

## POSUDEK OPONENTA BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

**Název:** Název práce: Kanonické báze pro řešení invariantních diferenciálních rovnic.

**Autor:** Uchazeč Michael Jančík

### **Shrnutí obsahu práce**

Hlavním tématem práce je aplikace metod teorie reprezentací v harmonické analýze. Klíčová myšlenka použitá v práci je využití grupy symetrií dané diferenciální rovnice pro konstrukci ortogonální báze vektorového prostoru řešení uvažované diferenciální rovnice. Ukazuje se, že Tato metoda je podstatně účinnější než přímočará aplikace Gramm-Schmidty ortogonalizace.

Zkoumané diferenciální rovnice patří nejznámější rovnice matematické fyziky, jsou to Laplaceova a Dirakova rovnice. Grupa symetrií těchto dvou rovnic je poměrně velká a obsahuje grupu rotací v příslušném Eukleidovském prostoru, resp. její dvojnásobné nakrytí, což je grupa  $Spin(n)$ . V dimenzi 3 je grupa  $Spin(3)$  isomorfní s grupou  $SU(2)$  a s grupou  $Sp(1)$  kvaternionů s jednotkovou normou. Jejich ireducibilní reprezentace mají jednoduchou strukturu, a to je v práci s výhodou použito při konstrukci ortogonálních bazí homogenních řešení těchto dvou rovnic. Je to speciální případ obecné konstrukce ortogonálních bazí těchto (a podobných) rovnic ve vyšších dimenzích.

První kapitola práce obsahuje základní přehled informací a faktů o Lieových grupách a Lieových algebrách a jejich reprezentacích potřebných v dalších kapitolách. Druhá kapitola přináší přehled tvrzení o grupě rotací a o její realizaci v nízkých dimenzích pomocí tělesa kvaternionů. Ve třetí kapitole je pak vše použito při jednoduché konstrukci ortogonálních bazí pro prostory polynomiálních řešení dané homogenity pro Laplaceovu a Dirakovu rovnici.

### **Celkové hodnocení práce**

**Téma práce.** Zadané téma je náročné a potřebovalo solidní zvládnutí základů teorie reprezentací Lieových grup a algeber. Autor práce se musel naučit a s porozuměním zpracovat strukturu a vlastnosti reprezentací Lieovy algebry  $sl(2, \mathbb{C})$  a pak ji používat při konstrukci a explicitním popisu příslušných ortogonálních bazí. Zadáání práce bylo beze zbytku splněno.

**Vlastní příspěvek.** Práce je kombinací původních a převzatých výsledků. Vlastní výsledky práce jsou inspirovány články vedoucího práce a jsou obsaženy v Tvrzení 16 a Tvrzení 20. Báze takto zkonstruované jsou pak vyjádřeny ve sférických souřadnicích a porovnány se standardními bazemi používanými v matematické fyzice a odvozenými jinými postupy.

### **Matematická úroveň.**

Matematická úroveň práce je solidní. Shrnutí základů teorie reprezentací je přesně formulováno a přehledně prezentováno. Dosažené výsledky jsou korektně a srozumitelně formulovány a dokázány. Autor se v práci nevyhnul některým drobným nepřesnostem a překlepům, které jsou popsány níže. Tyto nepřesnosti ale nejsou podstatné a dají se snadno opravit.

### **Práce se zdroji.**

Výsledky použité v práci jsou korektně citovány, text práce je formulován samostatně a neobsahuje doslova převzaté části z jiných prací.

**Formální úprava.** Úprava práce je v souladu se standardy používanými v odborných publikacích v matematických časopisech. Presentace obsahu práce vyhovuje obvyklým nárokům a na přesnost a korektnost formulace matematického textu. Organizace textu je přehledná a srozumitelná a práce se dobře čte.

### **Připomínky a otázky**

1. str. 3 uprostřed – unitární matice nemusí mít determinant rovný plus nebo minus jedné, jejich determinant je komplexní číslo s absolutní hodnotou rovnou jedné.
2. V Tvzení 13 by bylo užitečné definovat (připomenout?) co značí symbol  $\rho_a$ .
3. str. 13, poslední řádek: konflikt označení, symbol  $A$  značí prvek grupy  $SO(3)$  i její Lieovy algebry; podobně na str. 14, řádek 14 zdola značí symbol  $S$  prvek grupy  $Sp(1)$  i její Lieovy algebry.
4. str. 15, 6. řádka nad začátkem sekce 3.3 by na levé straně vzorce místo komplexní jednotky  $i$  měla být kvaternionová jednotka  $i$  a dva řádky pod tím je přepis na pravé straně první rovnosti.
5. Vzorec na poslední řádce strany 18 je správný, ale vzorce na čtvrté, resp. šesté řádce na tím neodpovídají definici operátorů  $h_{ij}$

### **Závěr**

Práci považuji za velmi dobrou a doporučuji ji uznat jako bakalářskou práci.

*Návrh klasifikace vedoucí/oponent sdělí předsedovi zkušební (sub)komise.*

Jméno oponenta Vladimír Souček  
Pracoviště Matematický ústav  
Datum 24.8.2021

