MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Michael Jančík

Kanonické bázy pre riešenie invariantných diferencialných rovnic

Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Roman Lávička, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2021

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Srdečne sa chcem poďakovať môjmu školitelovi doc. RNDr. Romanovi Lávičkovi, Ph.D. za všetok čas, ktorý mi venoval. Ďakujem za super konverzácie, rady a mentorovanie počas celého bakalárskeho ročníku.

Název práce: Kanonické bázy pre riešenie invariantných diferencialných rovnic

Autor: Michael Jančík

Ústav: Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Roman Lávička, Ph.D., Matematický ústav UK

Abstrakt: Sférické harmoniky a sférické monogeniky sú po rade polynomiálne riešenia Laplacovej a Diracovej diferenciálnej rovnice. Tieto riešenia v $\mathbb{R}^3$ tvoria ireducibilnú reprezentáciu Lieovej algebry $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Hlavný cieľ je zostrojiť ortogonálnú bázu takýchto priestorov. Bežné zaužívane metódy ako Gram-Schmidtova ortogonalizácia je zbytočne komplikovaná a zložitá. Ukážeme si ako zostrojiť ortogonálnu bázu jednoduchšie pomocou reprezentačnej teórie. K popisu rotácii v $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^4$ použijeme kvaternióny. Nakoniec takto skonštruovanú bázu vyjadríme vo sférických súradniciach.

Klíčová slova: sféricke harmoniky, sférické monogeniky, Lieové algebry, kvaternióny, reprezentácie

Title: Canonical bases for solutions of invariant differential equations

Author: Michael Jančík

Institute: Mathematical Institute of Charles University

Supervisor: doc. RNDr. Roman Lávička, Ph.D., Mathematical Institute of Charles University

Abstract: Spherical harmonics and spherical monogenics are, respectively, polynomial solutions of Laplace and Dirac equations. In $\mathbb{R}^3$ these solutions form irreducible representations of Lie algebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. The main aim is to construct orthogonal bases of such spaces. The well-known procedures like Gram-Schmidt orthogonalization procedure is quite clumsy and tedious. We show how to construct orthogonal bases in an easier way using representation theory. For description of rotations in $\mathbb{R}^3$ and $\mathbb{R}^4$ we use quaternions. Finally, we express constructed bases in spherical coordinates.

Keywords: spherical harmonics, spherical monogenics, Lie algebras, quaternions, representations

Obsah

Úvod

Cieĺom bakalárskej práce je popísať konštrukciu ortogonálnej bázy pre riešenia diferenciálnych rovníc, ktoré sú invariantné voči Lieovej algebre $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ pomocou reprezentačnej teórie. Konkrétne budeme konštruovať bázu pre homogénne riešenia Laplacovej a Diracovej rovnice v Euklidovskom priestore dimenzie 3, tzv. pre sférické harmoniky a sférické monogeniky. Sférické harmoniky sú skalárne polynómy, ktoré riešia Laplacovu rovnicu zatiaľ čo sférické monogeniky sú polynomiálne riešnia Diracovej rovnice. Výpočet a konštrukcia týchto báz je obsiahnutá v Lávička (2010). V Lávička (2010) je hlavným nástrojom takzvaná Cliffordova algebra, ktorou sa konštruuje spinorový priestor ale aj spin grupa $Spin(3)$. My realizujeme spinorový priestor ako definujúcu reprezentáciu maticovej Lieovej grupy $SU(2)$. Využívame kvaternióny miesto Cliffordovej algebry. V našej práci budeme kvaternióny vnímať ako komplexné matice typu 2×2.

Spôsob akým si vybudujeme reprezentačnú teóriu a ako budeme pristupovať k riešeniu problému bude spočívať vo výklade dvoch, na prvý pohľad, rozličných konceptov. Predstavíme si nutný úvod do Lieových grup, špeciálne do maticových Lieových grup a Lieových algebier, ktoré na konci prvej kapitoly dáme do patričného vzťahu. Vysvetlíme si ďalej, čo to sú reprezentácie a ako ich aplikovať.

Náš prístup je špecifický tým, že našim nástrojom miesto Cliffordovej algebry budú kvaternióny. V druhej kapitole ukážeme ako pomocou kvaterniónov popísať rotácie v $\mathbb{R}^3$ a v $\mathbb{R}^4$. Ďalej si rozmyslíme, že grupa jednotkových kvaterniónov v našej maticovej realizácií je rovná maticovej Lieovej grupe $SU(2)$. Kvaternióny budú zohrávať kľúčovu rolu vo výpočtoch. Uvidíme ako zakomponovať kvaternióny do reprezentačnej teórie. V tretej kapitole si predstavíme samotné výpočty kanonických báz sférických harmonik a sférických monogenik. Na priestore sférických harmonik a monogenik zavedieme prirodzenú akciu rotačnej grupy a vypočítame indukovanú akciu príslušnej Lieovej algebry. Komplexifikáciou získame na priestoroch riešení akciu $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Naviac sa ukazuje, že homogénne riešenia Laplacovej a Diracovej rovnice v $\mathbb{R}^3$ tvoria ireducibilnú reprezentáciu $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Reprezentácie, navyše ireducibilné reprezentácie tejto Lieovej algebry sú dôkladne známe. Toho využijeme k dokončeniu výpočtu ortognálnych báz.

Nakoniec sa pozrieme na vyjadrenie tejto knonickej bázy, špecialne našu bázu budeme vyjadrovať vo sférických súradniciach.

Hlavný prínos mojej práce spočíva v tom, že narozdiel od Lávička (2010) výpočet bázy vediem pomocou iného aparátu, pomocou kvaterniónov. Ďalej podrobne dokazujem alebo dopočítavam rôzne príklady a Tvrdenia z Lávička (2010), ktoré nie sú v texte explicitne vypočítane, respektíve dokázane. Taktiež sa snažím vyložiť všetky pojmy a tvrdenia, ktoré sú potrebné k pochopeniu danej konštrukcie, a presahujú všeobecný základ, ktorý získa každý študent počas bakalárskeho štúdia na MFF UK.

1. Teória reprezentácií

1.1 Lieové grupy

Než sa pustíme do stručného výkladu teórie Lieových grup, na úvod treba povedať, že teória si vyžaduje znalosti z varietovej analýzy. My sa preto pre jednoduchosť obmedzíme len na maticové Lieove grupy, teda len tie, ktoré budeme nutne potrebovať v ďalšom výklade. Teória maticových Lieových grup je ďalej vyložená v B.C.Hall (2003). Pozrime sa, čo sú teda maticové Lieove grupy.

Definícia 1. *Grupu všetkých reálnych invertovateľných matíc typu $n \times n$ s maticovým násobením značíme $GL(n, \mathbb{R})$ a nazývame ju všeobecnou lineárnou grupou. Obdobne grupu všetkých komplexných invertovateľných matíc značíme $GL(n, \mathbb{C})$.*

Definícia 2. *Označme priestor všetkých komplexných matíc typu $n \times n$ ako $M_n(\mathbb{C})$.*

Definícia 3. *Nech $A_m = (a_{ij}^m)_{i,j=1}^n$ je postupnosť komplexných matíc v $M_n(\mathbb{C})$. Hovoríme, že postupnosť A_m konverguje k matici $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, ak $a_{ij}^m \to a_{ij}$ pre $m \to \infty$ pre každé $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.*

Definícia 4. *Maticovou Lieovou grupou nazveme podgrupu G grupy $GL(n, \mathbb{C})$, ktorá je uzavretá. Inak povedané, pre ľubovolnú konvergujúcu postupnosť matic A_m k matici A v G platí, že A patrí do G alebo neni invertovateľná.*

Ďalej uvedieme niekoľko príkladov.

Príklad. Všeobecné lineárne grupy $GL(n,\mathbb{C})$ a $GL(n,\mathbb{R})$.

Príklad. Grupa ortogonálnych (reálnych) matíc s operáciou násobenia $O(n) = \{Q \in \mathbb{R}^{n\times n} \,|\, QQ^T = I_n\}$, kde Q^T je transponovaná matica matice Q. Z lineárnej algebry vieme, že $detQ = detQ^T$ z čoho automaticky plynie $detQ = \pm 1$. Špeciálna ortogonálna grupa $SO(n) := \{Q \in O(n) \,|\, detQ = 1\}$.

Príklad. Podobne definujeme grupu unitárnych (komplexných) matíc s operáciou násobenia $U(n) = \{Q \in \mathbb{C}^{n\times n} \,|\, QQ^* = I_n\}$, kde Q^* je hermitovsky združená matica. Opäť sa dá ľakhko ukázať, že determinant takýchto matíc je rovný ± 1. $SU(n)$ tvorí špeciálnu unitárnu grupu s determinantom rovným 1.

Poznámka. Ako maticové Lieové grupy budeme chápať aj grupy, ktoré prirodzene maticiami nie sú. Príkladom je multiplikatívna grupa jednotkových kvaterniónov S^3. Túto duálnu interpretáciu si bližšie rozoberieme v kapitole o kvaterniónoch.

Prirodzene, medzi tymýto objektami chceme definovať homomorfizmus. Špeciálne teda, homomorfizmus medzi maticovými Lieovými grupami.

Definícia 5. *Majme maticové Lieove grupy G, H. Zobrazenie $\phi : G \to H$ nazývame Lieovým grupovým homomorfizmom, ak platí, že ϕ je grupový homomorfizmus a zobrazenie je spojité. Navyše, ak je ϕ bijekcia so spojitým inverzom, tak potom zobrazenie je izomorfizmus. V takom prípade su dané grupy izomorofné.*

Poznámka. Spojitosť ϕ chápeme v zmysle Definície 3, teda ako $\phi(A_m) \to \phi(A)$ práve vtedy, keď $A_m \to A$ v G. Na prvý pohľad môže byt spojitosť zobrazenia medzi grupovou štruktúrou zvláštna. Treba si však uvedomiť, že maticové grupy su globálne izomorfné štruktúre $\mathbb{R}^{n^2}$. To plynie z teórie analýzy na varietách.

Teraz zavedieme pojem maticovej exponenciály a uvedieme jej základnú vlastnosť.

Definícia 6. *Majme komplexnú/reálnu maticu X typu $n \times n$. Potom maticovu exponenciálu definujeme ako*

$$e^X = \textstyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{X^m}{m!}.$$

Poznámka. Pre každú reálnu alebo komplexnú maticu, rada maticovej exponenciály konverguje. Navyše, funckia $X \to e^X$ je spojitá. (B.C.Hall, 2003, str. 27)

Tvrdenie 1. *Majme X komplexnú maticu typu $n \times n$. Potom e^{tX} je hladká krivka v $M_n(\mathbb{C})$ a platí, že*

$$\tfrac{d}{dt} e^{tX} = X e^{tX} = e^{tX} X.$$

Dôkaz. (B.C.Hall, 2003, str. 30)

□

1.2 Lieové algebry

V tejto časti si zavedieme pojem Lieovej algebry. V praxi (a aj v našej práci) nás zaujímaju reprezentácie Lieových grup a pomocou Lieových algebier vieme tieto informácie ľahšie extrahovať. Výpočty sú jendoduchšie, kedže, ako uvidíme, pracujeme vo vektorových priestoroch. V poslednej časti si ukážeme aký vzťah medzi sebou maju oba koncepty a akú rolu budu zohrávať v našej práci a reprezentačnej teórií.

Definícia 7. *Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je vektorový priestor spolu s bilineárným antisymetrickým zobrazením $[\cdot\,,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, ktoré splňuje tzv. Jacobiho identitu*

$$[x,[y,z]] + [z,[x,y]] + [y,[z,x]] = 0, \text{ pre } x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

Operáciu $[\cdot\,,\cdot]$ nazývame zátvorku v $\mathfrak{g}$.

Príklad. Základným príkladom je Lieová algebra $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. Lieová algebra $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ je vektorový priestor všetkých komplexných matic typu $n \times n$ so *zátvorkou* definovanou ako komutátor $[a,b] = ab - ba$.

Definícia 8. *Nech G je maticová Lieová grupa, teda G je uzavretá podgrupa $GL(n,\mathbb{C})$. Potom Lieovou algebrou $\mathfrak{g}$ grupy G nazveme množinu všetkých matíc $X \in M_n(\mathbb{C})$ takých, že e^{tX} patrí do G pre všetky $t \in \mathbb{R}$.*

Poznámka. Lieová algebra $\mathfrak{g}$ maticovej Lieovej grupy G tvorí Lieovú algebru so zátvorkou definovanou ako komutátor. B.C.Hall (2003)

Definícia 9. *Lieovou podalgebrou Lieovej algebry $\mathfrak{g}$ definujeme ako vektorový podpriestor $\mathfrak{h}$ priestoru $\mathfrak{g}$ uzavretú na operáciu zátvorky. Inak povedané platí, že $[H_1, H_2] \in \mathfrak{h}$ pre každé $H_1, H_2 \in \mathfrak{h}$.*

Ďalej prirodzene definujeme homomorfizmus v tejto štruktúre.

Definícia 10. *Uvažme Lieove algebry* $\mathfrak{g}$*,* $\mathfrak{h}$*. Potom lineárne zobrazenie* $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ *je homomorfizmus Lieových algebier, ak platí, že* $\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$ *pre každé* $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Náš reprezentačný aparát sa bude konkrétne týkať kľúčovej Lieovej algebry $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Zadefinujme si preto danú algebru spoločne s ďalšími, ktoré budeme využívať.

Príklad. Lieová algebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ je definovaná ako

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) := \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \,|\, trace(X) = 0\}.$$

Táto Lieova algebra je určená bázovými prvkami

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a reláciami $[H,X] = 2X, \quad [H,Y] = -2Y, \quad [X,Y] = H.$

Príklad. Lieova algebra $\mathfrak{so}(3)$ je definovaná ako

$$\mathfrak{so}(3) := \{X \in \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R}) \,|\, X^T = -X\}.$$

Lieová algebra je určená bázovými prvkami

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Príklad. Lieová algebra $\mathfrak{su}(2)$ je definovaná ako

$$\mathfrak{su}(2) := \{X \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}) \,|\, trace(X) = 0, X^* = -X\},$$

kde X^* je hermitovsky združená matica. Lieová algebra je určená bázovými prvkami

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

1.3 Reprezentácie

Dostávame sa ku kľúčovému pojmu našej bakalárskej práci. Zadefinujeme si pojem reprezentácie, ktorého pochopenie bude nevyhnutné k ďalšiemu výkladu práce.

Definícia 11. *Nech G je maticová Lieová grupa. Potom konečne dimenzionálnou komplexnou reprezentáciou grupy G nazveme homomorfizmus maticových Lieových grup*

$$\phi : G \to GL(V)$$

kde V je konečne dimenzionálny kompelxný vektorový priestor.

Definícia 12. *Nech* $\mathfrak{g}$ *je komplexná Lieová algebra. Potom konečne dimenzionálnou komplexnou reprezentáciou algebry* $\mathfrak{g}$ *nazveme homomorfizmus Lieových algebier*

$$\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$$

kde V je konečne dimenzionálny kompelxný vektorový priestor.

Poznámka. Reprezentácie grupy alebo algebry môžeme tiež vnímať ako dvojice (ϕ, V), alebo (π, V). Teda ako vektorový priestor, na ktorom prvky grupy/algebry pôsobia.

V našej práci pracujeme s ireducibilnými reprezentáciami algebry $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Definujme si, čo je to ireducibilná reprezentácia.

Definícia 13. *Nech ϕ je konečne dimenzionálna reprezentácia maticovej Lieovej grupy G, na vektorovom priestore V. Podpriestor W priestoru V je invariantný ak $\phi(A)(w) \in W$ pre každé $w \in W$ a každé $A \in G$. Invariantný podpriestor W nazveme netriviálnym, ak platí, že $W \neq 0$ a $W \neq V$. Reprezentáciu, ktorá neobsahuje žiaden netriviálny invariantný podpriestor nazývame ireducibilnou.*

Poznámka. Analogicky sa definuje ireducibilita pre reprezentáciu Lieovej algebry.

Pripomnme, že naša práca sa týka rotačne invariantného vektorového priestoru. Teda prirodzeným predmetom nášho štúdia je reprezentácia rotačnej grupy $SO(3)$ v zmysle vyššie uvedenej definície. Budeme sledovať rôzne akcie tejto grupy. Dostávame sa teda k poslednej časti, a síce, ukážeme si ako prejdeme z konceptu maticovej Lieovej grupy do konceptu Lieových algebier. Na to nam dá odpoveď následujúce kľúčové tvrdenie

Tvrdenie 2. *Uvažme maticové Lieove grupy G, H a ich príslušné Lieove algebry $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$. Uvažme homomorfizmus $\phi : G \to H$ Lieovych grup. Potom existuje jednoznačne určené lineárne zobrazenie $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ také, že*

$$\phi(e^X) = e^{\rho(X)} \text{ pre každe } X \in \mathfrak{g}.$$

Ďalej platí, že

$$\rho(X) = \frac{d}{dt}\phi(e^{tX})\Big|_{t=0} \quad pre\, každe\, X \in \mathfrak{g}. \tag{1.1}$$

$$\rho([X,Y]) = [\rho(X), \rho(Y)] \quad pre\, každe\, X, Y \in \mathfrak{g}. \tag{1.2}$$

Dôkaz. (B.C.Hall, 2003, str. 45)

□

Vidíme, že z prirodzeného homomorfizmu maticových Lieových grup, tvrdenie dava návod (1.1) ako spočítať príslušné lineárne zobrazenie medzi odpovedajúcimi Lieovými algebrami. Navyše takéto zobrazenie bude vďaka vlastnosti (1.2) homomorfizmom Lieových algebier. Týmto sme sa dostali k fundamentálnemu prístupu našej práce. Náš výpočet ortogonálnej bázy rotačne invariantného vektorového priestoru prenesieme z jazyku maticových Lieových grup do jazyku Lieových algebier kde je daný vypočet ľahšie uchopiteľný. Hlavným cieľom bude aplikovať dobre známe vlastnosti Lieovej algebry $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Pristupíme k tomu štartovacím výpočtom indukovanej Lieovej algebry $\mathfrak{so}(3)$. Ukážeme si aj alternatívny prístup pomocou kvaterniónov a algebry $\mathfrak{su}(2)$. To, aký vzťah má rotačná grupa $SO(3)$ s kvaterniónmi bude predmetom následujúcej sekcie.

2. Kvaternióny a rotácie

V tejto kapitole popíšeme rotácie v dimenzií 3 a v dimenzií 4 pomocou kvaterniónov.

2.1 Kvaternióny

Kvaternióny $\mathbb{H}$ majú klasický zaužívanú štruktúru známu z algebry. Kvaternióny sú výrazy tvaru $x = x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$ kde $(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4$ a $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ sú imaginárne jednotký splňujúce relácie

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1, \quad \mathbf{ij} = \mathbf{k},\ \mathbf{jk} = \mathbf{i},\ \mathbf{ki} = \mathbf{j} \quad \mathbf{ji} = -\mathbf{k},\ \mathbf{ik} = -\mathbf{j},\ \mathbf{kj} = -\mathbf{i}.$$

Definícia 14. *Reálnu časť kvaterniónu $x \in \mathbb{H}$ označujeme ako $\mathcal{R}e(x) := x_0$ a imaginárnu časť ako $\mathcal{I}m(x) := x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k}$.*

Pripomeňme ešte základne vlasnosti vo forme poznámky.

Poznámka. Platí, že

$$|xy| = |x||y|, \tag{2.1}$$
$$|x|^2 = x\overline{x} = \overline{x}x, \tag{2.2}$$
$$\langle x,y\rangle = \mathcal{R}e(x\overline{y}), \tag{2.3}$$
$$x^{-1} = \overline{x}/|x|^2, \tag{2.4}$$

kde 2.9 je takzvaný multiplikatívny inverz, $|\cdot|$ a $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ Euklidovská norma (v tomto kontexte značená ako absolútna hodnota) a Euklidovský skalárny súčin z Definície 15.

Dôkaz. Plynie jednoducho z definícií. □

V našej práci budeme kvaternióny realizovať v priestore matic $\mathbb{C}^{2\times 2}$ v nasledujúcom zmysle. Kvaternión $x = x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$ stotožnujeme s maticou tvaru

$$\begin{pmatrix} x_0 + x_3 i & -x_2 + x_1 i \\ x_2 + x_1 i & x_0 - x_3 i \end{pmatrix}.$$

Potom $\mathbb{H}$ odpovedá reálnemu podpriestoru matic práve uvedeného tvaru. Imaginárné jednotky sú tvaru

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

a kvaternionóve násobenie odpovedá násobeniu maticovému.

Poznámka. Rozlišujeme medzi komplexnou imaginárnou jednotkou i a kvaterniónovými imaginárnými jednotkami $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

V prvej kapitole sme si zadefinovali maticovú Lieovu grupu $SU(n)$, teraz si popíšeme ako vypadá pre $n = 2$.

Tvrdenie 3. *Platí, že* $SU(2) = \{\begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\}$

Poznámka. Dá sa ľahko overiť, že stĺpce matíc grupy $SU(2)$ sú ortonormálne a determinant je rovný 1. Teda naozaj tato grupa je tvorená unitárnymi maticami typu 2×2 s jednotkovým determinantom.

Poznámka. $S^3 = \{x \in \mathbb{H} \mid |x| = 1\}$ bude označovať multiplikatívnu grupu jednotkových kvaterniónov.

Tvrdenie 4. *V našej maticovej realizácií* $\mathbb{H}$ *platí, že* $S^3 = SU(2)$.

Dôkaz. Majme maticu $\begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \in SU(2)$. Označme $\alpha = x_0 + x_3 i$ a $\beta = x_2 + x_1 i$.To jednoznačne odpovedá kvaterniónu $x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$. Z definície grupy $SU(2)$ plynie, že $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Z čoho plynie, že $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Opačne, zvoľme si jednotkový kvaternión $x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$. Tento kvaternión odpovedá matici tvaru $\begin{pmatrix} x_0 + x_3 i & -x_2 + x_1 i \\ x_2 + x_1 i & x_0 - x_3 i \end{pmatrix}$. Ďalej označme $\alpha = x_0 + x_3 i$ a $\beta = x_2 + x_1 i$. Okamžite vidíme, že príslušná komplexná matica $\begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$ má ortonormálne stĺpce vzhľadom k štandardnému skalarnému súčinu na $\mathbb{C}$ a determinant rovný 1.

□

Na záver si uvedieme podstatné tvrdenie, ktoré nam dáva do vzťahu kvaternióny a Lieovu algebru $\mathfrak{su}(2)$.

Tvrdenie 5. *Platí, že* $\mathcal{I}m\mathbb{H} = \mathfrak{su}(2)$.

Dôkaz. V našej maticovej realizácií teda máme, že $S^3 = SU(2)$. Zvolme $x \in \mathcal{I}m\mathbb{H}$. Potom $e^{tx} \in S^3$ pre každé $t \in \mathbb{R}$. Skutočne, $|e^{tx}|^2 = e^{tx}e^{t\overline{x}} = e^{2t\mathcal{R}e(x)} = 1$. Teda máme $\mathcal{I}m\mathbb{H} \subset \mathfrak{su}(2)$. Dôkaz potom plynie z $dim_{\mathbb{R}}\mathcal{I}m\mathbb{H} = 3 = dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{su}(2)$.

□

2.2 Rotácie

Cieľom tejto kapitoly bude popísať rotácie v Euklidovskom priestore pomocou kvaterniónov.

Definícia 15. *Nech* $\mathbb{R}^n$ *je Euklidovský priestor s Euklidovským skalárnym súčinom* $\langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ *a normou* $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. *Hovoríme, že lineárne zobrazenie* $R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *je ortogonálne ak platí, že* $\langle Rx,Ry \rangle = \langle x,y \rangle$ *pre každé* $x,y \in \mathbb{R}^n$

Každé lineárne zobrazenie $R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je jednoznačne určené svojou maticou $M \in \mathbb{R}^n$ napríklad voči štandardnej bázy. Teda $Rx = Mx, x \in \mathbb{R}^n$ kde vpravo je súčin matice a vektoru. Ako je bežne zaužívané budeme stotožnovať R s M. V tomto stotožnení odpovedá grupa ortogonálných transformácií $\mathbb{R}^n$ grupe $O(n)$ a grupa rotácií $\mathbb{R}^n$ grupe $SO(n)$.

Poznámka. Pripomeňme z kapitoly 1 označenie pre grupu všetkých ortogonálnych matíc typu $n \times n$ ako $O(n)$ s determinantom rovným ± 1. Ďalej grupu špeciálnych ortogonálnych matíc s determinantom rovným 1 označujeme ako $SO(n)$. My ďalej medzi množinou zobrazení a maticiami nebudeme rozlišovať.

Ukážeme si ako popísať rotácie v $\mathbb{R}^2$ pomocou komplexných čísel. Túto ideu následne rozšírime do $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^4$ pomocou kvaterniónov.

Tvrdenie 6. *Pre každú maticu $A \in SO(2)$ existuje $\theta \in \mathbb{R}$, pre ktorú platí, že*

$$A = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Dôkaz. Uvažme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SO(2)$. Matica je ortogonálna s jednotkovým determinantom a ortonormálnymí stĺpcami. Teda platia následujúce rovnosti, a síce, že

$$a^2 + c^2 = 1 = b^2 + d^2 \tag{2.5}$$

$$ab + cd = 0 \tag{2.6}$$

$$ad - cb = 1. \tag{2.7}$$

Vynásobením (2.2)-rovnice číslom d a následnou substitúciou z (2.2) a (2.3) dostaneme $b = -c$. Spätným dosadením do (2.3) a využítím (2.1) plynie $a = d$. Teda dostávame maticu tvaru

$$\begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}.$$

Parametrizáciou podľa θ ako $a = cos(\theta)$ a $c = sin(\theta)$ dostávame dôkaz.

□

Tvrdenie 7. *Majme grupu $SO(2)$. Označme grupu jednotkových komplexných čísel $S^1 := \{a \in \mathbb{C} \,|\, |a| = 1\}$ s komplexným násobením. Potom existuje grupový izomorfmizmus S^1 na $SO(2)$, teda platí $SO(2) \cong S^1$.*

Dôkaz. Definujme $\phi : S^1 \to SO(2)$ ako akciu na $\mathbb{R}^2$ ako $\phi(a)(x) := ax$. Ukážeme, že toto je hľadaný izomorfizmus.
(1) ϕ je homomorfizmus:
$\phi(ab)(x) = abx = a(bx) = a(\phi(b)(x)) = \phi(a)(\phi(b)(x)) = \phi(a) \circ \phi(b)(x)$.

(2) ϕ je prosté:
Majme $a \neq b$. Potom okamžite z definície plynie, že $ax \neq bx$ pre každé x.

(3) ϕ je *na*:
Majme maticu $A \in SO(2)$. Matica je presne tvaru z predošlého tvrdenia. Ukážeme, že pre každú takúto maticu existuje jednotkové komplexné číslo. Dokonca, existuje izomorfizmus

$$e^{i\theta} \cong \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Uvažme $\theta \in \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{C}$ v tvare $x = x_0 + ix_1$. Potom
$e^{i\theta}x = (cos(\theta)+isin(\theta))(x_0+ix_1) = x_0cos(\theta)-x_1sin(\theta)+i(x_0sin(\theta)+x_1cos(\theta) =$

$$\begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

□

Ukázali sme, že môžeme popísať rotácie v $\mathbb{R}^2$ pomocou jednotkovych komplexných čísel. Takýto analogický popis budeme chcieť použiť vo vyšších dimenziách s použitím kvaterniónov.

Na úplny popis ortogonálných zobrazení v Euklidovskom priestore postačia reflexie podľa nadrovín.

Definícia 16. *Nech $w \in \mathbb{R}^n$ a $|w| = 1$. Označme $w^\perp$ nadrovinu v $\mathbb{R}^n$ prechádzajúcu počiatkom a kolmú na vektor w. Reflexiu R_w podľa $w^\perp$ definujeme ako $R_w(x) = x - 2\langle x,w\rangle w$.*

Každé ortogonálne zobrazenie je kompozíciou konečného počtu reflexií. Tento fakt je podstatou nasledujúcej Caratheodoryho vety.

Tvrdenie 8. *Nech R je ortonogonálne zobrazenie. Majme množinu všetkých ortogonalných zobrazení ako $O(n)$, špecialne $SO(n)$ s jednotkovým determinantom. Potom platí*
(1) $R \in O(n)$ práve vtedy, keď existuje $k = 0,1,\ldots,n$ a reflexie $R_1,R_2,\ldots,R_k$ tak, že platí $R = R_1 \circ R_2 \circ \ldots \circ R_k$.
(2) $R \in SO(n)$ práve vtedy, keď existuje $2k \leq n$ a reflexie $R_1,R_2,\ldots,R_{2k}$ tak, že platí $R = R_1 \circ R_2 \circ \ldots \circ R_{2k}$.

Dôkaz. (J.E. Gilbert, 1991, str. 34)

□

Vďaka platnosti Carathedoryho vety nás pri popise ortognálnych zobrazení bude teda prirodzene zaujímať popis reflexií. Pozrime sa ako vypadajú všeobecné reflexie v $\mathbb{R}^n$.

Tvrdenie 9. *Nech $w \in \mathbb{R}^n$ a $|w| = 1$. Označme $w^\perp$ nadrovinu v $\mathbb{R}^n$ prechádzajúcu počiatkom a kolmú na vektor w. Označme R_w reflexiu podľa $w^\perp$. Potom platí*

$$R_w \in O(n) \setminus SO(n). \tag{2.8}$$

Dôkaz. Stačí overiť, že determinant matice zobrazenia je -1 a R_w zachováva skalárny súčin. Zachovanie skalarného súčinu plynie z Definície 19. Ďalej priamo spočítame determinant matice zobrazenia R_w.

$$R_w(x) = \begin{pmatrix} x_0 \\ . \\ . \\ . \\ x_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\langle x,w\rangle w_0 \\ . \\ . \\ . \\ -2\langle x,w\rangle w_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 - 2\langle x,w\rangle w_0 \\ . \\ . \\ . \\ x_{n-1} - 2\langle x,w\rangle w_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Po ďalšej úprave dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1-2w_0^2 & -2w_1w_0 & ... & -2w_{n-1}w_0 \\ -2w_0w_1 & 1-2w_1^2 & ... & 2w_{n-1}w_1 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ -2w_0w_{n-1} & -2w_1w_{n-1} & ... & 1-2w_{n-1}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ . \\ . \\ . \\ x_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Ďalej stačí využiť základne vlastnosti determinantu a dostávame záporny jednotkový determinant matice zobrazenia.

□

Máme popísane všeobecné reflexie v n-rozmernom Euklidovskom priestore spolu s Caratheodoryho vetou, teda kompletný nástroj na popis rotácií v ľubovolnej dimenzií. Pozrime sa teraz na popis rotácií v priestore s dimenziou 3 a 4.

Na začiatok si popíšeme reflexie v dimenzií 4.

Tvrdenie 10. *Nech $w \in \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H}$ a $|w| = 1$, kde $\mathbb{H}$ je algebra kvaterniónov. Potom reflexia R_w má tvar*

$$R_w(x) = -w\overline{x}w,\ x \in \mathbb{H}$$

Dôkaz. Z vlastnosti skalárneho súčinu na vektorovom priestore $\mathbb{H}$ plynie, že $\langle x,w \rangle = \mathcal{R}e(w\overline{x}) = \frac{1}{2}(w\overline{x} + x\overline{w})$. Ďalej dosaďme túto identinu do Definície 16. Teda dostávame, že

$$R_w(x) = x - 2\langle x,w \rangle w = x - (w\overline{x} + x\overline{w})w = x - w\overline{x}w - x\overline{w}w = -w\overline{x}w.$$

□

Podľa Caratheodoryho vety nám na popis ortogonálnych zobrazení s jednotkovým determinantom stačí popísať párnu kompozíciu reflexií. To je obsahom ďalšej vety.

Tvrdenie 11. *Nech $w_1,w_2 \in S^3$ a $R = R_{w_1} \circ R_{w_2} \in SO(4)$. Potom $Rx = ax\overline{b}$, kde $a,b \in S^3$ a $x \in \mathbb{H}$.*

Dôkaz. Z predošlej vety už vieme ako vypadá reflexia v $\mathbb{R}^4$. Majme teda reflexiu podľa w_2 ako $R_{w_2}(x) = -w_2\overline{x}w_2$. Na tento prvok opať použime reflexivné zobrazenie ale tentokrát podľa w_1. Dostávame $R_{w_1}(R_{w_2}(x)) = w_1\overline{w_2\overline{x}w_2}w_1 = w_1\overline{w_2}x\overline{w_2}w_1$. Položme $a = w_1\overline{w_2}, b = \overline{w_2}w_1$ a vďaka vlastnosti súčinu na $\mathbb{H}$ máme, že $a,b \in S^3$.

□

Konečne sa dostávame k popisu rotačnej grupy $SO(4)$ pomocou jednotkovvých kvaterniónov, a síce platí nasledujúce tvrdenie.

Tvrdenie 12. *Platí, že $SO(4) = \{\rho_{a,b} \,|\, a,b \in S^3\}$, kde $\rho_{a,b}(x) := ax\overline{b}, x \in \mathbb{H}$. Ďalej $\rho_{a,b} = \rho_{c,d}$ práve vtedy, keď $(a,b) = \pm(c,d)$.*

Dôkaz. (T. Bröcker, 1985, str. 292)

□

Nakoniec si uvedieme popis rotácií v 3-dimenzionálnom priestore vo forme poznámky, ktorý využijeme u samotných výpočtov.

Poznámka. Majme reflexiu $\mathbf{R}$ v $\mathcal{I}m\mathbb{H} = \mathbb{R}^3$. Potom existuje jediná reflexia R v $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ tak, že

$$\mathbf{R} = R\Big|_{\mathcal{I}m\mathbb{H}} \quad a \tag{2.9}$$

$$R(1) = 1. \tag{2.10}$$

Poznámka. Práve uvedená poznámka vysvetľuje náš prístup k popisu rotácií v $\mathbb{R}^3$. Naozaj, zo znalosti rotácií v dimenzií 4 popíšeme rotácie v $\mathbb{R}^3$.

Tvrdenie 13. *Zobrazenie $\Psi : S^3 \to SO(3)$ definované ako $\Psi(a) := \rho_a$ je surjektívny, ale nie injektívny homomorfizmus grup. Platí totiž, že $\rho_a = \rho_b$ práve vtedy, keď $a = \pm b$. Na S^3 uvažujeme kvaternionóve násobenie.*

Dôkaz. T. Bröcker (1985)

□

Poznámka. Tvrdenie 13 v podstate hovorí, že $S^3 = SU(2)$ je realizácia takzvanej spin grupy $Spin(3)$.

Poznámka. Spin grupa $Spin(3)$ je definovaná ako dvojnásobne pokrytie grupy $SO(3)$, pre ktorú existuje krátka exaktná postupnosť

$$1 \to \mathbb{Z}_2 \to Spin(3) \to SO(3) \to 1.$$

3. Výpočet kanonických báz

Pri konštrukcií kanonických báz sférických harmonik a sférických monogenik budeme postupovať ako v Lávička (2010). Avšak narozdiel od Lávička (2010) k popisu rotácií v $\mathbb{R}^3$ použijeme miesto Cliffordovských algebier kvaternióny.

3.1 Sférické harmoniky

Definícia 17. *Vektorový priestor všetkých (k-homogénnych) polynómov o troch reálnych premenných nad $\mathbb{C}$ značíme ako $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3,\mathbb{C})$ ($\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^3,\mathbb{C})$).*

Definícia 18. *Polynómy vektorového priestoru*

$$\mathcal{H}_k(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}) := \{f \in \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}) | \triangle f = 0\}$$

kde $\triangle := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ je Laplaceov operátor, nazývame sférické harmoniky stupňa k.

V tejto sekcií pomocou reprezentačnej teórie skonštruujeme ortognálnu bázu tohto priestoru sférických harmonik. Výpočet bázy bude prebiehať následovne. Najskôr vypočítame reprezentáciu indukovanej Lieovej algebry $\mathfrak{so}(3)$ a následnou komplexifikáciou dostaneme príslušnú reprezentáciu algebry $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Ďalej využijeme následujúcu vlastnosť, ktorú neskôr sformulujeme ako tvrdenie a síce, že priestor $\mathcal{H}_k(\mathbb{R}^3,\mathbb{C})$ tvorí ireducibilnú konečne dimenzionálnú reprezentáciu Lieovej algebry $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Vďaka dôkladne známym vlastnostiam tejto reprezentácie dokončíme výpočet ortogonálnej bázy.

3.2 Výpočet indukovej akcie

V predošlej kapitole sme uviedli, že na rotačnú grupu $SO(3)$ môžeme nazerať pomocou jednotkových kvaterniónov S^3. Indukovanú akciu výpočítame navyše dvoma spôsobmi. Prvý spôsob bude pomocou klasickej rotačnej grupy

$$SO(3) = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \,|\, A^T = A^{-1}\}.$$

Druhý spôsob bude pomocou jednotkových kvaterniónov. Pripomeňme, že tieto dva postupy sú ekvivalentné vďaka dvojnásobnému nakrytiu rotačnej grupy SO(3) z predošlej kapitoly.

Akciu rotačnej grupy $SO(3)$ na vektorovom priestore $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3,\mathbb{C})$ definujeme ako

$$[\rho(A)f](x) := f(A^{-1}x),$$

kde $x \in \mathbb{R}^3$, $A \in \mathrm{SO}(3)$, $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^3,\mathbb{C})$.

Počítajme indukovanú akciu $\mathrm{d}\rho$, Lieovej algebry $\mathfrak{so}(3)$ pomocou Tvrdenia 2, teda derivujme

$$[\mathrm{d}\rho(A)f](x) = \frac{d}{dt} f(e^{-tA}x)\Big|_{t=0}.$$

Definujme krivku $x(t) := e^{-tA}x$ pričom $x(0) = x$ a podľa Tvrdenia 1 derivujme. Potom dostávame

$$\frac{dx}{dt} = -Ax = -\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix}.$$

Pretože platí

$$[\mathrm{d}\rho(A)f](x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt},$$

dostávame

$$[\mathrm{d}\rho(A)f](x) = -\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_1x_3) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_{21}x_1 + a_{22}x_1 + a_{23}x_1) - \frac{\partial f}{\partial x_3}(a_{31}x_1 + a_{32}x_1 + a_{33}x_1). \quad (3.1)$$

Pozrime sa teraz ako vypadá reprezentácia bázovych elementov Lieovej algebry $\mathfrak{so}(3)$ pôsobiacich na vektorový priestor polynómov $\mathcal{H}_k(\mathbb{R}^3,\mathbb{C})$. Spomeňme si, že bázove elementy $\mathfrak{so}(3)$ sú

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Po dosadení J_1, J_2 a J_3 dostávame bázove operátory indukovanej akcie Lieovej algebry $\mathfrak{so}(3)$ v tvare

$$h_{12} = x_2\tfrac{\partial}{\partial x_1} - x_1\tfrac{\partial}{\partial x_2}, \quad h_{23} = x_3\tfrac{\partial}{\partial x_2} - x_2\tfrac{\partial}{\partial x_3}, \quad h_{31} = x_1\tfrac{\partial}{\partial x_3} - x_3\tfrac{\partial}{\partial x_1}.$$

Teraz počítajme indukovanú akciu pomocou jednotkových kvaterniónov. Pripomeňme že $S^3 = SU(2)$. Uvažme akciu grupy jednotkových kvaterniónov na vektorovom priestore $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3,\mathbb{C})$ definovanú ako

$$[\tau(s)f](x) := f(s^{-1}xs) \text{ kde } f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}),\ s \in \mathbb{S}^3,\ x \in \mathbb{R}^3 \cong Im(\mathbb{H}).$$

Opäť podľa Tvrdenia 2 spočítame indukovanú $\mathrm{d}\tau$ akciu ako

$$[\mathrm{d}\tau(s)f](x) = \tfrac{d}{dt}f(e^{-ts}xe^{ts})\Big|_{t=0}$$

Zadefinujme si na priestore polynómov krivku $x(t) := e^{-ts}xe^{ts}$. Opäť platí, že $x(0) = x$ a deriváciou dostávame

$$\frac{d}{dt}f(e^{-ts}xe^{ts})\Big|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt}.$$

Indukovnú akciu budeme počítať pre bázove prvky $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ z S^3 v následujúcom zmysle. Platí, že prvky $e^{t\mathbf{i}}, e^{t\mathbf{j}}, e^{t\mathbf{k}}$ patria do S^3 pre každé $t \in \mathbb{R}$. Špeciálne aj prvky $e^{\frac{t}{2}\mathbf{i}}, e^{\frac{t}{2}\mathbf{j}}, e^{\frac{t}{2}\mathbf{k}}$ patria do S^3 pre každé $t \in \mathbb{R}$. Podľa Definície 8 teda prvky $\mathbf{i}/2, \mathbf{j}/2, \mathbf{k}/2$ patria do indukovanej Lieovej algebry. Počítajme akciu pre tieto bázove elementy.

Výpočet ukážeme pre $s = \mathbf{i}/2$, analogicky by sme počítali pre $\mathbf{j}/2, \mathbf{k}/2$. Dosadme $\mathbf{i}/2$ do argumentu polynómu a pomocou Eulerovho vzorca výraz roznásobime ako

$$e^{-ts}xe^{ts} = e^{-t\mathbf{i}/2}(x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k})e^{t\mathbf{i}/2} = (cos(t) - \mathbf{i}sin(t))(x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k})(cos(t) + \mathbf{i}sin(t)) = x_1\mathbf{i} + (x_2cos(t) + x_3sin(t))\mathbf{j} + (x_3cos(t) - x_2sin(t)\mathbf{k}.$$

Zapísane vektorovo

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2cos(t) + x_3sin(t) \\ x_3cos(t) - x_2sin(t) \end{pmatrix}.$$

Po zderivovaní v bode $t = 0$ dostávame

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ -x_2 \end{pmatrix}.$$

Celkovo máme

$$\frac{d}{dt}f(e^{-t\frac{i}{2}}xe^{t\frac{i}{2}})\Big|_{t=0} = x_3\frac{\partial f}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

Obdobne pre $s = \mathbf{j}/2$ a $s = \mathbf{k}/2$ po rade dostaneme:

$$\frac{d}{dt}f(e^{-t\mathbf{j}/2}xe^{t\mathbf{j}/2})\Big|_{t=0} = -x_3\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f}{\partial x_3}, \quad \frac{d}{dt}f(e^{-t\mathbf{k}/2}xe^{t\mathbf{k}/2})\Big|_{t=0} = x_2\frac{\partial f}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial f}{\partial x_2}.$$

Vídíme, že výsledok je rovnaký presne tak ako sme očakávali, teda operátory máme v tvare

$$h_{ij} = x_j\frac{\partial}{\partial x_i} - x_i\frac{\partial}{\partial x_j} \quad i,j = 1,2,3.$$

3.3 Komplexifikácia a výpočet bázy

Dá sa ľahko overiť, že platia nasledujúce rovnosti

$$[h_{12},h_{23}] = h_{31}, \quad [h_{23},h_{31}] = h_{12}, \quad [h_{31},h_{12}] = h_{23}.$$

Pozrime sa na platnosť prvej rovnosti.
Využijeme, že $[x_i\frac{\partial}{\partial x_j}, x_k\frac{\partial}{\partial x_m}] = 0$ pre $i \neq m$ a $j \neq k$, teda platí, že

$$[h_{12},h_{23}] = h_{12}h_{23} - h_{23}h_{12} = x_1\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_1} = h_{31},$$

kde $[L,K] = LK - KL$ je komutátor na algebre $\mathfrak{so}(3)$. Ďalej komplexifikujme operátory $\mathfrak{so}(3)$ v nasledujúcom zmysle, a síce ako

$$(1) \quad H = -ih_{12}, \quad X^+ = h_{31} + ih_{23}, \quad X^- = -h_{31} + ih_{23},$$

ktoré naozaj splňujú štandardné relácie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ algebry

$$[X^+, X^-] = 2H, \quad [H, X^-] = -X^-, \quad [H, X^+] = X^+.$$

V tomto bode si zavedieme definíciu, ktorá bude nutná pre náš ďalší výklad.

Definícia 19. *Operátory parcialných komplexných derivácii definované ako*

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}[\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2}], \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}[\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}]$$

nazývame Wirtingerové operátory.

Označme $z = x_1 + ix_2$, $\overline{z} = x_1 - ix_2$. Jednoduchou úpravou a použitím práve zavedenej definície po rade dostaneme

$$H = 2x_1\frac{\partial}{\partial \overline{z}} - z\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad X^+ = -2x_3\frac{\partial}{\partial z} + \overline{z}\frac{\partial}{\partial x_3}, \qquad X^- = 2x_3\frac{\partial}{\partial \overline{z}} - z\frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Práve sme preniesli informácie indukovanej Lieovej algebry $\mathfrak{so}(3)$ do dôkladne známej algebry $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. V nasledujúcom odstavci toho využijeme a pozrieme sa, ako nám znalosti o reprezentácií $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ pomôžu vypočítať ortogonálnu bázu. Formulujeme preto dôležité tvrdenie.

Tvrdenie 14. *$\mathcal{H}_k(\mathbb{R}^3,\mathbb{C})$ je $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-ireducibilná reprezentácia s najvyššou váhou k*

Dôkaz. Aby sme dokázali, že $\mathcal{H}_k(\mathbb{R}^3,\mathbb{C})$ je $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-reprezentácia stačí ukázať invariantnosť Laplacovho operátoru pod pôsobením akcií $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Teda $[\triangle, h_{ij}](f) = 0$ pre každé $f \in \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^3,\mathbb{C})$. Dokážeme si len komutátor pre $[\triangle, h_{12}](f) = 0$. Postupne vyjadríme komutátory.

$$\begin{aligned}[\frac{\partial}{\partial x_1}, h_{12}] &= \frac{\partial}{\partial x_1}(x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2}) - (x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2})\frac{\partial}{\partial x_1} = \\ &= x_2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial}{\partial x_2} - x_1\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} - x_2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + x_1\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} = -\frac{\partial}{\partial x_2}.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Obdobne dostaneme $[\frac{\partial}{\partial x_2}, h_{12}] = \frac{\partial}{\partial x_1}$ a $[\frac{\partial}{\partial x_3}, h_{12}] = 0$. Z práve vypočítaného komutátoru plynie, že

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}h_{12} = \frac{\partial}{\partial x_1}(h_{12}\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2}) = (h_{12}\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2})\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_1}x_2 = h_{12}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Teda $[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, h_{12}] = -2\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}$ a obdobne $[\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, h_{12}] = 2\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}$ a $[\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, h_{12}] = 0$. Potom z bilinearity komutátoru dostávame dokaz. Ireducibilita plynie z (T. Bröcker, 1985, str. 89). Nakoniec, vektor najvyššej váhy je práve f_0^k z Tvrdenia 16.

□

Tvrdenie 15. *Majme V_m ireducibilnú reprezentáciu $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ s najvyššou váhou m. Potom:*
(i) Existuje nenulový vektor najvyššej váhy $f_0 \in V_m$, pre ktorý platí

$$Hf_0 = mf_0 \text{ a } X^+f_0 = 0.$$

(ii) Bázu potom tvorí množina vektorov f_j, pre ktoré platí

$$f_j = (X^-)^j f_0 \text{ kde } j = 0, \dots, 2m.$$

(iii) Báza $\{f_0, \dots, f_{2m}\}$ je ortogonálna vzhľadom k ľubovolnému invariantnému skalárnemu súčinu $\langle \cdot , \cdot \rangle$ na priestore V_m. Pripomeňme, že skalárny súčin $\langle \cdot , \cdot \rangle$ na V_m je invariantný ak pre každé $L \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ a každé $f, g \in V_m$ platí

$$\langle Lf, g \rangle = -\langle f, Lg \rangle$$

Dôkaz. Lávička (2010)

□

Pričom v našom konkrétnom prípade formulujeme nasledujúce tvrdenie.

Tvrdenie 16. *Ireducibilná* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$*-reprezentácia* $\mathcal{H}_k(\mathbb{R}^3,\mathbb{C})$ *ma bázu zloženú z polynómov tvaru*

$$f_0^k = \frac{1}{k!2^k}\overline{z}^k \quad a \quad f_j^k = (X^-)^j f_0^k, \quad kde \quad 0 < j \leq 2k$$

Dôkaz. . Dokážeme, že f_0^k je skutočne vektor najvyššej váhy. Označme $f_0^k = \frac{1}{2^k k!}\overline{z}^k$. Dosaďme a overme vlastnosť (i) z Tvrdenia 15.

$$Hf_0^k = 2x_1\frac{1}{2^k k!}\frac{\partial \overline{z}^k}{\partial \overline{z}} - z\frac{1}{2^k k!}\frac{\partial \overline{z}^k}{\partial x_1} = kf_0^k(2x_1/\overline{z} - z/\overline{z}) = kf_0^k.$$

$$X^+f_0^k = -2x_3\frac{\partial f_0^k}{\partial z} + \overline{z}\frac{\partial f_0^k}{\partial x_3} == -2x_3\frac{1}{2^k k!}\frac{\partial \overline{z}^k}{\partial z} = 0.$$

□

Teraz vyjadríme operátory vo sférických súradniciach.
Označme

$$x_1 = rsin(\theta)cos(\phi) \quad x_2 = rsin(\theta)sin(\phi) \quad x_3 = rcos(\theta)$$

pre $\quad 0 \leq r, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$
Ďalej platí

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = sin(\theta)cos(\phi)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{cos(\theta)cos(\phi)}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{sin(\phi)}{rsin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = sin(\theta)sin(\phi)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{cos(\theta)sin(\phi)}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{cos(\phi)}{rsin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} = cos(\theta)\frac{\partial}{\partial r} - \frac{sin(\theta)}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

Dosadením do vzťahov (1) dostaneme

$$H = -2i\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$X^+ = e^{i\phi}(-i\frac{\partial}{\partial \theta} + cot(\theta)\frac{\partial}{\partial \phi})$$

$$X^- = e^{i\phi}(i\frac{\partial}{\partial \theta} + cot(\theta)\frac{\partial}{\partial \phi})$$

Nakoniec si vyjadríme polynómy pomocou Legendreových polynómov respektíve funkcií,

Tvrdenie 17. *Majme* $\{f_0^k, \ldots, f_0^{2k}\}$ *bázu* $\mathcal{H}_k(\mathbb{R}^3,\mathbb{C})$ *definovanú v Tvrdení* 16*, potom pre každé* $j = 0, \ldots, 2k$ *máme*

$$f_j^k(r,\theta,\varphi) = i^{k-j}r^k e^{i(k-j)\varphi}P_k^{j-k}cos(\theta),$$

kde

$$P_k^l(s) = \frac{1}{k!2^k}(1-s^2)^{l/2}\frac{d^{l+k}}{ds^{l+k}}(s^2-1)^k, \quad s \in \mathbb{R}$$

a P_k^0 *je* $k-$*tý Legendreov polynom a* P_k^l *je jeho Legendreova funkcia.*

Dôkaz. (T. Bröcker, 1985, str. 120-121)

□

3.4 Sférické monogeniky

V tejto sekcíí sa pozrieme na výpočet ortogonálnej bázy k-homogenných spinorových polýnomov o troch reálnych premenných. Spinorový priestor sa dá chápať alebo teda realizovať rôznymi spôsobmi. Jeden je pomocou reprezentácie Cliffordovej algebry, ktorý avšak nebudeme používať. Podľa Tvrdenia 13 je $Spin(3) \cong SU(2)$, môžeme teda pod pojmom spinorový priestor rozumieť definujúcu reprezentáciu grupy $SU(2)$. Spinorový priestor S je vektorový priestor $\mathbb{C}^2$ spolu s akciou maticovej Lieovej grupy $SU(2)$ definovanou ako $\overline{\tau}(s)(v) := sv$ kde $s \in S$ a $v \in \mathbb{C}^2$. Prvky tohto priestoru nazývame spinory.

Definícia 20. *Vektorový priestor všetkých (k-homogénnych) spinorových polynómov o troch reálnych premenných značíme ako $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3,S)(\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^3,S))$, kde S je spinorový priestor.*

Definícia 21. *Polynómy vektorového priestoru*

$$\mathcal{M}_k(\mathbb{R}^3,S) := \{f \in \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^3,S) \,|\, \partial f = 0\}$$

kde $\partial := \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x_1} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial x_2} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial x_3}$ je Diracov operátor a S je spinorový priestor, nazývame sférické monogeniky stupňa k.

Majme teda priestor $\mathcal{M}_k(\mathbb{R}^3,S)$. Vypočítame ortogonálnu bázu tohto vektorového priestoru pomocou reprezentačného aparátu jednotkových kvaterniónov. Uvidíme, že využijeme znalosti z prvého skalarného prípadu k výpočtu indukovanej algebry a bázy.

Podobne ako sme počítali v prvom príklade, uvažme akciu τ jednotkových kvaterniónov $S^3 = SU(2)$ na priestore $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3,S)$ ako

$$[\tau(s)f](x) := sf(s^{-1}xs) \text{ kde } f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^3,S),\ s \in S^3,\ x \in \mathbb{R}^3 \cong \mathcal{I}m(\mathbb{H}).$$

Podľa Tvrdenia 2 počítajme indukovanú akciu $\mathrm{d}\tau$ ako

$$[\mathrm{d}\tau(s)f](x) = \tfrac{d}{dt}e^{ts}f(e^{-ts}xe^{ts})\Big|_{t=0}.$$

Teda

$$[\mathrm{d}\tau(s)f](x) = \tfrac{d}{dt}e^{ts}f(e^{-ts}xe^{ts})\Big|_{t=0} = \tfrac{d}{dt}(e^{ts})\Big|_{t=0}f(x) + \tfrac{d}{dt}f(e^{-ts}xe^{ts})\Big|_{t=0}$$

Spomeňme si, že druhý člen výrazu sme už počítali v prvom príklade. Teda stačí dopočítať deriváciu e^{ts} . Opäť počítame pre $\mathbf{i/2}$, $\mathbf{j}/2$, $\mathbf{k}/2$. Pre $\mathbf{i/2}$ dostaneme

$$\frac{\mathbf{i}}{2}f - x_3\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

Obdobne pre $\mathbf{j}/2, \mathbf{k}/2$ máme po rade

$$\tfrac{\mathbf{j}}{2}f - x_3\tfrac{\partial f}{\partial x_1} + x_2\tfrac{\partial f}{\partial x_3}, \quad \tfrac{\mathbf{k}}{2}f + x_2\tfrac{\partial f}{\partial x_1} - x_1\tfrac{\partial f}{\partial x_2}.$$

Máme spočítane indukované akcie Lieovej algebry $\mathfrak{su}(2)$, pomocou jednotkových kvaterniónov na priestore $\mathcal{M}_k(\mathbb{R}^3,S)$, ktoré budeme zapisovať pomocou operátorov vyriešených v prvom príklade. Teda ako

$$L_{23} := \tfrac{\mathbf{i}}{2} + h_{23}, \quad L_{31} := \tfrac{\mathbf{j}}{2} + h_{31}, \quad L_{12} := \tfrac{\mathbf{k}}{2} + h_{12}.$$

Obdobne je znova vidieť, že platia nasledujúce rovnosti

$$[L_{12}, L_{23}] = L_{31}, \quad [L_{31}, L_{12}] = L_{23}, \quad [L_{23}, L_{31}] = L_{12}.$$

Overíme prvú z nich, píšeme teda

$$[L_{12}, L_{23}] = L_{12}L_{23} - L_{23},L_{12} = \tfrac{\mathbf{j}}{4} + h_{12}h_{23} + \tfrac{\mathbf{j}}{4} - h_{23}h_{12} = \tfrac{\mathbf{j}}{2} + [h_{12},h_{23}] = \tfrac{\mathbf{j}}{2} + h_{31}.$$

Komplexifikujme ďalej práve vypočítané operátory v zmysle, že operátory

$$(2) \qquad \mathbf{H} = -iL_{12}, \quad X^{++} = L_{31} + iL_{23}, \quad X^{--} = -L_{31} + iL_{23},$$

splňajú štandardné relácie Lieovej algebry $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Teda, že platí

$$[X^{++}, X^{--}] = 2\mathbf{H}, \quad [\mathbf{H}, X^{--}] = -X^{--}, \quad [\mathbf{H}, X^{++}] = X^{++}.$$

Dôkaz. Overíme prvú rovnosť.

$$\begin{aligned}[X^{++}, X^{--}] = X^{++}X^{--} - X^{--}X^{++} &= iL_{31}L_{23} - iL_{23}L_{31} + iL_{31}L_{23} - iL_{23}L_{31} \\ &= 2i(L_{31}L_{23} - L_{23},L_{31}) = 2i[L_{31}, L_{23}] = -2iL_{12} = 2H. \quad (3.3)\end{aligned}$$

□

Ďalej označme $z = x_1 + ix_2$ a $\overline{z} = x_1 - ix_2$. Platí, že

$$X^{++} = X^{+} + \omega^{+}, \text{ kde } \omega^{+} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{j} + i\mathbf{i}), \quad X^{--} = X^{-} + \omega^{-}, \text{ kde } \omega^{-} = \tfrac{1}{2}(-\mathbf{j} + i\mathbf{i}).$$

Poznámka. Pripomíname, že i je imaginárna jednotka komplexných čísel a $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ sú imaginárne jednotky kvaterniónov, ktoré realizujeme ako matice

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Dôkaz. Overme prvú rovnosť.

$$X^{++} = L_{31} + iL_{23} = \tfrac{\mathbf{j}}{2} + h_{31} + i(\tfrac{\mathbf{i}}{2} + h_{23}) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{j} - i\mathbf{i}) + X^{+}.$$

□

Poznámka. Pripomeňme pôsobenie $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ na vektor $\begin{pmatrix} v_+ \\ v_- \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$. Platí, že

$$\mathbf{i}\begin{pmatrix} v_+ \\ v_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iv_- \\ iv_+ \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j}\begin{pmatrix} v_+ \\ v_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_- \\ v_+ \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k}\begin{pmatrix} v_+ \\ v_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iv_+ \\ -iv_- \end{pmatrix}.$$

K výpočtu báze budeme potrebovať následujúce Tvrdenie, ktoré v zápetí využijeme k dokázaniu veľmi dôležitej vlastnosti priestoru $\mathcal{M}_k(\mathbb{R}^3, S)$.

Tvrdenie 18. *Platia následujúce rovnosti. A síce, že*

$$(\omega^-)^2 = 0 \quad a \quad [X^-, \omega^-] = 0.$$

Dôkaz. Prva rovnosť sa dokáže priamo z definície a z predošlej poznámky.

$$(\omega^-)^2 = \tfrac{1}{2}(-\mathbf{j}+i\mathbf{i})(\tfrac{1}{2}(-\mathbf{j}+i\mathbf{i})) = -\tfrac{1}{4}\mathbf{j}(-\mathbf{j}+i\mathbf{i}) + \tfrac{1}{4}i\mathbf{i}(-\mathbf{j}+i\mathbf{i}) = -\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}i\mathbf{k} - \tfrac{1}{4}i\mathbf{k} + \tfrac{1}{4} = 0.$$

Druhá rovnosť plynie z bilinearity a definície komutátoru. Dostávame, že

$$
\begin{aligned}
&[X^-, \omega^-] = [2x_3 \frac{\partial}{\partial \overline{z}} - z\frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{1}{2}(-\mathbf{j} + i\mathbf{i})] = \\
&= [2x_3 \frac{\partial}{\partial \overline{z}}, -\frac{1}{2}\mathbf{j}] + [2x_3\frac{\partial}{\partial \overline{z}}, \frac{1}{2}i\mathbf{i}] + [-z\frac{\partial}{\partial x_3}, -\frac{1}{2}\mathbf{j}] + [-z\frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{1}{2}i\mathbf{i}] = 0. \quad (3.4)
\end{aligned}
$$

□

Tvrdenie 19. *$\mathcal{M}_k(\mathbb{R}^3, S)$ je $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-ireducibilná reprezentácia s najvyššou váhou $k + 1/2$.*

Dôkaz. Ireducibilita viď Lávička (2010). Na dokázanie reprezentácie opäť stačí ukázať invariantnosť Diracovho operátoru. Teda, že $[\partial, L_{ij}](f) = 0$ pre $f \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R}^3, S)$. Obmedzíme sa len na $[\partial, L_{12}]$. Zvyšné komutátory by sa dokázali obdobne.

Ukažme si, že $[\partial, L_{12}] = 0$. Obdobne ako sme dokazovali invariantnosť Laplacovho operátoru dostaneme vzťahy

$$[\tfrac{\partial}{\partial x_1}, L_{12}] = -\tfrac{\partial}{\partial x_2}, \quad [\tfrac{\partial}{\partial x_2}, L_{12}] = \tfrac{\partial}{\partial x_1} \text{ a } [\tfrac{\partial}{\partial x_3}, L_{12}] = 0.$$

Ďalej tiež

$$[\mathbf{i}, L_{12}] = -\mathbf{j}, \quad [\mathbf{j}, L_{12}] = \mathbf{i} \text{ a } [\mathbf{k}, L_{12}] = 0.$$

Potom $[\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x_1}, L_{12}] = -\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial x_1} - \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x_2}$. Podobne dostaneme aj $[\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial x_2}, L_{12}] = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial x_1}$ a $[\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial x_2}, L_{12}] = 0$. Z bilinearity komutátoru plynie dôkaz.

Prvok najvyššej váhy je vektor $F_0^k = \frac{1}{k!2^k}\overline{z}^k v^+$ kde teda $v^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Naozaj, overme, že $X^{++}F_0^k = 0$ a $\mathbf{H}F_0^k = (k + 1/2)F_0^k$.

$$\mathbf{H}F_0^k = -i\tfrac{\mathbf{k}}{2}F_0^k + HF_0^k = \tfrac{1}{2}F_0^k + kF_0^k = (1/2 + k)F_0^k.$$

$$X^{++}F_0^k = X^+F_0^k + \omega^+F_0^k = 0.$$

Využili sme pôsobenie $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ z poslednej poznámky a faktu, že f_0^k je primitivný element zo skalárneho príkladu (Tvrdenie 15 a Tvrdenie 16).

□

Konečne sa dostávame ku konštrukcií ortogonálnej bázy.

Tvrdenie 20. *Ireducibilný $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-modul $\mathcal{M}_k(\mathbb{R}^3, S)$ ma bázu skladajúcu sa z polynómov nasledujúceho tvaru*

$$F_0^k = \tfrac{1}{k!2^k}\overline{z}^k v^+ \quad \textit{a} \quad F_j^k = (X^{--})^j F_0^k, \quad \textit{kde} \quad 0 < j \leq 2k + 1.$$

Navyše pre každé $j = 0, \ldots, 2k+1$ je polynóm F_j^k váhový vektor s váhou $k + \frac{1}{2} - j$ teda $HF_j^k = (k + \frac{1}{2} - j)F_j^k$.

Dôkaz. Vyššie sme dokázali, že F_0^k je primitívny element $\mathcal{M}_k(\mathbb{R}^3, S)$. Potom dôkaz plynie z Tvrdenia 15.

□

Ďalej si vyjadríme našu bázu pomocou sférických súradníc. K tomu budeme potrebovať nasledujúcu vlastnosť.

Tvrdenie 21. *Platí, že*

$$(X^{--})^j = (X^-)^j + j(X^-)^{j-1}\omega^- \text{ pre } j \in \mathbb{N}.$$

Konkrétne, pre $j = 0, \dots, 2k+1$ ďalej platí, že

$$F_j^k = f_j^k v^+ + j f_{j-1}^k \omega^- v^+, \text{ kde } v^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dôkaz. Tvrdenie dokážeme indukciou podľa j. Očividne, tvrdenie platí pre $j = 1$. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre $j-1$. Potom pre $(X^{--})^{j-1}$ použijeme indukčný predpoklad a vlastnosti z Tvrdenia 18. Teda

$$\begin{aligned}
(X^{--})^j = (X^{--})(X^{--})^{j-1} &= (X^- + \omega^-)((X^-)^{j-1} + (j-1)(X^-)^{j-2}\omega^-) \\
&= (X^-)^j + (j-1)(X^-)^{j-1}\omega^- + \omega^-(X^-)^{j-1} + (j-1)\omega^-(X^-)^{j-2}\omega^- \\
&= (X^-)^j + j(X^-)^{j-1}\omega^- - (X^-)^{j-1}\omega^- + \omega^-(X^-)^{j-1} + (j-1)(X^-)^{j-2}(\omega^-)^2 \\
&= (X^-)^j + j(X^-)^{j-1}\omega^-. \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Ďalšia časť tvrdenia sa jednoducho dokáže užitím práve dokázaného vzorca a Tvrdenia 20 a Tvrdenia 16. Pripomeňme, že $f_0^k = \frac{1}{k!2^k}\overline{z}^k$.

□

Teraz už máme postačujúci aparát na dokázanie finálneho tvrdenia.

Tvrdenie 22. *Majme $\{F_0^k, \dots, F_{2k+1}^k\}$ bázu $\mathcal{M}_k(\mathbb{R}^3, S)$ definovanú v Tvrdení 20, potom využitím sférických súradníc máme pre každé $j = 0, \dots, 2k+1$*

$$F_j^k(r,\theta,\varphi) = i^{k-j} r^k e^{i(k-j)\varphi}(P_k^{j-k}(cos(\theta)), -ije^{i\varphi}P_k^{j-k-1}(cos(\theta))).$$

Kde $P_k^{k+1} = 0 = P_k^{-k-1}$.

Dôkaz. Platí, že $\omega^- v^+ = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, kde $v^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Označme $v^- := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Potom podľa predošlého Tvrdenia dostávame

$$F_j^k = f_j^k v^+ - j f_{j-1}^k v^-.$$

A kedže v^+, v^- tvoria komplexnú bázu priestoru $\mathbb{C}^2$ dostávame $F_j^k = (f_j^k, -jf_{j-1}^k)$. Využitím Tvrdenia 17 dostávame dôkaz.

□

Záver

Pomocou reprezentačného aparátu za použitia kvaterniónov sme skonštruovali ortogonálnu bázu priestorov polynomiálnych riešení Laplacovej a Diracovej diferenciálnej rovnice. Nakoniec sme túto bázu vyjadrili vo sférických súradniciach.

Zoznam použitej literatúry

B.C.Hall (2003). *Lie groups, Lie algebras, and Representations*. Springer, New York.

J.E. Gilbert, M. M. (1991). *Clifford algebras and Dirac operators in harmonic analysis*. Cambridge University Press, New York.

Lávička, R. (2010). Canonical bases for $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-modules of spherical monogenics in dimension 3. *Arch. Math. (Brno)*, **46**(5), 339–349.

T. Bröcker, T. t. D. (1985). *Representations of compact Lie groups*. Springer, New York.