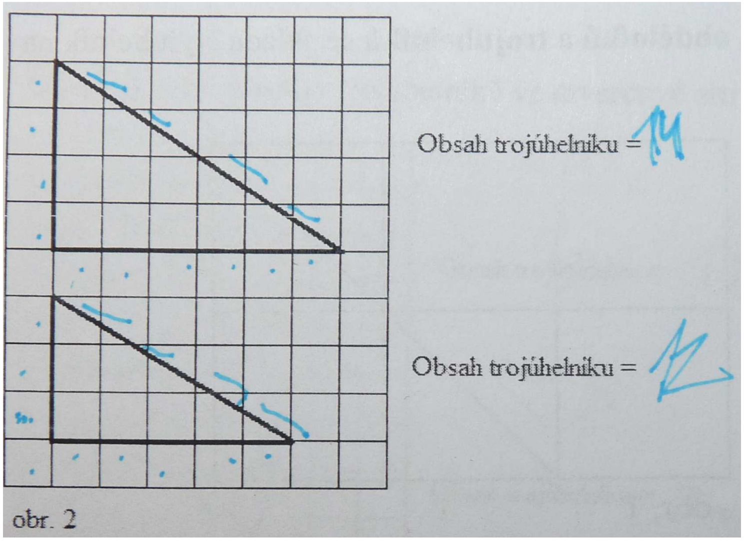




Pouze jeden žák použil jako pracovní postup doplnění na obdélník a určení obsahu jako poloviny tohoto obdélníku.



Opět se našel jeden žák, který zaměnil oba pojmy a místo obsahu určoval obvod. Ten určil součtem délek stran základních čtverců tvořící obě odvěsny (svislou a vodorovnou stranu). Pro určení délky přepony si určil jinou základní jednotku.

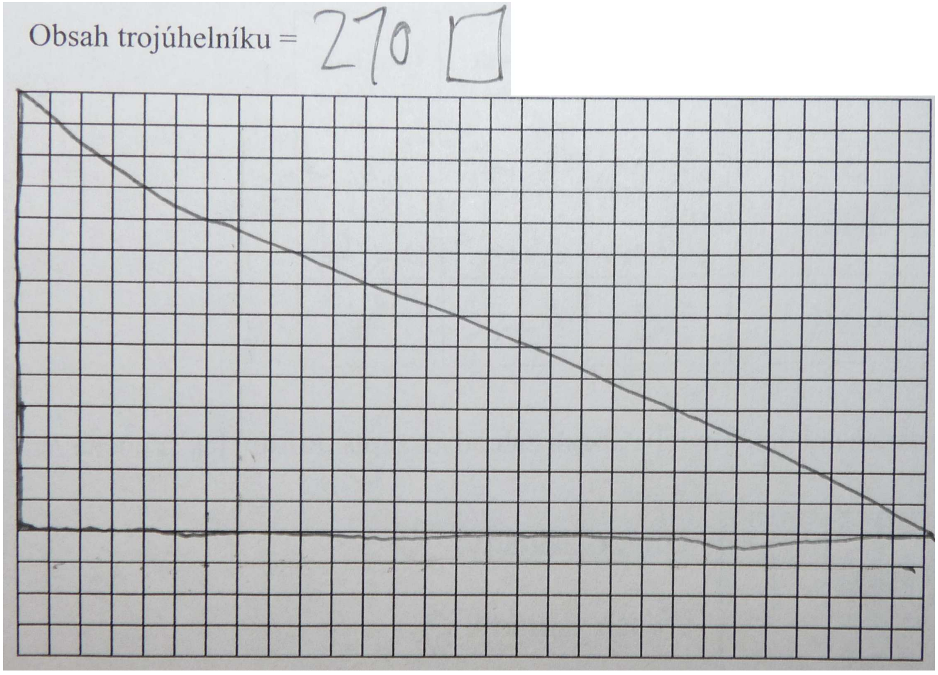


V této úloze se potvrdil můj předpoklad ohledně pracovního postupu. Žáci převážně volili jako postup sčítání základních čtverců a doplňování částí těchto čtverců do základního čtverce. Pokud byli žáci schopni vyjádřit obsah číselně, byli toho schopni u obou zadaných trojúhelníků. Nepotvrdil se můj předpoklad, že by jim jeden či druhý činily větší problémy. Jeden žák dokonce zvolil jako postup dokreslení do čtyřúhelníku a určení obsahu jako poloviny tohoto čtyřúhelníku.

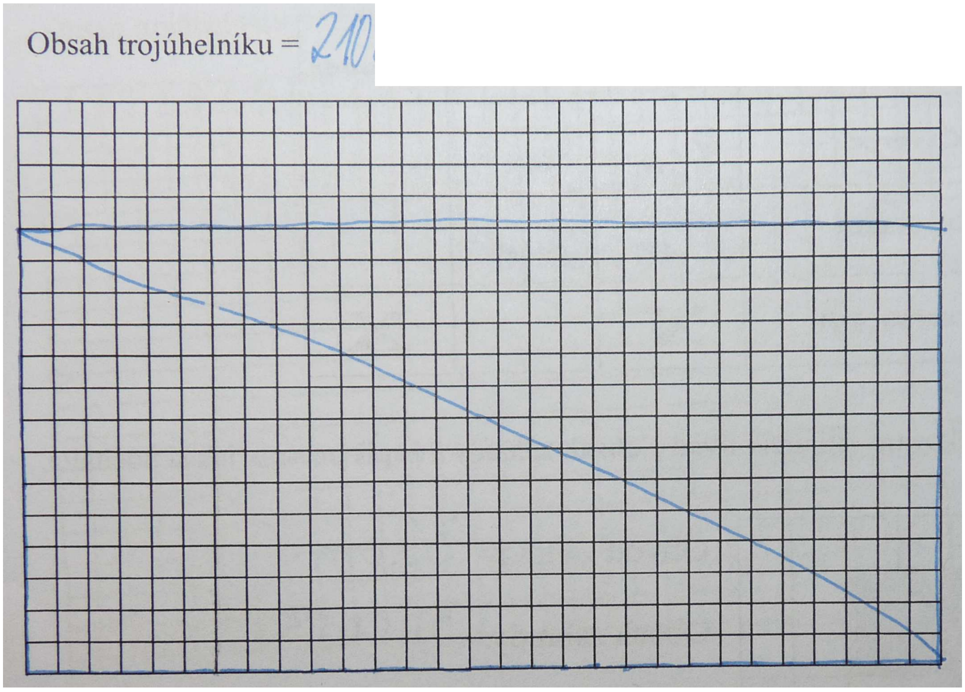
V. Výsledky z úlohy 5

Většina žáků řešila tuto úlohu za pomoci nákresu. Někteří si podle předpokladu dokreslili jednu řadu mříže, aby si do ní mohli zakreslit celý trojúhelník. Tento postup přesto nevedl vždy k určení správného číselného výsledku.

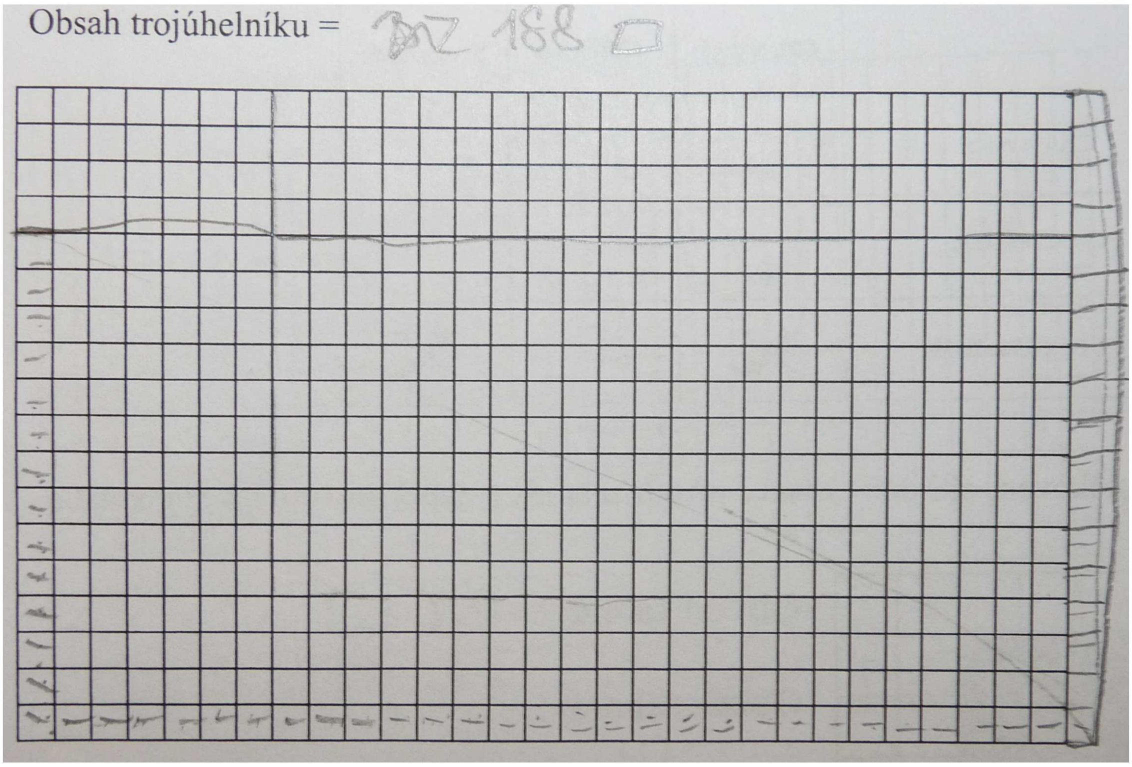
Sedm žáků tuto úlohu neřešilo vůbec. Pouze tři žáci došli ke správnému číselnému výsledku. Jeden z těchto žáků si nezaznamenal žádný pracovní postup. Další si pouze zakreslil trojúhelník do mříže. Neměl však potřebu si dokreslit mříž a trojúhelník zakreslil menší. Přesto vyjádřil číselný výsledek správně.

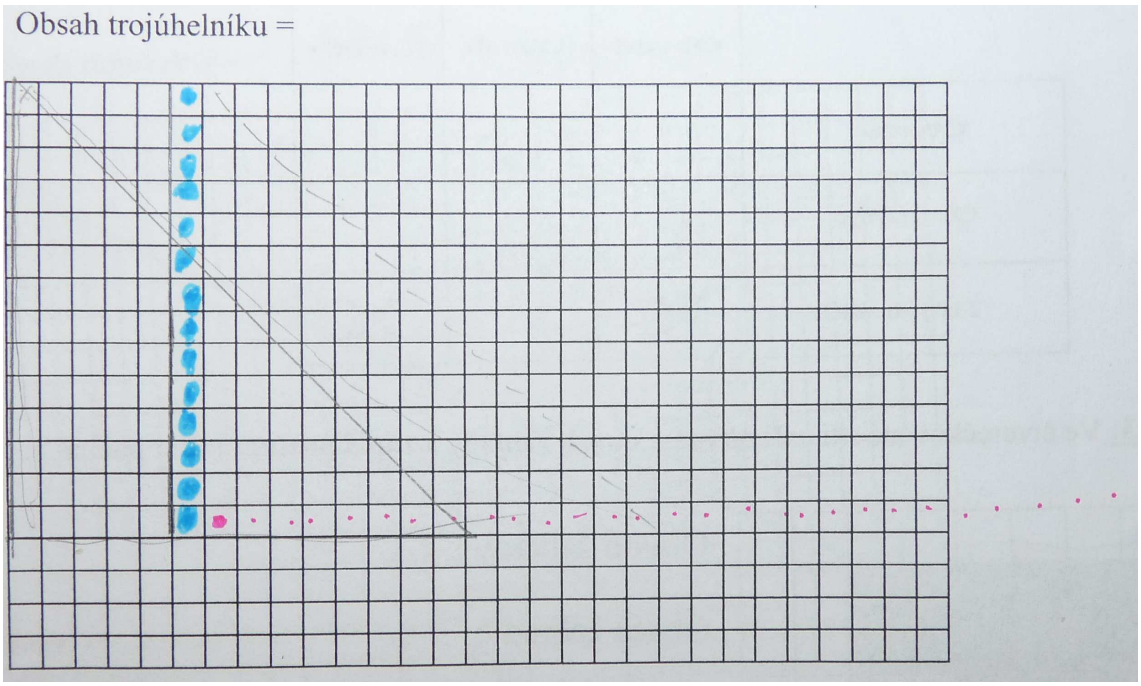


Poslední z trojice žáků si také zakreslil trojúhelník s vodorovnou stranou o jednu délku menší. Jeho pracovní postup spočíval v dokreslení na čtyřúhelník a určení číselného výsledku.



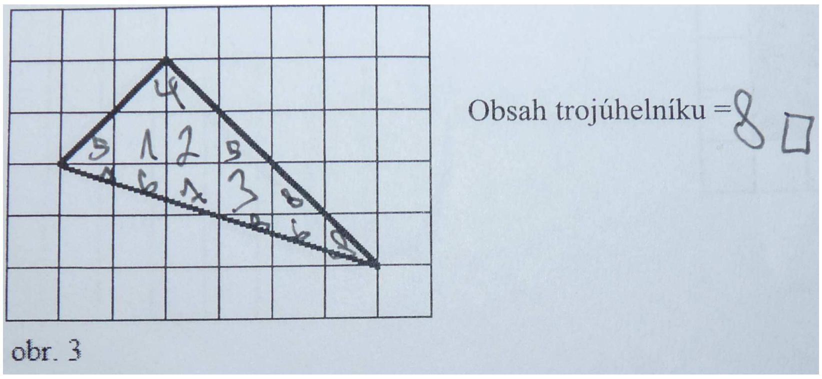
Zbývajících šest žáků použilo při řešení úlohy pracovní postup, který jsem předpokládal, tj. dokreslení jednoho sloupce mříže a načrtnutí pravoúhlého trojúhelníku do ní. V některých případech se objevily chybné číselné výsledky, v jiných pouze zakreslení a náznak řešitelského postupu bez číselného výsledku.

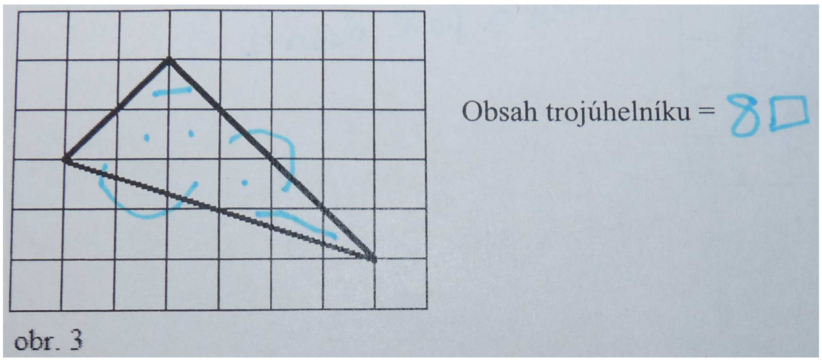




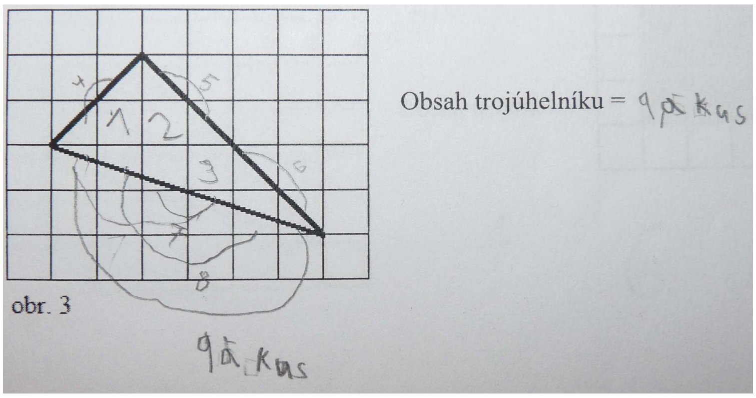
VI. Výsledky z úlohy 6

Většina žáků řešila tuto úlohu sčítáním základních čtverců a doplňování částí těchto čtverců do základního čtverce. Čtyři žáci tuto úlohu neřešili vůbec, neobjevil se u nich žádný postup ani číselný výsledek. Zbylých dvanáct žáků se pokusilo úlohu vyřešit. Pouze tři žáci uvedli správný číselný výsledek. Všichni tito žáci řešili sčítáním základních čtverců a doplňování částí těchto čtverců do základního čtverce.

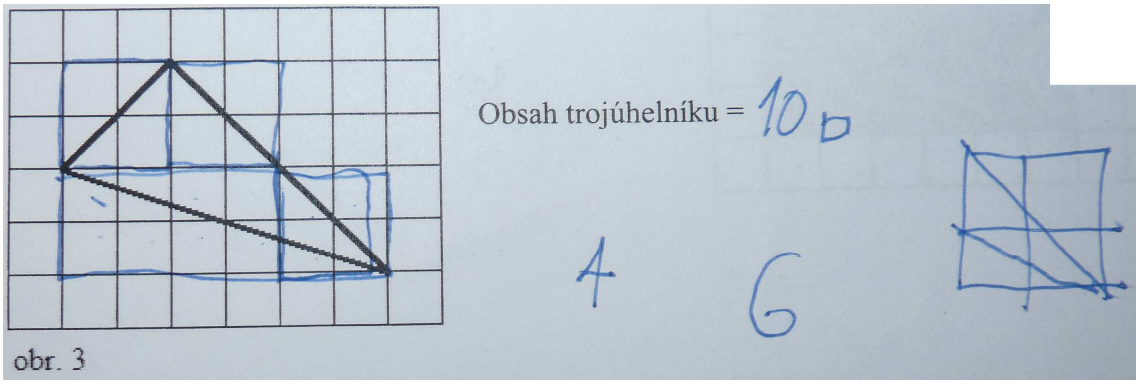




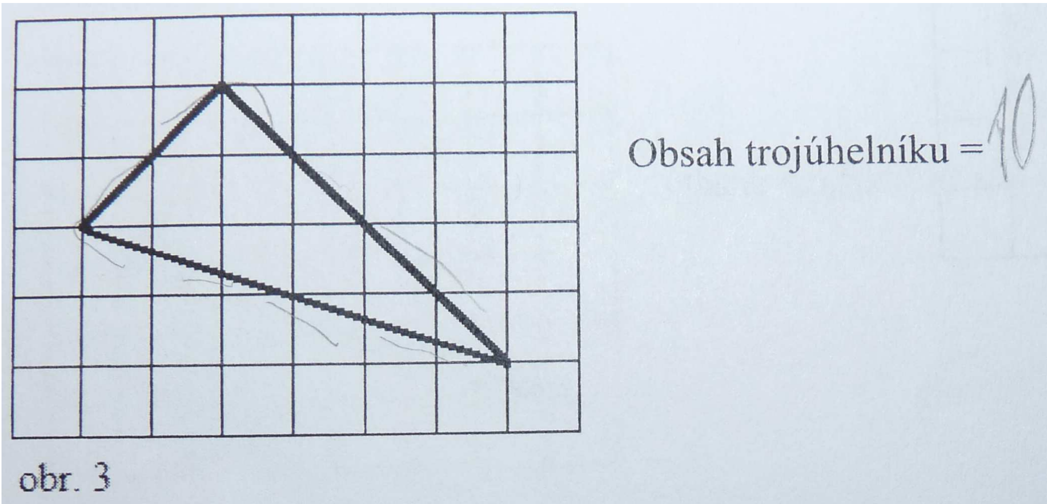
Devět žáků určilo chybný číselný výsledek. K určení výsledku volili převážně stejný postup jako žáci se správným číselným výsledkem. Chybný číselný výsledek vznikal nejčastěji skládáním částí základních čtverců, které společně netvořili jednotku obsahu.



U jednoho žáka se jako pracovní postup objevilo doplnění do čtyřúhelníků. Tento žák měl dobrý pracovní postup, bohužel zapomněl odebrat jednu část doplněného čtyřúhelníku o obsahu dvou jednotek, čemuž odpovídá jeho číselný výsledek.



Jeden žák s chybným číselným výsledkem zaměnil pojmy obvod a obsah. Byl to stejný žák, který oba pojmy zaměnil i v úlohách 3 a 4. Jeho pracovní postup byl stejný jako v úloze 4, obvod určil součtem délek stran základních čtverců tvořících obě odvěsny svírající pravý úhel. Pro určení délky přepony trojúhelníku si určil jinou základní jednotku.



V této úloze se potvrdil můj předpoklad, že žáci využili k určení číselného výsledku stejný pracovní postup, tj. sčítání základních čtverců a doplňování částí těchto čtverců do základního čtverce. U většiny žáků tento postup nevedl k určení správného číselného výsledku.

3.1.8 Protokol experimentu 2016/2017_08_MA

Škola: FZŠ Táborská, Táborská 45, Praha 4

Třída: 7. B

Počet žáků: 16 (6 chlapců, 10 dívek)

Datum výuky: 06. 10. 2016

Délka výuky: 30 minut

Jméno vyučujícího: Luděk Kovář

Téma hodiny:

Cíle hodiny: Aplikuje získané znalosti a dovednosti

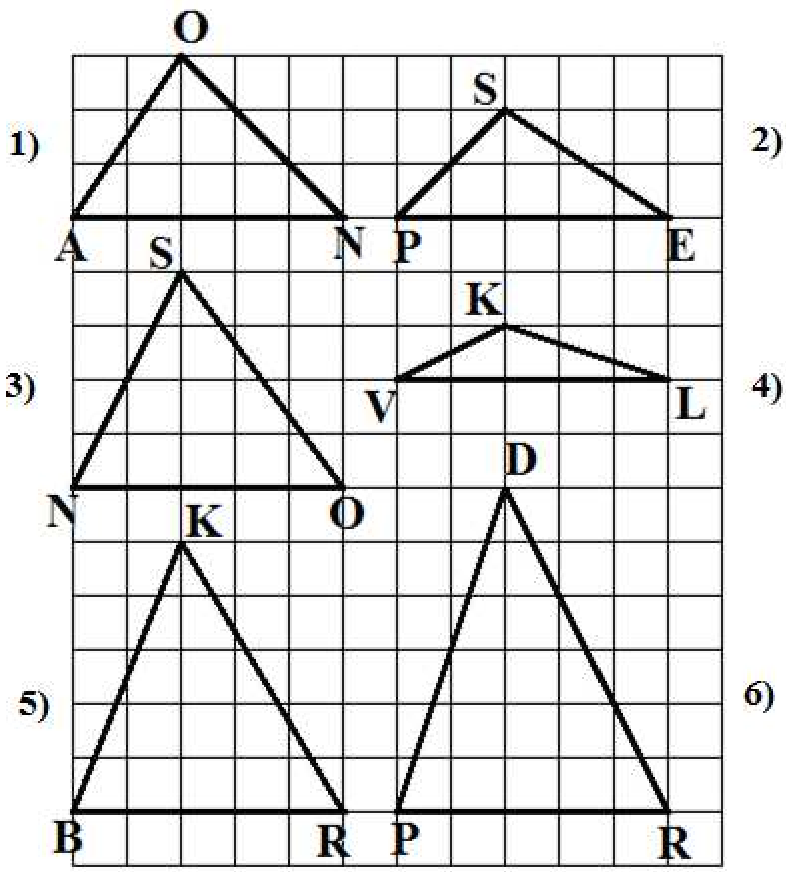
Pomůcky: Diagnostická úloha

Vlastní výukový experiment skončil ve školním roce 2012/2013. Žáci byli v dalších ročnících vedeni dle školního vzdělávacího programu a získávali i další zkušenosti s problematikou obsahu rovinných útvarů. Po čtyřech letech, tedy ve školním roce 2016/2017, jsem se rozhodl ověřit trvalost jejich poznatků týkajících se obsahu trojúhelníku. V průběhu výuky se dosud nikdy nesetkali s formální podobou vzorce pro obsah trojúhelníku.

a) Příprava na hodinu:

Úloha byla zadána samostatně na začátku vyučovací hodiny. Žáci nebyli časově omezeni. V úloze nebyly očíslovány jednotlivé trojúhelníky, toto číslování je uvedeno pouze v této práci pro lepší orientaci.

Na čtverečkovaném papíru je zadáno šest trojúhelníků, vypočítej obsah každého z nich.



<u>Volba úlohy</u>

Cílem této série úloh bylo ověřit, zda žáci neformálně použijí pro výpočet obsahu trojúhelníku vzorec, týkající se délky strany a příslušné výšky. Všechny zadané trojúhelníky mají stejně dlouhou vodorovnou stranu a příslušná výška k ní se zvětšuje vždy o jednotku. Žáci zde mohou objevit pravidelnost, kdy se obsah trojúhelníků vždy zvětšuje o 2,5 čtverečku. Trojúhelník s nejmenším obsahem není umístěn vlevo nahoře, ale ve druhé řadě vpravo.

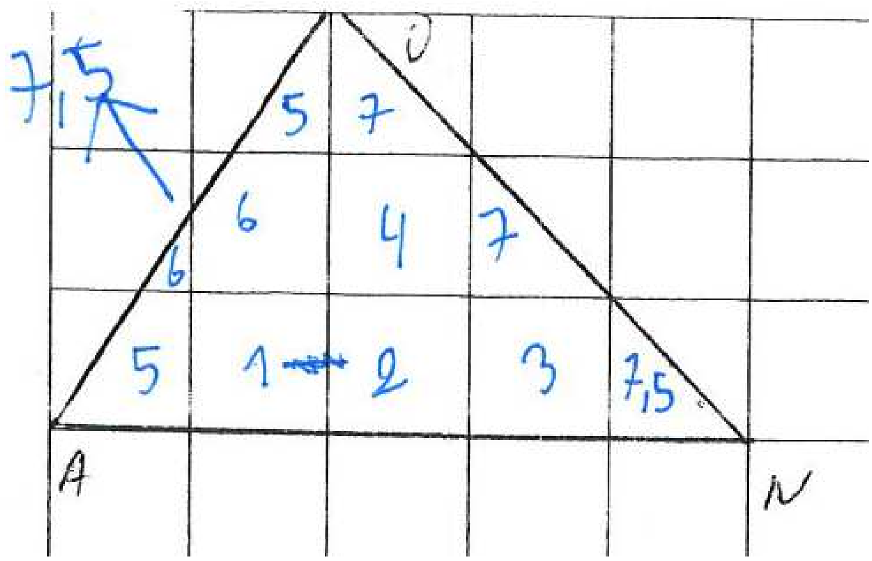
Předpokládám, že se objeví více různých strategií při řešení této úlohy. Někteří žáci určí obsah trojúhelníků skládáním částí základních čtverců. Jiní vypočítají obsah doplněním na čtyřúhelník, u kterého určí obsah a odečtou od něj obsahy pravoúhlých trojúhelníků po stranách. Doufám, že se najde pár žáků, kteří vypočítají obsah jako polovinu součinu strany a příslušné výšky k ní.

b) Výsledky diagnostického testu:

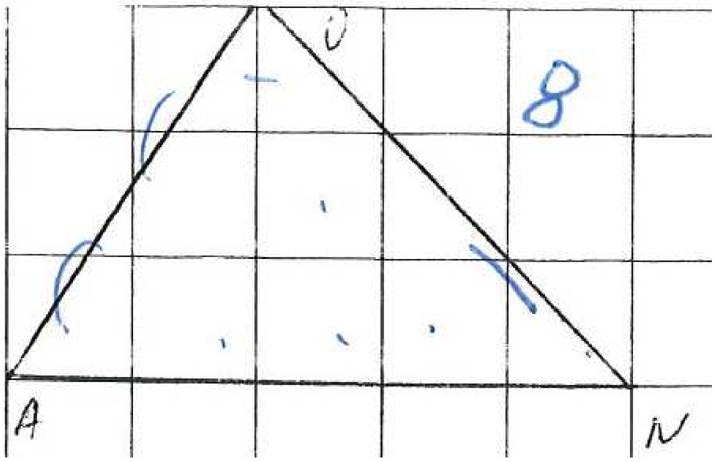
Tuto diagnostickou sérii úloh jsem se rozhodl vyhodnocovat po jednotlivých dílčích úlohách, protože je mi jasné, že z tak malého vzorku žákovských prací nemohu získat relevantní statistická data. V následujícím textu uvádím pracovní postupy některých žáků, ilustruji je kopií originálního řešení. Uvádím také chybná řešení a vlastní komentáře s jejich možným odůvodněním.

I. Výsledky dílčí úlohy 1

Obsah zadaného trojúhelníku byl 7,5 jednotek obsahu. Správný číselný výsledek určilo sedm žáků. Nejčastěji zvoleným pracovním postupem bylo sčítání základních čtverců a doplňování částí těchto čtverců do základního čtverce. Jeden z těchto žáků použil jako pracovní postup doplnění na čtyřúhelník, určení jeho obsahu a odčítání obsahů trojúhelníků po stranách.



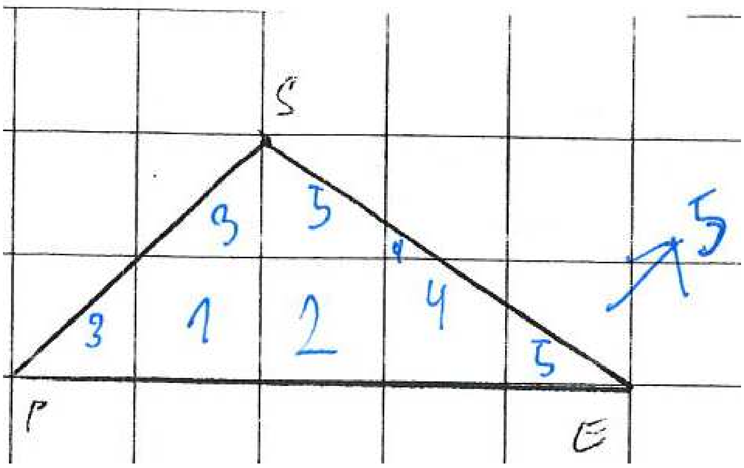
Osm žáků určilo chybný číselný výsledek nebo neuvedli žádný. K řešení opět volili jako pracovní postup sčítání základních čtverců a doplňování částí těchto čtverců do základního čtverce. Výsledky, které se objevily, byly s minimální odchylkou. Předpokládám, že žáci chybně skládali jednotlivé části základních čtverců k sobě.



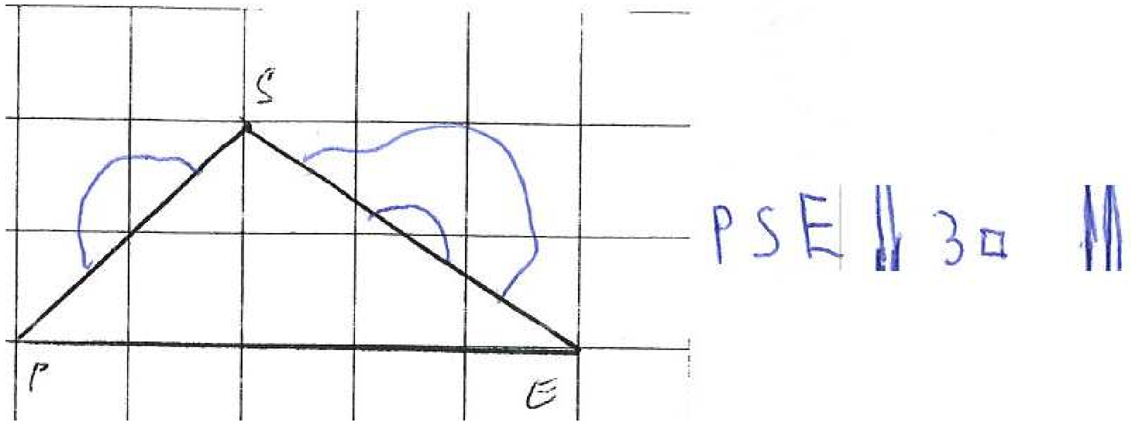
Tuto úlohu neřešil pouze jeden žák. U žádného žáka nedošlo k záměně pojmů obvod a obsah.

II. Výsledky dílčí úlohy 2

Obsah zadaného trojúhelníku byl 5 jednotek obsahu. Správný číselný výsledek určilo dvanáct žáků. Tuto úlohu se žákům povedlo správně vyřešit nejčastěji. K určení správného výsledku zvolili stejný pracovní postup jako u předešlé úlohy. Devět žáků použilo úspěšně metodu doplňování základních čtverců. Jeden žák použil opět postup doplnění na čtyřúhelník. Dva žáci si nezaznamenali žádný pracovní postup.



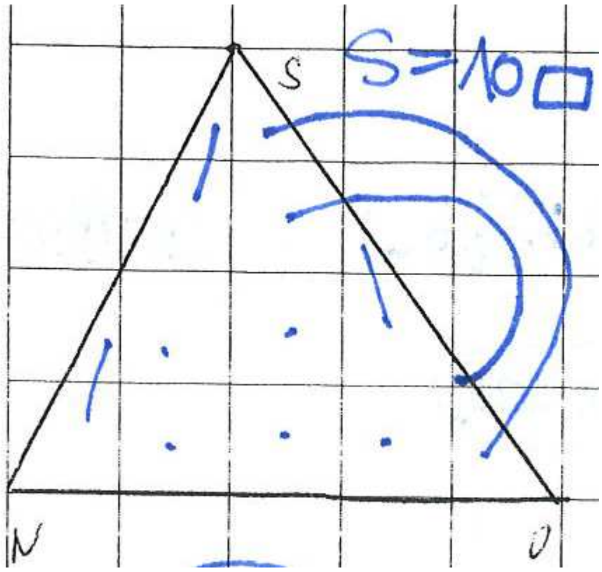
Pouze jeden žák určil chybný číselný výsledek. Tento žák správně doplnil části čtverců do základního čtverce. Toto úsilí pro něj bylo však tak velké, že zapomněl k výsledku přičíst ještě dva celé základní čtverce.



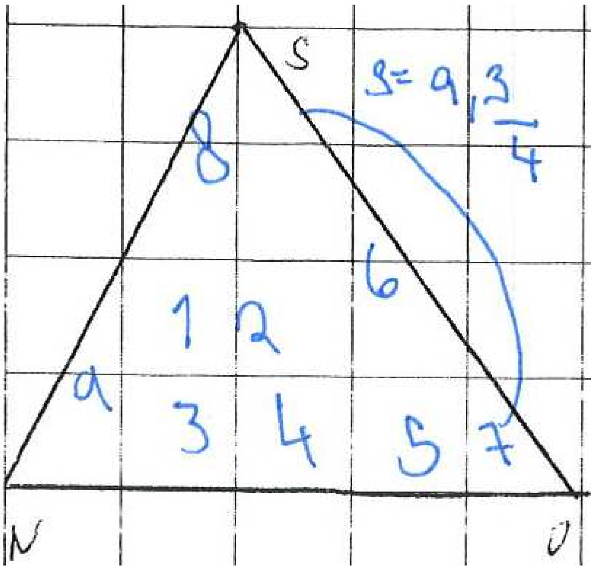
Tři žáci tuto úlohu neřešili vůbec. U žádného žáka nedošlo k záměně pojmů obvod a obsah.

III. Výsledky dílčí úlohy 3

Obsah zadaného trojúhelníku byl 10 jednotek obsahu. Správný číselný výsledek určilo devět žáků. Opět bylo nejčastějším pracovním postupem sčítání základních čtverců a doplňování částí těchto čtverců do základního čtverce. Tento postup zvolilo sedm žáků. Jeden žák se správným číselným výsledkem opět zvolil pracovní postup doplnění na čtyřúhelník, určení jeho obsahu a odčítání obsahů trojúhelníků po stranách. Další žák neuvedl žádný pracovní postup.



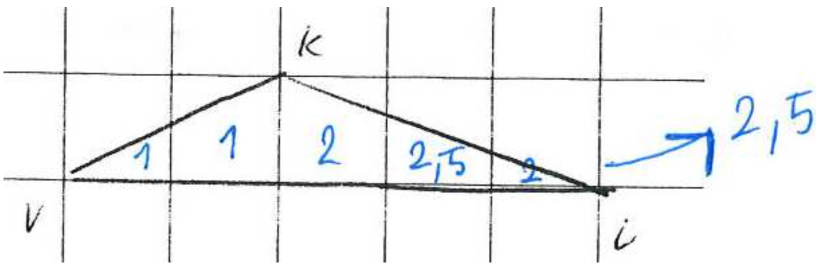
Čtyři žáci určili chybný číselný výsledek. Jeden žák použil jako pracovní postup sčítání základních čtverců a doplňování částí těchto čtverců do základního čtverce, ale nedošel k žádnému číselnému výsledku. Předpokládám, že k chybným výsledkům došlo tak, že žáci chybně skládali jednotlivé části základních čtverců. Na níže uvedené ukázce vidíme, že žák zapomněl spojit dvě části základního čtverce k sobě (nad čtvercem, žákem označeným čísly 2 a 7). Počítal tedy pouze větší z těchto částí a do výsledku ji zaznamenal jako ¾.



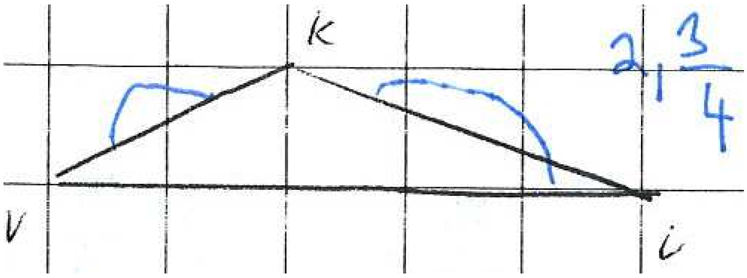
Tuto úlohu neřešili tři žáci. U žádného žáka nedošlo k záměně pojmů obvod a obsah.

IV. Výsledky dílčí úlohy 4

Obsah zadaného trojúhelníku byl 2,5 jednotek obsahu. Úspěšnost této úlohy byla taky velmi vysoká, správný číselný výsledek uvedlo deset žáků. Jako u předešlých úloh byl nejčastěji volený pracovní postup sčítání základních čtverců a doplňování částí těchto čtverců do základního čtverce. U této úlohy volili dva žáci doplnění na čtyřúhelník a od jeho obsahu odčítání trojúhelníků po stranách. Dva žáci neuvedli žádný pracovní postup.



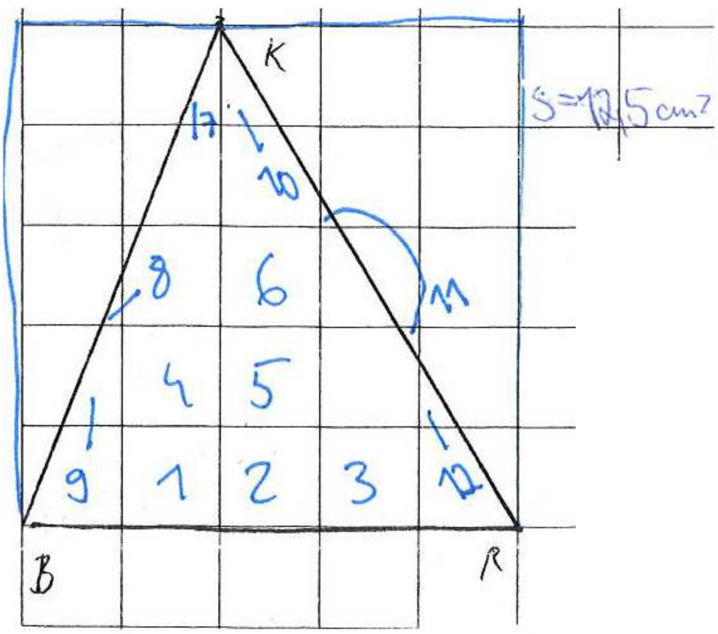
Dva žáci zvolili také jako pracovní postup sčítání základních čtverců a doplňování částí těchto čtverců do základního čtverce, u nich však tento postup nevedl k určení správného číselného výsledku.



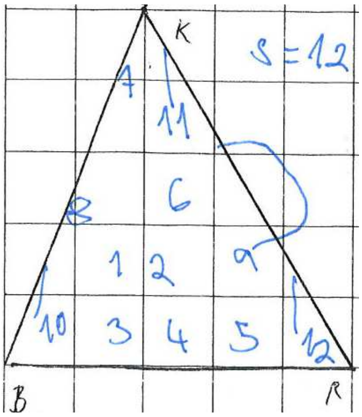
Tuto úlohu neřešili čtyři žáci. U žádného žáka nedošlo k záměně pojmů obvod a obsah.

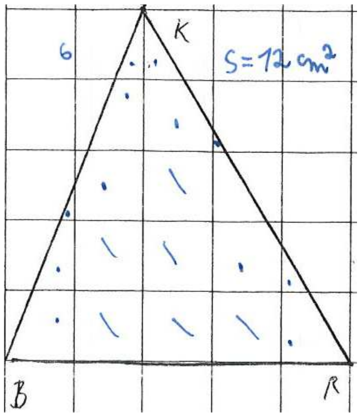
V. Výsledky dílčí úlohy 5

Obsah zadaného trojúhelníku byl 12,5 jednotek obsahu. Správný číselný výsledek určilo šest žáků, což bylo nejméně úspěšných řešitelů ze všech úloh. Nejčastěji volený postup byl však opět stejný. Opět se našel jeden žák, který použil postup doplnění na čtyřúhelník a jeden žák neuvedl žádný pracovní postup. Na uvedené ukázce žák určil správný číselný výsledek, ale v použitém pracovním postupu spojil nesprávné části k sobě. Došlo k záměně u částí, žákem označených čísly 10 a 12. Tato záměna částí však neovlivnila číselný výsledek.



Tři žáci určili chybný číselný výsledek. Všichni tito žáci určili výsledek stejný, tj. 12 jednotek obsahu. Chybný výsledek vznikl ve dvou případech nezapočítáním stejné jedné poloviny základního čtverce. Na obou ukázkách chybí označení této poloviny.

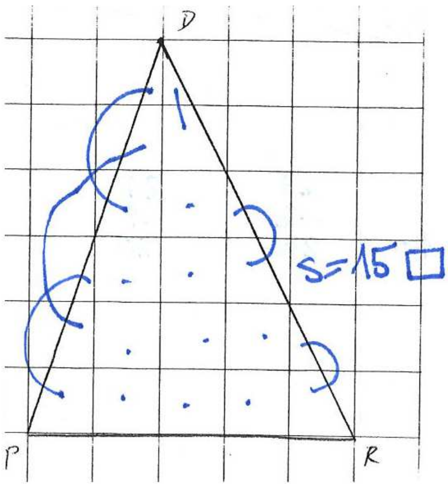




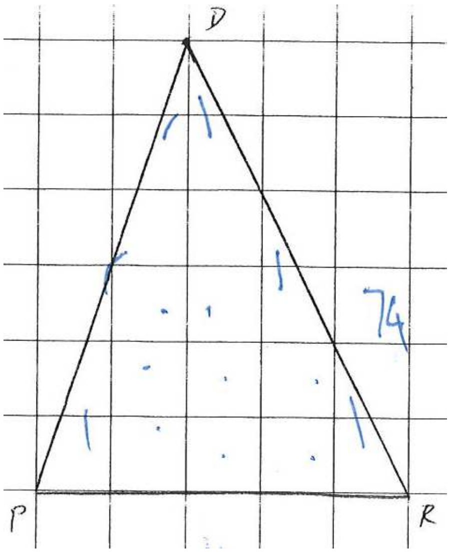
Tuto úlohu neřešilo sedm žáků, což je největší počet ze všech úloh. U žádného žáka nedošlo k záměně pojmů obvod a obsah.

VI. Výsledky dílčí úlohy 6

Obsah zadaného trojúhelníku byl 15 jednotek obsahu. Správný číselný výsledek určilo osm žáků a k jeho určení zvolili nejčastěji jako pracovní postup sčítání základních čtverců a doplňování částí těchto čtverců do základního čtverce. Jeden žák zvolil pro něj tradiční postup doplnění na čtyřúhelník a odečtení obsahů trojúhelníků po stranách od obsahu tohoto čtyřúhelníku.



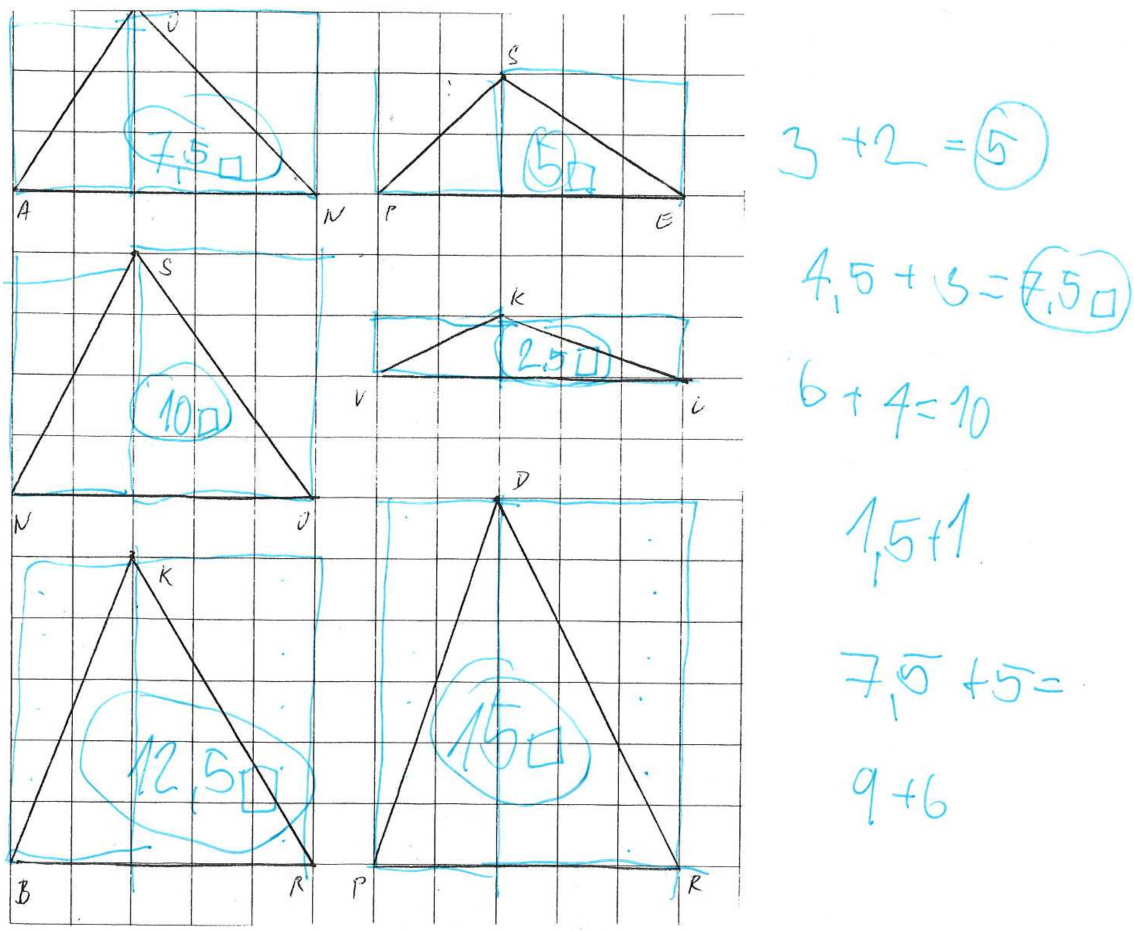
Tři žáci určili chybný číselný výsledek. Dva z nich uvedli výsledek 14 jednotek obsahu. U jednoho nebyl zaznamenán žádný pracovní postup, druhý jednoznačně zapomněl započítat jeden základní čtverec.



Tuto úlohu neřešilo pět žáků. U žádného žáka nedošlo k záměně pojmů obvod a obsah.

c) Shrnutí diagnostického testu:

Tato série úloh neprokázala, že by žáci neformálně využívali pro výpočet obsahu trojúhelníku vzorec, týkající se délky strany a příslušné výšky. Naopak prokázala, že většina žáků používá k určení číselného obsahu trojúhelníku stejný pracovní postup, se kterým se seznámila ve 3. ročníku. Objevily se také úlohy, u kterých byl uvedený pouze číselný výsledek bez zaznamenaného pracovního postupu. Je tedy otázkou a pouhou domněnkou, jestli tito žáci neformálně použili pro určení obsahu trojúhelníku vzorec, s jehož žákovskou podobou se seznámili ve 3. ročníku. Minimálně se objevilo jako pracovní postup doplnění na čtyřúhelník, určení jeho obsahu a odečtení obsahů trojúhelníků po stranách. V tomto případě bychom mohli reálněji uvažovat o neformálním užití vzorce, který žák využil k určení obsahu trojúhelníků po stranách. Na ukázce je zřejmé, že žák vždy určil obsahy trojúhelníků po stranách doplněného čtyřúhelníku, které poté sečetl. Obsahy trojúhelníků určil jako poloviny obsahu čtyřúhelníků. Zda žák objevil i posloupnost mezi obsahy vypsanými po straně pracovního listu, bude opět pouhou domněnkou.



3.2 Shrnutí experimentu

Celý experiment byl sestaven v souladu s metodou uvolňování parametru a jejími fázemi. *Fázi experimentu* bychom našli v celém experimentu nejčastěji. Bylo pro mě nejdůležitější, aby žáci získali zkušenosti v dostatečném množství izolovaných modelů. V protokolu experimentu 2012/2013_04_MA se vyskytly první úlohy dokládající tuto fázi. Protokoly 2012/2013_05_MA a 2012/2013_06_MA byly zaměřeny výhradně na tuto fázi, která byla spojena s další fází, kterou označuje Jirotková (1999) jako *fázi evidence experimentů*. V těchto dvou zmíněných protokolech se objevila i *fáze odhalení zákonitostí tabulky*, která sama vyplynula z práce žáků. Poslední fáze, ke které zpravidla dochází žáci na prvním stupni je *fáze verbalizace*. Ta se objevuje v protokolu experimentu 2012/2013_06_MA při argumentaci žáka u tabule (viz 2012/2013_06_MA 43:22 – 44:32).

3.3 Použité metody

Z výše uvedeného vyplývá, že byly v experimentu použity tyto dvě empirické metody.

Metoda pozorování

„*Pozorování je „královskou“ metodou přírodních a sociálních věd a také v pedagogice. I v běžném životě neustále pozorujeme, co se kolem nás vyskytuje a odehrává. Ovšem ve vědeckém výzkumu nejde o spontánní pozorování, nýbrž o takové, které musí vyhovovat určitým kritériím.*“ (Průcha 2009, s. 196)

Pozorování má jasná kritéria, kterými jsem se řídil i při experimentu. Pozorování musí být *plánované*, tudíž musí být jasně vymezené, co v experimentu pozorujeme. Pozorování musí být také *systematické*, tedy zaměřené na určité jevy po stanovené době. Já jsem v experimentu pozoroval kognitivní a sociální jevy, které se objevovaly v průběhu všech experimentů. V neposlední řadě musí být pozorování také *objektivní*. Výzkumník nesmí zasahovat do přirozeného průběhu činností žáků. Toto poslední kritérium jsem se snažil dodržovat konstruktivistickým stylem výuky.

Metoda experimentu

„*Experiment je způsob ověřování vědeckých hypotéz o kauzálních vztazích, tedy o tom, jaké výsledky vyvolává nějaká příčina.*“ (Průcha 2009, s. 200)

Při experimentu je do procesu zavedena určitá změna, u které výzkumník sleduje její projevení jakožto důsledek. V tomto experimentu je procesem běžná výuka tematického celku obvod a obsah na základní škole, zavedenou změnou je metoda uvolňování parametru, kterou byl tento tematický celek vyučován a zajímal nás důsledek, tedy pochopení tematického celku a aplikace získaných znalostí žáky.

4 Závěr

V této práci jsem se zabýval poznávacím procesem žáků 3. ročníku při zavádění pojmů obvod a obsah především metodou uvolňování parametru aplikovanou na obsah trojúhelníku ve čtvercové síti. V úvodu diplomové práce jsem si stanovil tři cíle.

Prvním cílem bylo definovat kritická místa ve výuce daného tematického celku (z pohledu učiva, učebnic, učitelů a především samotných žáků), která mohou působit negativně na porozumění tematického celku obvod a obsah mnohoúhelníků. Zjistil jsem, že z pohledu učiva a učebnic je v učebnicové řadě Nakladatelství Alter a nakladatelství Prodos problémem nedostatečné využití propedeutických úloh k hlubší přípravě pro výuku daného tématu. Domnívám se, že k plnému využití může dojít při vhodném didaktickém přístupu učitele. V učebnicové řadě Nakladatelství Fraus je dostatek propedeutických úloh, které samy o sobě umožňují využít svého potenciálu.

Dalším cílem bylo hlouběji porozumět metodě uvolňování parametru a užívat jí jako nástroj pro hluboké porozumění jednotlivým vzorcům z rovinné geometrie. Před zpracováním teoretické i praktické části jsem se pokusil sám pro sebe odvodit úspěšně i neúspěšně obecné podoby vzorců, se kterými jsem se formálně setkal při studiu na střední škole. V práci uvádím oba pokusy, jak neúspěšné odvození Heronova vzorce, tak úspěšné odvození vzorce pro obsah pravoúhlého lichoběžníku.

Posledním cílem bylo připravit a zrealizovat dlouhodobý kvalitativní výzkum týkající se obsahu trojúhelníku z pohledu vztahu mezi stranou a příslušnou výškou (uskutečnit sérii experimentů, které dovedou běžnou třídu žáků nejen k pasivní znalosti vztahu S=z*v/2, ale které budou tomuto vztahu skutečně také rozumět a užívat jej ve smysluplných situacích běžného života). Splnění tohoto cíle tvoří nejobsáhlejší část této diplomové práce. Ukazuji zde zdlouhavost použití této metody v praxi se všemi pozitivy i negativy. Od prvního seznamování žáků s prostředím čtverečkovaného papíru bylo při všech experimentech důsledně dbáno na porozumění všem činnostem, nikdy nebylo přistoupeno k formálnímu vysvětlení jakéhokoliv pojmu. Všechny potřebné pojmy si žáci odvozovali vlastní činností a především plodnými diskuzemi po jejich ukončení. Dnes mohu konstatovat, že žádný ze sledovaných žáků nedělá chyby plynoucí z formálního uchopení pojmu, ale u žádného z nich dosud nedošlo k výraznému posunu při řešení úloh podobného typu. To bude vyžadovat zřejmě ještě dlouhodobou práci učitele matematiky. Skutečné zhodnocení úspěšnosti použité metody, tj. metody uvolňování parametru pro obsah trojúhelníku, by objektivně mohlo být zpracováno až po ukončení základního vzdělávání této třídy. Nepodařilo se mi ověřit, že by uvedený vzorec používali ve smysluplných situacích běžného života.

Výuka tematického celku obvod a obsah může být vedena různými způsoby, záleží na přesvědčení učitele. Podle toho žáci přijímají poznatky a dokážou je aplikovat v situacích z běžného života. Tato práce upevnila mě přesvědčení, že je pro žáky trvalejším poznatkem takový, který objeví sami bez rad nebo návodů učitele a že takový poznatek dokážou i po čase aplikovat na situace nejen z běžného života. Jsem tedy přesvědčen, že se budu radši učit s žáky a vést je k objevení vlastních poznatků než žáky vyučovat a předávat jim, ač v dobré víře, své vlastní poznatky.

5 Použitá literatura

Autorský kol. pracovníků Lingea s.r.o. *Slovník současné češtiny*. Brno: Lingea s.r.o., 2011, 1088 s. ISBN 978-80-87471-27-2

FILIPEC, J., DANĚK, F., MACHAČ, J., MEJSTŘÍK, V. *Slovník spisovné češtiny pro školu a veřejnost*. Praha: Academia, 2005. 648 s. ISBN 80-200-1080-7

HEJNÝ, M. *Mechanismus poznávacího procesu.* In: HEJNÝ, M., NOVOTNÁ, J., STEHLÍKOVÁ, N. *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta, 2004. 244 s. ISBN 80-7290-189-3

HEJNÝ, M. *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně.* Praha: Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta, 2014. 230 s. ISBN 978-80-7290-776-2

HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D. *Čtverečkovaný papír jako MOST mezi geometrií a aritmetikou*. Praha: Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta, 1999. 78 s. ISBN 978-80-8603-992-3

HEJNÝ, M., KUŘINA, F. *Dítě, škola a matematika*. 2. vyd. Praha: Portál, 2009. 240 s. ISBN 978-80-7367-397-0

JIROTKOVÁ, D. *Cesty ke zkvalitnění výuky geometrie*. 1. vyd. Praha: Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta, 2010. 330 s. ISBN 978-80-7290-399-3

Klíčové kompetence pro celoživotní vzdělávání – evropský referenční rámec. Brusel, 8. července 2005. SEC (2005) 957.

Kolektiv autorů. *Gramotnosti ve vzdělání*. 1. vyd. Praha: VÚP, 2010. 64 s. ISBN 978-80-87000-41-0.

KUŘINA, F. *Problémy matematického vzdělávání*. In Bečvářová, M. (eds.) *Sborník materiálů konference O škole a vzdělávání*. Praha: MATFYZPRESS, 2007. ISBN 978-80-7378-029-6.

PALA, K., VŠIANSKÝ, J. *Slovník českých synonym*. Praha: Nakladatelství Lidové noviny, 1994. 439 s. ISBN 80-7109-059-3

PAŽOURKOVÁ, E. *Historie vyučování matematice v českých zemích*. Brno, 2007. Diplomová práce. Masarykova univerzita v Brně.

PETTY, G. *Moderní vyučování*. 3. vyd. Praha: Portál, 1996. 380 s. ISBN 80-7178-978-X

PRŮCHA, J. *Pedagogická encyklopedie*. 1. vyd. Praha: Portál, 2009. 936 s. ISBN 978-80-7367-546-2. – s. 225

PRŮCHA, J. *Přehled pedagogiky: úvod do studia oboru*. 3. aktualiz. vyd. Praha: Portál, 2009. 272 s. ISBN 978-80-7367-567-7.

PRŮCHA, J., WALTEROVÁ, E., MAREŠ, J. *Pedagogický slovník*. 6. aktualiz. vyd. Praha: Portál, 2009. 395 s. ISBN 978-80-7367-647-6.

RENDL, M., VONDROVÁ, N. *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*. 1. vyd. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2013. 358 s. ISBN 978-80-7290-723-6

RENDL, M., VONDROVÁ, N. *Kritická místa v matematice u českých žáků na základě výsledků šetření TIMSS 2007* in Pedagogická orientace, roč. 24. č. 1. (2014)

SPILKOVÁ, V. a kol. *Proměny primárního vzdělávání v ČR*. Praha: Portál, 2005. 311 s.

ŠKODA, J., DOUDLÍK, P. *Psychodidaktika*. 1. vyd. Praha: GRADA, 2011. 208 s. ISBN 978-80-247-3341-8

VYGOTSKIJ, L. S. in PRŮCHA. *Psychologie myšlení a řeči*. Praha: Portál, 2004. 136 s. ISBN 80-7178-943-7

Vzdělávací program OBECNÁ ŠKOLA – pojetí obecné školy – učební osnovy obecné školy. 4. upravené vydání. Praha: Portál, 1996. 272 s.

Vzdělávací program ZÁKLADNÍ ŠKOLA. Praha: Fortuna, 1996. 280 s.

Učebnice Nakladatelství Fraus

HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ D., SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika pro 2. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2008. 978-80-7238-771-7. (metodická příručka pro učitele)

HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ D., SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika pro 2. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2008. ISBN 9788072387687, K044. (pracovní učebnice 1. díl)

HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ D., SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika pro 2. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2008. ISBN 978-80-7238-768-7. (pracovní učebnice 2. díl)

HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ D., SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika pro 2. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2008. ISBN 978-80-7238-982-7. (pracovní učebnice 3. díl)

HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ D., SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, J., MICHNOVÁ, J. *Matematika: učebnice pro 3. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2009. ISBN 978-807-2388-240. (učebnice)

HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ D., SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, J., MICHNOVÁ, J. *Matematika: učebnice pro 3. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2009. ISBN 978-80-7238-827-1. (metodická příručka pro učitele)

HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ D., SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, J., MICHNOVÁ, J. *Matematika: učebnice pro 3. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2009. ISBN 978-80-7238-825-7. (pracovní sešit 1)

HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ D., SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, J., MICHNOVÁ, J. *Matematika: pro 3. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2009. ISBN 978-807-2388-264. (pracovní sešit 2)

HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ D., BOMEROVÁ, E. *Matematika: učebnice pro 4. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2010. ISBN 978-80-7238-940-7. (učebnice)

HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ D., BOMEROVÁ, E. *Matematika: pro 4. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2010. ISBN 978-80-7238-943-8. (metodická příručka pro učitele)

HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ D., BOMEROVÁ, E. *Matematika: pro 4. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2010. ISBN 978-80-7238-941-4. (pracovní sešit 1)

HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ D., BOMEROVÁ, E. *Matematika: pro 4. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2010. ISBN 978-80-7238-942-1. (pracovní sešit 2)

HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ D., MICHNOVÁ, J., BOMEROVÁ, E. Ma*tematika: pro 5. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2011, ISBN 978-80-7238-966-7. (učebnice)

HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ D., MICHNOVÁ, J., BOMEROVÁ, E. Ma*tematika: pro 5. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2011. ISBN 978-80-7238-969-8. (metodická příručka pro učitele)

HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ D., MICHNOVÁ, J., BOMEROVÁ, E. Ma*tematika: pro 5. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2011. ISBN 978-80-7238-967-4. (pracovní sešit 1)

HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ D., MICHNOVÁ, J., BOMEROVÁ, E. Ma*tematika: pro 5. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2011. ISBN 978-80-7238-968-1. (pracovní sešit 2)

Učebnice Nakladatelství Alter

LANDOVÁ, V., STAUDKOVÁ, H., TŮMOVÁ, V. *Matematika: numerace, sčítání a odčítání do 6.* Vyd. 11. Všeň: Alter, 2010, 32 s. ISBN 978-80-7245-115-9 (sešit č. 1)

LANDOVÁ, V., STAUDKOVÁ, H., TŮMOVÁ, V. *Matematika: numerace, sčítání a odčítání do 10.* Vyd. 11. Všeň: Alter, 2011, 32 s. ISBN 978-80-7245-254-5 (sešit č. 2)

LANDOVÁ, V., STAUDKOVÁ, H., TŮMOVÁ, V. *Matematika: numerace do 20, sčítání a odčítání bez přechodu desítky.* Vyd. 11. Všeň: Alter, 2011, 32 s. ISBN 978-80-7245-222-4 (sešit č. 3)

LANDOVÁ, V., STAUDKOVÁ, H., TŮMOVÁ, V. *Matematika: sčítání a odčítání do 20 s přechodem desítky.* Vyd. 11. Všeň: Alter, 2011, 32 s. ISBN 978-80-7245-225-5 (sešit č. 4/A)

LANDOVÁ, V., STAUDKOVÁ, H., TŮMOVÁ, V. *Matematika: sčítání a odčítání do 20 s přechodem desítky.* Vyd. 2. Všeň: Alter, 2011, 32 s. ISBN 978-80-7245-207-1 (sešit č. 4/B)

LANDOVÁ, V., STAUDKOVÁ, H., TŮMOVÁ, V. *Matematika: numerace do 100, sčítání a odčítání bez přechodu desítky.* Vyd. 10. Všeň: Alter, 2011, 32 s. ISBN 978-80-7245-257-6 (sešit č. 5)

EICHLEROVÁ, M., STAUDKOVÁ, H., VLČEK, O. *Matematika: sčítání a odčítání dvojciferných čísel do 100, násobení a dělení 2, 3, 4.* Vyd. 10. Všeň: Alter, 2011, 32 s. ISBN 978-80-7245-260-6 (sešit č. 6)

EICHLEROVÁ, M., STAUDKOVÁ, H., VLČEK, O. *Matematika: příprava na násobení a dělení 5, 6, 7, 8, 9, 10.* Vyd. 9. Všeň: Alter, 2011, 32 s. ISBN 978-80-7245-224-8 (sešit č. 7)

BLAŽKOVÁ, R., MATOUŠKOVÁ, K., VAŇUROVÁ, M., STAUDKOVÁ, H. *Matematika pro 3. ročník základních škol*. 2. vyd. Všeň: Alter, 2009, 159 s. ISBN 978-80-7245-206-4

BLAŽKOVÁ, R., MATOUŠKOVÁ, K., VAŇUROVÁ, M. *Matematika pro 4. ročník základních škol*. 1. vyd. Všeň: Alter, 2009, 157 s. ISBN 978-80-7245-145-6

JUSTOVÁ, J. *Matematika pro 5. ročník základních škol*. 1. vyd. Všeň: Alter, 2008, 158 s. ISBN 978-80-7245-154-8

Učebnice nakladatelství Prodos

MIKULENKOVÁ, H., MOLNÁR, J. *Matematika a její aplikace: pro 1. ročník.* Olomouc: Prodos, 2006, 3 sv. Modrá řada (Prodos). ISBN 80-7230-158-6.

MIKULENKOVÁ, H., MOLNÁR, J. *Matematika a její aplikace: 2. ročník*. Olomouc: Prodos, 2007, 3 sv. Modrá řada (Prodos). ISBN 978-80-7230-181-2. (3 pracovní sešity)

MIKULENKOVÁ, H., MOLNÁR, J. *Matematika a její aplikace: 3. ročník*. Olomouc: Prodos, 2007, 3 sv. Modrá řada (Prodos). ISBN 978-80-7230-184-3. (3 pracovní sešity)

MIKULENKOVÁ, H., MOLNÁR, J. *Matematika a její aplikace pro 4. ročník*. 2. vyd., aktualiz. dle RVP ZV. Olomouc: Prodos, [tisk 2008], 3 sv. Modrá řada (Prodos). ISBN 978-80-7230-203-1. (3 pracovní sešity)

MIKULENKOVÁ, H., MOLNÁR, J. *Matematika a její aplikace: 5. ročník*. Olomouc: Prodos, 2008, 3 sv. Modrá řada (Prodos). ISBN 978-80-7230-208-6. (3 pracovní sešity)

Internetové zdroje

http://clanky.rvp.cz/clanek/c/Z/14083/studie-k-problematice-matematicke-gramotnosti-v-zakladnim-vzdelavani-1.-cast.html/ (citováno dne 26. 2. 2016)

http://www.msmt.cz/vzdelavani/zakladni-vzdelavani/upraveny-ramcovy-vzdelavaci-program-pro-zakladni-vzdelavani (citováno dne 27. 2. 2016)

http://www.msmt.cz/ministerstvo/novinar/vysledky-mezinarodnich-setreni-pirls-a-timss-2011 (citováno dne 29. 2. 2016)

https://journals.muni.cz/pedor/article/view/601 (citováno dne 2. 3. 2016)

http://citaty.net/autori/charles-farrar-browne/?q=742 (citováno dne 4. 4. 2016)

6 Seznam příloh

Příloha 1 – Matematika a její aplikace (RVP ZV) oblast geometrie

Příloha 2 – Tab. 1 z publikace Hejný, Kuřina (2009)

Příloha 3 – Tab. 2 z publikace Hejný, Kuřina (2009)

Příloha 4 – Úloha z publikace Hejný, Kuřina (2009)

Příloha 5 – Schéma mechanického učení a učení s porozuměním z publikace Petty (1996)

Příloha 6 – Diagram vyučovacích metod podle podílu řízení žákem a učitelem z publikace Petty (1996)

Příloha 7 – Pracovní list k přípravě 2012/2013_05_MA

Příloha 8 – Pracovní list k přípravě 2012/2013_05_MA

Příloha 9 – Pracovní list k přípravě 2012/2013_05_MA

Příloha 10 – Pracovní list k přípravě 2012/2013_05_MA

Příloha 11 – Pracovní list k přípravě 2012/2013_05_MA

Příloha 12 – Pracovní list k přípravě 2012/2013_05_MA

7 Přílohy

Příloha 1 – Matematika a její aplikace (RVP ZV)

Výtah vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace z RVP ZV pro 1. stupeň – oblast Geometrie

Vzdělávací obsah vzdělávacího oboru

1. stupeň

GEOMETRIE V ROVINĚ A V PROSTORU

Očekávané výstupy – 1. období

žák

- **M-3-3-01*rozezná, pojmenuje, vymodeluje a popíše základní rovinné útvary a jednoduchá tělesa; nachází v realitě jejich reprezentaci***
- **M-3-3-02*porovnává velikost útvarů, měří a odhaduje délku úsečky***
- **M-3-3-03*rozezná a modeluje jednoduché souměrné útvary v rovině***

Očekávané výstupy – 2. období

žák

- **M-5-3-01*narýsuje a znázorní základní rovinné útvary (čtverec, obdélník, trojúhelník a kružnici); užívá jednoduché konstrukce***
- **M-5-3-02*sčítá a odčítá graficky úsečky; určí délku lomené čáry, obvod mnohoúhelníku sečtením délek jeho stran***
- **M-5-3-03 *sestrojí rovnoběžky a kolmice***
- **M-5-3-04*určí obsah obrazce pomocí čtvercové sítě a užívá základní jednotky obsahu***
- **M-5-3-05*rozpozná a znázorní ve čtvercové síti jednoduché osově souměrné útvary a určí osu souměrnosti útvaru překládáním papíru***

Učivo

- **základní útvary v rovině –** lomená čára, přímka, polopřímka, úsečka, čtverec, kružnice, obdélník, trojúhelník, kruh, čtyřúhelník, mnohoúhelník
- **základní útvary v prostoru** – kvádr, krychle, jehlan, koule, kužel, válec
- délka úsečky; jednotky délky a jejich převody

- obvod a obsah obrazce
- vzájemná poloha dvou přímek v rovině
- osově souměrné útvary

(http://www.msmt.cz/vzdelavani/zakladni-vzdelavani/upraveny-ramcovy-vzdelavaci-program-pro-zakladni-vzdelavani)

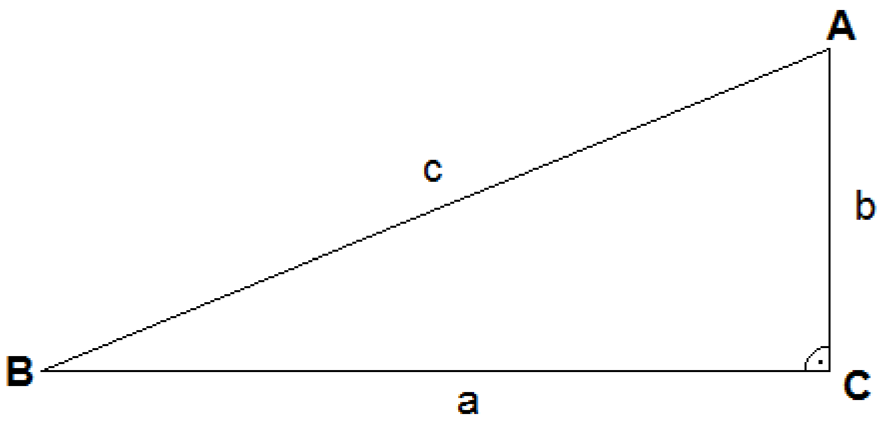
Příloha 2 – Tab. 1 z publikace Hejný, Kuřina (2009)

Tab. 1 z publikace HEJNÝ, M., KUŘINA, F. Dítě, škola a matematika. 2. vyd. Praha: Portál, 2009. 240 s. ISBN 978-80-7367-397-0 – strana 51

V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou c a odvěsnami a, b platí PYTHAGOROVA VĚTA:

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad a^2 = c^2 - b^2 \qquad b^2 = c^2 - a^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad a = \sqrt{c^2 - b^2} \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$



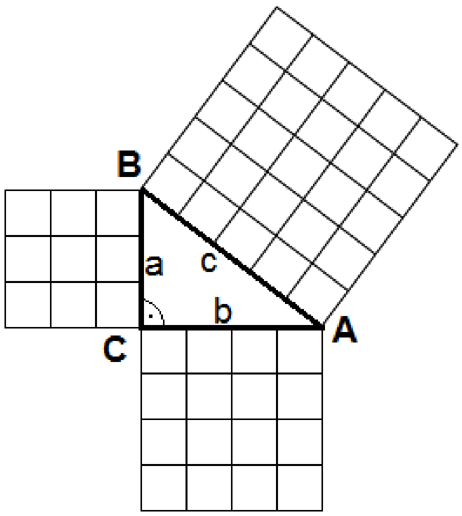
Příloha 3 – Tab. 2 z publikace Hejný, Kuřina (2009)

Tab. 2 z publikace HEJNÝ, M., KUŘINA, F. Dítě, škola a matematika. 2. vyd. Praha: Portál, 2009. 240 s. ISBN 978-80-7367-397-0 – strana 52

PYTHAGOROVA VĚTA

V libovolném pravoúhlém trojúhelníku ABC s odvěsnami délek a, b a přeponou délky c platí

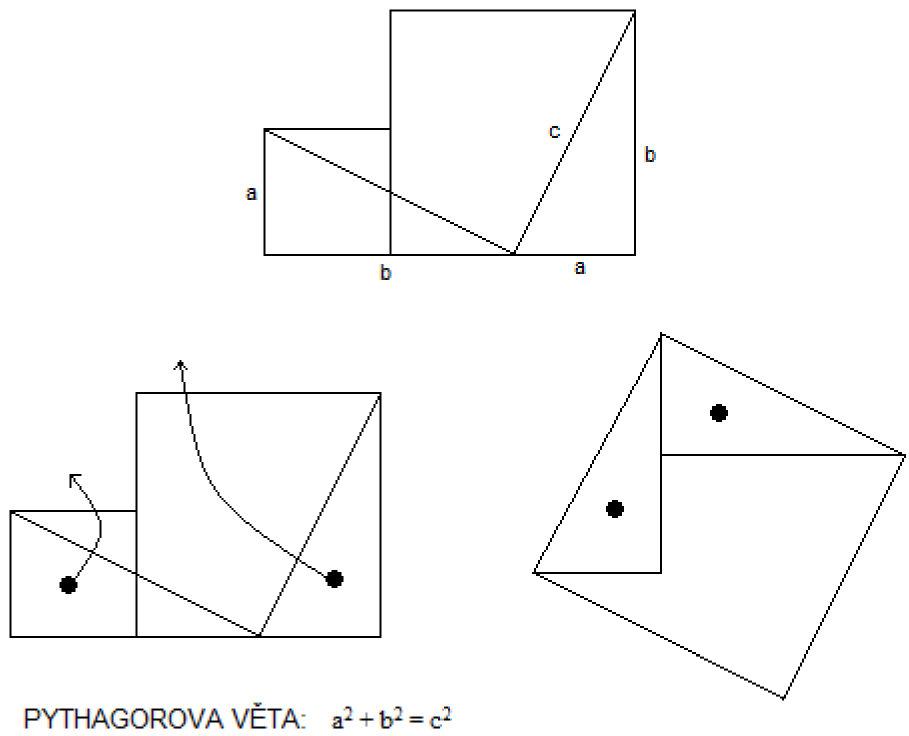
$$a^2 + b^2 = c^2$$



Příloha 4 – Úloha z publikace Hejný, Kuřina (2009)

Z publikace HEJNÝ, M., KUŘINA, F. Dítě, škola a matematika. 2. vyd. Praha: Portál, 2009. 240 s. ISBN 978-80-7367-397-0 – strana 57

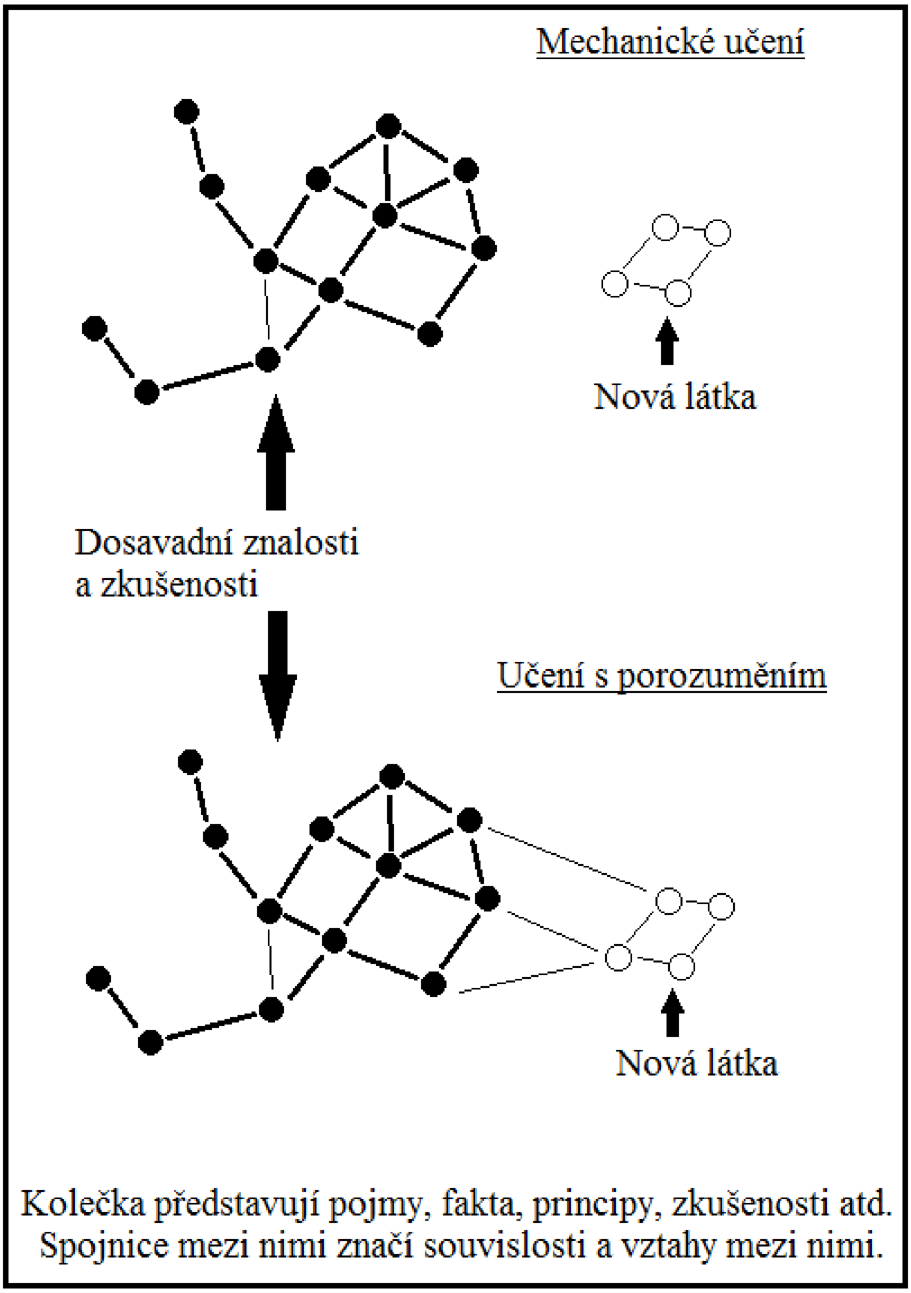
Na úloze žáci objevují vztah vyjádřený vzorcem $a^2 + b^2 = c^2$



Příloha 5 – Schéma mechanického učení a učení s porozuměním z publikace Petty (1996)

Schéma z publikace PETTY, G. *Moderní vyučování*. 3. vyd. Praha: Portál, 1996. 380 s. ISBN 80-7178-978-X – strana 232

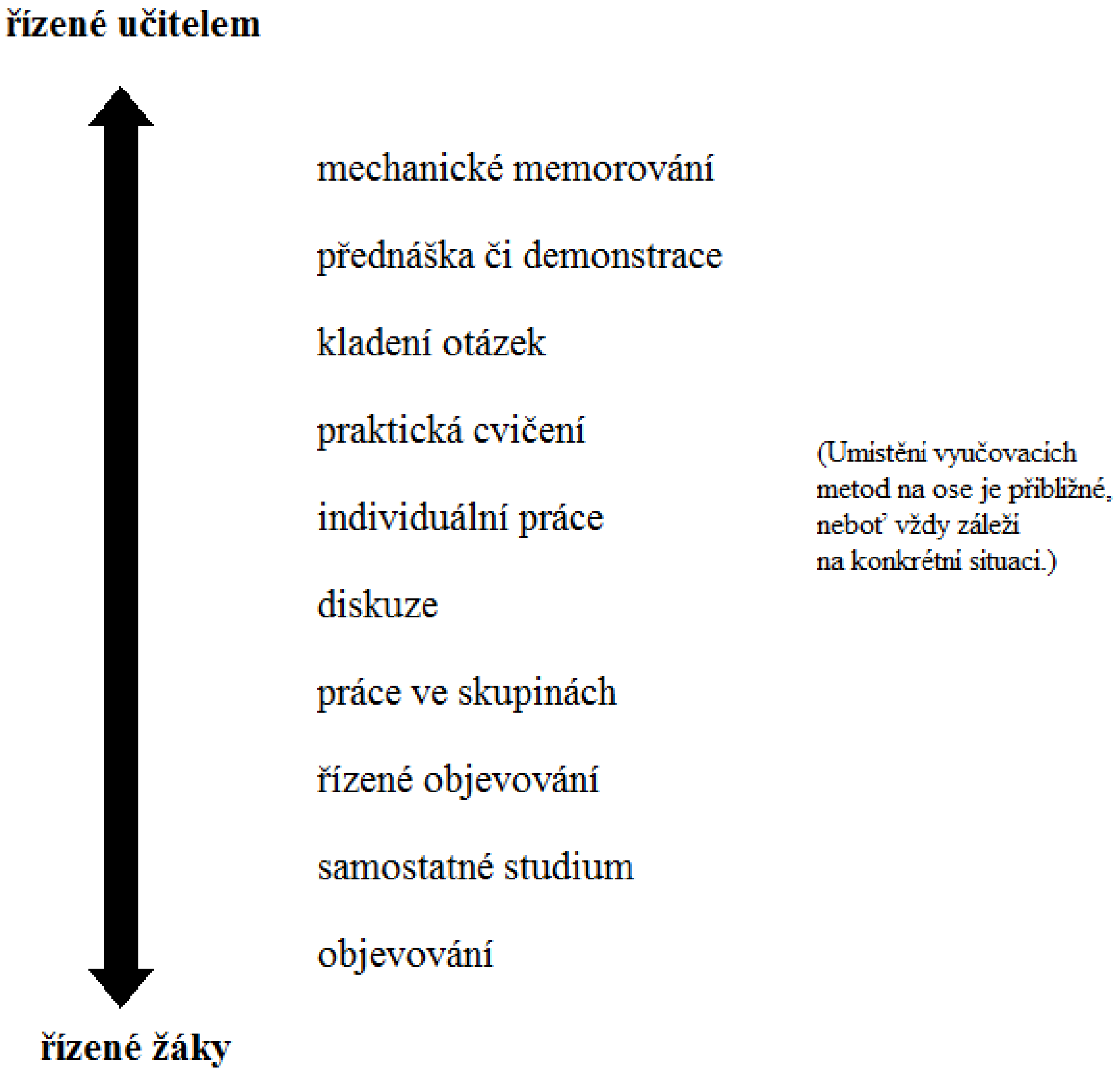
Schéma ukazuje integraci nové látky mezi dosavadní znalosti a zkušenosti žáka při mechanickém učení nebo při učení s porozuměním.



Příloha 6 – Diagram vyučovacích metod podle podílu řízení žákem a učitelem z publikace Petty (1996)

Diagram z publikace PETTY, G. *Moderní vyučování*. 3. vyd. Praha: Portál, 1996. 380 s. ISBN 80-7178-978-X – strana 235

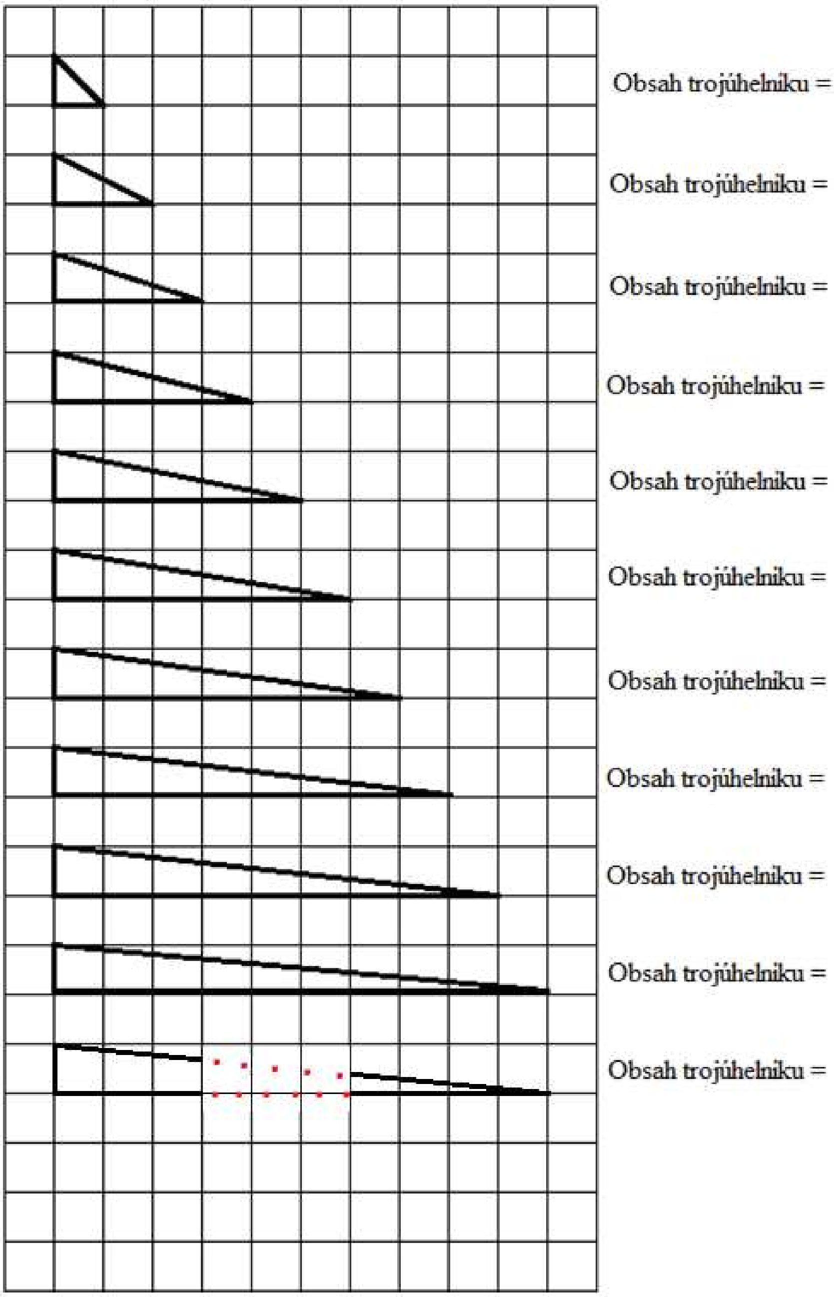
Diagram řadí deset vyučovacích metod podle toho, jaký podíl na řízení činnosti má učitel a jaký žák.



Příloha 7 – Pracovní list k přípravě 2012/2013_05_MA (trojúhelníky se svislou stranou 1 dřívko)

<u>Pracovní list na obsah trojúhelníku</u>

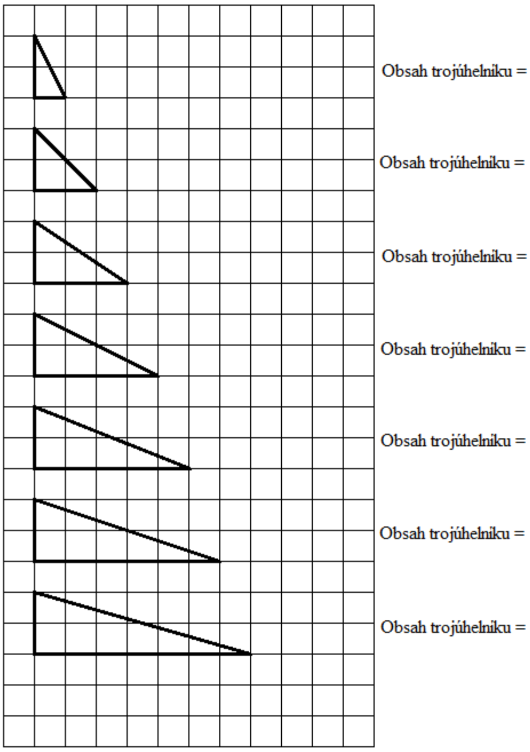
Úkol: Určete obsahy následujících trojúhelníků a správně zapište hodnoty do tabulky.

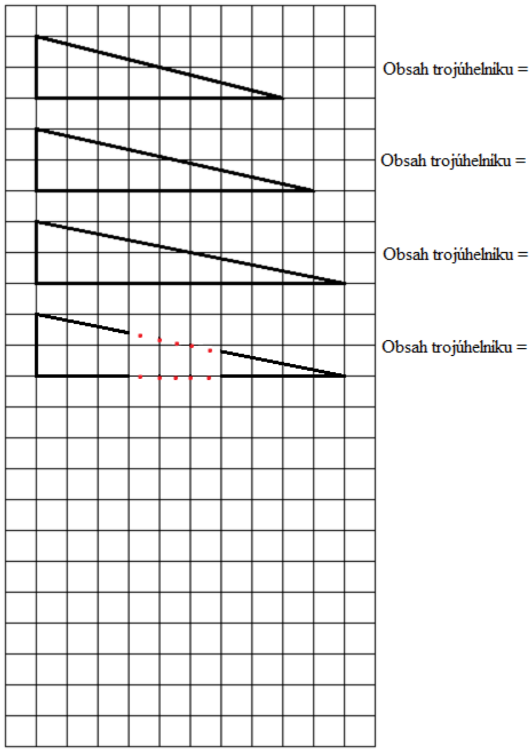


Příloha 8 – Pracovní list k přípravě 2012/2013_05_MA (trojúhelníky se svislou stranou 2 dřívka)

<u>Pracovní list na obsah trojúhelníku</u>

Úkol: Určete obsahy následujících trojúhelníků a správně zapište hodnoty do tabulky.

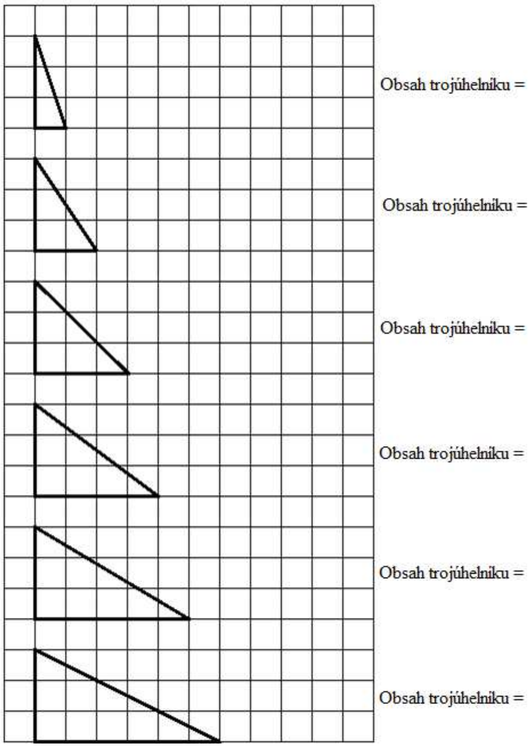


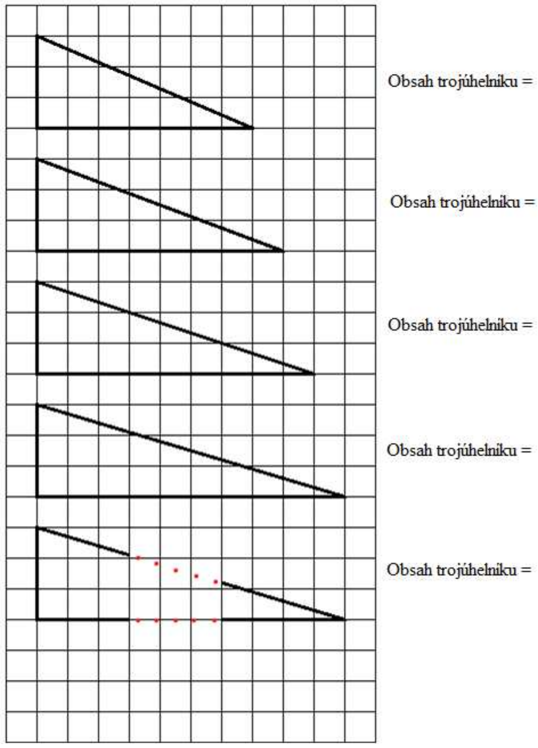


Příloha 9 – Pracovní list k přípravě 2012/2013_05_MA (trojúhelníky se svislou stranou 3 dřívka)

<ins>Pracovní list na obsah trojúhelníku</ins>

Úkol: Určete obsahy následujících trojúhelníků a správně zapište hodnoty do tabulky.

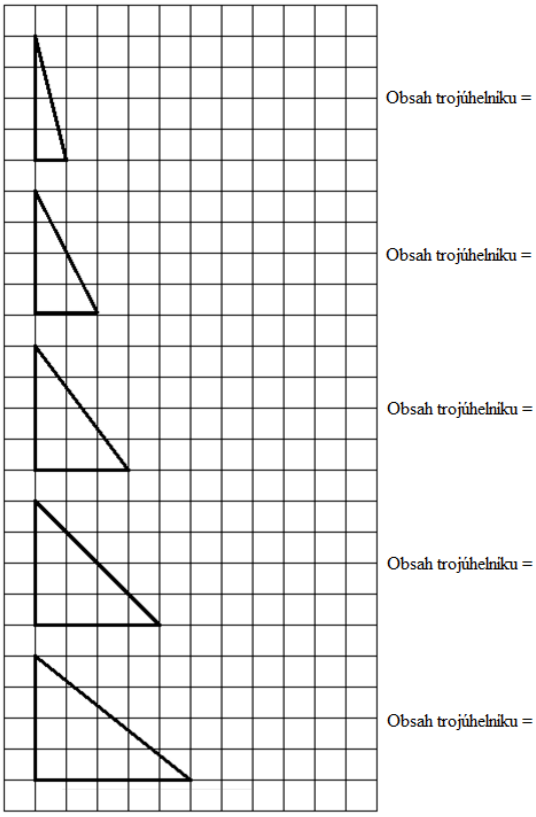


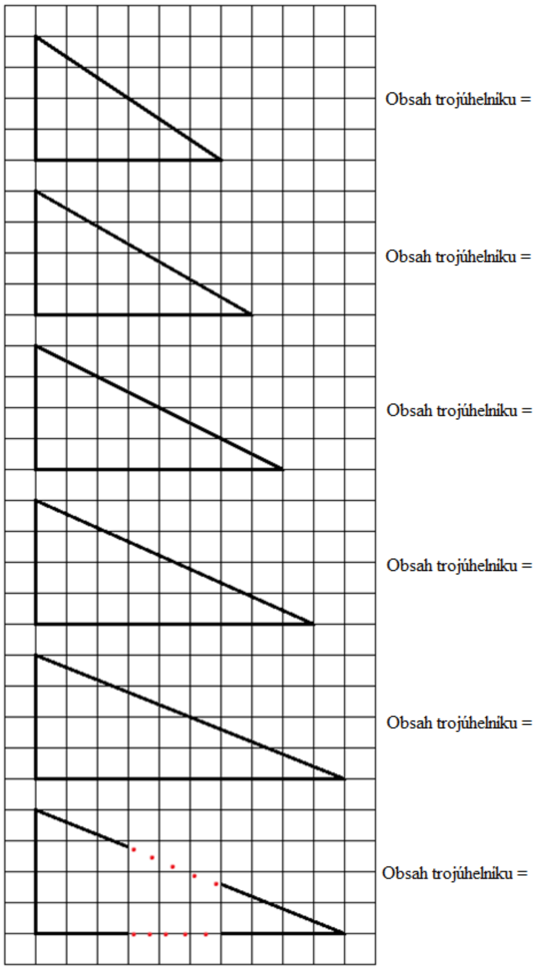


Příloha 10 – Pracovní list k přípravě 2012/2013_05_MA (trojúhelníky se svislou stranou 4 dřívka)

<u>Pracovní list na obsah trojúhelníku</u>

Úkol: Určete obsahy následujících trojúhelníků a správně zapište hodnoty do tabulky.

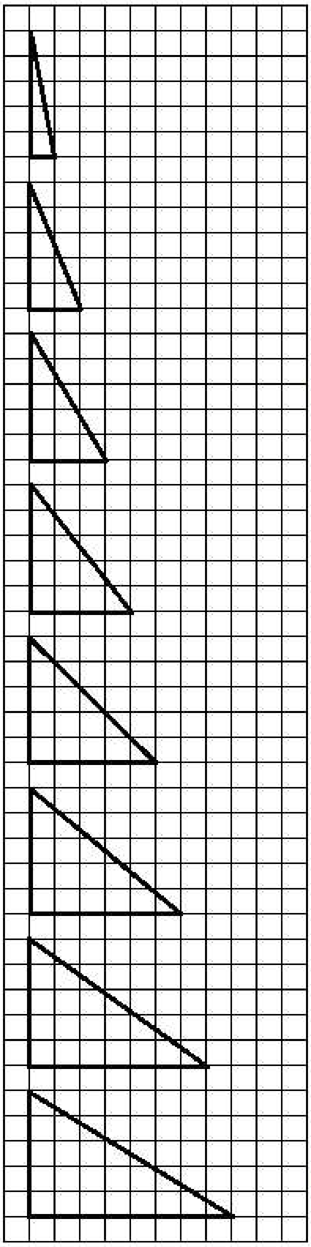




Příloha 11 – Pracovní list k přípravě 2012/2013_05_MA (trojúhelníky se svislou stranou 5 dřívek)

Pracovní list na obsah trojúhelníku

Úkol: Určete obsahy následujících trojúhelníků a správně zapište hodnoty do tabulky.



Obsah trojúhelníku =

Obsah trojúhelníku =

Obsah trojúhelníku =

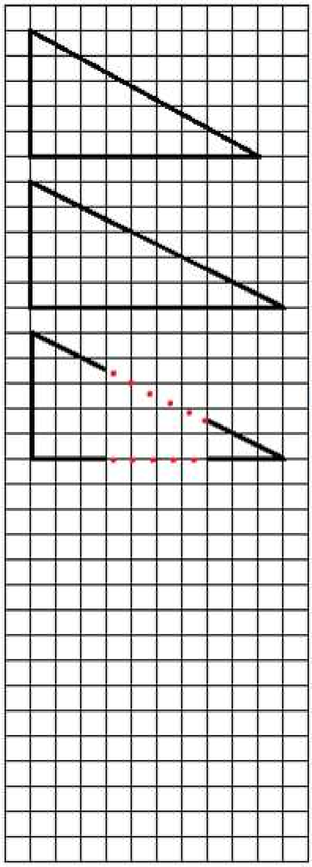
Obsah trojúhelníku =

Obsah trojúhelníku =

Obsah trojúhelníku =

Obsah trojúhelníku =

Obsah trojúhelníku =



Obsah trojúhelníku =

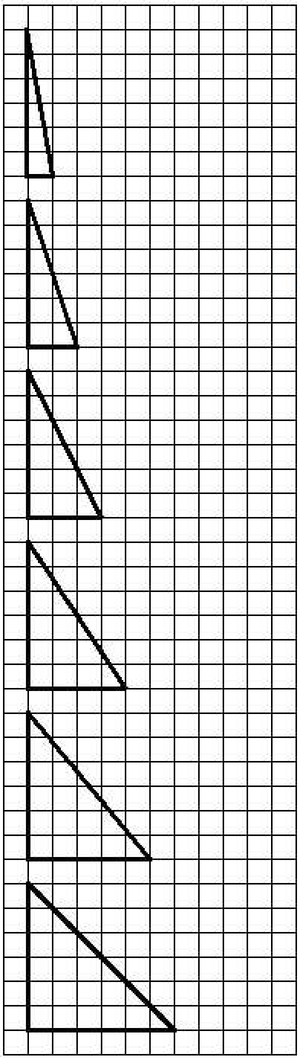
Obsah trojúhelníku =

Obsah trojúhelníku =

Příloha 12 – Pracovní list k přípravě 2012/2013_05_MA (trojúhelníky se svislou stranou 6 dřívek)

Pracovní list na obsah trojúhelníku

Úkol: Určete obsahy následujících trojúhelníků a správně zapište hodnoty do tabulky.



Obsah trojúhelníku =

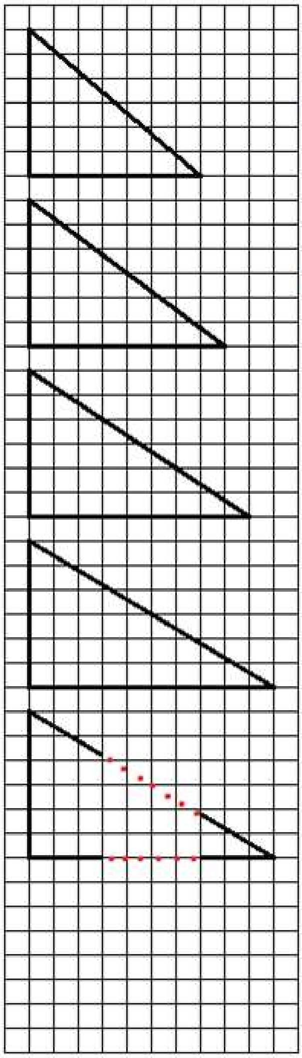
Obsah trojúhelníku =

Obsah trojúhelníku =

Obsah trojúhelníku =

Obsah trojúhelníku =

Obsah trojúhelníku =



Obsah trojúhelníku =

Obsah trojúhelníku =

Obsah trojúhelníku =

Obsah trojúhelníku =

Obsah trojúhelníku =