

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Ondřej Honzl

Lévyho procesy

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Viktor Beneš, DrSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Teorie pravděpodobnosti a náhodné procesy

2008

Děkuji především vedoucímu diplomové práce, Prof. RNDr. Viktoru Benešovi, DrSc. za cenné rady a podněty při psaní této práce. Rovněž mu patří můj vřelý dík za to, že mi umožnil studium tématu i na dvou workshopech a účasti na doktorském semináři, který se také Lévyho procesů týkal. Závěrem děkuji Universitě Karlově, která poskytuje studentskou licenci programu Mathematica [13].

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 14. dubna 2008

Ondřej Honzl

Obsah

Úvod	5
1 Základní teorie	7
1.1 Lévyho procesy	7
1.2 Subordinátory	12
1.3 Lévyho-Itôova věta a existence momentů	14
1.4 Bodové procesy	15
1.5 Procesy OU typu a OUCP	17
2 Modelování závislosti složek Lévyho procesu	18
2.1 Úvod do kopulí	18
2.2 Lévyho kopule	20
2.3 Křížová korelační funkce	25
2.3.1 Složený Poissonův proces	28
2.3.2 Gamma proces	29
2.3.3 Inversní Gaussův proces	30
3 Simulace vícerozměrných Lévyho procesů	34
3.1 Reprezentace subordinátoru	34
3.1.1 Složený Poissonův proces	38
3.1.2 Gamma proces	38
3.1.3 Inversní Gaussův proces	38
4 Statistika OUCP	40
4.1 Popis modelu	40
4.2 Užité algoritmy	42
4.2.1 Metropolisův-Hastingsův algoritmus	42
4.2.2 Newtonův-Raphsonův algoritmus	44
4.3 Výsledky odhadů	45
Literatura	48

Název práce: Lévyho procesy

Autor: Ondřej Honzl

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Viktor Beneš, DrSc.

e-mail vedoucího: benesv@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci je uveden stručný úvod do teorie Lévyho procesů a subordinátorů. Obsahuje rovněž potřebné výsledky týkající se bodových procesů hlavně Coxova procesu. Dále se specializuje na popis struktury závislosti složek vícerozměrných subordinátorů pomocí Lévyho kopulí. Jsou zde uvedeny příklady parametrických rodin Lévyho kopulí. Na jejich základě je studován průběh křížové korelační funkce, která je zavedena analogicky jako u Coxových bodových procesů. Za pomoci uvedených rodin Lévyho kopulí je rovněž ukázána možnost simulovat z vícerozměrných subordinátorů.

Práce se také zabývá realizací odhadu parametrů Gamma-Ornsteinova-Uhlenbeckova procesu, který je řídicím procesem pro pozorovaný Coxův proces. Je aplikován přístup založený na Bayesově větě a metodě Markov chain Monte Carlo s následným užitím Newtonova-Raphsonova algoritmu a aproximace věrohodnosti.

Klíčová slova: Lévyho proces, subordinátor, Lévyho kopule, křížová korelační funkce

Title: Lévy processes

Author: Ondřej Honzl

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Prof. RNDr. Viktor Beneš, DrSc.

Supervisor's e-mail address: benesv@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In the present thesis a short introduction into the theory of Lévy processes and subordinators is mentioned. It contains also basic results from the theory of point processes, especially of the Cox process. Further it specializes to the description of the dependence structure of components of multidimensional subordinators using Lévy copulas. There are examples presented of parametric families of Lévy copulas. On their basis graphs of cross-pair correlation functions, defined analogously to the Cox point process case, are investigated.

The work also shows the possibility of simulation of multidimensional subordinators using mentioned families of Lévy copulas. Finally it deals with estimation parameters of Gamma-Ornstein-Uhlenbeck process. It is applied an approach based on Bayes theorem and Markov Chain Monte Carlo method with consequential using of Newton-Raphson algorithm and approximative likelihood.

Keywords: Lévy process, subordinator, Lévy copula, cross-pair correlation function

Úvod

O Lévyho procesech bylo dříve hovořeno jako o jedné ze tříd procesů s nezávislými přírůstky. Dnes nesou jméno Paula Pierra Lévyho (1886 – 1971) – francouzského matematika, který působil v oblasti teorie pravděpodobnosti.

Lévyho procesy jsou v posledních letech stále více užívány ve světě finančních modelů a pojišťovnictví. Především negaussovské a skokové Lévyho procesy mají využití v oblasti stochastické diferenciální geometrie a kvantové teorie. Další aplikace jsou například v telekomunikacích, seismologii nebo meteorologii. Nejznámějšími příklady Lévyho procesů jsou Wienerův proces a Poissonův proces, často užívané jsou též subordinátory a stabilní procesy.

Ve finanční sféře jsou používány vícerozměrné procesy a je zkoumána struktura závislosti jejich složek. U tohoto tématu se nedávno objevil pojem Lévyho kopule (viz [1] a [3]), který je jakousi analogií ke kopulím, které jsou užitečným nástrojem mnohorozměrné statistiky.

V práci se zabýváme modelováním závislosti ve vícerozměrných Lévyho procesech. Dáváme příklad několika nových parametrických rodin Lévyho kopulí a zabýváme se průběhem křížové korelační funkce. Také se snažíme za pomoci Lévyho kopulí ukázat možnost simulovat průběh vícerozměrných Lévyho procesů (viz [1]).

Pojem křížové korelační funkce bývá často spojen s bodovými procesy, zde speciálně Coxovými procesy řízenými procesy Ornsteinova-Uhlenbeckova typu (OUCP). Odvozováním křížové korelační funkce pro vícerozměrné OUCP se zabývá podrobně [4]. Na popud článku [5] se též zabýváme problémem odhadu parametrů Gamma-Ornsteinova-Uhlenbeckova procesu (GOU). K tomu užíváme přístup, který je založen na Bayesově větě a metodě Markov chain Monte Carlo (MCMC) a užití Newtonova-Raphsonova algoritmu.

Vlastní práce je členěna do čtyř kapitol. V první kapitole uvádíme základní teorii z oblasti Lévyho procesů, subordinátorů, bodových procesů a procesů OU typu.

Ve druhé kapitole se zabýváme modelováním vícerozměrných Lévyho procesů, naším cílem je zkoumat průběh křížové korelační funkce. Nejprve definujeme pojmy kopule a Lévyho kopule a uvádíme jejich vlastnosti. Dále předkládáme příklady parametrických rodin Lévyho kopulí a na základě jejich struktury rozebíráme průběh křížové korelační funkce pro vybrané subordinátory.

Třetí kapitola dává návod k simulaci vícerozměrných Lévyho procesů. Jedná se o aplikaci algoritmů popsaných v [1], k tomu používáme rodiny Lévyho kopulí, které

jsme popsali v předchozí kapitole.

Čtvrtá kapitola je věnována problému odhadu parametrů procesu GOU, který je řídicím procesem pro pozorovaný Coxův proces (viz [5]). Jedná se o použití věrohodnostního přístupu metody MCMC a Newtonova-Raphsonova algoritmu, jak je navrženo v [6].

K práci je připojen (v příloze na CD) zdrojový kód v jazyce R [12], který je vysvětlen ve čtvrté kapitole.

Původní výsledky jsou obsaženy zejména ve druhé kapitole, kde je uvažováno širší spektrum Lévyho kopulí než v dostupné literatuře. Kapitoly tři a čtyři obsahují náročné realizace výpočetních postupů dříve publikovaných.

Kapitola 1

Základní teorie

V této kapitole uvedeme teorii potřebnou k dalšímu výkladu. Jedná se o základní vlastnosti Lévyho procesu. Pro další vlastnosti, například subordinaci, silnou markovskou vlastnost, či potenciální teorii Lévyho procesů, odkazujeme čtenáře na monografii [11]. Dále uvádíme potřebné základy z oblasti bodových procesů, které je možné nalézt např. v [9].

1.1 Lévyho procesy

Definice 1.1.1. (Lévyho proces) Buď $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ pravděpodobnostní prostor, potom stochastický proces $\{X_t, t \geq 0\}$ s hodnotami v \mathbb{R}^d nazýváme *Lévyho proces*, jestliže splňuje následující podmínky:

1. $X_0 \equiv 0$.
2. (*Vlastnost nezávislosti přírůstků*): Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ jsou náhodné veličiny $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ nezávislé.
3. (*Časová homogenita, neboli Stacionarita přírůstků*): Pro každé $h \geq 0$ rozdělení $X_{t+h} - X_t$ nezávisí na $t \in \mathbb{R}_+$, tedy $X_{t+h} - X_t \stackrel{d}{=} X_h$.
4. (*Stochastická spojitost*): Pro každé $t \geq 0$ a $\varepsilon > 0$ platí $\lim_{s \rightarrow t} \mathbb{P}[|X_s - X_t| > \varepsilon] = 0$.
5. (*Regulovatelnost trajektorií*): Pro každé $\omega \in \Omega$ je $X_t(\omega)$ zprava spojitá funkce pro $t \geq 0$ a má limity zleva pro $t > 0$.

Zde je třeba upozornit na to, že stačí, aby vlastnosti (1) a (5) platily skoro jistě. V některé literatuře jsou takto Lévyho procesy definovány. Platí ovšem tvrzení, že existuje spojitá modifikace s regulovatelnými trajektoriemi (viz. [11], Theorem 11.5).

Definice 1.1.2. (Nekonečně dělitelné rozdělení) Náhodná veličina Y má *nekonečně dělitelné rozdělení*, jestliže pro každé $n \geq 2$ existují nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny Y_1, \dots, Y_n takové, že $Y_1 + \dots + Y_n$ má stejné rozdělení jako Y .

Poznámky 1.1.3. Vlastnosti nekonečně dělitelných charakteristických funkcí:

- f_1, f_2 jsou charakteristické funkce nekonečně dělitelného rozdělení, potom $f_1 f_2, |f_1|, f_1^\alpha, \forall \alpha > 0$ jsou charakteristické funkce nekonečně dělitelných rozdělení. Dále platí, že $f_1(t) \neq 0, \forall t$.
- Limita charakteristických funkcí nekonečně dělitelného rozdělení je také charakteristická funkce nekonečně dělitelného rozdělení.

Důkazy předchozí výroků lze najít v [11] kap. 7. Dále budeme pro charakteristickou funkci rozdělení μ užívat značení $\hat{\mu}$.

Definice 1.1.4. (Obecná konvoluční mocnina) Nechť je μ nekonečně dělitelné rozdělení na \mathbb{R}^d , pak lze pro každé $t \in \mathbb{R}_+$ definovat t -tou konvoluční mocninu μ^{*t} .

Je-li μ nekonečně dělitelné, pak je také pro n přirozené $\mu^{\frac{1}{n}}$ nekonečně dělitelné a platí $\hat{\mu}(z)^{\frac{1}{n}} = (\hat{\mu}(z)^{\frac{1}{nk}})^k$ pro každé $k \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C}$. Tudíž je dle prvního bodu předchozí poznámky pro všechna přirozená čísla m a n rozdělení $\mu^{\frac{m}{n}}$ rovněž nekonečně dělitelné. Pro iracionální $t > 0$ lze sestavit posloupnost $\{r_n\}_{n=1}^\infty, r_n \in \mathbb{Q}, r_n \rightarrow t$. Potom $\hat{\mu}(z)^{r_n} \rightarrow \hat{\mu}(z)^t, z \in \mathbb{C}$ pro $n \rightarrow \infty$. Limita $\hat{\mu}(z)^t$ je nekonečně dělitelná dle druhého bodu předchozí poznámky a $\hat{\mu}^t$ je charakteristická funkce t -té konvoluční mocniny rozdělení μ .

Následující věta říká, že rozdělení Lévyho procesu $\{X_t, t \geq 0\}$ je určeno rozdělením X_s pro nějaké konkrétní $s \geq 0$.

Věta 1.1.5. Je-li $\{X_t, t \geq 0\}$ Lévyho proces na \mathbb{R}^d , potom pro každé $t \geq 0$ je P_{X_t} nekonečně dělitelné rozdělení na \mathbb{R}^d a označíme-li $P_{X_1} = \mu$, potom $P_{X_t} = \mu^{*t}$. Naopak je-li μ nekonečně dělitelné rozdělení na \mathbb{R}^d , pak existuje Lévyho proces $\{X_t, t \geq 0\}$ takový, že $P_{X_1} = \mu$.

Důkaz. První část tvrzení není těžké ukázat. Buď $\{X_t, t \geq 0\}$ Lévyho proces, pro libovolné $n \geq 2$ a položíme $t_k = \frac{kt}{n}, k = 0, 1, \dots$. Pak platí, že

$$X_t = (X_{t_1} - X_{t_0}) + \dots + (X_{t_n} - X_{t_{n-1}}).$$

Uzávorkované členy jsou nezávislé. Označme $\mu = P_{X_t}$ a $\mu_n = P_{X_{t_k} - X_{t_{k-1}}}$. Míra μ_n nezávisí na k z vlastnosti časové homogenity, a tudíž $\mu = \mu_n^{*n}$. Čímž dostáváme nekonečnou dělitelnost pro racionální t . Pro iracionální t zvolíme r_n posloupnost racionálních čísel $r_n \rightarrow t$. Potom máme $X_{r_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} X_t$ a proto i $P_{X_{r_n}} \xrightarrow{w} P_{X_t}$. Opačná implikace je obtížnější, lze ji nalézt v [11], Theorem 7.10. \square

Věta 1.1.6. (Lévyho-Khintchinova reprezentace) Je-li μ nekonečně dělitelné rozdělení na \mathbb{R}^d , potom

$$\hat{\mu}(z) = \exp \left[-\frac{1}{2} \langle Az, z \rangle + i \langle \gamma, z \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i \langle z, x \rangle} - 1 - i \langle z, x \rangle \mathbb{I}_D(x)) \nu(dx) \right], \quad z \in \mathbb{R}^d, \quad (1.1)$$

kde $\widehat{\mu}$ značí charakteristickou funkci rozdělení μ , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je skalární součin v \mathbb{R}^d , $\gamma \in \mathbb{R}^d$, $D = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq 1\}$ je jednotková koule. A je symetrická pozitivně semidefinitní matice typu $d \times d$ a ν je míra na \mathbb{R}^d splňující:

$$\nu(\{0\}) = 0 \text{ a } \int_{\mathbb{R}^d} (|x|^2 \wedge 1) \nu(dx) < \infty. \quad (1.2)$$

Tato reprezentace jednoznačně určuje A , ν a γ . Naopak pro A symetrickou pozitivně semidefinitní matici, míru ν splňující (1.2) a $\gamma \in \mathbb{R}^d$, existuje nekonečně dělitelné rozdělení μ , jehož charakteristická funkce je dána vzorcem (1.1).

Důkaz. Důkaz viz [11], Theorem 8.1. □

Definice 1.1.7. Trojici (A, ν, γ) z Lévyho-Khintchinovy věty nazýváme (*Lévyho*) *charakteristická trojice*, míru ν nazýváme *Lévyho míra* rozdělení μ . *Charakteristickou trojicí Lévyho procesu* $\{X_t, t \geq 0\}$ míníme charakteristickou trojici rozdělení X_1 .

Matice A bývá označována jako *Gaussova varianční matice*, neboť je známý tvar charakteristické funkce d -rozměrného normálního rozdělení ρ se střední hodnotou γ a variační maticí A :

$$\widehat{\rho}(z) = \exp \left[-\frac{1}{2} \langle Az, z \rangle + i \langle \gamma, z \rangle \right].$$

Dále pišme $\psi(z) = \log(\widehat{\mu}(z))$. Tato funkce je označována jako *charakteristický exponent* rozdělení μ . Potom z věty 1.1.5 vyplývá, že

$$\log \widehat{P}_{X_t}(z) = t \log \widehat{P}_{X_1} = t\psi(z). \quad (1.3)$$

Poznámky 1.1.8. V Lévyho-Khintchinově větě hraje důležitou roli tzv. usekávací funkce \mathbb{I}_D . Ta je v integrálu na pravé straně (1.1) proto, aby konvergoval, neboť míra ν může být neomezená mimo libovolné okolí nuly a samotný integrand se chová:

$$e^{i\langle z, x \rangle} - 1 - i\langle z, x \rangle \mathbb{I}_D(x) = O(|x|^2) \text{ pro } |x| \rightarrow 0, \quad z \in \mathbb{R}^d.$$

Můžeme tedy za usekávací funkci brát $c(x) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, která je omezená měřitelná a splňuje:

$$c(x) = 1 + o(|x|) \text{ pro } |x| \rightarrow 0, \quad c(x) = O(|x|^{-1}) \text{ pro } |x| \rightarrow \infty.$$

Pro takovou funkci lze výraz (1.1) přepsat na:

$$\widehat{\mu}(z) = \exp \left[-\frac{1}{2} \langle Az, z \rangle + i \langle \gamma_c, z \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle z, x \rangle} - 1 - i\langle z, x \rangle c(x)) \nu(dx) \right], \quad z \in \mathbb{R}^d.$$

Přičemž γ_c je definováno:

$$\gamma_c = \gamma + \int_{\mathbb{R}^d} (c(x) - \mathbb{I}_D) \nu(dx).$$

Například Paul Lévy, či Alexander Khintchin užívali funkci $c(x) = \frac{1}{1+|x|^2}$. Rovněž lze pro pevné $\varepsilon > 0$ užít funkci $c(x) = \mathbb{I}_{[-\varepsilon, \varepsilon]}(x)$. Je dobré si také uvědomit, že Lévyho míra ν ani Gaussova matice A nezávisí na volbě usekávací funkce $c(x)$.

Pokud budeme dále v textu užívat usekávací funkci $c(x)$, budeme příslušnou charakteristickou trojici značit (A, ν, γ_c) .

Zaměříme se na další tvary formule (1.1), pokud Lévyho míra splňuje podmínku:

$$\int_{|x|>1} |x| \nu(dx) < \infty,$$

pak je možné uvažovat usekávací funkci $c(x) \equiv 1$ a charakteristický exponent v Lévyho-Khintchinově reprezentaci lze přepsat na:

$$\psi(z) = -\frac{1}{2} \langle Az, z \rangle + i \langle \gamma_1, z \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle z, x \rangle} - 1 - \langle z, x \rangle) \nu(dx).$$

Potom nazýváme γ_1 *střed* procesu X_t , neboť lze ukázat, že $\mathbb{E} X_t = \gamma_1 t$.

Splňuje-li Lévyho míra podmínku:

$$\int_{|x|\leq 1} |x| \nu(dx) < \infty, \tag{1.4}$$

můžeme uvažovat nulovou usekávací funkci a výraz (1.1) bude tvaru:

$$\widehat{\mu}(z) = \exp \left[-\frac{1}{2} \langle Az, z \rangle + i \langle \gamma_0, z \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{\langle z, x \rangle} - 1) \nu(dx) \right].$$

Věta 1.1.9. *Nechť je $X = (X^{(1)}, \dots, X^{(d)})$ Lévyho proces s charakteristickou trojicí (A, ν, γ) , potom jsou $X^{(j)}$, $j = 1, \dots, d$ rovněž Lévyho procesy a jejich charakteristické trojice jsou (G, ρ, β) :*

$$G = A_{jj}, \rho(\{0\}) = 0, \rho(B) = \nu(B \times \mathbb{R}^{d-1}), \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\}),$$

$$\beta = \gamma + \int_{\mathbb{R}^d} x_j (\mathbb{I}_{|x_j|\leq 1} - \mathbb{I}_{|x|\leq 1}) \nu(dx),$$

kde $x = (x_1, \dots, x_d)$.

Důkaz. Důkaz se provede přímým porovnáním charakteristických funkcí X a $X^{(j)}$, odkud je zřejmé, že $X^{(j)}$ je Lévyho proces a jeho charakteristická trojice má výše uvedený tvar. \square

Definice 1.1.10. Lévyho proces $\{X_t, t \geq 0\}$ s Lévyho mírou ν označujeme za *proces s nekonečnou aktivitou*, jestliže $\nu(\mathbb{R}^d) = \infty$.

Jedním ze základních Lévyho procesů je *složený Poissonův proces*, uvádíme jeho definici a základní charakterizaci (viz. tvrzení níže).

Definice 1.1.11. (Složený Poissonův proces) Buďte Y_i nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s rozdělením σ a buď $\{N_t, t \geq 0\}$ Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$, nezávislý s $\{Y_i, i \in \mathbb{N}\}$, potom proces definovaný:

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

nazveme *složený Poissonův proces* s intenzitou λ a rozdělením skoků σ .

Je zřejmé, že pokud vezmeme $\sigma = \delta_1$, kde δ_1 je *Diracova míra v bodě 1*, pak je tento složený Poissonův proces zároveň Poissonovým procesem.

Často se také pod pojmem *složený Poissonův proces* uvažuje i proces obohacený driftem γ , tedy proces $X'_t = \gamma t + X_t$. My však dále v tomto textu drift neuvažujeme.

Tvrzení 1.1.12. *Proces $\{X_t, t \geq 0\}$ je složený Poissonův proces právě tehdy, když je to Lévyho proces a jeho trajektorie jsou po částech konstantní.*

Důkaz. Důkaz je možné nalézt v [1], Proposition 3.3. □

Pro úplnost spočítejme charakteristickou funkci složeného Poissonova procesu. Buď tedy X_t složený Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$ a buď σ jeho rozdělení skoků, potom:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e^{i\langle z, X_t \rangle} &= \mathbb{E} [\mathbb{E} [e^{i\langle z, X_t \rangle} \mid N_t]] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathbb{P}[N_t = n] \cdot \mathbb{E} e^{i\langle z, \sum_{k=1}^n Y_k \rangle} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t \hat{\sigma}(z))^n}{n!} = \exp[\lambda t (\hat{\sigma}(z) - 1)] \\ &= \exp \left[\lambda t \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle z, x \rangle} - 1) \sigma(dx) \right]. \end{aligned}$$

Dostali jsme tak charakteristickou trojici:

$$\left(0, \lambda \sigma, \int_{|x| \leq 1} x \lambda \sigma(dx) \right). \quad (1.5)$$

Věta 1.1.13. (de Finetti) *Funkce f je charakteristickou funkcí nekonečně dělitelného rozdělení právě tehdy, když ji lze napsat ve tvaru:*

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\{p_n(g_n(x) - 1)\}, \quad (1.6)$$

přičemž g_n je posloupnost charakteristických funkcí a p_n je nějaká posloupnost kladných čísel.

Důkaz. „ \Rightarrow “: Je-li f charakteristická funkce nekonečně dělitelného rozdělení, pak je dle Poznámky 1.1.3 také f^α , $\forall \alpha > 0$ charakteristickou funkcí nekonečně dělitelného rozdělení. Ze znalosti $f^\alpha = e^{\alpha \log f}$ dostáváme:

$$f(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \exp\left(\frac{f^\alpha - 1}{\alpha}\right).$$

Tím máme funkci f napsanou v požadovaném tvaru.

„ \Leftarrow “: Stačí si uvědomit, že složený Poissonův proces, který má nekonečně dělitelné trajektorie, má charakteristickou funkci ve tvaru (1.6) a že limita nekonečně dělitelných charakteristických funkcí je opět charakteristická funkce nekonečně dělitelného rozdělení, viz Poznámky 1.1.3. \square

1.2 Subordinátory

Definice 1.2.1. (Subordinátor) Buď $d = 1$, Lévyho proces $\{X_t, t \geq 0\}$ na \mathbb{R} se nazývá *rostoucí*, jestliže $X_t(\omega)$ je neklesající funkce t s.j.. Takovému procesu se rovněž říká *subordinátor*. Lévyho proces, jehož složky jsou pouze subordinátory, označujeme jako (*vícerozměrný*) *subordinátor*.

Věta 1.2.2. *Nechť $\{X_t, t \geq 0\}$ je Lévyho proces na \mathbb{R} s charakteristickou trojicí (A, ν, γ) , pak jsou následující podmínky ekvivalentní:*

1. $\{X_t, t \geq 0\}$ má s.j. neklesající trajektorie.
2. $X_t \geq 0$ s.j. pro nějaké $t > 0$.
3. $X_t \geq 0$ s.j. pro každé $t > 0$.
4. $A = 0$, $\nu((-\infty, 0]) = 0$, $\int_0^\infty (x \wedge 1) \nu(dx) < \infty$ a $\gamma - \int_{|x| \leq 1} x \nu(dx) \geq 0$.

Důkaz. Viz [1], Proposition 3.10. \square

Poznámka 1.2.3. Buď $\{X_t, t \geq 0\}$ subordinátor, potom je jeho Laplaceova transformace následující:

$$\mathbb{E} [e^{-uX_t}] = \exp \left[t \left(\int_{(0, \infty)} (e^{-ux} - 1) \nu(dx) - \gamma_0 u \right) \right].$$

Věta 1.2.4. *Lévyho proces s charakteristickou trojicí (A, ν, γ) má konečnou variaci právě tehdy, když platí:*

$$A = 0, \int_{|x| \leq 1} |x| \nu(dx) < \infty.$$

Důkaz. Důkaz viz [11]. \square

Důsledek 1.2.5. *Subordinátor sice může mít nekonečnou aktivitu, ale musí mít konečnou variaci.*

Jeden z námi zkoumaných subordinátorů je tzv. Gamma proces. Definujeme tento proces a poté určíme jeho charakteristickou trojici.

Definice 1.2.6. (Gamma proces) Uvažujme Lévyho proces $\{X_t, t \geq 0\}$ na \mathbb{R} . Pakliže má $\mu = P_{X_1}$ Gamma rozdělení $\Gamma(\alpha, p)$, které je dáno hustotou:

$$f(x) = \frac{\alpha^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\alpha x} \mathbb{I}_{(0, \infty)}(x), \quad \alpha > 0, p > 0, \quad (1.7)$$

kde $\Gamma(\cdot)$ je gamma funkce. Potom proces $\{X_t, t \geq 0\}$ nazýváme *Gamma proces*.

Příklad 1.2.7. Určíme charakteristickou trojici Gamma procesu. Rozdělení $\Gamma(\alpha, p)$ má charakteristickou funkci:

$$\hat{\mu}(z) = \left(1 - \frac{iz}{\alpha}\right)^{-p} = \exp \left[-p \log \left(1 - \frac{iz}{\alpha}\right) \right],$$

logaritmus na pravé straně rozepíšeme postupně pomocí dvou integrálů:

$$\begin{aligned} \log \left(1 + \frac{u}{\alpha}\right) &= \int_0^u \frac{dy}{\alpha + y} = \int_0^u \int_0^\infty e^{-(\alpha+y)x} dx dy \\ &= \int_0^\infty \int_0^u e^{-xy} dy e^{-\alpha x} dx = - \int_0^\infty (e^{-ux} - 1) \frac{e^{-\alpha x}}{x} dx. \end{aligned}$$

Po dosazení $u = -iz$ dostaneme potřebný tvar charakteristické funkce:

$$\hat{\mu}(z) = \exp \left[p \int_0^\infty (e^{izx} - 1) \frac{e^{-\alpha x}}{x} dx \right].$$

Již je vidět, že reprezentace (1.1) je $A = 0$, $\nu(dx) = px^{-1} e^{-\alpha x} \mathbb{I}_{(0, \infty)}(x) dx$ a $\gamma = 0$.

Definice 1.2.8. (Inversní Gaussův proces) Mějme Lévyho proces $\{X_t, t \geq 0\}$ na \mathbb{R} takový, že rozdělení X_1 je dáno hustotou:

$$f(x) = \frac{\delta e^{\eta\delta}}{\sqrt{2\pi}} x^{-3/2} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\delta^2}{x} + \eta^2 x \right) \right] \mathbb{I}_{(0, \infty)}(x), \quad \delta > 0, \eta \geq 0. \quad (1.8)$$

Potom proces $\{X_t, t \geq 0\}$ nazýváme *inversní Gaussův proces*.

Příklad 1.2.9. Uvedeme opět charakteristickou funkci inverzního Gaussova procesu a jeho Lévyho míru. Má-li X_1 rozdělení dané hustotou (1.8) potom:

$$\mathbb{E} e^{itX_1} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\delta} \exp \left(\delta(\eta - \sqrt{\eta^2 - 2it}) \right).$$

Jeho Lévyho míra má tvar:

$$\nu(dx) = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} x^{-3/2} \exp \left(-\frac{1}{2} \eta^2 x \right) \mathbb{I}_{(0, \infty)}(x) dx.$$

1.3 Lévyho-Itôova věta a existence momentů

Definujeme Poissonovu náhodnou míru, formulujeme Lévyho-Itôovu větu, následně uvedeme výsledky, které se týkají momentů Lévyho procesů.

Definice 1.3.1. (Poissonova náhodná míra) Bud' $(\Theta, \mathcal{B}, \rho)$ σ -konečný měřitelný prostor. Bud' $\{N(B), B \in \mathcal{B}\}$ rodina náhodných veličin definovaných na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, které nabývají jen nezáporných celočíselných hodnot a nekonečna. Tuto rodinu nazýváme *Poissonova náhodná míra na Θ s mírou intenzity ρ* , jestliže jsou splněny následující podmínky:

- Pro každou $B \in \mathcal{B}$ má $N(B)$ Poissonovo rozdělení se střední hodnotou $\rho(B)$.
- Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a všechny po dvou disjunktní množiny $B_i \in \mathcal{B}$, $i = 1, \dots, n$, jsou $N(B_i)$, $i = 1, \dots, n$ nezávislé.
- Pro každé $\omega \in \Omega$ je $N(\cdot, \omega)$ míra na Θ .

Definice 1.3.2. (Míra skoků procesu) Pro Lévyho proces $\{X_t, t \geq 0\}$ definujeme J_X (náhodnou) míru skoků procesu následovně:

$$J_X(B) = \#\{(t, X_t - X_{t-}) \in B, X_t - X_{t-} \neq 0\}, \quad B \in \mathcal{B}([0, \infty) \times \mathbb{R}^d).$$

Jinými slovy pro každý interval $[a, b]$ a každou měřitelnou množinu $M \subset \mathbb{R}^d$ dává $J_X([a, b] \times M)$ počet skoků procesu X mezi časy a a b , které padnou do M .

Věta 1.3.3. (Lévyho-Itôova dekompozice) Nechť $\{X_t, t \geq 0\}$ je Lévyho proces na \mathbb{R}^d s Lévyho mírou ν . Potom platí:

1. ν je Radonova míra na $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ splňující $\int_{\mathbb{R}^d} (|x| \wedge 1) \nu(dx) < \infty$.
2. Míra skoků J_X je Poissonovou náhodnou mírou na $\mathcal{B}([0, \infty] \times \mathbb{R}^d)$ s mírou intenzity $dt \nu(dx)$.
3. Proces X_t lze rozepsat:

$$X_t = \gamma t + B_t + X_t^l + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{X}_t^\varepsilon, \quad (1.9)$$

kde $\gamma \in \mathbb{R}^d$, $\{B_t, t \geq 0\}$ je Brownův pohyb a

$$\begin{aligned} X_t^l &= \int_{|x| \geq 1, s \in [0, t]} x J_X(ds \times dx), \\ \tilde{X}_t^\varepsilon &= \int_{\varepsilon \leq |x| < 1, s \in [0, t]} x (J_X(ds \times dx) - \nu(dx) ds). \end{aligned}$$

Navíc jsou jednotlivé procesy v (1.9) nezávislé. Konvergence \tilde{X}_t^ε je s.j. stejnoměrná na každém intervalu $[0, T]$.

Důkaz. Důkaz viz [1], Proposition 3.7. □

Poznámka 1.3.4. Lévyho-Itôův rozklad nám dává možnost oddělit pozorování závislosti složek Lévyho procesu na Brownovskou část B_t , která je popsána maticí A a na skokovou složku, jež je určena Lévyho mírou.

Dalšími důležitými výsledky je existence momentů Lévyho procesu. Že konečnost momentů nezávisí na $t > 0$ je zřejmé již z tvaru charakteristického exponentu viz vzorec (1.3).

Věta 1.3.5. (*Momenty*) Bud' $\{X_t, t \geq 0\}$ Lévyho proces na \mathbb{R}^d a bud' ν jeho Lévyho míra. Potom pro každé $t > 0$, $\alpha > 0$ a $j = 1, \dots, d$ platí:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X_t|^\alpha < \infty &\Leftrightarrow \int_{|x| \geq 1} |x|^\alpha \nu(dx) < \infty, \\ \mathbb{E}|X_t^{(j)}|^\alpha < \infty &\Leftrightarrow \int_{|x| \geq 1} |x_j|^\alpha \nu(dx) < \infty, \end{aligned}$$

kde $X_t^{(j)}$, $j = 1, \dots, d$ značíme j -tou složku $\{X_t, t \geq 0\}$ Lévyho procesu na \mathbb{R}^d .

Důkaz. Důkaz vyplývá z [11], Theorem 25.4 a Proposition 25.4. □

1.4 Bodové procesy

Zde uvádíme základní teorii týkající se bodových procesů.

Definice 1.4.1. (Bodový proces) Bud' \mathcal{M} množina všech měr na $(E, \mathcal{B}(E))$, přičemž (E, d) je úplný separabilní lokálně kompaktní metrický prostor. Nechť:

$$\mathcal{N} = \{\mu \in \mathcal{M} : \mu(B) \in \mathbb{N}_0 \cup \{0, \infty\} \text{ pro } \forall B \in \mathcal{B}\}$$

je množina všech lokálně konečných měr, které nabývají pouze konečných celočíselných hodnot a nekonečna. Na nich zavedeme σ -algebru:

$$\mathfrak{N} = \sigma\{\{\mu \in \mathcal{N} : \mu(B) = m\}, B \in \mathcal{B}_o, m \in \mathbb{N}_0\},$$

kde symbolem \mathcal{B}_o rozumíme omezené borelovské množiny. Potom měřitelné zobrazení $\Phi : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathcal{N}, \mathfrak{N})$ nazveme *bodový proces*.

Bude nám stačit omezení na tzv. *jednoduché bodové procesy*, tj. $\mathbb{P}[\Phi \in \mathcal{N}^*] = 1$, kde:

$$\mathcal{N}^* = \{\mu \in \mathcal{N} : \mu(\{x\}) \leq 1, \text{ pro } \forall x \in E\}.$$

Definice 1.4.2. *Prázdnými pravděpodobnostmi bodového procesu Φ rozumíme:*

$$\mathbb{P}[\Phi(B) = 0], B \in \mathcal{B}_o.$$

Rozdělení bodového procesu Φ je následující pravděpodobnostní míra:

$$\Pi(U) = \mathbb{P}[\Phi \in U] = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : \Phi(\omega) \in U\}, U \in \mathfrak{N}.$$

Definice 1.4.3. Necht' $E = \mathbb{R}^d$, pak řekneme, že bodový proces Φ je *stacionární*, jestliže je jeho rozdělení invariantní vůči posunutí.

Tvrzení 1.4.4. *Rozdělení bodového procesu je dáno prázdnými pravděpodobnostmi.*

Důkaz. Důkaz viz [9]. □

Definice 1.4.5. Bodový proces Φ je *Poissonův bodový proces s mírou intenzity μ* , jestliže μ je *difúzní* míra (tj. $\mu(\{x\}) = 0, \forall x \in E$) a jestliže platí:

1. Pro každou $B \in \mathcal{B}_o$ má $\Phi(B)$ Poissonovo rozdělení s parametrem $\mu(B)$.
2. Pro každé $n \in \mathbb{N}, B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_o$ po dvou disjunktní jsou náhodné veličiny $\Phi(B_1), \dots, \Phi(B_n)$ nezávislé.

Definice 1.4.6. Necht' je Φ Poissonův bodový proces s mírou intenzity μ (difúzní míra), existuje-li její hustota $\lambda(\cdot)$ vzhledem k Lebesgueově míře (značíme Leb), pak ji nazýváme *funkce intenzity*.

Definice 1.4.7. (Hustota procesu) Necht' Φ je Poissonův bodový proces s mírou intenzity $\mu, \mu(E) \in (0, \infty)$, označme jeho rozdělení Π , potom bodový proces Ψ má hustotu f vzhledem k Poissonovu procesu Φ , jestliže:

$$\mathbb{P}[\Psi \in U] = \int_U f(x) \Pi(dx), \quad U \in \mathfrak{N}.$$

Příklad 1.4.8. Je-li Π rozdělení Poissonova bodového procesu na množině $B \in \mathcal{B}_o(\mathbb{R}^d)$ s funkcí intenzity rovnou 1 na B , buď $Y(t)$ nezáporná omezená borelovsky měřitelná funkce na B , potom bodový proces Φ s hustotou:

$$f(x) = e^{\text{Leb}(B)} \exp\left(-\int_B Y(t) dt\right) \prod_{\xi \in x} Y(\xi), \quad \forall x \in \mathcal{N} \quad (1.10)$$

vůči Π , je Poissonův bodový proces s funkcí intenzity Y .

Pro homogenní Poissonův proces se tvar hustoty f zjednoduší. Je-li $\alpha > 0$ konstantní intenzita Poissonova procesu na B , potom platí:

$$f(x) = e^{(1-\alpha) \text{Leb}(B)} \alpha^{\text{card}(x)}. \quad (1.11)$$

Definice 1.4.9. (Coxův proces) Buď Λ σ -konečná difúzní náhodná míra na \mathbb{R}^d . Buď Φ bodový proces, který je podmíněně při $\Lambda = \mu$ Poissonovým bodovým procesem s mírou intenzity μ . Pak tento tzv. *dvojně stochastický proces* nazýváme *Coxův bodový proces s řídicí mírou Λ* . Má-li Λ hustotu λ vzhledem k Lebesgueově míře, pak λ nazýváme *řídicí funkce intenzity*. Potom se pro Φ též užívá název *Coxův bodový proces řízený λ* .

Vícerozměrný Coxův proces $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ definujeme tak, že jeho složky $\Phi_i, i = 1, \dots, n$ jsou Coxovy procesy s řídicími intenzitami $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$, přičemž podmíněně při daných $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ jsou Φ_1, \dots, Φ_n nezávislé Poissonovy bodové procesy. Pokud má Λ_i hustotu λ_i vzhledem k Lebesgueově míře, potom opět mluvíme o Φ jako o *Coxově procesu s řídicí funkcí intenzity $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$* .

Definice 1.4.10. (Křížová korelační funkce) Pro Φ vícerozměrný Coxův proces s řídicí intenzitou λ definujeme g_{jk} křížovou korelační funkci složek j a k předpisem:

$$g_{jk}(x, y) = \frac{\mathbb{E}[\lambda_j(x)\lambda_k(y)]}{\mathbb{E}[\lambda_j(x)]\mathbb{E}[\lambda_k(y)]}, \quad x, y \in E. \quad (1.12)$$

1.5 Procesy OU typu a OUCP

Definice 1.5.1. Procesem *Ornsteinova-Uhlenbeckova typu* budeme nazývat proces $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$, který splňuje stochastickou diferenciální rovnici:

$$dY_t = -\gamma Y_t dt + dX_{\gamma t}, \quad t \geq 0, \quad \gamma > 0, \quad (1.13)$$

kde X je Lévyho proces na \mathbb{R} .

Řešení rovnice (1.13) lze za dodatečných předpokladů vyjádřit explicitně. My budeme přímo předpokládat, že X je subordinátor a $\mathbb{P}[Y_0 \geq 0] = 1$. Pro obecnější přístup odkazujeme čtenáře na [11], kap. 17, str. 104 – 114.

Ekvivalentně s (1.13) také definujeme proces Y jako:

$$Y_t = Y_0 e^{-\gamma t} + \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} dX_{\gamma s}, \quad t \geq 0, \quad \gamma > 0. \quad (1.14)$$

Definice 1.5.2. (OUCP) Necht' je $\{Y_t, t > 0\}$ nezáporný s.j. lokálně integrovatelný proces OU typu, potom Coxův bodový proces Φ na \mathbb{R} řízený procesem Y_t označujeme OUCP – *Ornstein-Uhlenbeck Cox Process* a Lévyho proces $\{X_t, t \geq 0\}$ bývá označován jako (BDLP) – *Background driving Lévy Process*.

Je-li $Y = (Y^{(1)}, \dots, Y^{(d)})$ řešení rovnice (1.13), ovšem pro subordinátor X na \mathbb{R}^d , necht' je $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_d)$ Coxův proces řízený procesem Y tak, že podmíněně při daném Y jsou Φ_1, \dots, Φ_d nezávislé Poissonovy procesy, pak Φ označujeme jako d -rozměrný OUCP (řízený procesem Y).

Příklad 1.5.3. Uvažujme j -tou a k -tou složku $X_t^{(j)}, X_t^{(k)}$ BDLP procesu, resp. $Y_t^{(j)}, Y_t^{(k)}$ OU procesu. Tvar křížové korelační funkce pro vícerozměrný OUCP je odvozen dvojím způsobem – v práci [4] a článku [5] a je následující:

$$g_{jk}(t_j, t_k) = 1 + \frac{I_{jk} (e^{-\gamma(t_k-t_j)} + e^{-\gamma(t_j+t_k)})}{2 [I_j (1 - e^{-\gamma t_j}) + s_j e^{-\gamma t_j}] [I_k (1 - e^{-\gamma t_k}) + s_k e^{-\gamma t_k}]},$$

kde $Y_0 = (s_1, \dots, s_n)$, $I_j = \mathbb{E} X_1^{(j)}$ je střední hodnota j -té složky a $I_{jk} = \int_{\mathbb{R}^2} x_j x_k \nu(dx)$, přičemž $x = (x_1, \dots, x_d)$ a ν je Lévyho míra procesu X .

Kapitola 2

Modelování závislosti složek Lévyho procesu

2.1 Úvod do kopulí

V této části zavedeme pojem kopule a uvedeme základní vlastnosti kopulí a jejich příklady, které budeme používat v další části. Budeme značit $\overline{\mathbb{R}}^d = [-\infty, \infty]^d$, pro $a, b \in \overline{\mathbb{R}}^d$ budeme psát $a \leq b$, jestliže $a_k \leq b_k$, $k = 1, \dots, d$ a interval $(a, b] = (a_1, b_1] \times \dots \times (a_d, b_d]$.

Definice 2.1.1. Pro funkci G definujeme G -objem intervalu $(a, b]$ následujícím způsobem. Buď $A \subset \overline{\mathbb{R}}^d$, $G : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $a, b \in A$, pro něž platí $a \leq b$ a $(a, b] \subset A$, pak:

$$V_G((a, b]) = \sum_{x \in \{a_1, b_1\} \times \dots \times \{a_d, b_d\}} (-1)^{\#\{k: x_k = a_k\}} G(x).$$

Pro $d = 1$ je $V_G((a, b]) = G(b) - G(a)$ a pro $d = 2$ je $V_G((a, b]) = G(b_1, b_2) - G(a_1, b_2) - G(b_1, a_2) + G(a_1, a_2)$, takže je-li $G(x) = \prod_{i=1}^d x_i$, je G -objem roven Lebesgueově míře.

Definice 2.1.2. Funkce $G : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ se nazývá d -rostoucí, pakliže $A \subset \overline{\mathbb{R}}^d$ a pro každý interval $(a, b] \subset A$ je $V_G((a, b]) \geq 0$.

Když pro každé $k = 1, \dots, d$ platí $\inf A_i \in A_i$, tak funkci $G : A_1 \times \dots \times A_d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ nazýváme *uzemněná*, jestliže $G(x_1, \dots, x_d) = 0$ kdykoli $x_k = \inf A_k$ pro alespoň jedno $k = 1, \dots, d$.

Je-li b_i maximum i -té složky A , potom funkci $G_i : A_i \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definovanou $G_i(x) = G(b_1, \dots, b_{i-1}, x, b_{i+1}, \dots, b_d)$ nazýváme *marginální funkce* k funkci G .

Definice 2.1.3. (Kopule) d -rozměrná kopule je funkce $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$ taková, že:

- C je uzemněná d -rostoucí.

- Marginály kopule C jsou identity, tj. $C_k(x) = x$, $k = 1, \dots, n$, pro každé $x \in [0, 1]$.

Věta 2.1.4. (Sklarova) Pro d -rozměrnou distribuční funkci G , jejíž marginály jsou G_1, \dots, G_d existuje d -rozměrná kopule C , která pro všechna $x \in \overline{\mathbb{R}}^d$ splňuje rovnost:

$$G(x_1, \dots, x_d) = C(G_1(x_1), \dots, G_d(x_d)). \quad (2.1)$$

Pokud jsou G_1, \dots, G_d spojité, potom je kopule C jednoznačně určena.

Naopak je-li C d -rozměrná kopule a G_1, \dots, G_d distribuční funkce, potom je funkce G definovaná výrazem (2.1) d -rozměrná distribuční funkce s marginálními funkcemi G_1, \dots, G_d .

Důkaz. Důkaz viz [7], Theorem 2.10.9. □

Kopule tedy určují závislost mezi sdruženým rozdělením a jeho marginálními rozděleními. Následující příklad ukazuje jakými funkcemi jsou kopule ohraničeny.

Příklad 2.1.5. Definujme funkce:

$$\begin{aligned} M(x_1, \dots, x_d) &= \min(x_1, \dots, x_d), \\ \Pi(x_1, \dots, x_d) &= \prod_{i=1}^d x_i, \\ W(x_1, \dots, x_d) &= \max\left(1 - d + \sum_{i=1}^d x_i, 0\right), \end{aligned}$$

kde $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Lze dokázat, že funkce M a Π jsou kopule. Funkce W není kopule pro $d > 2$. Sdružené rozdělení má kopuli Π právě tehdy, když má nezávislá marginální rozdělení.

Dále pro každou d -rozměrnou kopuli C platí:

$$W(x) \leq C(x) \leq M(x) \text{ pro } x \in \mathbb{R}^d.$$

O kopuli M (resp. o funkci W) hovoříme jako o *horní (resp. dolní) Fréchetově-Hoeffdingově mezi*.

Na závěr této podkapitoly uvedeme příklady dvojrozměrných kopulí, o kterých ještě budeme mluvit v podkapitole následující.

Příklad 2.1.6. Následující tři funkce splňují definici 2-rozměrné kopule:

1. *Claytonova rodina kopulí:*

$$C_\theta(x_1, x_2) = [\max(x_1^{-\theta} + x_2^{-\theta} - 1, 0)]^{-\frac{1}{\theta}}, \quad \theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}, \quad (2.2)$$

její limitní chování je $C_{-1} = W$, $C_0 = \Pi$, $C_\infty = M$.

2. *Aliho-Mikhailova-Haqova rodina kopulí:*

$$C_\theta(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{1 - \theta(1 - x_1)(1 - x_2)}, \quad \theta \in [-1, 1), \quad (2.3)$$

její limitní chování je $C_0 = \Pi$.

3. *Gumbelova-Hougaardova rodina kopulí:*

$$C_\theta(x_1, x_2) = \exp \left\{ [(-\log x_1)^\theta + (-\log x_2)^\theta]^{\frac{1}{\theta}} \right\}, \quad \theta \in [1, \infty), \quad (2.4)$$

její limitní chování je $C_1 = \Pi$, $C_\infty = M$.

2.2 Lévyho kopule

Strukturu závislosti složek vícerozměrných Lévyho procesů lze díky Lévyho-Itôově dekompozici redukovat na varianční matici a Lévyho míru. Závislost v Lévyho míře lze reprezentovat tzv. *Lévyho kopulí*. Nejprve vyložíme teorii pro Lévyho procesy s kladnými skoky a posléze uvedeme možné zobecnění pro obecné Lévyho procesy.

Definice 2.2.1. (Zbytkový integrál) Je-li X subordinátor na \mathbb{R}^d s Lévyho mírou ν , potom *d-rozměrný zbytkový integrál*, nebo též *tail integrál* je funkce $U : [0, \infty]^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definovaná předpisem:

$$U(x) = \int_{[x_1, \infty) \times \dots \times [x_d, \infty)} \nu(d\xi), \quad \text{pro } x = (x_1, \dots, x_d) \in [0, \infty)^d.$$

Jeho *marginály*, nebo též *zbytkové integrály j-té složky* subordinátoru definujeme následovně:

$$U_k(x_k) = U(0, \dots, 0, x_k, 0, \dots, 0), \quad k = 1, \dots, d.$$

Poznámka 2.2.2. *d-rozměrné zbytkové integrály* mají následující vlastnosti:

- $(-1)^d U$ je *d*-rostoucí.
- $U(x_1, \dots, x_d) = 0$ právě tehdy, když alepoň jeden z argumentů $x_k = \infty$.
- $U(x_1, \dots, x_d)$ je konečný všude kromě $x = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^d$.

Definice 2.2.3. Funkce $F : [0, \infty]^d \rightarrow [0, \infty]$ je *Lévyho kopule subordinátoru*, jestliže:

- $F(x_1, \dots, x_d) < \infty$ pro $(x_1, \dots, x_d) \neq (\infty, \dots, \infty)$.
- F je uzemněná, tj. $F(x_1, \dots, x_d) = 0$ kdykoli $x_k = 0$ pro alespoň jedno $k \in \{1, \dots, d\}$.
- F je *d*-rostoucí.

- Marginály kopule F jsou rovny $F_k(x_k) = x_k$ pro $k \in \{1, \dots, d\}$, $x_k \in [0, \infty]$.

V literatuře se těmto Lévyho kopulím rovněž říká *Lévyho kopule procesů s kladnými skoky*.

Následující věta udává podobnou vlastnost pro Lévyho kopule, se kterou jsme se setkali ve Sklarově větě 2.1.4 pro obyčejné kopule.

Věta 2.2.4. *Nechť je ν Lévyho míra na \mathbb{R}_+^d se zbytkovým integrálem U a buďte ν_1, \dots, ν_d marginální Lévyho míry. Potom existuje F Lévyho kopule subordinátoru taková, že:*

$$U(x_1, \dots, x_d) = F(U_1(x_1), \dots, U_d(x_d)), \text{ pro } (x_1, \dots, x_d) \in [0, \infty]^d, \quad (2.5)$$

kde U_1, \dots, U_d jsou zbytkové integrály Lévyho měř ν_1, \dots, ν_d . Tato Lévyho kopule je jednoznačně určena na $\prod_{i=1}^d \overline{\text{Ran } U_i}$.

Naopak je-li F Lévyho kopule subordinátoru a jsou-li ν_1, \dots, ν_d Lévyho míry na $(0, \infty)$ se zbytkovými integrály U_1, \dots, U_d , potom je U definované výrazem (2.5) zbytkový integrál Lévyho míry na \mathbb{R}_+^d s marginálními Lévyho měrami ν_1, \dots, ν_d .

Důkaz. Uvedeme důkaz pro $d = 2$. Důkaz pro obecnou dimenzi je uveden v [3], Theorem 3.6, str. 6 – 9.

Předpokládejme, že jsou U_1 a U_2 spojité. Vyberme inverse $U_1^{(-1)}$ a $U_2^{(-1)}$ tak, že $U_1^{(-1)}(0) = U_2^{(-1)}(0) = \infty$ a $U_1^{(-1)}(\infty) = U_2^{(-1)}(\infty) = 0$. Položme:

$$\widehat{F}(x_1, x_2) = U(U_1^{(-1)}(x_1), U_2^{(-1)}(x_2)), \quad x_1, x_2 \in [0, \infty],$$

potom není obtížné ověřit, že \widehat{F} je Lévyho kopule a že splňuje (2.5).

Kdyby existovala jiná taková Lévyho kopule \widetilde{F} , pak pro každé $x_1, x_2 \in [0, \infty]$ je $\widehat{F}(U_1(x_1), U_2(x_2)) = \widetilde{F}(U_1(x_1), U_2(x_2))$. Ze spojitosti U_1 a U_2 dostaneme, že pro každé $x_1, x_2 \in [0, \infty]$ je i $\widehat{F}(x_1, x_2) = \widetilde{F}(x_1, x_2)$. Opačné tvrzení plyne z přímého ověření (2.5). \square

Následující dva příklady uvádějí jakousi obdobu Příkladu 2.1.5 pro Lévyho kopule. Podrobnější důkazy vyslovených faktů jsou opět k nalezení v [1].

Příklad 2.2.5. (Nezávislost) Bud' $X = (X^{(1)}, \dots, X^{(d)})$ subordinátor na \mathbb{R}^d , jehož Lévyho míra je ν , pak jsou jeho složky nezávislé právě tehdy, když:

$$\nu(B) = \sum_{j=1}^d \nu_j(B_j), \text{ kde } B_j = \{x \in \mathbb{R}^d : (0, \dots, 0, x_j, 0, \dots, 0) \in B\}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Z toho plyne i rovnost pro marginálních zbytkové integrály:

$$U(x_1, \dots, x_d) = \sum_{j=1}^d U_j(x_j) \mathbb{I}_{x_{-j}=0}, \quad x = (x_1, \dots, x_d) \in [0, \infty]^d,$$

kde x_{-j} značí vektor $(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_d)$ a rovnost $x_{-j} = 0$ chápeme jako $x_{-j} = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{d-1}$. Zbytkové integrály složek jsou spojité. Následně podle vzorce (2.5) vyjádříme i Lévyho kopuli F_{\perp} :

$$F_{\perp}(x_1, \dots, x_d) = \sum_{j=1}^d x_j \mathbb{I}_{x_{-j}=\infty}, \quad x \in [0, \infty]^d. \quad (2.6)$$

Příklad 2.2.6. (Kompletní závislost) Nechť $X = (X^{(1)}, \dots, X^{(d)})$ je subordinátor na \mathbb{R}^d s Lévyho mírou ν . Jsou-li skoky procesu kompletně závislé (tzn. trajektorii $X^{(j)}$ lze zrekonstruovat z trajektorií $X^{(-j)}$), pak je Lévyho kopule subordinátoru ve tvaru:

$$F_{\parallel}(x_1, \dots, x_d) = \min(x_1, \dots, x_d), \quad x \in [0, \infty]^d. \quad (2.7)$$

Naopak je-li Lévyho kopule subordinátoru X dána (2.7) a jsou-li zbytkové integrály složek X spojité, pak jsou skoky procesu X kompletně závislé.

Dále uvedeme možné metody jak konstruovat Lévyho kopule. Pro jednoduchost se omezíme na $d = 2$. Pro vyšší dimenze odkazujeme čtenáře na [3].

Tvrzení 2.2.7. *Bud' C dvojrozměrná kopule a bud' f rostoucí konvexní funkce, $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$, $f(0) = 0$, $f(1) = \infty$. Potom:*

$$F(x_1, x_2) = f(C(f^{-1}(x_1), f^{-1}(x_2))) \quad (2.8)$$

definuje dvojrozměrnou Lévyho kopuli subordinátoru.

Důkaz. Viz [1], Proposition 5.5. □

Tvrzení 2.2.8. *Bud' ϕ rostoucí konvexní funkce taková, že $\phi : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$, $\phi(0) = \infty$ a $\phi(\infty) = 0$. Potom:*

$$F(x_1, x_2) = \phi^{-1}(\phi(x_1) + \phi(x_2)) \quad (2.9)$$

definuje dvojrozměrnou Lévyho kopuli subordinátoru.

Důkaz. Důkaz viz [1], Proposition 5.6. □

Příklad 2.2.9. (Claytonova rodina Lévyho kopulí) Když ve Tvrzení 2.2.8 uvažujeme funkci $\phi(x) = x^{-\theta}$ pro $\theta > 0$, potom obdržíme po dosazení do vzorce (2.9) parametrickou třídu Lévyho kopulí subordinátoru:

$$F_{\theta}(x_1, x_2) = (x_1^{-\theta} + x_2^{-\theta})^{-\frac{1}{\theta}}, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+, \quad (2.10)$$

kteřá nám připomíná obyčejnou Claytonovu rodinu kopulí, viz (2.2). Její limitní chování je obdobné, $F_{\theta} \rightarrow F_{\perp}$ pro $\theta \rightarrow 0$ a $F_{\theta} \rightarrow F_{\parallel}$ pro $\theta \rightarrow \infty$.

Poznámka 2.2.10. Zaslouží si pozornost, že kopule F_θ v předchozím příkladu jsou nazývány v [1] a [3] *Claytonova rodina Lévyho kopulí*, ačkoli z této rodiny nevznikla. Vlastně s ní má společného jen to, že se jí podobá ve vyjádření vzorcem a má podobné limitní chování.

V následujících dvou příkladech jsme se snažili užít Tvrzení 2.2.7 na výše uvedené kopule, čímž jsme získali nové rodiny Lévyho kopulí.

Příklad 2.2.11. Zkusme vzít ve Tvrzení 2.2.7 za funkci f funkci $f(x) = -\log(1-x)$, potom její inverze je rovna $f^{(-1)}(x) = 1 - e^{-x}$. Tato funkce splňuje předpoklady řečeného tvrzení a tedy můžeme zkoušet brát nějaké známé kopule a počítat dle vzorce (2.8) Lévyho kopule subordinátorů:

1. Je-li C_θ Aliho-Mikhailova-Haqova rodina kopulí, viz (2.3), získáme následující rodinu Lévyho kopulí:

$$F_\theta(x_1, x_2) = -\log \left[\frac{e^{x_1} + e^{x_2} - \theta - 1}{e^{x_1+x_2} - \theta} \right], \quad \theta \in [-1, 1). \quad (2.11)$$

2. Pro C_θ Gumbelovu-Hougaardovu rodinu kopulí, viz (2.4), obdržíme:

$$F_\theta(x_1, x_2) = -\log \left\{ 1 - \exp \left[- \left([-\log(1 - e^{-x_1})]^\theta + [-\log(1 - e^{-x_2})]^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \right] \right\},$$

$$\theta \in [1, \infty).$$

Limitní chování není tak pěkné jako u Lévyho kopule v Příkladu 2.2.9, ale $\lim_{\theta \rightarrow \infty} F_\theta(x_1, x_2) = \infty$.

3. Pro C_θ Claytonovu třídu obyčejných kopulí, viz. (2.2) dostaneme:

$$F_\theta(x_1, x_2) = -\log \left\{ 1 - \max \left[0, (1 - e^{-x_1})^{-\theta} + (1 - e^{-x_2})^{-\theta} \right]^{-\frac{1}{\theta}} \right\},$$

$$\theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\},$$

pro $\theta \rightarrow \infty$ dostaneme totéž co v předchozím případě, tj. $F_\infty = \infty$.

Příklad 2.2.12. Nyní uijeme ve Tvrzení 2.2.7 funkci $f(x) = \frac{x}{1-x}$. Její inverze je $f^{(-1)}(x) = \frac{x}{1+x}$. Budeme zkoušet brát známé kopule a spočítáme dle vzorce (2.8) Lévyho kopule subordinátorů:

1. Je-li C_θ Aliho-Mikhailova-Haqova rodina kopulí, viz (2.3), máme následující rodinu Lévyho kopulí:

$$F_\theta(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{1 - \theta + x_1 + x_2}, \quad \theta \in [-1, 1). \quad (2.12)$$

2. Pro C_θ Gumbelovu-Hougaardovu rodinu kopulí, viz (2.4), obdržíme:

$$F_\theta(x_1, x_2) = \frac{1}{\exp \left\{ \left[\left(-\log \frac{x_1}{1+x_1} \right)^\theta + \left(-\log \frac{x_2}{1+x_2} \right)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\} - 1}, \quad \theta \in [1, \infty).$$

3. Pro C_θ Claytonovu třídu obyčejných kopulí, viz. (2.2) dostaneme:

$$F_\theta(x_1, x_2) = \frac{1}{\max \left[0, \left(\frac{x_1+1}{x_1} \right)^\theta + \left(\frac{x_2+1}{x_2} \right)^\theta - 1 \right]^{\frac{1}{\theta}} - 1}, \quad \theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}.$$

Pro úplnost ještě uvádíme definici Lévyho kopule pro obecný proces.

Definice 2.2.13. (Lévyho kopule pro obecný Lévyho proces) Funkce $F : \overline{\mathbb{R}}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ se nazývá *Lévyho kopule*, jestliže jsou splněny následující podmínky:

1. $F(x_1, \dots, x_d) \neq \infty$, pro $(x_1, \dots, x_d) \neq (\infty, \dots, \infty)$.
2. $F(x_1, \dots, x_d) = 0$ jestliže $x_i = 0$ pro alespoň jedno $i \in \{1, \dots, d\}$.
3. Funkce F je d -rostoucí.
4. Funkce F má rovnoměrné marginály, tj. $F^{\{i\}}(x) = x$ pro $x \in \overline{\mathbb{R}}$.

Poznámky 2.2.14.

- Srovnáním předchozí definice s definicí Lévyho kopule subordinátoru zjistíme, že Lévyho kopule pro subordinátor dodefinované na $\mathbb{R}^d \setminus \mathbb{R}_+^d$ nulou jsou zároveň Lévyho kopule z předchozí definice.
- V článku [3] (Theorem 5.3) je rozebíráno, jak z 2^d Lévyho kopulí pro subordinátory sestavit Lévyho kopuli pro obecný Lévyho proces na \mathbb{R}^d , což sice může být komplikované, ale námi zkoumané Lévyho kopule subordinátorů tak neztrácejí na obecnosti.

V závěru podkapitoly uvedeme příklad možného zobecnění Claytonovy rodiny Lévyho kopulí (viz [3]).

Příklad 2.2.15. Nechtě $\theta > 0$ a $\eta \in (0, 1)$, potom je funkce:

$$F_{\theta, \eta}(x_1, \dots, x_d) = 2^{2-d} \left(\sum_{j=1}^d |x_j|^{-\theta} \right)^{-\frac{1}{\theta}} \left(\eta \mathbb{I}_{\{x_1, \dots, x_d \geq 0\}} - (1 - \eta) \mathbb{I}_{\{x_1, \dots, x_d < 0\}} \right)$$

dvouparametrická rodina Lévyho kopulí.

2.3 Křížová korelační funkce

V této sekci nás bude blíže zajímat průběh křížové korelační funkce. Nebudeme však uvažovat přímo křížovou korelační funkci pro Coxův bodový proces, jak byla definována v (1.12), neboť může být omezující podmínka na nezápornost intenzit λ_j . Definujeme ji tedy pro Lévyho proces, který má konečný druhý moment. Tato funkce modeluje závislost mezi složkami. V případě subordinátoru dostává křížová korelační funkce smysl i pro Coxův proces.

Definice 2.3.1. (Křížová korelační funkce) Buď $X = (X^{(1)}, \dots, X^{(d)})$ Lévyho proces na \mathbb{R}^d . Za předpokladu $\mathbb{E}|X_t|^2 < \infty$, $\forall t > 0$ (obecně stačí $\mathbb{E}|X_{t_j}^{(j)} X_{t_k}^{(k)}| < \infty$ pro $\forall t_j, t_k > 0$) definujeme funkci $g_{jk} : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$, kterou nazveme *křížová korelační funkce j -té a k -té složky Lévyho procesu X* :

$$g_{jk}(t_j, t_k) = \frac{\mathbb{E}[X_{t_j}^{(j)} X_{t_k}^{(k)}]}{\mathbb{E}[X_{t_j}^{(j)}] \mathbb{E}[X_{t_k}^{(k)}]}, \quad t_j, t_k \in \mathbb{R}_+. \quad (2.13)$$

Tvrzení 2.3.2. *Nechť X je Lévyho proces na \mathbb{R}^d s charakteristickou trojicí (A, ν, γ) pro který platí:*

$$\int_{|x|>1} |x_j| \nu(dx) < \infty.$$

Pak pro libovolné $t > 0$ platí:

$$\mathbb{E} X_t^{(j)} = t\gamma_j + t \int_{|x|>1} x_j \nu(dx).$$

Důkaz. Důkaz se provede derivováním charakteristické funkce, která se rozepíše podle Lévyho-Khintchinovy věty. Plný důkaz je uveden v práci [4], Tvrzení 4.2.2. \square

Tvrzení 2.3.3. *Mějme X Lévyho proces na \mathbb{R}^d s charakteristickou trojicí (A, ν, γ) , pro jehož j -tou a k -tou složku platí:*

$$\int_{|x|>1} |x_j| \nu(dx) < \infty \text{ a } \int_{|x|>1} |x_k| \nu(dx) < \infty.$$

Platí-li navíc:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |x_j x_k| \nu(dx) < \infty,$$

pak pro libovolné $t > 0$ platí rovnost:

$$\mathbb{E}[X_{t_j}^{(j)} X_{t_k}^{(k)}] = \mathbb{E}[X_{t_j}^{(j)}] \mathbb{E}[X_{t_k}^{(k)}] + tA_{jk} + t \int_{\mathbb{R}^d} x_j x_k \nu(dx) < \infty.$$

Důkaz. Důkaz probíhá podobně jako v předchozím tvrzení. Podrobnosti jsou opět viz [4], Tvrzení 4.2.3. \square

Označení 2.3.4. Pro přehlednost budeme značit I_j , respektive I_{jk} výrazy v předchozích dvou tvrzeních:

$$I_j = \gamma_j + \int_{|x|>1} x_j \nu(dx), \quad (2.14)$$

$$I_{jk} = A_{jk} + \int_{\mathbb{R}^d} x_j x_k \nu(dx). \quad (2.15)$$

Díky Lévyho-Itôově větě můžeme při zkoumání závislosti mezi složkami u všech Lévyho procesů předpokládat, že je Gaussova varianční matice nulová. Protože se dále zabýváme jen subordinátory, slouží další Lemma k lepšímu vyjádření křížové korelační funkce.

Lemma 2.3.5. *Bud' $X = (X^{(1)}, \dots, X^{(d)})$ Lévyho proces na \mathbb{R}^d , přičemž jeho složky $X^{(j)}$ a $X^{(k)}$ jsou subordinátory. Nechť má X konečný druhý moment a nechť je matice v Lévyho-Khintchinově reprezentaci nulová. Potom pro $T > 0$ a omezené měřitelné funkce f, g platí:*

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_0^T f(t) dX_t^{(j)} &= I_j \int_0^T f(t) dt, \\ \mathbb{E} \int_0^T f(t) dX_t^{(j)} \int_0^T g(t) dX_t^{(k)} &= I_j I_k \int_0^T f(t) dt \int_0^T g(t) dt + I_{jk} \int_0^T f(t) g(t) dt, \end{aligned}$$

kde I_j a I_{jk} jsou definovány jako v (2.14), resp. (2.15) a $A_{jk}=0$.

Důkaz. Procesy $X^{(j)}$, $X^{(k)}$ jsou subordinátory, a tak mají konečnou variaci. Proto jsou jednotlivé integrály při pevném $\omega \in \Omega$ Lebesgueovy-Stieljesovy, dál se postupuje tzv. standardním postupem teorie míry. Důkaz je možné nalézt v [4], Lemma 2.2.3. \square

Důsledek 2.3.6. *Uvažujme-li v předchozím lemmatu funkce $f(x) = \mathbb{I}_{[0, t_j]}(x)$, resp. $g(x) = \mathbb{I}_{[0, t_k]}(x)$ dostaneme:*

$$\begin{aligned} \mathbb{E} X_{t_j}^{(j)} X_{t_k}^{(k)} &= I_j I_k \int_0^T \mathbb{I}_{[0, t_j]}(t) dt \int_0^T \mathbb{I}_{[0, t_k]}(t) dt + I_{jk} \int_0^T \mathbb{I}_{[0, t_j \wedge t_k]}(t) dt \\ &= I_j I_k t_j t_k + I_{jk}(t_j \wedge t_k), \quad \text{pro } \forall t_j, t_k \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

Po dosazení do křížové korelační funkce získáme tvar:

$$g_{jk}(t_j, t_k) = \frac{\mathbb{E}[X_{t_j}^{(j)} X_{t_k}^{(k)}]}{\mathbb{E}[X_{t_j}^{(j)}] \mathbb{E}[X_{t_k}^{(k)}]} = \frac{I_j I_k t_j t_k + I_{jk}(t_j \wedge t_k)}{I_j I_k t_j t_k} = 1 + \frac{I_{jk}}{I_j I_k} \cdot \frac{t_j \wedge t_k}{t_j t_k},$$

také pro $\forall t_j, t_k \in \mathbb{R}_+$.

Jak jsme již poznamenali v (1.4), platí-li $\int_{|x|\leq 1} |x| \nu(dx) < \infty$, lze použít nulovou usekávací funkci a příslušný Lévyho proces X má charakteristickou trojici $(0, \nu, \gamma_0)_0$. Potom platí převodní vztah:

$$\gamma_0 = \gamma - \int_{|x|\leq 1} x \nu(dx).$$

Tím zjednodušíme výpočty I_j definovaných v (2.14), neboť:

$$\begin{aligned} I_j &= \gamma_j + \int_{|x|>1} x_j \nu(dx) = \gamma_{0,j} + \int_{|x|\leq 1} x_j \nu(dx) + \int_{|x|>1} x_j \nu(dx) \\ &= \gamma_{0,j} + \int_{\mathbb{R}^2} x_j \nu(dx). \end{aligned}$$

Věta 2.3.7. *Nechť X je Lévyho proces na \mathbb{R}^2 s Lévyho mírou ν , která má hustotu ρ vůči Lebesgueově míře a její složky ν_1, ν_2 mají hustoty ρ_1, ρ_2 . Nechť U je zbytkový integrál, který je $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Potom existuje F Lévyho kopule, která je $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ a navíc platí:*

$$\rho(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_2} \Big|_{y_1=U_1(x_1), y_2=U_2(x_2)} \rho_1(x_1) \rho_2(x_2), \quad (2.16)$$

kde U_1, U_2 jsou zbytkové integrály ν_1, ν_2 .

Důkaz. Důkaz věty je založen na derivování výrazu (2.5) ve Větě 2.2.4. Stačí si uvědomit, že $U(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{\infty} \int_{x_2}^{\infty} \rho(y_1, y_2) dy_1 dy_2$, $U_j(x_j) = \int_{x_j}^{\infty} \rho_j(y) dy$, $j = 1, 2$. Po dosazení do výrazu:

$$U(x_1, x_2) = F(U_1(x_1), U_2(x_2))$$

a po jeho následném dvojnásobném zderivování obdržíme dokazovanou skutečnost. \square

Předchozí větu budeme užívat ke zkoumání průběhu křížové korelační funkce, budeme to provádět následujícím způsobem. Vezmeme nějakou parametrickou rodinu Lévyho kopulí, zvolíme ρ_1, ρ_2 hustoty složek dvourozměrného subordinátoru, dosadíme do vzorce (2.16) a budeme sledovat průběh křížové korelační funkce $g_{12}(\cdot, \cdot)$.

Nejprve tedy spočteme druhé derivace u použitých Lévyho kopulí pro subordinátory.

Příklad 2.3.8. Uvažujeme-li Claytonovu rodinu Lévyho kopulí pro subordinátory, pak má její druhá derivace po úpravě tvar:

$$\frac{\partial^2 F_{\theta}}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = (1 + \theta) x_1^{\theta-1} x_2^{\theta-1} \frac{(x_1^{-\theta} + x_2^{-\theta})^{-\frac{1}{\theta}}}{(x_1^{\theta} + x_2^{\theta})^2}.$$

Příklad 2.3.9. Uvažujme-li Aliho-MikHailovu-Haqovu Lévyho kopuli viz (2.11), je její druhá derivace tvaru:

$$\frac{\partial^2 F_\theta}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = e^{x_1+x_2} \cdot \frac{e^{2(x_1+x_2)} - \theta(e^{2x_1} + e^{2x_2} + e^{x_1+x_2}) + 2\theta(\theta+1)(e^{x_1} + e^{x_2}) - \theta(\theta^2 + \theta + 1)}{(e^{2x_1+x_2} + e^{x_1+2x_2} - \theta(e^{x_1} + e^{x_2}) - (\theta+1)e^{x_1+x_2} + \theta(\theta+1))^2}.$$

Příklad 2.3.10. Uvažujme-li Aliho-MikHailovu-Haqovu Lévyho kopuli z Příkladu 2.2.12, potom je její druhá derivace:

$$\frac{\partial^2 F_\theta}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{(1-\theta)(1-\theta+x_1+x_2) + 2x_1x_2}{(1-\theta+x_1+x_2)^3}$$

Přistoupíme tedy k vybraným subordinátorům, které jsme již zmiňovali v příkladech v první kapitole. Budou to složený Poissonův proces, Gamma proces a Inversní Gaussův proces. Pro jednoduchost uvažujeme dvojrozměrné procesy takové, že jejich marginály jsou vždy stejného typu. Nebudeme tedy výše uvedené procesy „míchat“.

Díky Lévy-Itôově větě budeme uvažovat v Lévyho charakteristické trojici procesy s nulovou varianční maticí $A = 0$ a nulovým driftem $\gamma_{0,j}$, $j = 1, 2$. Připomeňme, že křížová korelační funkce bude tvaru:

$$g_{12}(t_1, t_2) = 1 + \frac{I_{12}}{I_1 I_2} \cdot \frac{t_1 \wedge t_2}{t_1 t_2}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+, \quad (2.17)$$

kde díky zjednodušujícím předpokladům na začátku této sekce je:

$$I_j = \int_{\mathbb{R}^2} x_j \rho(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad j = 1, 2, \quad I_{12} = \int_{\mathbb{R}^2} x_1 x_2 \rho(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

2.3.1 Složený Poissonův proces

Uvažujme-li složky subordinátoru složené Poissonovy procesy, bude, jak jsme již mohli vidět v (1.5), pro jejich Lévyho míry platit $\nu_j(dx) = \lambda_j \sigma_j(dx)$, $\lambda_j > 0$, $j = 1, 2$, kde σ_j je rozdělení skoků. Pokud mají obě složky hustotu vzhledem k Lebesgueově míře, značme je g_1 a g_2 , pak tedy pro ρ_1 , ρ_2 hustoty Lévyho míry vzhledem k Lebesgueově míře platí:

$$\rho_j(x) = \lambda_j g_j(x), \quad j = 1, 2.$$

Abychom vůbec hovořili o subordinátoru, musí být nosič míry σ podmnožinou kladné reálné osy. Jinými slovy, nesmí docházet k záporným skokům.

Vyjádríme zbytkové integrály:

$$U_j(x_j) = \lambda_j(1 - G_j(x_j)), \quad j = 1, 2,$$

kde G_j je distribuční funkce rozdělení skoků složeného Poissonova procesu.

Obecně dostaneme po dosazení do vzorce (2.16) při užití Claytonovy rodiny Lévyho kopulí (2.10) vyjádření pro sdruženou Lévyho hustotu:

$$\rho_\theta(x_1, x_2) = (1 + \theta) \lambda_1^{\theta-1} (1 - G_1(x_1))^{\theta-1} \lambda_2^{\theta-1} (1 - G_2(x_2))^{\theta-1} \cdot \frac{(\lambda_1^{-\theta} (1 - G_1(x_1))^{-\theta} + \lambda_2^{-\theta} (1 - G_2(x_2))^{-\theta})^{-\frac{1}{\theta}}}{(\lambda_1^\theta (1 - G_1(x_1))^\theta + \lambda_2^\theta (1 - G_2(x_2))^\theta)^2} \cdot \lambda_1 g_1(x_1) \lambda_2 g_2(x_2).$$

Nyní navíc uvažujme, že $X^{(1)}, X^{(2)}$ jsou dva složené Poissonovy procesy s exponenciálně rozdělenými skoky. Necht' jsou shodné i parametry $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$ Poissonových procesů a $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha > 0$ parametry exponenciálních rozdělení skoků. Potom pro zbytkové integrály platí:

$$U_j(x_j) = \lambda e^{-\alpha x_j}, \quad j = 1, 2$$

a pro hustotu Lévyho míry sdruženého procesu vzhledem k Lebesgueově míře platí:

1. Pro Claytonovu rodinu Lévyho kopulí dostáváme hustotu:

$$\begin{aligned} \rho_\theta(x_1, x_2) &= \alpha^2 \lambda (\theta + 1) e^{-\alpha \theta (x_1 + x_2)} \cdot \frac{(e^{\alpha \theta x_1} + e^{\alpha \theta x_2})^{-\frac{1}{\theta}}}{(e^{-\alpha \theta x_1} + e^{-\alpha \theta x_2})^2} \\ &= \alpha^2 \lambda (\theta + 1) e^{\alpha \theta (x_1 + x_2)} \cdot (e^{\alpha \theta x_1} + e^{\alpha \theta x_2})^{-\frac{1}{\theta} - 2}. \end{aligned}$$

2. Při užití Aliho-Mikhailovy-Haqovy rodiny Lévyho kopulí z příkladu 2.2.12 dostaneme:

$$\rho_\theta(x_1, x_2) = (1 - \theta) \cdot \frac{(1 - \theta + \lambda(e^{-\alpha x_1} + e^{-\alpha x_2})) + 2\lambda^2 e^{-\alpha(x_1 + x_2)}}{(1 - \theta + \lambda(e^{-\alpha x_1} + e^{\alpha x_2}))^3}.$$

Dále potřebujeme počítat I_{12} resp. I_1 a I_2 , které byly definovány v (2.15), resp. (2.14). Ale tyto vzorce nelze vyjádřit v nějakém přijatelném tvaru, ani použití speciálních funkcí nevede ke zjednodušení. Nicméně lze numericky spočítat hodnoty funkce g_{12} , které ovšem nyní závisí na třech proměnných a sice na časech t_1, t_2 a na parametru θ , který nám přibyl jako parametr rodiny Lévyho kopulí.

Limitní vlastnosti popisované v Příkladu 2.2.9 se promítnou v průběhu funkce g při pevných časech t_1, t_2 . To rozebereme v závěru kapitoly.

2.3.2 Gamma proces

Zde budeme postupovat podobně jako v předchozím případě, volíme tedy za složky dvojrozměrného subordinátoru Gamma procesy. Omezíme se na to, že obě složky budou se stejnými parametry $\alpha > 0, p > 0$, které jsou uvedeny ve vyjádření hustoty (1.7), činíme tak proto, že většina vzorců, které zde uvádíme, je i tak poměrně složitá a bez tohoto omezení by ještě úměrně narostla. Toto omezení není příliš svazující a numerické výpočty, které jsme prováděli v programu [13], by probíhaly

stejně. Limitní vlastnosti křížové korelační funkce by zůstaly zachovány, ztratila by se symetrie a konvergence rozebíraná v záveru by byla různě rychlá.

Zopakujme, že hustota Lévyho míry vzhledem k Lebesgueově míře, kterou jsme odvodili v Příkladu 1.2.6 má tvar:

$$\rho(x) = px^{-1} e^{-\alpha x} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x), \quad p > 0, \alpha > 0.$$

Spočítáme zbytkové integrály pro složky $j = 1, 2$:

$$U_j(x_j) = \int_{x_j}^{\infty} \nu_j(dx) = \int_{x_j}^{\infty} \frac{p e^{-\alpha x}}{x} dx.$$

Značení 2.3.11. Zavedme integrální funkci pro $z > 0$ a $q \geq 1$:

$$E_q(z) = \int_z^{\infty} \frac{e^{-x}}{x^q} dx.$$

Budeme o ní mluvit jako o *lomené integrálně-exponenciální funkci řádu q* .

Máme tedy $U_j(x_j) = pE_1(\alpha x_j)$, $j = 1, 2$. Použili jsme opět výše uvedené Lévyho kopule k modelování průběhu křížové korelační funkce g_{12} . Zde jsou vyjádřeny jejich sdružené Lévyho hustoty vzhledem k Lebesgueově míře:

1. Pro Aliho-Mikhailovu-Haqovu rodinu Lévyho kopulí z příkladu 2.2.12 dostaneme:

$$\rho_{\theta}(x_1, x_2) = \frac{p^2 e^{-\alpha(x_1+x_2)}(1-\theta)}{x_1 x_2} \cdot \frac{(1-\theta + pE_1(\alpha x_1) + pE_1(\alpha x_2)) + 2E_1(\alpha x_1)E_1(\alpha x_2)}{(1-\theta + E_1(\alpha x_1) + E_1(\alpha x_2))^3}.$$

2. Pro Claytonovu rodinu Lévyho kopulí obdržíme:

$$\rho_{\theta}(x_1, x_2) = p(1+\theta) e^{-\alpha(x_1+x_2)} E_1(\alpha x_1)^{\theta-1} E_1(\alpha x_2)^{\theta-1} \cdot \frac{(E_1(\alpha x_1)^{-\theta} + E_1(\alpha x_2)^{-\theta})^{-\frac{1}{\theta}}}{(E_1(\alpha x_1)^{\theta} + E_1(\alpha x_2)^{\theta})^2}.$$

2.3.3 Inversní Gaussův proces

Zde budeme volit za složky dvojrozměrného subordinátoru Inversní Gaussův proces. Opět budeme uvažovat obě složky se stejnými parametry:

$$\alpha = \frac{\eta^2}{2} > 0 \quad \text{a} \quad p = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} > 0,$$

jak jsme uvedli v Příkladu 1.2.9.

Hustota Lévyho míry vzhledem k Lebesgueově míře je zde:

$$\rho(x) = px^{-\frac{3}{2}} e^{-\alpha x} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x), \quad p > 0, \alpha > 0.$$

Zbytkové integrály jsou pro složky $j = 1, 2$:

$$U_j(x_j) = \int_{x_j}^{\infty} \nu_j(dx) = \int_{x_j}^{\infty} \frac{p e^{-\alpha x}}{x^{\frac{3}{2}}} dx = pE_{\frac{3}{2}}(\alpha x_j).$$

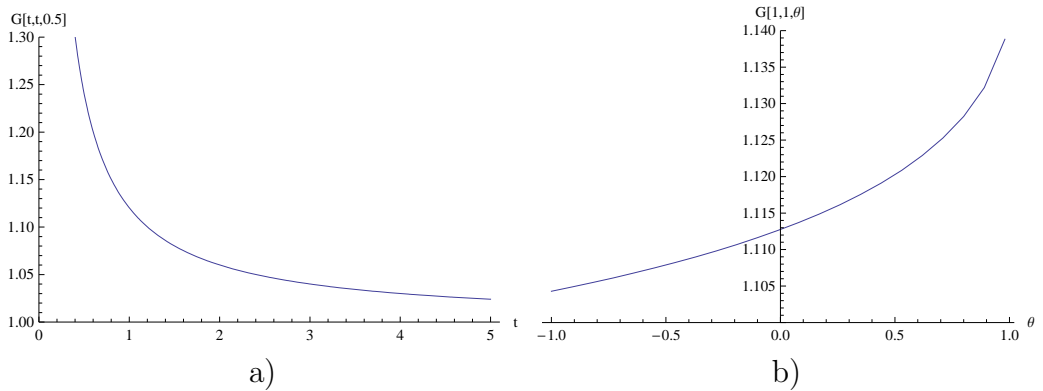
Vzorci pro hustoty ρ_θ zde nebudeme uvádět, jsou téměř shodné se vzorci v sekci o Gamma procesu, jen s rozdílem, že místo E_1 je užitá funkce $E_{\frac{3}{2}}$. Snad jen poznamenejme, že funkce $E_{\frac{3}{2}}$ lze vyjádřit pomocí distribuční funkce normálního rozdělení:

$$E_{\frac{3}{2}}(z) = \frac{2 e^{-z}}{\sqrt{z}} - 2\sqrt{z} + 4 \int_0^{\sqrt{z}} e^{-x^2} dx.$$

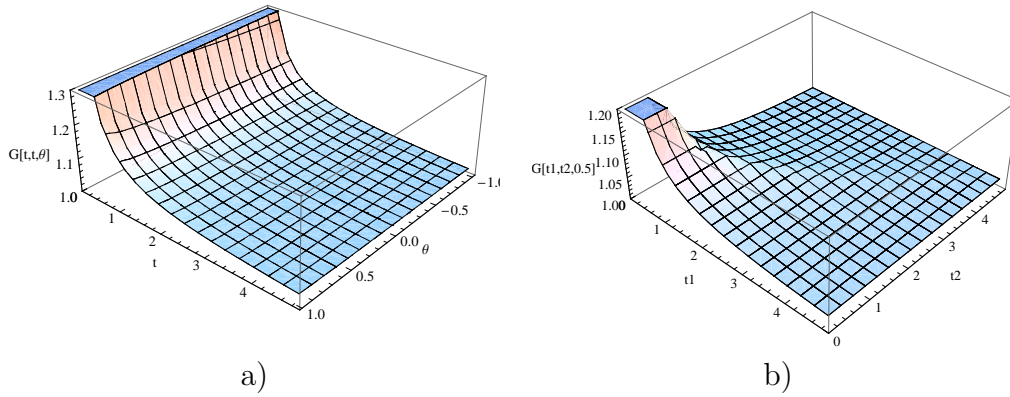
Aliho-Mikhailova-Haqova rodina Lévyho kopulí

Zde předkládáme výsledky týkající se průběhu křížové korelační funkce pro Aliho-Mikhailovu-Haqovu rodinu Lévyho kopulí. Na následujících obrázcích je zobrazen průběh této funkce, přičemž složky 2-rozměrného Lévyho procesu jsou Inversní Gaussovy procesy s parametry $\alpha = 2, p = 1$. Pro Gamma proces i pro složený Poissonův proces jsme dostali obdobné průběhy. Parametr $\theta \in [-1, 1)$ nemá žádný podstatný vliv na limitní chování funkce g_θ a má poměrně malý vliv (oproti časové proměnné) na hodnotu funkce g_θ , což je k nahlédnutí hlavně na Obr. 2.3.3 b).

Již ze vzorce (2.17) vyplývá chování $g_\theta(t_1, t_2) \rightarrow \infty$ pro $t_j \rightarrow 0, j = 1, 2$ a $g_\theta(t_1, t_2) \rightarrow 1$ pro $t_j \rightarrow \infty, j = 1, 2$.



Obrázek 2.1: a) Průběh $g_\theta(t, t)$ jako funkce proměnné t při pevné hodnotě parametru $\theta = 0.5$. b) Průběh $g_\theta(1, 1)$ jako funkce proměnné θ při pevném čase $t = 1$. Kde složky 2-rozměrného Lévyho procesu jsou Inversní Gaussovy procesy s parametry $\alpha = 2, p = 1$.

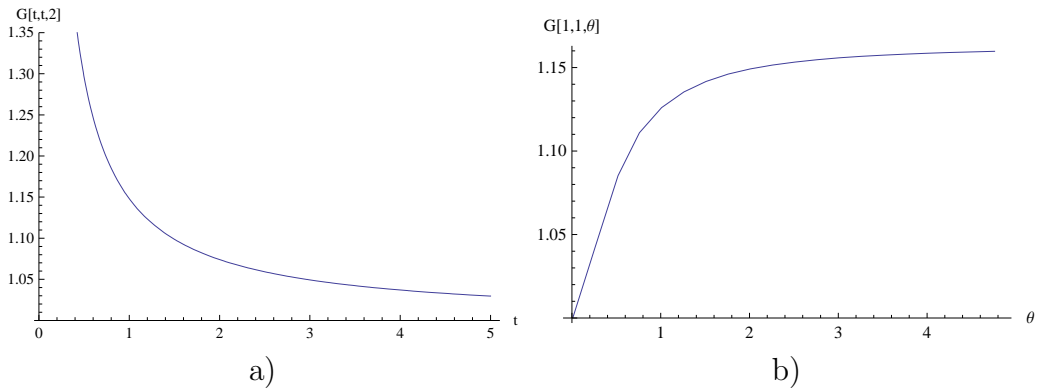


Obrázek 2.2: a) Průběh $g_\theta(t, t)$ jako funkce proměnných t a θ . b) Průběh $g_\theta(t_1, t_2)$ jako funkce dvou proměnných t_1 a t_2 při pevném parametru $\theta = 0.5$. Složky 2-rozměrného Lévyho procesu jsou Inversní Gaussovy procesy s parametry $\alpha = 2$, $p = 1$.

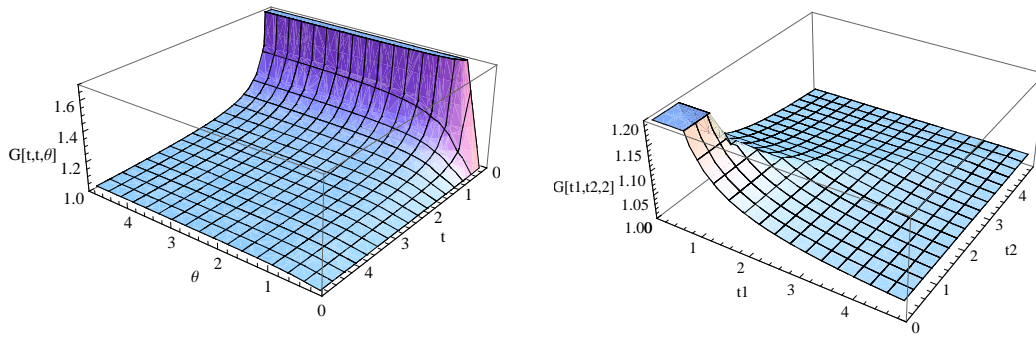
Claytonova rodina Lévyho kopulí

Zde jsou výsledky ohledně průběhu křížové korelační funkce pro Claytonovu rodinu Lévyho kopulí. Na následujících obrázcích je opět zobrazen průběh zkoumané křížové korelační funkce, kde složky subordinátoru jsou Inversní Gaussovy procesy s parametry $\alpha = 3$, $p = 1$. Pro Gamma proces i pro složený Poissonův proces jsme rovněž obdrželi podobné chování. Tentokrát má ovšem parametr θ užitečný vliv na limitní chování funkce g_θ , neboť $g_\theta(t_1, t_2) \rightarrow 1$ pro $\theta \rightarrow 0$ a $g_\theta(t_1, t_2) \rightarrow \infty$ pro $\theta \rightarrow \infty$, což plyne z vlastností Claytonovy rodiny Lévyho kopulí, o kterých jsme již mluvili v Příkladu 2.2.9.

Pro časové proměnné platí stejné chování jako v předchozím případě, je tedy $g_\theta(t_1, t_2) \rightarrow \infty$ pro $t_j \rightarrow 0$, $j = 1, 2$ a $g_\theta(t_1, t_2) \rightarrow 1$ pro $t_j \rightarrow \infty$, $j = 1, 2$.



Obrázek 2.3: a) Průběh $g_\theta(t, t)$ jako funkce proměnné t při pevné hodnotě parametru $\theta = 2$. b) Průběh $g_\theta(1, 1)$ jako funkce proměnné θ při pevném čase $t = 1$. Kde složky 2-rozměrného Lévyho procesu jsou Inversní Gaussovy procesy s parametry $\alpha = 3$, $p = 1$.



a)

b)

Obrázek 2.4: a) Průběh $g_\theta(t, t)$ jako funkce proměnných t a θ . b) Průběh $g_\theta(t_1, t_2)$ jako funkce dvou proměnných t_1 a t_2 při pevném parametru $\theta = 2$. Složky 2-rozměrného Lévyho procesu jsou Inversní Gaussovy procesy s parametry $\alpha = 3$, $p = 1$.

Závěr

Pro všechny tři zkoumané 2-rozměrné subordinátory jsme obdrželi výsledky lišící se jen v hodnotách, nikoli však v tvarech grafů. Jen limitní chování Claytonovy rodiny Lévyho kopulí bylo odlišné od zbylých rodin. Kromě diskutovaných Aliho-Mikhailových-Haqových rodin Lévyho kopulí (2.11) a (2.12) jsme pomocí programu Mathematica [13] vyjádřili za pomoci speciálních funkcí i Lévyho hustoty pro obě Gumbelovy-Hougaardovy rodiny Lévyho kopulí uvedených v Příkladech 2.2.11, resp. 2.2.12. Dostali jsme opět podobné průběhy grafů jako jsou na Obr. 2.1 – 2.4.

Kapitola 3

Simulace vícerozměrných Lévyho procesů

V této kapitole se budeme zabývat simulací zkoumaných dvojrozměrných subordinátorů, které budou mít danou Lévyho kopuli.

3.1 Reprezentace subordinátoru

Zavedeme potřebnou teorii k simulaci subordinátorů, zmíníme se i o jednorozměrných případech, protože jsou-li složky vícerozměrného subordinátoru nezávislé, bereme za simulaci dvě nezávislé realizace jednorozměrných případů.

Věta 3.1.1. (Rosiński) *Nechť jsou $\{V_i\}_{i \geq 1}$, $\{U_i\}_{i \geq 1}$, $\{\Gamma_i\}_{i \geq 1}$ nezávislé posloupnosti náhodných veličin. Přičemž $\{V_i\}_{i \geq 1}$ je posloupnost i.i.d. náhodných veličin s hodnotami v měřitelném prostoru (S, \mathcal{S}) , $\{U_i\}_{i \geq 1}$ je posloupnost i.i.d. náhodných veličin s rovnoměrným rozdělením na intervalu $[0, 1]$ a posloupnost $\{\Gamma_i\}_{i \geq 1}$ jsou okamžiky skoků Poissonova procesu s intenzitou 1. Nechť je $H : (0, \infty) \times S \rightarrow \mathbb{R}^d$ měřitelná funkce, definujeme míry na \mathbb{R}^d :*

$$\begin{aligned}\sigma(r, B) &= \mathbb{P}[H(r, V_i) \in B] \text{ pro } r > 0, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \\ \nu(B) &= \int_0^\infty \sigma(r, B) dr.\end{aligned}$$

Nakonec ještě položíme:

$$A(s) = \int_0^s \int_{|x| \leq 1} x \sigma(r, dx) dr \text{ pro } s \geq 0.$$

Potom platí následující dvě podmínky:

1. Je-li ν Lévyho míra na \mathbb{R}^d a limita $\gamma = \lim_{s \rightarrow \infty} A(s)$ existuje na celém \mathbb{R}^d , potom řada:

$$\sum_{i=1}^{\infty} H(\Gamma_i, V_i) \mathbb{1}_{U_i \leq t}$$

konverguje s.j. stejnoměrně pro $t \in [0, 1]$ k Lévyho procesu s charakteristickou trojicí $(0, \nu, \gamma)$.

2. Je-li ν Lévyho míra na \mathbb{R}^d a pro každé $v \in S$ je funkce:

$$r \mapsto |H(r, v)|$$

nerostoucí, pak řada $\sum_{i=1}^{\infty} (H(\Gamma_i, V_i) \mathbb{I}_{U_i \leq t} - t(A(i) - A(i-1)))$ konverguje s.j. stejnoměrně pro $t \in [0, 1]$ k Lévyho procesu s charakteristickou trojicí $(0, \nu, 0)$.

Důkaz. Důkaz je uveden v práci [10]. □

Poznámka 3.1.2. Pokud chceme simulovat subordinátor nikoli na intervalu $[0, 1]$, ale na intervalu $[0, T]$, $T \in (0, \infty)$, nahradíme v Rosinského větě Γ_i za $\frac{\Gamma_i}{T}$ a posloupnost $\{U_i\}_{i \leq 1}$ volíme jako posloupnost i.i.d. náhodných veličin s rovnoměrným rozdělením na intervalu $[0, T]$.

Věta 3.1.3. (*Reprezentace subordinátoru*) Nechť $\{X_t, t \geq 0\}$ je subordinátor na \mathbb{R} s Lévyho mírou ν se zbytkovým integrálem $U(x) = \int_x^{\infty} \nu(d\xi)$. Nechť $\{\Gamma_i\}_{i \geq 1}$ jsou časy skoků Poissonova procesu s intenzitou 1, $\{V_i\}_{i \geq 1}$ je posloupnost i.i.d. náhodných veličin s rovnoměrným rozdělením na intervalu $[0, 1]$ a nechť jsou tyto dvě posloupnosti nezávislé. Potom lze proces $\{X_t, t \in [0, 1]\}$ reprezentovat jako:

$$\{X_t, t \in [0, 1]\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{\tilde{X}_t, t \in [0, 1]\},$$

kde:

$$\tilde{X}_t = \sum_{i=1}^{\infty} U^{(-1)}(\Gamma_i) \mathbb{I}_{V_i \leq t}, \quad (3.1)$$

přičemž $U^{(-1)}$ je zobecněná inverse definovaná:

$$U^{(-1)}(y) = \inf\{x > 0 : U(x) < y\}.$$

Řada (3.1) konverguje s.j. stejnoměrně pro $t \in [0, 1]$.

Důkaz. Viz [1], Proposition 6.3. □

Na této větě je založen následující algoritmus pro generování 1-rozměrného subordinátoru.

Algoritmus 3.1.4. (Simulace 1-rozměrného subordinátoru) Nejprve pevně zvolíme $\tau > 0$, které určuje, že skoky menší než $U^{(-1)}(\tau)$ budou useknuty. Dále dosad' $k := 0$. Dokud platí $\sum_{i=1}^k T_i < \tau$ opakujme:

- $k := k + 1$,
- Simulujeme $T_k \sim \text{Exp}(1)$,

- Simulujeme V_k rovnoměrně na $[0, 1]$.

Za samotnou realizaci subordinátoru potom prohlásíme:

$$X_t = \sum_{i=1}^k \mathbb{I}_{V_i \leq t} U^{(-1)}(\Gamma_i), \text{ kde } \Gamma_i = \sum_{j=1}^i T_j.$$

Poznámka 3.1.5. Otázku chyby aproximace Gamma procesu řeší [4], viz Tvzení 3.4.4. Tato chyba exponenciálně klesá s rostoucím τ (ve smyslu střední hodnoty).

Dále se již věnujme simulaci dvojrozměrných subordinátorů.

Věta 3.1.6. *Bud' $\{X_t, t \geq 0\}$ dvojrozměrný subordinátor s marginálními zbytkovými integrály U_1 a U_2 , nechť F je jeho Lévyho kopule. Je-li F spojitá na $[0, \infty]^2$ potom lze proces $\{X_t, t \in [0, 1]\}$ reprezentovat jako:*

$$\{X_t, t \in [0, 1]\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{\tilde{X}_t = (\tilde{X}_t^{(1)}, \tilde{X}_t^{(2)}), t \in [0, 1]\},$$

kde

$$\tilde{X}_t^{(1)} = \sum_{i=1}^{\infty} U_1^{(-1)}(\Gamma_i^{(1)}) \mathbb{I}_{[0,t]}(V_i), \quad (3.2)$$

$$\tilde{X}_t^{(2)} = \sum_{i=1}^{\infty} U_2^{(-1)}(\Gamma_i^{(2)}) \mathbb{I}_{[0,t]}(V_i), \quad (3.3)$$

přičemž $\{V_i\}_{i \geq 1}$ je posloupnost *i.i.d.* náhodných veličin rovnoměrně rozdělených na $[0, 1]$ nezávislá s ostatními posloupnostmi, $\{\Gamma_i^{(1)}\}_{i \geq 1}$ je posloupnost časů skoků Poissonova procesu s intenzitou 1, $\{\Gamma_i^{(2)}\}_{i \geq 1}$ má podmíněně při $\{\Gamma_i^{(1)}\}_{i \geq 1}$ rozdělení s distribuční funkcí $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)|_{x=\Gamma_i^{(1)}}$ (jako funkce y). Navíc řady (3.2), (3.3) konvergují s.j. stejnoměrně pro $t \in [0, 1]$.

Důkaz. Důkaz viz [1], Theorem 6.3. □

Opět formulujeme algoritmus, dle kterého simulujeme dvojrozměrný subordinátor s danou Lévyho kopulí.

Algoritmus 3.1.7. (Simulace 2-rozměrného subordinátoru) Zvolme pevně $\tau > 0$, to opět určuje, které skoky budou useknuty, sice ty menší než $U^{(-1)}(\tau)$. Zvolíme počáteční parametry $k := 0$, $\Gamma_0^{(1)} := 0$. Dokud platí $\Gamma_k^{(1)} < \tau$ opakujme:

- $k := k + 1$,
- Simulujeme $T_k \sim \text{Exp}(1)$,
- $\Gamma_{k+1}^{(1)} := \Gamma_k^{(1)} + T_k$.

- Simulujeme $\Gamma_k^{(2)}$ z distribuční funkce $F_1(y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} \Big|_{x=\Gamma_k^{(1)}}$.
- Simulujeme V_k z rovnoměrného rozdělení na $[0, 1]$.

Za samotnou realizaci dvojrozměrného subordinátoru potom prohlásíme:

$$X_t^{(1)} = \sum_{i=1}^k \mathbb{I}_{V_i \leq t} U_1^{(-1)}(\Gamma_i^{(1)}),$$

$$X_t^{(2)} = \sum_{i=1}^k \mathbb{I}_{V_i \leq t} U_2^{(-1)}(\Gamma_i^{(2)}).$$

Poznámka 3.1.8. Na tomto místě je třeba upozornit na to, že Věta 3.1.6 neplatí pro F_{\perp} Lévyho kopuli pro nezávislé složky (viz (2.6)). Je to způsobeno tím, že není splněn předpoklad spojitosti na celém $[0, \infty]^2$. Lévyho kopule $F_{\perp}(x, y) = x \mathbb{I}_{y=\infty} + y \mathbb{I}_{x=\infty}$ je totiž spojitá jen na $[0, \infty)^2$. Tato skutečnost není žádným omezením, protože nezávislé subordinátory lze simulovat přímo pomocí Věty 3.1.3 (resp. Algoritmu 3.1.4).

Příklad 3.1.9. Uvažujme Claytonovu-Lévyho rodinu kopulí (2.10), pak podmíněné rozdělení potřebné v Algoritmu 3.1.7 spočteme snadno:

$$F(y|x) = \frac{\partial F_{\theta}(x, y)}{\partial x} = \left[1 + \left(\frac{x}{y} \right)^{\theta} \right]^{\frac{\theta+1}{\theta}}.$$

Rovněž i inverzi této funkce není těžké vyjádřit:

$$F^{(-1)}(y|x) = x \left(y^{-\frac{\theta}{\theta+1}} - 1 \right)^{-\frac{1}{\theta}}.$$

Příklad 3.1.10. Čiňme stejně jako v předchozím příkladu, ale uvažujme Aliho-Mikhailovu-Haqovu rodinu kopulí (2.12):

$$F(y|x) = \frac{\partial F_{\theta}(x, y)}{\partial x} = \frac{y(1 - \theta + y)}{(1 - \theta + y + x)^3}.$$

Tato funkce invertovat tak snadno nejde, při invertování narazíme na kvadratickou rovnici. Jeden z jejích kořenů je záporný, tedy nevyhovuje, a tak dostaneme následující výraz:

$$F^{(-1)}(y|x) = \frac{1}{2(1-y)} \cdot \left(\theta - 1 - 2\theta y + 2y(1+x) + \sqrt{(1-\theta)^2 + 4xy(1-\theta+x)} \right),$$

Nyní popíšeme simulaci vybraných dvojrozměrných subordinátorů.

3.1.1 Složený Poissonův proces

Jak jsme již zmínili, je u složeného Poissonova procesu zbytkový integrál tvaru $U_j(x) = \lambda_j(1 - G_j(x))$, kde $x \in \mathbb{R}_+$, $j = 1, 2$. Vezmeme-li distribuční funkci skoků, která je kladná jen na kladné ose, která je navíc spojitá, pak lze počítat snadno její inverzi, která vychází $U_j^{(-1)}(x) = G_j^{(-1)}(1 - \frac{x}{\lambda_j})$. Například pro exponenciální rozdělení s parametrem α_j , (s distribuční funkcí $G_j(x) = 1 - e^{-\alpha_j x}$), dostame:

$$U_j^{(-1)}(x) = -\frac{1}{\alpha_j} \log\left(\frac{x}{\lambda_j}\right) \cdot \mathbb{I}_{[0,1]}(x), \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

3.1.2 Gamma proces

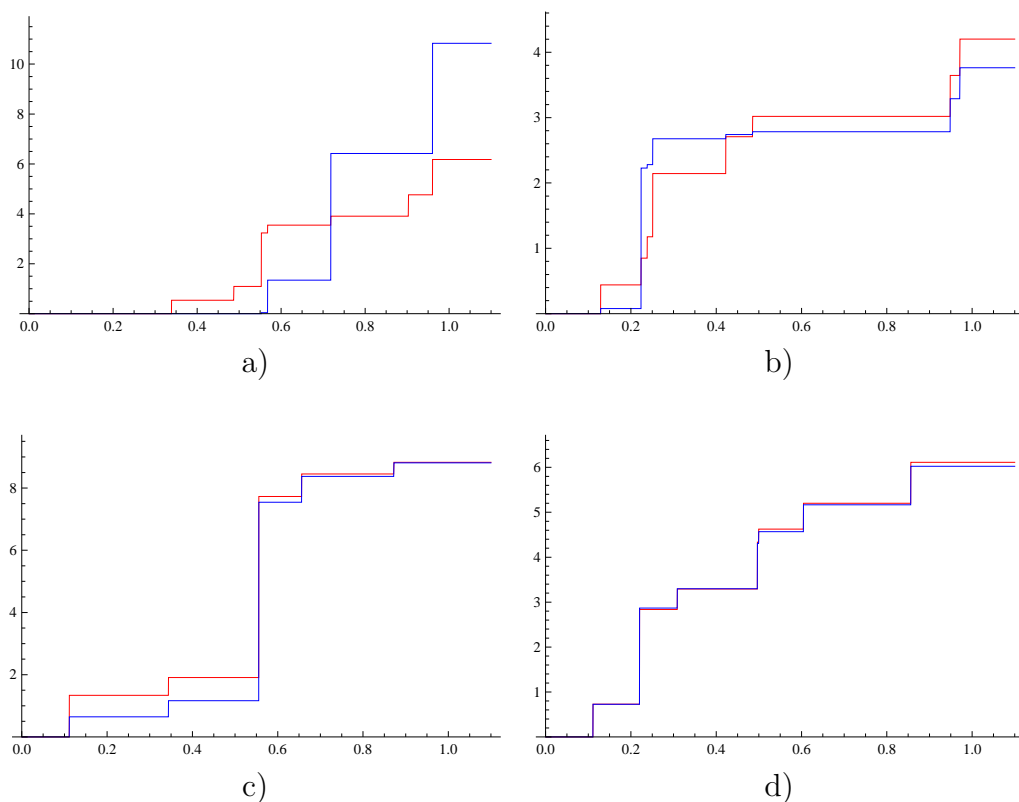
V případě Gamma procesu již není tak snadné invertovat zbytkové integrály. To jsme prováděli numericky v programu Mathematica [13]. Musíme upozornit na to, že zbytkové integrály rostou u nuly velmi rychle a proto je výpočet jejich inverse pro větší hodnoty nepřesný, proto doporučujeme užít silné markovské vlastnosti Lévyho procesů a při simulaci na delším intervalu proces napojovat.

Musíme připomenout, že Gamma proces patří mezi procesy s nekonečnou aktivitou, které mají spočetně nekonečně mnoho skoků na intervalu $[0, \infty)$ a tato množina je hustá, takže představa po částech konstatního procesu, jak je zobrazeno na obrázcích níže, není správná. Trajektorie, které jsou zobrazeny na obrázcích níže, jsou ve skutečnosti jen aproximace trajektorií tohoto procesu.

3.1.3 Inversní Gaussův proces

Rovněž pro Inversní Gaussův proces jsme museli zbytkové integrály invertovat numericky. Jedná se opět o proces s nekonečnou aktivitou, platí zde tedy stejné upozornění jako jsme uvedli v případě Gamma procesu.

Protože předchozí příklady jsou podobné, uvádíme jen realizace 2-rozměrného subordinátoru, jehož složky jsou Inversní Gaussovy procesy s parametry $\alpha = \frac{1}{2}$, $p = 2$. Na Obr. 3.1.3 a) – d) jsou realizace řečeného subordinátoru s různou mírou závislosti, kterou udává parametr θ Claytonovy rodiny Lévyho kopulí. Volili jsme celkem čtyři různé hodnoty parametru θ .



Obrázek 3.1: Simulace 2-rozměrného subordinátoru, jehož složky jsou Inverzní Gaussovy procesy s parametry $\alpha = 0.5$, $p = 2$ se strukturou závislosti je popsána Claytonovou rodinou Lévyho kopulí. a) $\theta = 0.5$, b) $\theta = 1$, c) $\theta = 5$, d) $\theta = 20$.

Závěr

Z uvedených Lévyho kopulí se nám podařilo k simulování dvojrozměrných Lévyho procesů užít Claytonovu rodinu Lévyho kopulí (viz (2.10)) a Aliho-Mikhailovu-Haqovu rodinu Lévyho kopulí (viz (2.12)). Zatímco o limitním chování v druhém případě nelze hovořit, tak v prvním případě je z obrázků patrné, že pro větší θ mají složky Lévyho procesu tendenci být téměř totožnými. Je tedy patrná konvergence, kterou jsme mohli vidět v Příkladu 2.2.9 a sice $F_\theta \rightarrow F_\parallel$ pro $\theta \rightarrow \infty$.

Kapitola 4

Statistika OUCP

Nyní nás bude zajímat odhad parametrů Gamma-Ornsteinova-Uhlenbeckova procesu, který je řídicí intenzitou pozorovaného Coxova procesu. Přístup aproximace věrohodnosti použitím method MCMC je uveden v [6] a rovněž je o něm pojednáno v článku [5].

4.1 Popis modelu

Gamma-Ornsteinův-Uhlenbeckův proces (GOU) je proces OU typu, pro který je BDLP Lévyho proces X v (1.13), resp. v (1.14) složený Poissonův proces s intenzitou $\alpha > 0$, jehož rozdělení skoků je exponenciální s parametrem ν , tedy s hustotou $g(x) = \nu \exp(-\nu x) \mathbb{1}_{[0, \infty)}(x)$. Je-li $X = \{t_j, z_j\}_{j=1}^n$, kde t_j jsou časy skoků, z_j jejich velikost a n je proměnný počet bodů na $[0, T]$, potom lze GOU proces $Y = \{Y_t, t \in [0, T]\}$ přepsat do tvaru:

$$Y_t = Y_0 e^{-\gamma t} + \sum_{0 < t_j \leq \gamma t} z_j e^{t_j - \gamma t}, \text{ kde } \gamma > 0. \quad (4.1)$$

Dále uvažujeme, že $Y_0 = y_0$ je pevné známé. Proces Y_t máme tedy určen hodnotami y_0 , γ a $\{t_i, z_i\}_{i=1}^n$. Označme ještě Φ Coxův proces, jehož BDLP je Y_t .

Naším cílem je z daných dat, tedy z realizace procesu $\Phi = \{\Phi_t, t \in [0, T]\}$, odhadnout neznámý parametr $\theta = (\alpha, \nu)$ řídicího GOU procesu $Y_\theta = \{Y_t, t \in [0, T]\}$, přičemž za známé považujeme parametry γ a y_0 .

Řídicí proces Y je v tomto případě určen kótovaným bodovým procesem $\{t_i, z_i\}_{i=1}^n$, kde t_i resp. z_i jsou okamžiky resp. velikosti skoků. Tento proces není pozorován, považujeme jej za chybějící data. Je-li $f(\varphi) = \frac{h_\theta(\varphi)}{c_\theta}$ hustota bodového procesu Φ vzhledem k jednotkovému Poissonovu procesu, kde c_θ je neznámá normující konstanta závislá na parametru θ , pak je ([6], str. 142):

$$\frac{c_\theta}{c_{\theta_0}} = \mathbb{E}_{\theta_0} \left[\frac{h_\theta(\Phi)}{h_{\theta_0}(\Phi)} \right], \quad (4.2)$$

tato metoda se nazývá *importance sampling*.

Pro dvojici bodových procesů (Φ, Y) je ve výrazu pro podmíněnou hustotu:

$$f_{\theta}(y|\varphi) = f_{\theta}(\varphi)f_{\theta}(y, \varphi)$$

marginální hustota $f_{\theta}(\varphi)$ normující konstantou, tedy ([6], str. 152) lze aproximovat podle (4.2):

$$\frac{f_{\theta}(\varphi)}{f_{\theta_0}(\varphi)} = \mathbb{E}_{\theta_0} \left[\frac{f_{\theta}(\varphi, Y)}{f_{\theta_0}(\varphi, Y)} \middle| \Phi = \varphi \right] \approx \frac{1}{n} \sum_{m=1}^l \frac{f_{\theta}(\varphi, Y^m)}{f_{\theta_0}(\varphi, Y^m)},$$

kde Y^1, \dots, Y^l je výběr z rozdělení $f_{\theta_0}(\cdot | \varphi)$ generovaný metodou MCMC. Toto je výraz pro věrohodnostní poměr Coxova procesu při chybějících datech. Maximalizací věrohodnosti provedeme Newtonovým-Raphsonovým algoritmem, tím získáme hledané odhady parametrů.

Označme τ_1, \dots, τ_m realizaci Coxova procesu Φ . K vyjádření podmíněné hustoty rozdělení $Y_{\theta} | \Phi$ použijeme Bayesovu větu, podle které platí pro hustoty:

$$f_{\theta}(y|\varphi) = f(\{t_i, z_i\}_{i=1}^n | (\tau_j)_{j=1}^m) \propto f(\{t_i, z_i\}_{i=1}^n) \cdot f((\tau_j)_{j=1}^m | \{t_i, z_i\}_{i=1}^n).$$

Snadno totiž vyjádříme $f(\{t_i, z_i\}_{i=1}^n)$ a $f((\tau_j)_{j=1}^m | \{t_i, z_i\}_{i=1}^n)$.

První z uvedených hustot (složený Poissonův proces) vyjádříme dle (1.11) uvážením, že rozdělení velikosti skoků je exponenciální. Dostaneme výraz:

$$f(\{t_i, z_i\}_{i=1}^n) = e^{(1-\alpha)T} (\alpha\nu)^n \exp \left(-\nu \sum_{j=1}^n z_j \right).$$

Druhou z uvedených hustot vyjádříme z (1.10) na základě faktu, že Coxův proces podmíněně při dané intenzitě $Y_t = y_t$ je Poissonův proces (nehomogenní):

$$f((\tau_j)_{j=1}^m | \{t_i, z_i\}_{i=1}^n) = e^T \exp \left(- \int_0^T y_t dt \right) \cdot \prod_{j=1}^m y_{\tau_j}.$$

Upravíme integrál $\int_0^T y_t dt$ podle (4.1):

$$\begin{aligned} \int_0^T y_t dt &= \int_0^T \left(y_0 e^{-\gamma t} + \sum_{t_j \leq \gamma t} z_j e^{t_j - \gamma t} \right) dt \\ &= -y_0 \frac{e^{-\gamma T} - 1}{\gamma} - \sum_{t_j \leq \gamma T} \frac{z_j (e^{t_j - \gamma T} - 1)}{\gamma} \end{aligned}$$

Celkem tedy dostáváme sdruženou hustotu:

$$\begin{aligned} f_{\theta}(\varphi, y) &= f((\tau_j)_{j=1}^m, \{t_i, z_i\}_{i=1}^n) = e^{(2-\alpha)T} (\alpha\nu)^n \exp \left(-\nu \sum_{j=1}^n z_j \right) \\ &\cdot \exp \left(y_0 \frac{e^{-\gamma T} - 1}{\gamma} + \sum_{t_j \leq \gamma T} z_j \frac{(e^{t_j - \gamma T} - 1)}{\gamma} \right) \cdot \prod_{j=1}^m y_{\tau_j}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

4.2 Užité algoritmy

Popíšeme použité algoritmy a vyjádříme potřebné poměry, či pomocné proměnné. Podrobný popis algoritmů je v [6], nebo též v [8].

4.2.1 Metropolisův-Hastingsův algoritmus

Používáme jednu z method MCMC (Markov Chain Monte Carlo), pomocí těchto algoritmů lze generovat markovský řetězec se stavovým prostorem (S, \mathcal{S}) . Chceme, aby tento řetězec konvergoval k limitnímu cílovému rozdělení Ψ . Jsou-li Y^0, Y^1, \dots iterace řetězce s rozděleními P_{Y^0}, P_{Y^1}, \dots . Chceme, aby byla splněna konvergence $\|P_{Y^i} - \Psi\| \rightarrow 0$ pro $i \rightarrow \infty$, za normu na prostoru pravděpodobnostních měr se volí například $\|\rho\| = \sup_{A \in \mathcal{S}} \rho(A)$.

Nyní přistupme k *Metropolisovu-Hastingsovu algoritmu rození a zániku* (MHBD). Bud' Π rozdělení Poissonova bodového procesu s funkcí intenzity rovnou 1 na množině $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$. Bud' dále Ψ cílové rozdělení bodového procesu, s hustotou f vůči Π . Stavový prostor zde bude $(\mathcal{N}|_B, \mathfrak{N})$.

Pro aktuální konfiguraci bodů $\varphi \in \mathcal{N}|_B$ v každé iteraci s pravděpodobností $p(\varphi)$ se zkouší přidání nového bodu ξ a s doplňkovou pravděpodobností $1 - p(\varphi)$ se zkouší nějaký bod η odebrat. Pro přidání bodu se generuje ξ z návrhové hustoty $q_b(\varphi, \cdot)$. Při odebrání je generován bod η z návrhové hustoty $q_d(\varphi, \cdot)$.

Návrh přidání bodu ξ ke konfiguraci φ přijímáme s pravděpodobností:

$$\alpha_b(\varphi, \xi) = 1 \wedge r_b(\varphi, \xi),$$

kde $r_b(\cdot, \cdot)$ je tzv. *Metropolisův-Hastingsův poměr*:

$$r_b(\varphi, \xi) = \frac{f(\varphi \cup \xi)(1 - p(\varphi \cup \xi))q_d(\varphi \cup \xi, \xi)}{f(\varphi)p(\varphi)q_b(\varphi, \xi)}.$$

Přijetí návrhu k odebrání bodu η z konfigurace φ má pravděpodobnost:

$$\alpha_d(\varphi, \eta) = 1 \wedge r_d(\varphi, \eta)$$

s Metropolisovým-Hastingsovým poměrem:

$$r_d(\varphi, \eta) = \frac{f(\varphi \setminus \eta)p(\varphi \setminus \eta)q_b(\varphi \setminus \eta, \eta)}{f(\varphi)(1 - p(\varphi))q_d(\varphi, \eta)}.$$

Následující algoritmus vše shrnuje.

Algoritmus 4.2.1. (MHBD) Nechť Y^0 je daný začátek řetězce. Zvolme $l \in \mathbb{N}$ počet iterací a při daném $Y^k = y$, $k = 0, 1, 2, \dots, l$, generujeme Y^{k+1} následovně:

1. Generujeme U_1^k a U_2^k z rovnoměrného rozdělení na intervalu $[0, 1]$.

2. Když platí $U_1^k \leq p(y)$, generujme ξ z návrhové hustoty $q_b(y, \cdot)$ a položme:

$$Y^{k+1} := \begin{cases} y \cup \xi & \text{pokud } U_2^k \leq r_b(y, \xi) \\ y & \text{jinak.} \end{cases}$$

3. Pokud $U_1^k > p(y)$, pak

(a) Je-li $y = \emptyset$, položme $Y^{k+1} := y$.

(b) Je-li $y \neq \emptyset$, generujme η z návrhové hustoty $q_b(y, \cdot)$ a položme:

$$Y^{k+1} := \begin{cases} y \setminus \eta & \text{pokud } U_2^k \leq r_d(y, \eta) \\ y & \text{jinak.} \end{cases}$$

Nechť je iterace markovského řetězce Y^k dána $\{t_i, z_i\}_{i=1}^n$, návrhovou hustotu pro přidání bodu budeme uvažovat rovnoměrnou, tj. $q_b(\{t_i, z_i\}_{i=1}^n, \cdot) = \frac{1}{T\gamma}$. Rovnoměrně budeme volit i dvojici (t_k, z_k) při odebrání, tj. $q_d(\{t_i, z_i\}_{i=1}^n, \cdot) = \frac{1}{n}$. Pravděpodobnost pro přidání a ubrání bodu volíme stejnou, tedy $p = \frac{1}{2}$.

Metropolisův-Hastingsův poměr pro přidání bodu je:

$$r_b(\{t_i, z_i\}_{i=1}^n, \{t_{n+1}, z_{n+1}\}) = \frac{T\gamma}{n+1} \alpha \nu \exp(-\nu z_{n+1}) \cdot \exp\left(-\frac{z_{n+1}}{\gamma} (1 - e^{t_{n+1} - \gamma T})\right) \cdot \prod_{j=1}^m \frac{Y_{\tau_j, n+1}}{Y_{\tau_j, n}},$$

kde součin na pravé je tvaru:

$$\prod_{j=1}^m \frac{Y_{\tau_j, n+1}}{Y_{\tau_j, n}} = \frac{y_0 e^{-\gamma \tau_j} + \sum_{j=1}^{n+1} z_j e^{t_j - \gamma \tau_j} \mathbb{I}_{t_j \leq \gamma \tau_j}}{y_0 e^{-\gamma \tau_j} + \sum_{j=1}^n z_j e^{t_j - \gamma \tau_j} \mathbb{I}_{t_j \leq \gamma \tau_j}}.$$

Výpočet uvedeného součinu může usnadnit fakt, že platí $\frac{Y_{\tau_j, n+1}}{Y_{\tau_j, n}} = 1 \Leftrightarrow t_{n+1} > \gamma \tau_j$ pro $\forall j = 1, \dots, m$.

Metropolisův-Hastingsův poměr pro ubrání bodu bude vypadat podobně:

$$r_d(\{t_i, z_i\}_{i=1}^n, \{t_k, z_k\}) = \frac{n e^{\nu z_k}}{T\gamma\alpha\nu} \exp\left(\frac{z_k}{\gamma} (1 - e^{t_k - \gamma T})\right) \cdot \prod_{j=1}^m \frac{Y_{\tau_j, n-1}}{Y_{\tau_j, n}}.$$

Opět lze tento součin pro určitá t_k zjednodušit, platí: $\frac{Y_{\tau_j, n-1}}{Y_{\tau_j, n}} = 1 \Leftrightarrow t_k > \gamma \tau_j$ pro $\forall j = 1, \dots, m$.

4.2.2 Newtonův-Raphsonův algoritmus

Nechť je θ vektor odhadovaných parametrů, v našem případě $\theta = (\alpha, \nu)$, pak metoda založená na maximální věrohodnosti a MCMC, viz [6] kap. 8, vyústí v Newtonův-Raphsonův algoritmus probíhající dle následujícího schématu:

$$\theta^{(r+1)} := \theta^{(r)} + u_{\theta_0, l, \varphi}(\theta^{(r)}) \cdot j_{\theta_0, l, \varphi}(\theta^{(r)})^{-1}, \quad r = 1, 2, \dots, \quad (4.4)$$

přičemž $\varphi = \{\tau_j\}_{j=1}^m$ jsou již zmíněná pozorovaná data OUCP procesu, $\theta_0 = \theta^{(0)} = (\alpha_0, \nu_0)$ je pevný počáteční parametr, který byl rovněž vstupním parametrem pro generování markovského řetězce $Y^0, Y^1 \dots Y^{l-1}$, kde l je počet iterací. Když označíme $f_\theta(\varphi, y)$ hustotu (4.3), pak byl řečený markovský řetězec generován z hustoty $f_{\theta_0}(\varphi, y)$.

Symbole $u_{\theta_0, l, \varphi}$ a $j_{\theta_0, l, \varphi}$ jsou aproximace následujících funkcí:

$$u(\theta) = \mathbb{E}_\theta [V_{\theta, \varphi}(Y) \mid \Phi = \varphi]$$

je tzv. *skórová funkce* a

$$j(\theta) = -\mathbb{E}_\theta \left[\frac{\partial V_{\theta, \varphi}(Y)}{\partial \theta'} \mid \Phi = \varphi \right] - \text{Var}_\theta [V_{\theta, \varphi}(Y) \mid \Phi = \varphi],$$

je tzv. *pozorovaná Fisherova informace*. Značíme θ' transpozici a

$$V_{\theta, \varphi}(y) = \frac{\partial \log f_\theta(\varphi, y)}{\partial \theta}.$$

Odhady těchto funkcí na základě vygenerovaného MCMC řetězce se provádí jako pro statistiku $k(Y)$:

$$\mathbb{E}_{\theta_0, l, \varphi} k(Y) = \sum_{j=0}^{l-1} k(Y^j) w_{\theta_0, l, \varphi}(Y^j),$$

přičemž $w_{\theta_0, l, \varphi}(\cdot)$ je *váhová funkce*:

$$w_{\theta_0, l, \varphi}(Y^m) = \frac{f_\theta(\varphi, Y^m)}{f_{\theta_0}(\varphi, Y^m)} \cdot \left(\sum_{j=0}^{l-1} \frac{f_\theta(\varphi, Y^j)}{f_{\theta_0}(\varphi, Y^j)} \right)^{-1}.$$

Dle tohoto přístupu jsou odhady $u(\theta)$ a $j(\theta)$:

$$u_{\theta_0, l, \varphi}(\theta) = \sum_{j=0}^{l-1} V_{\theta, \varphi}(Y^j) w_{\theta_0, l, \varphi}(Y^j),$$

$$j_{\theta_0, l, \varphi}(\theta) = -\sum_{j=0}^{l-1} \left[\frac{\partial V_{\theta, \varphi}(Y^j)}{\partial \theta'} + V_{\theta, \varphi}(Y^j)' V_{\theta, \varphi}(Y^j) \right] w_{\theta_0, l, \varphi}(Y^j).$$

Vše nyní vyjádříme pro náš případ GOU procesu. Dostáváme vektor $V_{\theta, \varphi}(\cdot)$:

$$V_{\theta, \varphi}(Y^j) = \left(-T + \frac{n_j}{\alpha}, \frac{n_j}{\nu} - \sum_{i=1}^{n_j} z_i \right),$$

kde n_j počet bodů článku $Y^j = \{t_k^j, z_k^j\}_{k=1}^{n_j}$ MCMC řetězce.

Dále odvodíme matici $\frac{\partial V_{\theta, \varphi}(\cdot)}{\partial \theta'}$:

$$\frac{\partial V_{\theta, \varphi}(Y^j)}{\partial \theta'} = \begin{pmatrix} -\frac{n_j}{\alpha^2} & , & 0 \\ 0 & , & -\frac{n_j}{\nu^2} \end{pmatrix}.$$

Ještě upravíme vzorec pro $w_{\theta, \theta_0, l, \varphi}(\cdot)$:

$$w_{\theta, \theta_0, l, \varphi}(Y^j) = \frac{\left(\frac{\alpha\nu}{\alpha_0\nu_0}\right)^{n_j} \exp\left((\nu_0 - \nu) \sum_{j=1}^{n_i} z_j^i\right)}{\sum_{k=0}^{l-1} \left(\frac{\alpha\nu}{\alpha_0\nu_0}\right)^{n_k} \exp\left((\nu_0 - \nu) \sum_{j=1}^{n_k} z_j^k\right)}.$$

Všechny rozepsané odhady se dosadí do vzorce (4.4) a dostaneme odhad $\hat{\theta} := \theta^{(s)}$, kde s je počet iterací.

4.3 Výsledky odhadů

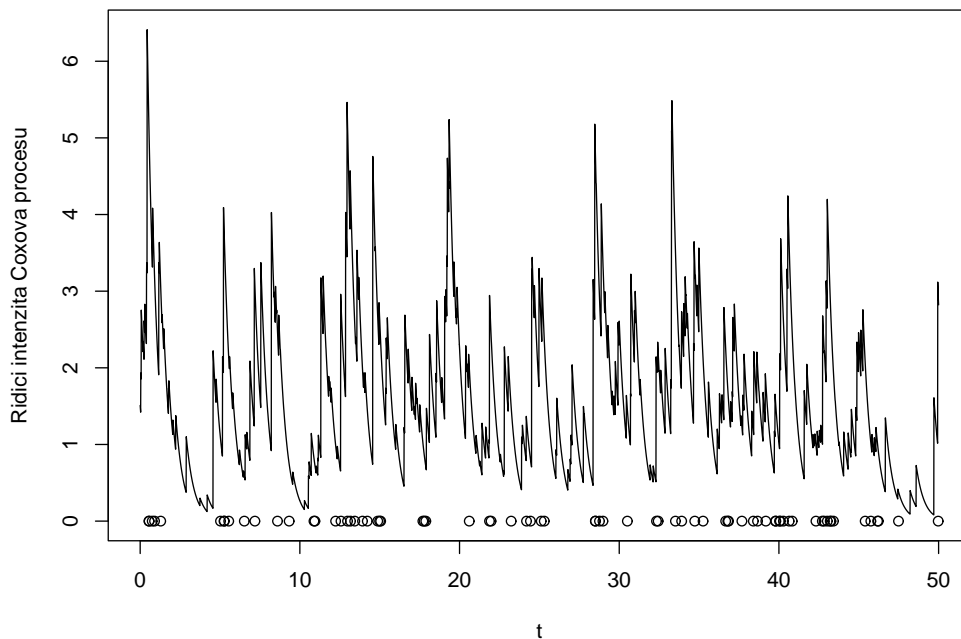
Výše popsané algoritmy jsme realizovali v programu R (viz [12]). Program se skládá ze tří částí. V první části simulujeme Coxův proces, který je pro nás posléze pevnými daty. Simulovali jsme ho na intervalu $[0, 50]$. Parametry jsme volili následovně $\alpha = 2.5$, $\nu = 0.7$, $\gamma = 2$. Počáteční hodnotu intenzity y_0 jsme vygenerovali z Gamma rozdělení $-\Gamma(\nu, \alpha)$:

```
> Y0
[1] 1.508918
```

a následně uvažovali jako pevný parametr. Vykreslení Coxova procesu Φ_t (body na x -ové souřadnici) a řídicí intenzity Y_t je na Obr. 4.1.

V druhé části jsme generovali MCMC řetězec se vstupními parametry $\alpha_0 = 2.3$, $\nu_0 = 0.8$, $\gamma = 2$. Provedli jsme celkem 1005001 iterací, z nich jsme prvních 5000 spálili a pak jsme ukládali jen každou 1000 iteraci. V průběhu jsme sledovali průměrnou pravděpodobnost zrození a zániku v MHBD algoritmu a činili si pro kontrolu průběžný odhad parametrů α_0 a ν_0 . Zde je výpis programu R:

```
> print(nb/iter) # prumerna pst prijeti navrhu zrozeni
[1] 0.3493210
> print(nd/iter) # prumerna pst prijeti navrhu zaniku
```



Obrázek 4.1: Coxův bodový proces na $[0, 50]$ (pozorovaná data) a jeho řídicí intenzita.

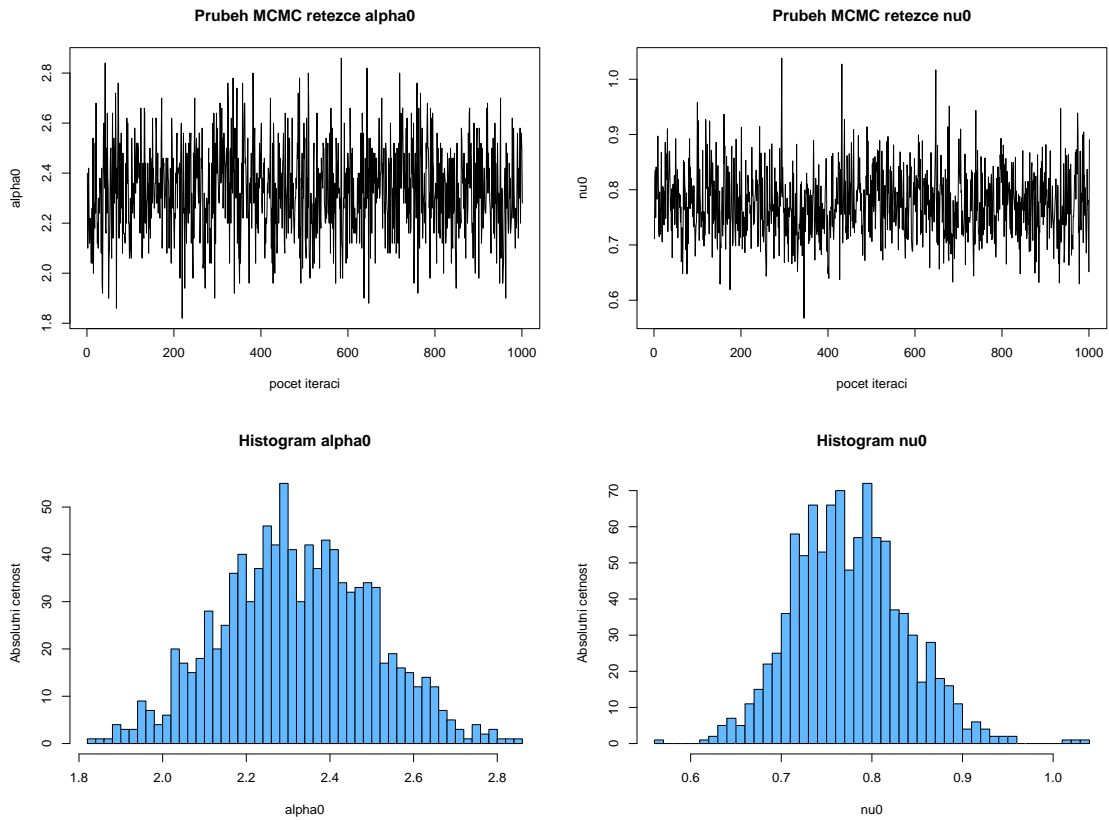
```
[1] 0.3494474
> mean(dZZ)      #odhad parametru nu0
[1] 0.7752284
> mean(dMC)/TT   #odhad parametru alpha0
[1] 2.332887
```

Vykreslení těchto průběžných odhadů je na Obr. 4.3:

Třetí část programu obsahuje Newtonův-Raphsonův algoritmus. Po 25 iteracích dosáhl odhadovaný parametr hodnoty $\hat{\theta} = (2.5494, 0.5078)$.

Totéž jsme provedli ještě pro počáteční parametry $\alpha_0 = 2.7$, $\nu_0 = 0.6$, $\gamma = 2$. Opět jsme generovali MCMC řetězec se vstupními parametry a provedli jsme celkem 1005001 iterací, z nich jsme prvních 5000 spálili a ukládali jen každou 1000 iteraci. Zde jsou obdobné průběhy sledovaných průměrných pravděpodobností zrození a zániku v MHBD algoritmu a průběžných odhadů parametrů α_0 a ν_0 jako výše:

```
> print(nb/iter) # prumerna pst prijetei navrhu rozeni
[1] 0.3387778
> print(nd/iter) # prumerna pst prijetei navrhu zaniku
[1] 0.3389529
> mean(dZZ)      #odhad parametru nu0
```



Obrázek 4.2: Odhady parametrů α_0 a ν_0 počítané v průběhu MCMC řetězce.

```
[1] 0.6743962
> mean(dMC)/TT #odhad parametru alpha0
[1] 2.853167
```

Zde po 25 iteracích dosáhl odhadovaný parametr hodnoty $\hat{\theta} = (2.5032, 0.6796)$. Naše odhady parametrů α , ν jsou poměrně uspokojivé, ale může se stát, že Newtonův-Raphsonův algoritmus nedává dobré výsledky. Pak existují modifikace této metody, ve kterých se autoři snaží dosáhnout lepších výsledků např. pomocí *trust region* viz [2].

Literatura

- [1] Cont R., Tankov P.: *Financial Modelling With Jump Processes*, Chapman & Hall/CRC, London, 2004.
- [2] Geyer C. J., Thompson E. A.: *Constrained Monte Carlo maximum likelihood for dependent data*, Journal of Royal Society of Statistics Series, B 54., 657–699, 1992.
- [3] Kallsen J., Tankov P.: *Charakterization of dependence of multidimensional Lévy processes using Lévy Copulas*, Journal of Multivariate Analysis, Vol. 97, 1551–1572, 2006.
- [4] Kaluža J.: *Časo-prostorové bodové procesy*, Diplomová práce, Charles University, Faculty of Mathematics and Physics, Prague, 2007.
- [5] Lechnerová R., Helisová K., Beneš V. *Cox Point Processes Driven by Ornstein–Uhlenbeck Type Processes*, Methodology and Computing in Applied Probability, Springer Netherlands, 2007.
- [6] Møller J., Waagerepetersen R. P.: *Statistical Inference and Simulation for Spatial Point Processes*, Cambridge University Press, Chapman & Hall/CRC, London, 2004.
- [7] Nelsen R. B.: *An Introduction to Copulas*, Second Edition, Springer, New York, 2006.
- [8] Pawlas Z.: *Methody MCMC*, text k přednášce STP 139 na MFF UK, Praha, 2007.
- [9] Rataj J.: *Bodové procesy*, druhé vydání, Karolinum, Praha, 2006.
- [10] Rosiński J.: *Series representation of Lévy processes from perspective of point processes. v Lévy processes - Theory and Applications*, Barndorff-Nielsen, O. - E., Mikosh T., Resnick S., Birkhäuser, Boston, 401–414, 2001.
- [11] Sato K. - I.: *Lévy processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

- [12] CRAN R Project: *The R Project for Statistical Computing, version 2.6.2*, <http://www.r-project.org/>, 2008.
- [13] Wolfram Research, Inc.: *Mathematica, version 6.0.1*, 2007.