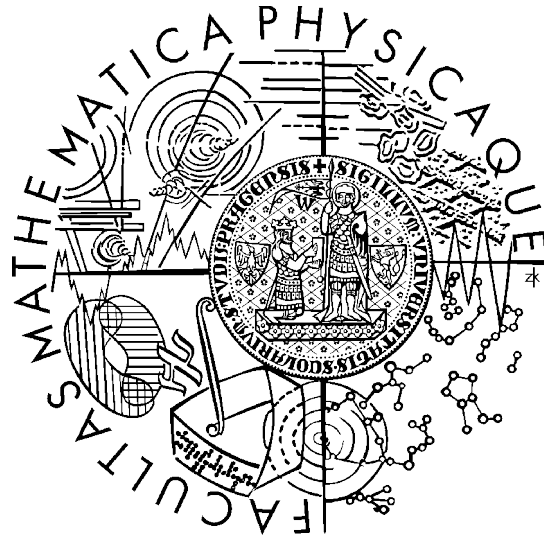


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Jana Bestová

Run-off analýzy v neživotním pojištění

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Marcela Vítková

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Na tomto místě bych chtěla poděkovat Mgr. Marcelu Vítkové za řadu podnětných nápadů a připomínek k práci.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 13.12.2007

Jana Bestová

Obsah

Úvod	1
1 Rezerva na pojistná plnění a její složky	2
2 Vstupní data	4
3 Metoda chain ladder	6
3.1 Výpočet IBNR rezervy pomocí metody chain ladder	6
3.2 Aplikace metody chain ladder	8
4 Mackův model chain ladder	10
4.1 Předpoklady Mackova modelu chain ladder	10
4.2 Střední kvadratická chyba a směrodatná chyba	11
4.3 Testy předpokladů Mackova modelu	13
4.4 Aplikace Mackova modelu (metody SCL)	14
4.5 Rozdíl v odhadech výší škod v trojúhelnících P a I	19
4.6 Korelace mezi daty zaplacených a evidovaných škod	22
5 Mnichovská metoda chain ladder	26
5.1 Značení	26
5.2 Předpoklady metody MCL	27
5.3 Analýza modelových předpokladů	28
5.4 Parametry metody MCL	30
5.5 Aplikace metody MCL	34
6 Srovnání metod	41
6.1 Srovnání metod SCL a MCL	41
6.2 Run-off analýza	42
Závěr	51
Přílohy	52
Literatura a použité zdroje	64

Název práce: Run-off analýzy v neživotním pojištění

Autor: Jana Bestová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Marcela Vítková

e-mail vedoucího: marcela.vitkova@allianz.cz

Abstrakt: Tato práce se zabývá základními metodami pro stanovení odhadu výše IBNR rezervy. Podrobně popisuje metodu chain ladder, Mackův model a Mnichovskou metodu chain ladder. Dvě poslední jmenované metody umožňují stanovit kromě bodového odhadu rezervy též střední kvadratickou chybu odhadu. U všech metod vždy uvádíme teoretické základy a následně aplikaci na reálných datech o škodách. Na závěr pak provedeme srovnání uvedených metod z hlediska jejich použitelnosti v praxi a výpočet run-off analýzy odhadů rezerv.

Klíčová slova: metoda chain ladder, Mackův model chain ladder, Mnichovská metoda chain ladder, rezerva, IBNR

Title: Run-off analysis in non-life insurance

Author: Jana Bestová

Department: Department of probability and mathematical statistics

Supervisor: Mgr. Marcela Vítková

Supervisor's e-mail address: marcela.vitkova@allianz.cz

Abstract: This thesis is dedicated to basic methods of calculating IBNR reserve estimate. The following approaches are introduced: chain ladder method, Mack's chain ladder method and Munich chain ladder method. Last two of them enable to calculate mean squared error of reserve estimate instead of only a point estimate. The theoretical bases are always described and then all methods are applied to real data of claims. Finally, we compare introduced methods from the point of view of their applicability in practice and we calculate run-off analysis of reserve estimates.

Keywords: chain ladder method, Mack's chain ladder method, Munich chain ladder method, reserve, IBNR

Seznam obrázků

1	Schéma obecného kumulativního trojúhelníka	6
2	Regresní model pro druhé vývojové čtvrtletí trojúhelníka P	16
3	Graf vážených reziduí vs. $P_{j,1}$	16
4	(P/I) poměry trojúhelníků	20
5	(P/I) poměry čtyřúhelníků doplněných metodou SCL	20
6	Závislost vývojových faktorů zaplacených škod na předchozích (P/I) poměrech	23
7	Závislost vývojových faktorů evidovaných škod na předchozích (P/I) poměrech ...	23
8	Reziduální graf pro trojúhelník P	35
9	Reziduální graf pro trojúhelník I	36
10	(P/I) poměry čtyřúhelníků doplněné metodou MCL	40
11	Srovnání konečných (P/I) poměrů pro metody SCL a MCL	42
12	Schéma vývoje RBNS	43
13	Schéma vývoje IBNR	44
14	Schéma vývoje trojúhelníků	45
15	Run-off RBNS rezervy pro metodu SCL	47
16	Run-off IBNR rezervy pro metodu SCL	48
17	Run-off IBNR rezervy pro metodu MCL	49

Seznam tabulek

1	Směrodatné odchylky individuálních vývojových faktorů	8
2	Odhady vývojových faktorů	9
3	Výše rezerv v Kč spočítané metodou chain ladder	9
4	Regrese pro první a druhé vývojové čtvrtletí trojúhelníka P	15
5	Směrodatné chyby rezerv pro trojúhelník P a metodu SCL	18
6	Směrodatné chyby rezerv pro trojúhelník I a metodu SCL	19
7	Regrese pro rezidua vývojových faktorů zaplacených škod a (I/P) poměrů	34
8	Regrese pro rezidua vývojových faktorů evidovaných škod a (P/I) poměrů	35
9	Odhady parametrů σ	37
10	Odhady parametrů \hat{q}_s , $\hat{\rho}_s^P$ a $\hat{\rho}_s^I$	37
11	Směrodatné chyby rezerv pro trojúhelník P a metodu MCL	38
12	Směrodatné chyby rezerv pro trojúhelník I a metodu MCL	39
13	Výše rezerv v Kč spočítané metodou MCL	40
14	Srovnání výše IBNR rezervy v Kč	41
15	Run-off RBNS rezervy v Kč pro metodu SCL (2005 – 2006)	47
16	Run-off IBNR rezervy v Kč pro metodu SCL (2005 – 2006)	48
17	Run-off IBNR rezervy v Kč pro metodu MCL (2005 – 2006)	49
18	Reziduální trojúhelník P	55
19	Reziduální trojúhelník I	55
20	Reziduální trojúhelník I/P	56
21	Reziduální trojúhelník P/I	56

Úvod

Každá pojišťovna v České republice má ze Zákona č. 349/2006 Sb., o pojišťovnictví (dále jen Z. o pojišťovnictví) [16] povinnost tvořit technické rezervy, které jí zajišťují dostatečné prostředky k plnění závazků za převzatá rizika. V neživotním pojištění je to zejména rezerva na pojistná plnění, někdy také označovaná jako škodní rezerva. Tato rezerva je tvořena tak, aby bylo možno v případě ještě nenahlášené nebo zcela nezlikvidované pojistné události v budoucnu vyplatit pojistná plnění.

Vzhledem k tomu, že v okamžiku tvorby rezervy není známa přesná výše škod, používají se pro výpočet odhadu rezervy na pojistná plnění různé matematické metody. V této práci demonstrujeme vybrané metody pro výpočet odhadu rezervy na reálných datech pojistných událostí z let 2000 – 2006. Zaměříme se přitom na metody, které minimalizují rozdíl mezi odhady na základě zaplacených škod a odhady na základě odhadnutých pojistných událostí (evidovaných škod).

Po výpočtu rezervy dochází ke kontrole, zda byla vytvořená rezerva 'přiměřená', tj. jestli nebyla příliš nadhodnocená nebo naopak podhodnocená. Nástrojem k odhalení nadhodnocení nebo podhodnocení rezervy je tzv. run-off analýza (analýza vývoje), kterou popíšeme v závěru práce.

Vlastní text je členěn do šesti kapitol. První kapitola popisuje obecně rezervu na pojistná plnění a její složky. Ve druhé kapitole připravíme z dat o jednotlivých pojistných událostech vývojové trojúhelníky, se kterými pracují jednotlivé matematické metody.

Další tři kapitoly jsou věnovány konkrétním matematickým metodám – metodě chain ladder, Mackovu modelu a Mnichovské metodě chain ladder. Na počátku každé kapitoly uvádíme teoretické základy metody, následně provedeme její aplikaci na připravených datech.

Poslední šestá kapitola uvádí srovnání výsledků jednotlivých metod. Dále zde uvádíme výpočet run-off analýzy jednotlivých složek rezervy na pojistná plnění pro uvedené metody.

Kapitola 1

Rezerva na pojistná plnění a její složky

Rezervou na pojistná plnění (dále jen *rezerva*) rozumíme prostředky na pokrytí nákladů, které v budoucnosti pojist'ovně vzniknou v souvislosti s výplatou *pojistných plnění*. Ta jsou pojist'ovnou vyplácena v případě, že dojde k *pojistné události*, přesně specifikované v *pojistné smlouvě*. Pojistné události jsou nahodilé události, o jejichž vzniku v době uzavírání smlouvy nebylo známo, zda vzniknou či nikoliv (nebo pokud bylo jisté, že k takové události dojde, nebylo v době uzavírání smlouvy známo, kdy událost nastane). Za převzetí rizika, že dojde k pojistné události, si pojist'ovna účtuje *pojistné*.

Rezervu tvoří dvě složky: za prvé *IBNR* (*incurred but not reported*, tj. výše v budoucnu vyplacených pojistných plnění za škody, které už vznikly, ale dosud nebyly pojist'ovně nahlášený) a za druhé *RBNS* (*reported but not settled*, tj. výše v budoucnu vyplacených pojistných plnění za škody, které již byly pojist'ovně nahlášený, ale ještě nebyly zlikvidovány).

Protože ve chvíli, kdy tvoříme rezervu, nemáme k dispozici informaci o celkové výši vzniklých škod a tedy ani výši rezervy, kterou máme vytvořit, musíme jednotlivé složky rezervy odhadnout.

RBNS rezerva se obvykle odhaduje pro jednotlivé pojistné události odděleně na základě zkušeností, které má likvidátor s podobnými pojistnými událostmi v příslušném pojistném odvětví. K odhadu IBNR rezervy se používají matematické metody využívající zkušeností s minulými pojistnými událostmi v daném pojistném odvětví. Při používání těchto metod je dobré uvažovat též změny v postupu evidence a likvidace pojistných událostí v konkrétní pojist'ovně případně další vnější vlivy, které mohou ovlivnit výši rezervy, jako je například míra inflace.

Historie škodního vývoje se nejčastěji uvádí ve formě *vývojového trojúhelníka*. Jde o schéma, kde hodnoty v jednom řádku mají stejný referenční údaj (například rok vzniku škody) a hodnoty v jednom sloupci mají stejný údaj o zpoždění v úhradě nebo hlášení škody.

Podle typu používané metody se pak používají buď *kumulativní trojúhelníky*, kde se vstupní hodnota vztahuje ke škodám zaplaceným nebo evidovaným do určité doby od vzniku pojistné události, nebo *nekumulativní trojúhelníky*, kde jde o hodnoty škod, které byly zaplacené nebo evidovány s určitým zpožděním po vzniku pojistné události.

Všechny matematické metody, které budeme v této práci popisovat, fungují na principu doplnění kumulativního vývojového trojúhelníka na čtyřúhelník. Tím získáme odhad konečné výše škod.

Kapitola 2

Vstupní data

K demonstraci použití metod pro výpočet odhadu rezerv nám poslouží reálná data o jednotlivých pojistných událostech z pojištění odpovědnosti za škodu vyplývající z provozu pozemního motorového a jeho přípojného vozidla (tzv. povinné ručení) na riziku škoda na majetku. Tato data poskytla vedoucí diplomové práce. Data jsou ve formě textového souboru, který obsahuje pro jednotlivé pojistné události z let 2000 - 2006 (tj. 171 585 pojistných událostí) informace o pohybech, které pojišťovna pro danou pojistnou událost vykonala (celkem 562 918 pohybů). Tyto škody jsou poměrně rychle vyřízené, což bude patrné i z níže uvedených výpočtů.

Než popíšeme jednotlivé metody a uvedeme jejich aplikaci, provedeme předzpracování těchto dat. Výstupem této fáze budou požadované vývojové trojúhelníky, které poslouží jako vstupy pro jednotlivé matematické metody.

Pro zpracování dat založíme databázi. K jejímu vytvoření jsme vzhledem k množství dat a dostupnosti softwaru zvolili databázový software *PostgreSQL* [14].

Vstupní data, která máme k dispozici, mají částky vztažené vždy k datu pohybu. Proto by bylo vhodné zohlednit inflaci a všechny částky vztáhnout ke stejnému datu. Pro zohlednění inflace lze použít míry inflace z internetových stránek ČSÚ [12], konkrétně míru inflace (v procentech) vyjádřenou přírůstkem indexu spotřebitelských cen vzhledem k předchozímu měsíci. V našem případě inflaci zohledňovat nebudeme, neboť její aplikaci nedojde k výraznému ovlivnění výše IBNR rezervy.

Než začneme s daty pracovat, zkontrolujeme jejich správnost (konzistenci) a případné chyby odstraníme. Mezi nejdůležitější kontroly patří test duplicit a test, že uzavřené pojistné události jsou správně zlikvidované (tzn., že veškerá vytvořená rezerva musí být vyplacena nebo rozpuštěna do zisku).

Pro tvorbu trojúhelníků musíme nejprve určit časovou jednotku, se kterou budeme pracovat. V našem případě jsme zvolili čtvrtletí. Podrobnější data mají sice riziko vyšší varia-

bility, ale budeme mít více pozorování pro regresi. Při určování správné časové jednotky nám pomůže také dosavadní praxe pojišťovny, protože postup výpočtu IBNR rezervy by neměl být bezdůvodně měněn. Referenční období (řádky vývojových trojúhelníků) určíme z data vzniku pojistné události, období zpoždění (sloupce vývojových trojúhelníků) z aktuálních pohybů na pojistných událostech.

Abychom mohli později všechny matematické metody porovnávat, budeme je aplikovat vždy na trojúhelník zaplacených škod P (*paid*) a trojúhelník evidovaných škod I (*incurred*). Trojúhelník P napočítáme z dat o výplatách jednotlivých pojistných událostí, trojúhelník I z pohybů týkajících se tvorby rezervy a jejího rozpouštění do zisku.

Postup, jak z databáze jednotlivé trojúhelníky získáme, lze najít na příloženém CD.

Nyní máme z databáze vytvořené vstupní trojúhelníky P a I a můžeme tedy přejít ke konkrétním metodám, které doplní trojúhelníky na čtyřúhelníky. V posledním sloupci čtyřúhelníka budeme mít vždy odhad konečné výše škod.

Proto odečtením diagonály (dosud známých hodnot) od posledního sloupce získáme ze čtyřúhelníka P odhad výše IBNR + RBNS rezervy, ze čtyřúhelníka I odhad IBNR rezervy.

Kapitola 3

Metoda chain ladder

3.1 Výpočet IBNR rezervy pomocí metody chain ladder

Jednou z nejpoužívanějších metod pro výpočet IBNR rezervy je *metoda chain ladder*, popsaná v [8]. Značení všech metod převezmeme z [9]. Hlavním důvodem, proč se velmi často tato metoda používá, je její jednoduchost a fakt, že nepředpokládá konkrétní rozložení vstupních dat. Tato výhoda je však vyvážena nevýhodou, že odhady pro poslední škodní roky jsou velmi citlivé na změny v pozorovaných datech.

Základním předpokladem deterministické metody chain ladder je úměrnost sloupců trojúhelníka na obrázku 1,

$$(3.1.1) \quad C_{j,s+1} \doteq C_{j,s} f_{s \rightarrow s+1}^C, \quad s = 1, \dots, n-1, \quad j = 1, \dots, n-s,$$

kde $C_{j,s}$ označuje celkovou výši škod škodního období j zaplacených nebo evidovaných do konce vývojového období s .

	1	2	...	s	...	$n-1$	n
1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$...	$C_{1,s}$...	$C_{1,n-1}$	$C_{1,n}$
2	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$...	$C_{2,s}$...	$C_{2,n-1}$	
\vdots	\vdots	\vdots					
$n-1$	$C_{n-1,1}$	$C_{n-1,2}$					
n	$C_{n,1}$						

Obrázek 1: Schéma obecného kumulativního trojúhelníka

Pro celý další text zavedme konvenci, že stříškou budeme označovat odhady skutečných veličin.

Parametr $f_{s \rightarrow s+1}^C$ v (3.1.1) se nazývá *vývojový faktor* a odhadujeme ho ze vztahu

$$(3.1.2) \quad \widehat{f_{s \rightarrow s+1}^C} := \frac{\sum_{j=1}^{n-s} C_{j,s+1}}{\sum_{j=1}^{n-s} C_{j,s}}, \quad s = 1, \dots, n-1.$$

Trojúhelník na obrázku 1 pak doplníme na čtyřúhelník násobením prvků na diagonále odhadnutými vývojovými faktory $\widehat{f_{s \rightarrow s+1}^C}$ takto:

$$(3.1.3) \quad \widehat{C_{j,s}} = C_{j,n-j+1} \cdot \widehat{f_{n-j+1 \rightarrow n-j+2}^C} \cdot \dots \cdot \widehat{f_{s-1 \rightarrow s}^C}, \quad j = 2, \dots, n, \quad s = n-j+2, \dots, n.$$

Pokud je vývoj škod po n letech ukončen, tj. když n je dost velké, pak lze předpokládat, že pro konečnou výši škod $\widehat{C_{j,\infty}}$ platí $\widehat{C_{j,\infty}} = \widehat{C_{j,n}}$. Pokud však i po n letech dochází ke změnám na škodách, je třeba pomocí extrapolace vhodným dodatečným vývojovým faktorem (*tail factor*) opravit odhad výše škod po n vývojových obdobích $\widehat{C_{j,n}}$ na konečný odhad výše škod $\widehat{C_{j,\infty}}$. Dále budeme pro jednoduchost předpokládat, že vývoj škod je po n letech ukončený.

Část rezervy připadající na škody vzniklé v roce j pak vypadá následovně:

$$(3.1.4) \quad R_j = C_{j,n} - C_{j,n-j+1}, \quad j = 2, \dots, n.$$

Použitím odhadů pro vývojové faktory (3.1.2) a odhadů pro budoucí výše škod (3.1.3) dostáváme odhad této rezervy

$$(3.1.5) \quad \widehat{R}_j = \widehat{C_{j,n}} - C_{j,n-j+1} = C_{j,n-j+1} (\widehat{f_{n-j+1 \rightarrow n-j+2}^C} \cdot \dots \cdot \widehat{f_{n-1 \rightarrow n}^C} - 1), \quad j = 2, \dots, n.$$

Celkovou rezervu pro dané portfolio lze stanovit jako součet rezerv pro jednotlivé škodní roky:

$$(3.1.6) \quad R = R_2 + \dots + R_n,$$

což můžeme odhadnout pomocí

$$(3.1.7) \quad \widehat{R} = \widehat{R}_2 + \dots + \widehat{R}_n.$$

Tento postup odhadování konečné výše škod z poslední pozorované hodnoty na diagonále má však jeden zásadní problém, a to, že používá pro všechny škodní roky stejný vývojový faktor. V praxi však vývoj nebývá pro všechny škodní roky stejný, proto může být vypočítaný odhad rezervy dosti odlišný od skutečně potřebných prostředků.

3.2 Aplikace metody chain ladder

Nyní uvedeme praktickou aplikaci metody chain ladder. Číselné výstupy získáme na základě modelu vytvořeného v programu *OpenOffice.org Calc* [13].

V prvním kroku ověříme předpoklad o úměrnosti sloupců (3.1.1). Jednou z možností, jak tento předpoklad ověřit, je spočítat směrodatnou odchylku *individuálních vývojových faktorů*

$$(3.2.1) \quad \frac{P_{j,s+1}}{P_{j,s}}, \frac{I_{j,s+1}}{I_{j,s}}, \quad s = 1, \dots, n-1, \quad j = 1, \dots, n-s.$$

V tabulce 1 jsou uvedeny směrodatné odchylky pro trojúhelníky *P* a *I*:

<i>s</i>	1→2	2→3	3→4	4→5	5→6	6→7	7→8	8→9	9→10
P	0,203	0,029	0,015	0,008	0,006	0,005	0,004	0,002	0,004
I	0,057	0,014	0,006	0,005	0,003	0,004	0,003	0,001	0,004
<i>s</i>	10→11	11→12	12→13	13→14	14→15	15→16	16→17	17→18	18→19
P	0,003	0,002	0,002	0,004	0,001	0,003	0,001	0,006	0,009
I	0,001	0,001	0,001	0,003	0,001	0,001	0,001	0,004	0,008
<i>s</i>	19→20	20→21	21→22	22→23	23→24	24→25	25→26	26→27	
P	0,011	0,006	0,001	0,002	0,001	0,000	0,001	0,000	
I	0,006	0,005	0,001	0,001	0,001	0,000	0,000	0,000	

Tabulka 1: Směrodatné odchylky *individuálních vývojových faktorů*

Z tabulky 1 je vidět, že v prvních vývojových čtvrtletích je směrodatná odchylka poměrně vysoká. V porovnání s *individuálními vývojovými faktory* trojúhelníka *P*, činí směrodatná odchylka v prvním vývojovém čtvrtletí průměrně 9,86%, ve druhém 2,57% a ve třetím 1,46%. V dalších vývojových čtvrtletích již nepřesáhne 1%. Pro trojúhelník *I* vychází relativní směrodatná odchylka pro první vývojové čtvrtletí průměrně 15,91%, pro druhé 2,84% a pro třetí 1,52%. V dalších vývojových čtvrtletích opět nepřesáhne 1%.

Druhý z možných testů předpokladu o úměrnosti sloupců (3.1.1) je založen na porovnání vstupního trojúhelníka a trojúhelníka, který vznikne vynásobením prvků v prvním sloupci vstupního trojúhelníka odhadnutými vývojovými faktory podle vztahu

$$(3.2.2) \quad \widehat{C}_{j,s} = C_{j,1} \cdot \widehat{f}_{1 \rightarrow 2}^C \cdot \dots \cdot \widehat{f}_{s-1 \rightarrow s}^C, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad s = 2, \dots, n-j+1.$$

Tímto způsobem také zjišťujeme, že především pro první vývojové roky není předpoklad o úměrnosti sloupců zcela splněn.

Tato skutečnost může vést k nepřesnosti ve výpočtu IBNR rezervy. Nejde však o tak velké odchýlení, které by znehodnotilo celý výpočet, proto se metoda v pojišťovnách běžně používá.

Nyní přistoupíme k samotné aplikaci metody. Podle vztahu (3.1.2) odhadneme vývojové faktory pro trojúhelníky P a I :

s	1→2	2→3	3→4	4→5	5→6	6→7	7→8	8→9	9→10
$\overline{f_{s \rightarrow s+1}^P}$	2,058	1,136	1,053	1,031	1,017	1,012	1,009	1,006	1,005
$\overline{f_{s \rightarrow s+1}^I}$	1,280	1,032	1,013	1,009	1,003	1,004	1,003	1,002	1,003
s	10→11	11→12	12→13	13→14	14→15	15→16	16→17	17→18	18→19
$\overline{f_{s \rightarrow s+1}^P}$	1,003	1,002	1,003	1,003	1,002	1,002	1,001	1,004	1,006
$\overline{f_{s \rightarrow s+1}^I}$	1,001	1,000	1,000	1,001	1,000	1,000	1,000	0,999	1,000
s	19→20	20→21	21→22	22→23	23→24	24→25	25→26	26→27	27→28
$\overline{f_{s \rightarrow s+1}^P}$	1,009	1,004	1,001	1,001	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
$\overline{f_{s \rightarrow s+1}^I}$	0,998	0,998	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Tabulka 2: Odhady vývojových faktorů

Pomocí odhadnutých vývojových faktorů a formule pro odhad budoucích výší škod (3.1.3) doplníme jednotlivé trojúhelníky na čtyřúhelníky. Výsledky lze najít v přílohách 1 a 2.

Pro celkové výše rezerv s použitím (3.1.5) a (3.1.7) vychází

	Trojúhelník P	Trojúhelník I
Výplata + RBNS		6 025 932 743,29
Výplata	5 730 908 597,08	
IBNR + RBNS	304 608 610,21	
RBNS	295 024 146,21	295 024 146,21
IBNR	9 584 464,00	36 462 193,28

Tabulka 3: Výše rezerv v Kč spočítané metodou chain ladder

Z tabulky vidíme, že odhady IBNR rezervy se pro jednotlivé trojúhelníky liší. Protože odhad IBNR z trojúhelníka P je ovlivněn výší RBNS rezervy a jejím vývojem, bude přesnější odhad skutečné IBNR rezervy odhad z trojúhelníka I .

Kapitola 4

Mackův model chain ladder

V této kapitole popíšeme metodu chain ladder zavedenou Thomasem Mackem. Původní text může čtenář nalézt v [4] a [6]. *Mackův model chain ladder* (dále jen *Mackův model*) je speciální případ *obecného stochastického modelu*, který je popsán v [11]. V našem případě jde v podstatě o převedení deterministické metody chain ladder popsané v kapitole 3 na stochastický model, který nám dává stejnou výši rezervy jako deterministický model (podrobnosti lze najít v [7]). Přidání předpokladů nezávislosti a rozptylu nám umožní spočítat střední kvadratickou chybu, resp. směrodatnou chybu, odhadu rezervy pro jednotlivé škodní roky i celkového odhadu rezervy portfolia.

4.1 Předpoklady Mackova modelu chain ladder

Nechť je dán kumulativní trojúhelník jako na obrázku 1, kde $C_{j,s}$ jsou opět kumulativní výše škod škodního roku j , $j = 1, \dots, n$ zaplacené nebo evidované do konce vývojového roku s , $s = 1, \dots, n$. $C_{j,s}$ považujeme nyní za náhodné veličiny. Pro $j+s \leq n+1$ máme pozorované hodnoty (vývojový trojúhelník). Pak předpoklady Mackova modelu můžeme vyjádřit následovně:

- Existují vývojové faktory $f_{s \rightarrow s+1}^C > 0$, $s = 1, \dots, n-1$ nezávislé na škodním roce j , které splňují

$$(4.1.1) \quad E(C_{j,s+1} | C_{j,1}, \dots, C_{j,s}) = C_{j,s} f_{s \rightarrow s+1}^C, \quad j = 1, \dots, n, \quad s = 1, \dots, n-1.$$

- Veličiny $C_{j,s}$ různých škodních let jsou nezávislé, tj.

$$(4.1.2) \quad \{C_{i,1}, \dots, C_{i,n}\}, \{C_{j,1}, \dots, C_{j,n}\}, \quad i \neq j \text{ jsou stochasticky nezávislé.}$$

- Předpoklad rozptylu:

$$(4.1.3) \quad \text{Var}(C_{j,s+1} | C_{j,1}, \dots, C_{j,s}) = C_{j,s} (\sigma_{s \rightarrow s+1}^C)^2, \quad j = 1, \dots, n, \quad s = 1, \dots, n-1,$$

kde $(\sigma_{s \rightarrow s+1}^C)^2$, $s = 1, \dots, n-1$ jsou neznámé parametry.

Pro parametry $(\sigma_{s \rightarrow s+1}^C)^2$ používáme odhad

$$(4.1.4) \quad \widehat{\sigma_{s \rightarrow s+1}^C}^2 = \frac{1}{n-s-1} \sum_{j=1}^{n-s} C_{j,s} \left(\frac{C_{j,s+1}}{C_{j,s}} - \widehat{f_{s \rightarrow s+1}^C} \right)^2, \quad s = 1, \dots, n-2,$$

který vznikl dosazením odhadu $\widehat{f_{s \rightarrow s+1}^C}$ dle (3.1.2) do nestranného odhadu

$$(4.1.5) \quad \widehat{\sigma_{s \rightarrow s+1}^C}^2 = \frac{1}{n-s-1} \sum_{j=1}^{n-s} C_{j,s} \left(\frac{C_{j,s+1}}{C_{j,s}} - f_{s \rightarrow s+1}^C \right)^2, \quad s = 1, \dots, n-2.$$

Pro úplnost doplníme, jak spočítat odhad $(\sigma_{n-1 \rightarrow n}^C)^2$. Jestliže $\widehat{f_{n-1 \rightarrow n}^C} = 1$ a vývoj škod je pravděpodobně ukončen po $n-1$ letech, můžeme položit $\widehat{\sigma_{n-1 \rightarrow n}^C} = 0$. Jinak extrapolujeme obvykle klesající řadu $\widehat{\sigma_{l \rightarrow 2}^C}, \dots, \widehat{\sigma_{n-3 \rightarrow n-2}^C}, \widehat{\sigma_{n-2 \rightarrow n-1}^C}$ dodatečným členem

$$(4.1.6) \quad \widehat{\sigma_{n-1 \rightarrow n}^C}^2 = \min \left(\frac{\widehat{\sigma_{n-2 \rightarrow n-1}^C}^4}{\widehat{\sigma_{n-3 \rightarrow n-2}^C}^2}, \min(\widehat{\sigma_{n-3 \rightarrow n-2}^C}^2, \widehat{\sigma_{n-2 \rightarrow n-1}^C}^2) \right).$$

Konečná výše škod, resp. výše rezervy, se v Mackově modelu spočítá stejně jako v deterministickém modelu chain ladder pomocí formulí pro odhady budoucích výší škod (3.1.3), resp. odhadu rezervy pro jednotlivá škodní období (3.1.5), kde $\widehat{f_{s \rightarrow s+1}^C}$ odhadujeme opět pomocí (3.1.2).

4.2 Střední kvadratická chyba a směrodatná chyba

Oproti deterministické metodě chain ladder, umožňuje Mackův model spočítat střední kvadratickou chybu a směrodatnou chybu odhadu konečné výše škod a odhadu spočítané rezervy. Tato informace je velmi užitečná, neboť nám udává přesnost našeho výpočtu.

Je zřejmé, že formule pro odhad budoucích výší škod (3.1.3) dává pouze bodový odhad $C_{j,n}$, který bude přirozeně více nebo méně špatný. Je jen velmi málo pravděpodobné, že se skutečná hodnota $C_{j,n}$ bude rovnat $\widehat{C_{j,n}}$. Průměrná vzdálenost mezi předpovědí $\widehat{C_{j,n}}$ a budoucí realizací $C_{j,n}$ se měří pomocí střední kvadratické chyby.

Definice: Necht' $C_{j,n}$ je náhodná veličina a $\widehat{C}_{j,n}$ její odhad. Pak střední kvadratická chyba (mean squared error) $\text{mse}(\widehat{C}_{j,n})$ je definována

$$(4.2.1) \quad \text{mse}(\widehat{C}_{j,n}) = E((\widehat{C}_{j,n} - C_{j,n})^2 | \Delta),$$

kde $\Delta = \{C_{j,s} | j+s \leq n+1\}$ je množina doposud pozorovaných hodnot.

Zde musíme počítat střední kvadratickou chybu za podmínky, že známe všechna předchozí pozorování, protože nás zajímá pouze chyba způsobená budoucí náhodností.

Neboť pro náhodnou veličinu X a libovolný skalár c obecně platí rovnost $E(X - c)^2 = \text{Var}(X) + (E(X) - c)^2$, dostáváme pro střední kvadratickou chybu

$$(4.2.2) \quad \text{mse}(\widehat{C}_{j,n}) = \text{Var}(C_{j,n} | \Delta) + (E(C_{j,n} | \Delta) - \widehat{C}_{j,n})^2,$$

neboť $\widehat{C}_{j,n}$ je skalár za podmínky, že známe Δ . Rozklad (4.2.2) ukazuje, že střední kvadratická chyba je součet budoucí náhodné chyby $\text{Var}(C_{j,n} | \Delta)$ a chyby odhadu, kterou měříme pomocí kvadratické odchylky odhadu $\widehat{C}_{j,n}$ od očekávané hodnoty $E(C_{j,n} | \Delta)$.

V některých případech se pracuje spíše se směrodatnou chybou:

Definice: Směrodatná chyba (standard error) $\text{s.e.}(\widehat{C}_{j,n})$ je definována jako druhá odmocnina ze střední kvadratické chyby $\widehat{C}_{j,n}$. Relativní směrodatnou chybu definujeme jako podíl $\text{s.e.}(\widehat{C}_{j,n}) / \widehat{C}_{j,n}$.

Neboť

$$(4.2.3) \quad \text{mse}(\widehat{R}_j) = E((\widehat{R}_j - R_j)^2 | \Delta) = E((\widehat{C}_{j,n} - C_{j,n})^2 | \Delta) = \text{mse}(\widehat{C}_{j,n}),$$

pak také

$$(4.2.4) \quad \text{s.e.}(\widehat{R}_j) = \text{s.e.}(\widehat{C}_{j,n}).$$

Z rozkladu (4.2.2) plyne, že $\text{mse}(\widehat{C}_{j,n})$ závisí na neznámých modelových parametrech $f_{s \rightarrow s+1}^C$ a $(\sigma_{s \rightarrow s+1}^C)^2$. Proto je třeba použít odhad, který je založený pouze na znalosti množiny doposud pozorovaných dat $\Delta = \{C_{j,s} | j+s \leq n+1\}$.

Používáme tedy odhad

$$(4.2.5) \quad \widehat{\text{mse}}(\widehat{R}_j) = \widehat{(\text{s.e.}(\widehat{R}_j))^2} = \widehat{C}_{j,n}^2 \sum_{s=n-j+1}^{n-1} \frac{\widehat{\sigma}_{s \rightarrow s+1}^C{}^2}{\widehat{f}_{s \rightarrow s+1}^C{}^2} \left(\frac{1}{\widehat{C}_{j,s}} + \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-s} C_{i,s}} \right), \quad j = 2, \dots, n,$$

kde $\widehat{C}_{j,s}$ jsou odhady budoucích hodnot $C_{j,s}$ pomocí (3.1.3), $\widehat{C}_{j,n-j+1} = C_{j,n-j+1}$,

$\widehat{f}_{s \rightarrow s+1}^C$ jsou odhady skutečných vývojových faktorů $f_{s \rightarrow s+1}^C$ pomocí (3.1.2),

$\widehat{\sigma}_{s \rightarrow s+1}^C$ jsou odhady $\sigma_{s \rightarrow s+1}^C$ pomocí (4.1.4), (4.1.6).

Odvození formule (4.2.5) je velmi rozsáhlé a lze ho najít např. v [5, App. D].

Často je také důležitá směrodatná chyba odhadu celkové rezervy $\widehat{R} = \widehat{R}_2 + \dots + \widehat{R}_n$.

V tomto případě nelze sečíst hodnoty $\widehat{(\text{s.e.}(\widehat{R}_j))^2}$, $j = 2, \dots, n$, protože odhady \widehat{R}_j jsou pozitivně korelovány prostřednictvím společných odhadů $\widehat{f}_{s \rightarrow s+1}^C$. Proto musíme použít vztah

$$(4.2.6) \quad \widehat{\text{mse}}(\widehat{R}) = \widehat{(\text{s.e.}(\widehat{R}))^2} = \sum_{j=2}^n \left\{ \widehat{(\text{s.e.}(\widehat{R}_j))^2} + \widehat{C}_{j,n} \left(\sum_{i=j+1}^n \widehat{C}_{i,n} \right) \sum_{s=n-j+1}^{n-1} \frac{2 \widehat{\sigma}_{s \rightarrow s+1}^C{}^2}{\widehat{f}_{s \rightarrow s+1}^C{}^2 \sum_{k=1}^{n-s} C_{k,s}} \right\},$$

jehož odvození je uvedeno v [5, App. F].

4.3 Testy předpokladů Mackova modelu

Postup testování předpokladů Mackova modelu je navržen v [5]. Začneme předpoklady o střední hodnotě (4.1.1) a rozptylu (4.1.3).

Pro libovolný pevný vývojový čas s a pro $j = 1, \dots, n$ můžeme $C_{j,s}$ považovat za dané nenáhodné veličiny a předpoklad o střední hodnotě (4.1.1) můžeme interpretovat jako běžný regresní model tvaru

$$(4.3.1) \quad Y_j = c + x_j b + \varepsilon_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

kde c, b jsou regresní koeficienty, ε_j je chyba a platí $E(\varepsilon_j) = 0$.

V našem případě $c = 0$, $b = f_{s \rightarrow s+1}^C$ a máme pozorované nezávislé veličiny $Y_j = C_{j,s+1}$ v bodech $x_j = C_{j,s}$ pro $j = 1, \dots, n-s$. Regresní koeficient b odhadneme váženou metodou nejmenších čtverců s váhami úměrnými $1/C_{j,s}$, což vede k odhadu vývojových faktorů (3.1.2).

K ověření předpokladu rozptylu (4.1.3) stačí ukázat, že vážená rezidua (zde odchylky od regresní přímky) jsou nezávislá na $C_{j,s}$ tzn., že budou náhodně rozptýlena okolo nulové horizontální přímky a nebudou vykazovat žádný trend.

Co se týče předpokladu nezávislosti (4.1.2), nebudeme testovat všechny možné alternativy. V našem případě jsou hlavní obavy z narušení nezávislosti přisuzovány diagonálnímu vlivu, tedy vlivu kalendářních let. Jedná se například o změny v evidenci a likvidaci pojistných událostí, změny v postupech tvorby rezervy nebo o vnější vlivy jako například legislativní změny, inflace apod.

Test této skutečnosti spočívá ve zkoumání individuálních vývojových faktorů. Pro každý vývojový čas (sloupec) určíme medián těchto faktorů a testujeme, zda na diagonále (D_j), $j = 2, \dots, n-1$ máme podobný počet hodnot větších (L_j) i menších (S_j) než medián. Náhodnou veličinu $Z = Z_2 + \dots + Z_{n-1}$, $Z_j = \min(L_j, S_j)$, $j = 2, \dots, n-1$ přiblížíme normálním rozdělením a stanovíme interval spolehlivosti $(E(Z) \pm u_{\alpha/2} \sqrt{\text{Var}(Z)})$ s koeficientem spolehlivosti $1 - \alpha$ ($u_{\alpha/2}$ je kvantil $N(0,1)$).

4.4 Aplikace Mackova modelu (metody SCL)

Mackův model aplikujeme nezávisle na trojúhelníky zaplacených (P) a evidovaných (I) škod. Dále budeme takový postup nazývat *metoda SCL (standard chain ladder method)*.

Nejprve otestujeme předpoklady metody. Obecný postup popsany v předchozí kapitole aplikujeme na trojúhelník zaplacených škod P a trojúhelník evidovaných škod I .

Kontrolu splnění předpokladů linearit a rozptylu provedeme pomocí statistického programu *R 2.5.1* [15]. Nejprve zkontrolujeme, že absolutní člen a pozorování starší než jedno vývojové období nejsou pro regresi důležité. Zde pro naše účely postačí, když budeme prezentovat pouze výsledky pro přechod mezi prvním a druhým vývojovým čtvrtletím v trojúhelníku P . Pro ostatní vývojová čtvrtletí v trojúhelníku P a trojúhelníku I uvádíme výsledky na příloženém CD.

lm(formula = $P_{j,2} \sim P_{j,1}$, weights = $1 / P_{j,1}$)				
Coefficients	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	3.411e+07	1.248e+07	2.733	0.0114
$P_{j,1}$	1.623e+00	1.629e-01	9.960	3.47e-10

Tabulka 4: Regrese pro první a druhé vývojové čtvrtletí trojúhelníka P

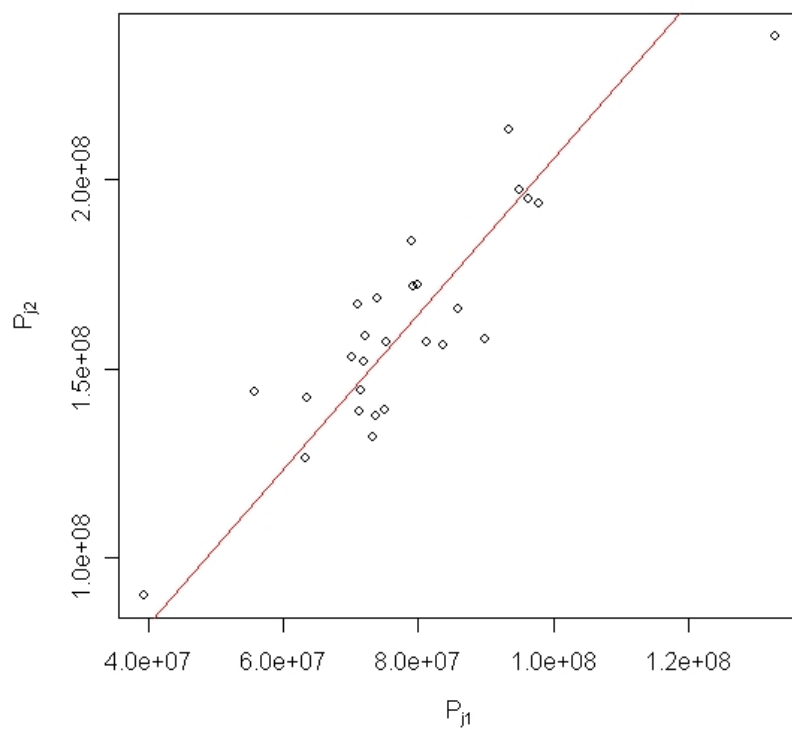
V tabulce 4 mají sloupce následující význam: 'Estimate' označuje odhad koeficientu, 'Std. Error' směrodatnou odchylku, 't value' t-statistiku, tj. podíl 'Estimate' / 'Std. Error' a 'Pr(> |t|)' p-hodnotu.

Testujeme hypotézu, že jednotlivé parametry modelu jsou nevýznamné, tj., že odhady koeficientů jednotlivých parametrů jsou nulové. Jak je vidět z p-hodnoty $Pr(> |t|)$, není absolutní člen (*intercept*) pro regresi důležitý. Naopak $P_{j,1}$ pro regresi důležité jsou. Pokud bychom spočítali regresi bez absolutního členu, bude se odhad koeficientu pro $P_{j,1}$ rovnat odhadu vývojového faktoru $\widehat{f_{s \rightarrow s+1}^P}$, dle (3.1.2).

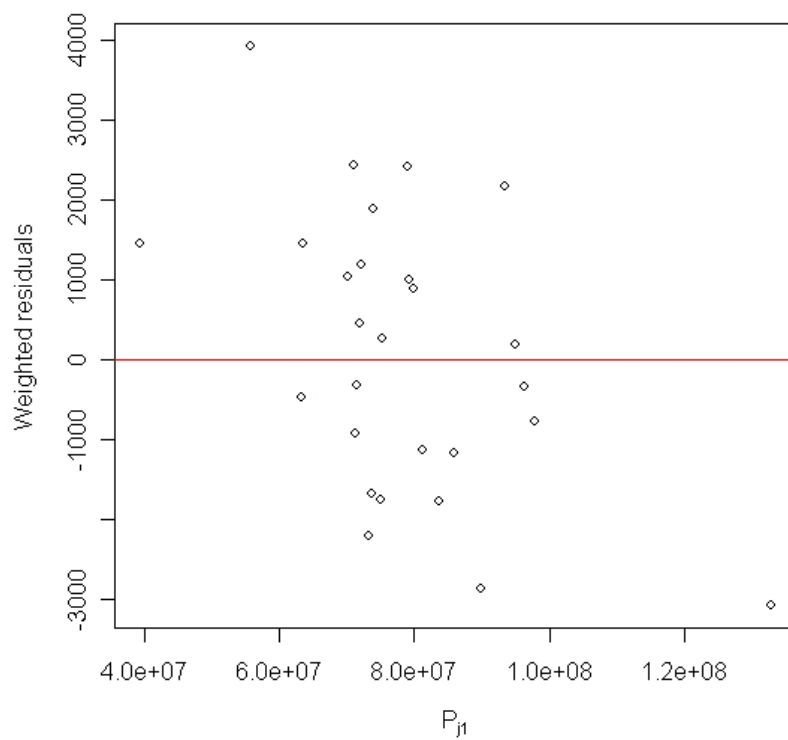
Pro váženou regresi bez absolutního členu vykreslíme grafy závislosti $P_{j,s+1}$ na $P_{j,s}$ a $I_{j,s+1}$ na $I_{j,s}$ pro $s = 1, \dots, n-1$, $j = 1, \dots, n-s$. Pro snazší kontrolu vykreslíme do grafu i regresní přímku. Pokud budou ve všech grafech zobrazené body málo odchýlené od regresní přímky, můžeme dále považovat předpoklad linearit za splněný.

Pro ukázkou uvádíme graf závislosti $P_{j,2}$ na $P_{j,1}$ (obrázek 2), ostatní grafy lze najít na příloženém CD.

Pro testování předpokladu rozptylu vykreslíme grafy vážených reziduí (vážených odchylek od regresní přímky) v závislosti na $P_{j,s}$, resp. $I_{j,s}$. Předpoklad rozptylu bude splněn, pokud budou body náhodně rozptýleny okolo nulové horizontální přímky, tj. nebudou vykazovat žádný trend. Zde uvádíme opět pouze graf pro přechod mezi prvním a druhým vývojovým čtvrtletím trojúhelníka zaplacených škod (obrázek 3), ostatní grafy lze najít na příloženém CD.



Obrázek 2: Regresní model pro druhé vývojové čtvrtletí trojúhelníka P



Obrázek 3: Graf vážených reziduí vs. $P_{j,1}$

Test nezávislosti přikládáme na CD, zde uvádíme jen jeho výsledek. Na hladině 5% test pro oba trojúhelníky P a I zamítl hypotézu nezávislosti. Tzn., že interval spolehlivosti pro Z s koeficientem spolehlivosti 95% nepokryl hodnotu Z .

Vzhledem k tomu, že pracujeme s reálnými daty, je třeba si uvědomit, že nikdy nebudeme mít k dispozici zcela ideální trojúhelníky, které by splňovaly všechny předpoklady.

V našem případě máme problém s předpokladem nezávislosti, ostatní testy lze považovat pro oba trojúhelníky za splněné. Z testu nezávislosti je vidět, že v některých (kalendářních) čtvrtletích dochází ke zvýšení aktivity, v některých naopak ke snížení aktivity.

Ke správnému posouzení těchto jevů by bylo potřeba znát přesněji danou pojišťovnu a zjistit, zda tato změna nastala např. zrychlením hlášení, změnou metodiky stanovení rezerv, změnou metodiky likvidace škod nebo např. rozpouštěním rezerv před koncem roku (tam, kde to alespoň trochu jde) a jejich opětovné tvoření na začátku nového roku apod.

Stejně tak mohlo dojít k nějakým 'globálním' vlivům, které pojišťovna neovlivní, například rozšíření mobilních telefonů urychluje nahlášení vzniklé škody. Na základě takových informací by pak bylo možné provést analýzu, zda jsou tyto vlivy pro určení IBNR rezervy důležité.

My však bohužel takové údaje k dispozici nemáme. Přesto spočítáme výše rezerv a směrodatné chyby, na jejichž základě rozhodneme o vhodnosti použití metody.

Jelikož Mackův model je v podstatě jen převedení deterministické metody chain ladder na stochastický model, dává tento přístup stejné výsledky.

Doplněné trojúhelníky P a I na čtyřúhelníky tudíž odpovídají tabulkám uvedeným v přílohách 1 a 2. Výše celkových rezerv jsou pak uvedeny v tabulce 3.

Rozšíření vzhledem k metodě chain ladder spočívá v možnosti určení směrodatné chyby pro \widehat{R}_j , $j = 2, \dots, n$ a pro celkovou \widehat{R} .

Napočítané hodnoty uvádíme v následující tabulce

j	Diagonála v Kč	Konečná výše škod v Kč	IBNR + RBNS \widehat{R}_j v Kč	$\widehat{mse}(\widehat{R}_j)$	$\widehat{s.e.}(\widehat{R}_j)$	$\widehat{s.e.}(\widehat{R}_j)/\widehat{R}_j$
1	234 124 788,07	234 124 788,07	0,00	0,00	0,00	0,00%
2	206 953 411,82	206 953 411,82	0,00	0,00	0,00	0,00%
3	224 124 405,95	224 124 405,95	0,00	0,00	0,00	0,00%
4	231 588 567,29	231 684 124,08	95 556,79	34 825 135 942,89	186 614,94	195,29%
5	234 242 864,95	234 422 985,12	180 120,17	48 240 975 879,59	219 638,28	121,94%
6	249 336 272,03	249 608 460,51	272 188,48	81 966 387 614,75	286 297,73	105,18%
7	271 583 978,16	272 263 700,30	679 722,14	481 796 262 770,32	694 115,45	102,12%
8	294 663 014,09	295 817 465,73	1 154 451,64	618 123 981 536,91	786 208,61	68,10%
9	253 473 670,42	255 377 846,60	1 904 176,18	3 162 256 060 100,76	1 778 273,34	93,39%
10	294 679 079,35	299 440 712,36	4 761 633,01	13 820 212 736 479,90	3 717 554,67	78,07%
11	262 657 525,62	268 482 127,86	5 824 602,24	17 710 107 820 106,60	4 208 337,89	72,25%
12	250 691 497,78	257 295 664,17	6 604 166,39	19 330 899 990 232,00	4 396 691,94	66,57%
13	201 730 359,65	207 257 392,43	5 527 032,78	15 331 363 487 904,90	3 915 528,51	70,84%
14	202 438 231,30	208 368 487,98	5 930 256,68	15 931 029 337 589,40	3 991 369,36	67,31%
15	217 585 465,93	224 353 838,11	6 768 372,18	17 359 847 270 054,90	4 166 515,00	61,56%
16	204 506 772,18	211 446 213,89	6 939 441,71	17 266 308 619 165,00	4 155 274,79	59,88%
17	180 895 868,51	187 625 316,91	6 729 448,40	11 970 540 508 335,70	3 459 846,89	51,41%
18	191 875 782,62	199 510 993,09	7 635 210,47	16 588 974 314 326,40	4 072 956,46	53,34%
19	202 145 772,73	210 895 475,15	8 749 702,42	17 960 518 444 598,60	4 237 985,19	48,44%
20	201 627 342,44	211 491 184,11	9 863 841,67	18 998 518 817 656,80	4 358 729,04	44,19%
21	165 058 615,37	174 213 660,82	9 155 045,45	15 596 022 034 389,40	3 949 179,92	43,14%
22	169 491 551,70	180 477 353,30	10 985 801,60	16 999 003 003 008,50	4 122 984,72	37,53%
23	169 832 360,40	182 973 445,40	13 141 085,00	18 198 311 531 708,40	4 265 947,91	32,46%
24	176 048 505,67	192 926 084,77	16 877 579,10	20 671 413 704 506,00	4 546 582,64	26,94%
25	151 883 619,02	171 535 076,66	19 651 457,64	20 412 644 629 826,50	4 518 035,48	22,99%
26	143 393 657,79	170 549 703,32	27 156 045,53	28 760 913 463 402,70	5 362 920,24	19,75%
27	90 205 307,07	121 917 717,62	31 712 410,55	38 232 022 544 636,80	6 183 204,88	19,50%
28	54 070 309,17	150 379 571,17	96 309 262,00	360 621 920 528 567,00	18 990 047,93	19,72%
Celkem			304 608 610,21	1 136 003 159 678 060,00	33 704 645,97	11,06%

Tabulka 5: Směrodatné chyby rezerv pro trojúhelník P a metodu SCL

První sloupec vyjadřuje čtvrtletí vzniku, ve sloupci 'Diagonála v Kč' jsou poslední známé hodnoty trojúhelníka P (tj. poslední známá diagonála), sloupec 'Konečná výše škod v Kč' vyjadřuje poslední sloupec doplněného čtyřúhelníka. Obsah dalších sloupců je již zřejmý z nadpisů sloupců.

Na základě trojúhelníka P jsme dospěli k celkové rezervě (IBNR + RBNS) ve výši 304 608 610,21 Kč. Tato výše se však od skutečné může lišit. Podle našich výpočtů je relativní směrodatná chyba 11,06%, což odpovídá částce 33 704 645,97 Kč. Je tedy vidět, že náš odhad je celkem spolehlivý.

Podobný výstup dostaneme i pro trojúhelník I :

j	Diagonála v Kč	Konečná výše škod v Kč	IBNR \widehat{R}_j v Kč	$\widehat{mse}(\widehat{R}_j)$	$\widehat{s.e.}(\widehat{R}_j)$	$\widehat{s.e.}(\widehat{R}_j)/\widehat{R}_j$
1	234 124 788,07	234 124 788,07	0,00	0,00	0,00	0,00%
2	206 953 411,82	206 953 411,82	0,00	0,00	0,00	0,00%
3	224 124 405,95	224 124 405,95	0,00	0,00	0,00	0,00%
4	231 588 567,29	231 588 567,29	0,00	0,00	0,00	0,00%
5	234 507 436,95	234 490 366,42	-17 070,53	874 592 285,94	29 573,51	-173,24%
6	249 806 929,03	249 670 889,27	-136 039,76	37 011 673 220,73	192 384,18	-141,42%
7	272 869 308,93	272 626 178,55	-243 130,38	112 126 529 010,75	334 853,00	-137,73%
8	295 632 947,09	295 286 555,06	-346 392,03	244 724 509 294,01	494 696,38	-142,81%
9	264 264 367,62	263 308 516,19	-955 851,43	1 998 659 526 100,67	1 413 739,55	-147,90%
10	305 643 962,35	303 959 108,08	-1 684 854,27	5 546 182 126 126,48	2 355 033,36	-139,78%
11	275 777 886,56	274 211 544,54	-1 566 342,02	10 319 790 638 309,10	3 212 443,09	-205,09%
12	263 271 437,78	261 466 278,51	-1 805 159,27	10 974 694 141 226,80	3 312 807,59	-183,52%
13	212 738 939,11	211 312 116,51	-1 426 822,60	8 731 514 871 604,84	2 954 913,68	-207,10%
14	219 006 807,49	217 588 031,45	-1 418 776,04	9 039 586 984 999,87	3 006 590,59	-211,91%
15	232 630 301,42	231 137 959,62	-1 492 341,80	9 730 102 981 318,64	3 119 311,30	-209,02%
16	217 006 988,96	215 901 356,35	-1 105 632,61	9 542 366 276 049,75	3 089 072,07	-279,39%
17	192 079 766,54	191 180 195,22	-899 571,32	6 960 837 863 329,92	2 638 339,98	-293,29%
18	202 502 319,69	201 642 812,98	-859 506,71	9 026 034 908 390,89	3 004 336,02	-349,54%
19	213 662 580,28	212 943 329,32	-719 250,96	9 682 153 495 369,78	3 111 615,90	-432,62%
20	214 594 263,01	214 423 928,93	-170 334,08	10 686 062 144 921,50	3 268 954,29	-1919,14%
21	174 940 348,57	175 075 681,32	135 332,75	8 666 153 180 076,98	2 943 833,08	2175,26%
22	182 767 985,19	183 379 007,55	611 022,36	9 387 735 048 866,08	3 063 941,10	501,45%
23	183 399 064,05	184 706 492,91	1 307 428,86	10 028 073 128 994,80	3 166 713,30	242,21%
24	192 177 948,14	194 215 647,89	2 037 699,75	11 132 808 191 109,90	3 336 586,31	163,74%
25	167 756 468,27	171 005 796,98	3 249 328,71	10 686 383 953 695,70	3 269 003,51	100,61%
26	162 577 012,21	167 798 551,47	5 221 539,26	11 798 150 056 064,20	3 434 843,53	65,78%
27	113 004 188,75	120 340 701,79	7 336 513,04	13 352 305 431 527,30	3 654 080,65	49,81%
28	86 522 312,17	117 932 716,52	31 410 404,35	64 952 674 098 474,20	8 059 322,19	25,66%
Celkem			36 462 193,28	467 132 827 381 812,00	21 613 255,83	59,28%

Tabulka 6: Směrodatné chyby rezerv pro trojúhelník I a metodu SCL

Z trojúhelníka I jsme schopni vyjádřit přímo odhad IBNR rezervy, který v našem případě činí 36 462 193,28 Kč. Zde se nám relativní směrodatná chyba dostala na 59,28%, což odpovídá částce 21 613 255,83 Kč. Tento výsledek tedy není příliš přesný. Na druhou stranu v [5] v praktické ukázce vyšla pro trojúhelník evidovaných škod relativní směrodatná chyba 52%, což ukazuje, že náš výsledek není ojedinělý.

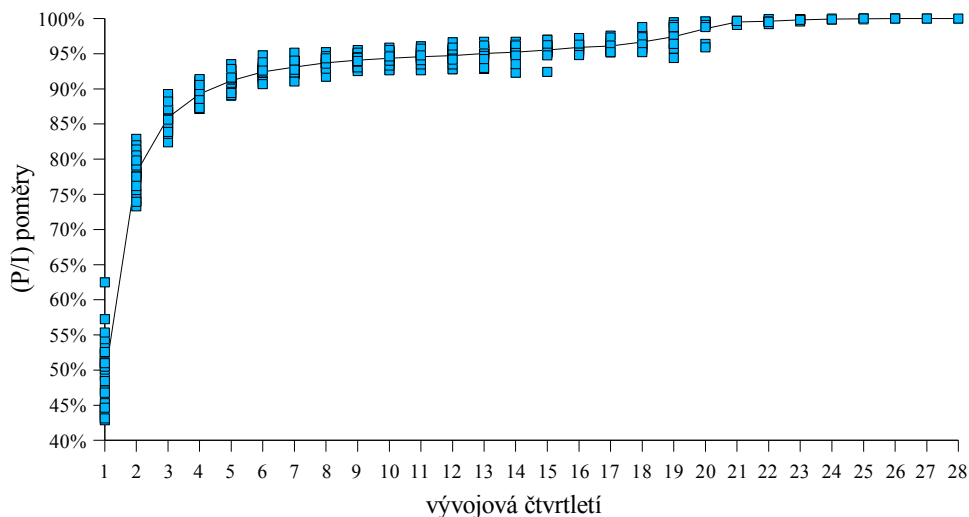
4.5 Rozdíl v odhadech výší škod v trojúhelnících P a I

Jak je patrné z odhadů výší celkových rezerv (tabulka 3), odhad IBNR závisí na tom, zda ho počítáme z trojúhelníka P nebo I . Je tedy zřejmé, že hodnoty v trojúhelnících P a I se liší.

Jelikož jsou však oba trojúhelníky zkonstruovány na základě stejných pojistných událostí, očekávali bychom, že i spočítané rezervy budou podobné. Vzhledem k tomu, že trojúhelník I obsahuje hodnoty trojúhelníka P zvětšené o RBNS, je zřejmé, že v prvních vývojových obdobích se trojúhelníky od sebe liší právě o výši RBNS. Postupem času dochází k vyřizování jednotlivých pojistných událostí, tj. snižování RBNS, a tím také přibližování

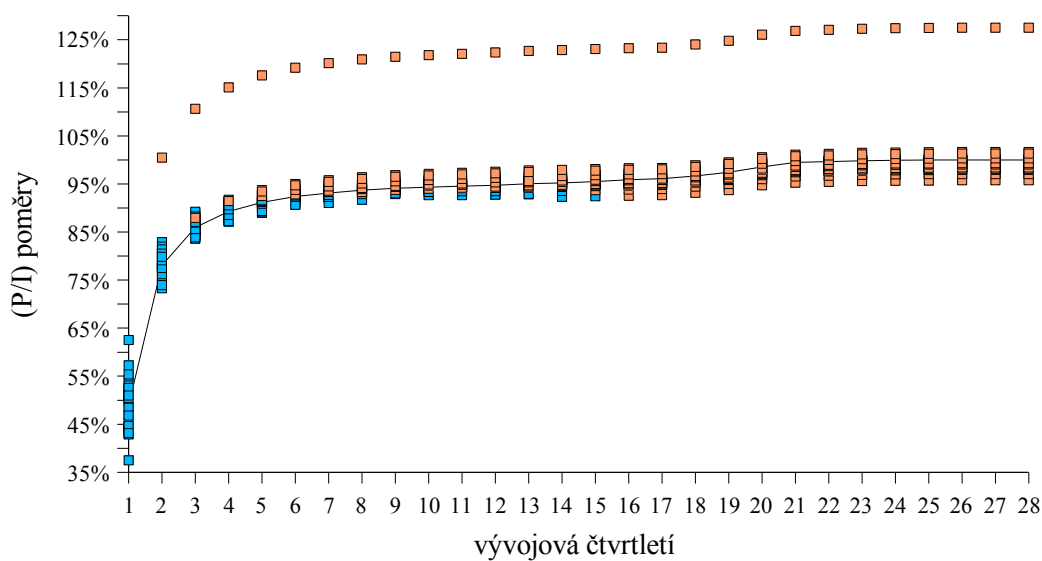
obou trojúhelníků. Pokud je vývoj škod po n vývojových obdobích ukončen, jsou poslední hodnoty obou trojúhelníků stejné, neboť $RBNS = 0$.

Na následujícím obrázku zobrazíme (P/I) poměry trojúhelníků pro jednotlivá vývojová čtvrtletí pro naše data. (P/I) poměry vyjadřují podíl zaplacených a evidovaných škod.



Obrázek 4: (P/I) poměry trojúhelníků

Je vidět, že obrázek 4 potvrzuje naše předchozí tvrzení o postupném přibližování trojúhelníků, černá čára zobrazuje průměrné (P/I) poměry ze známých dat.



Obrázek 5: (P/I) poměry čtyřúhelníků doplněných metodou SCL

Podobně obrázek 5 zobrazuje (P/I) poměry pro trojúhelníky doplněné na čtyřúhelníky (odhadnuté hodnoty jsou zobrazeny oranžově).

Místo očekávané konvergence odhadnutých poměrů ke 100%, hodnota konečných (P/I) poměrů kolísá mezi 95,76% a 127,51%. Zejména předpovědi posledního škodního čtvrtletí jsou velmi vzdálené od průměrných minulých (P/I) poměrů.

Nyní chování na obrázku 5 popíšeme teoreticky. Ukážeme, že takovéto chování nezáleží na zvolených datech, ale je charakteristické pro použitou metodu.

Nechť $j = 1, \dots, n$, $s = 1, \dots, n$, $\widehat{P}_{j,s}$, $\widehat{I}_{j,s}$ označují odhady $P_{j,s}$, $I_{j,s}$ a platí $\widehat{P}_{j,s} = P_{j,s}$, $\widehat{I}_{j,s} = I_{j,s}$ pro $s+j \leq n+1$,

pak

$$(4.5.1) \quad \widehat{(P/I)}_{j,s} = \frac{\widehat{P}_{j,s}}{\widehat{I}_{j,s}}$$

označuje (P/I) poměr škodního čtvrtletí j a vývojového čtvrtletí s .

Podobně

$$(4.5.2) \quad \widehat{(P/I)}_s = \frac{\sum_{j=1}^n \widehat{P}_{j,s}}{\sum_{j=1}^n \widehat{I}_{j,s}} = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \widehat{I}_{j,s}} \cdot \sum_{j=1}^n (\widehat{I}_{j,s} \cdot \widehat{(P/I)}_{j,s})$$

značí *průměrný (P/I) poměr* všech škodních čtvrtletí v čase s .

Dále předpokládejme, že pro vývojové faktory trojúhelníků P a I platí formule pro jejich odhad (3.1.2) a predikované hodnoty odhadujeme vztahem (3.1.3). Budoucí (P/I) poměry pak můžeme vyjádřit

$$(4.5.3) \quad \widehat{(P/I)}_{j,s} = \frac{\widehat{P}_{j,s}}{\widehat{I}_{j,s}} = \frac{P_{j,n-j+1} \cdot \widehat{f}_{n-j+1 \rightarrow n-j+2}^P \cdot \dots \cdot \widehat{f}_{s-1 \rightarrow s}^P}{I_{j,n-j+1} \cdot \widehat{f}_{n-j+1 \rightarrow n-j+2}^I \cdot \dots \cdot \widehat{f}_{s-1 \rightarrow s}^I}, \quad s+j > n+1.$$

Použitím formule pro odhad budoucích výší škod (3.1.3) pro trojúhelníky P a I dostaneme

$$(4.5.4) \quad \widehat{f}_{s \rightarrow s+1}^P = \frac{\sum_{j=1}^n \widehat{P}_{j,s+1}}{\sum_{j=1}^n \widehat{P}_{j,s}} \quad \text{a} \quad \widehat{f}_{s \rightarrow s+1}^I = \frac{\sum_{j=1}^n \widehat{I}_{j,s+1}}{\sum_{j=1}^n \widehat{I}_{j,s}}.$$

Povšimněme si, že v (4.5.4) probíhají všechny indexy v sumách od 1 do n . Dosažením (4.5.4) do (4.5.3) dostaneme

$$(4.5.5) \quad \widehat{(P/I)}_{j,s} = \frac{P_{j,n-j+1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n \widehat{P}_{i,s}}{\sum_{i=1}^n \widehat{P}_{i,n-j+1}}}{I_{j,n-j+1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n \widehat{I}_{i,s}}{\sum_{i=1}^n \widehat{I}_{i,n-j+1}}}.$$

Po úpravě platí

$$(4.5.6) \quad \frac{\widehat{(P/I)}_{j,s}}{\widehat{(P/I)}_s} = \frac{\widehat{(P/I)}_{j,n-j+1}}{\widehat{(P/I)}_{n-j+1}}, \quad s+j > n+1,$$

což můžeme vyjádřit slovy:

Pro každé škodní čtvrtletí je poměr budoucí odhadnuté (P/I) hodnoty k odpovídajícímu průměru stejný jako poměr poslední známé (P/I) hodnoty k odpovídajícímu průměru. Proto v oddělených výpočtech chain ladder zůstává tento poměr konstantní.

Toto je tedy vysvětlení problému, který jsme pozorovali na obrázku 5 a který budeme dále nazývat (P/I) problém metody SCL.

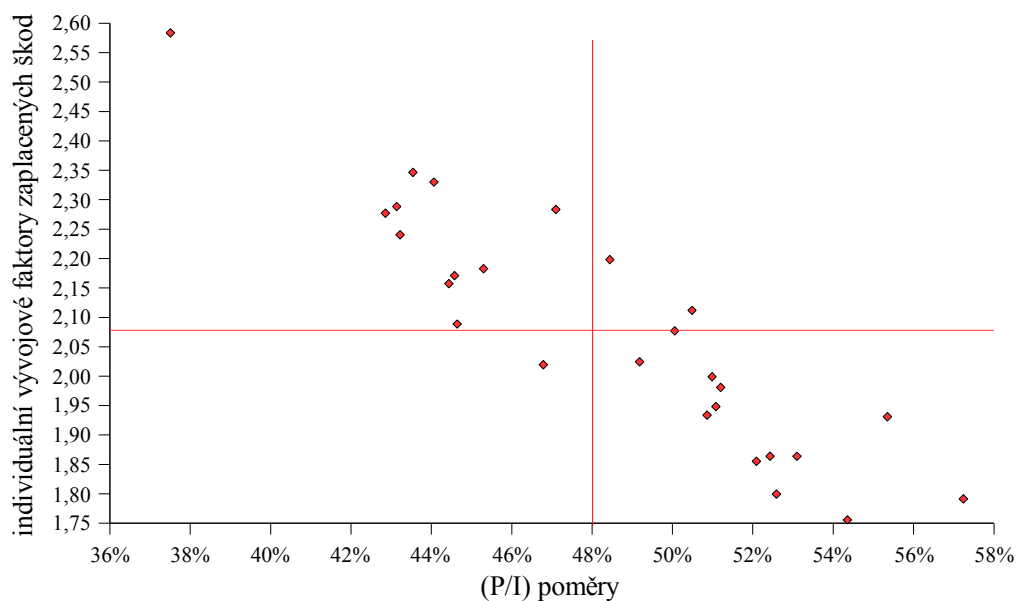
4.6 Korelace mezi daty zaplacených a evidovaných škod

V minulé kapitole jsme ukázali, že metoda chain ladder aplikovaná odděleně na trojúhelníky P a I dává často nevěrohodné výsledky, které odporují zkušenosti v pozorovaných datech.

(P/I) problém metody SCL je způsoben tím, že metoda SCL nebere v úvahu korelaci mezi daty zaplacených a evidovaných škod.

Na následujících grafech ukážeme závislost vývojových faktorů na minulých (P/I) poměrech. Jelikož pro stejný vývojový čas používá metoda SCL stejný odhad vývojového faktoru, podíváme se, jak závisí pozorované individuální vývojové faktory na předchozích (P/I) poměrech.

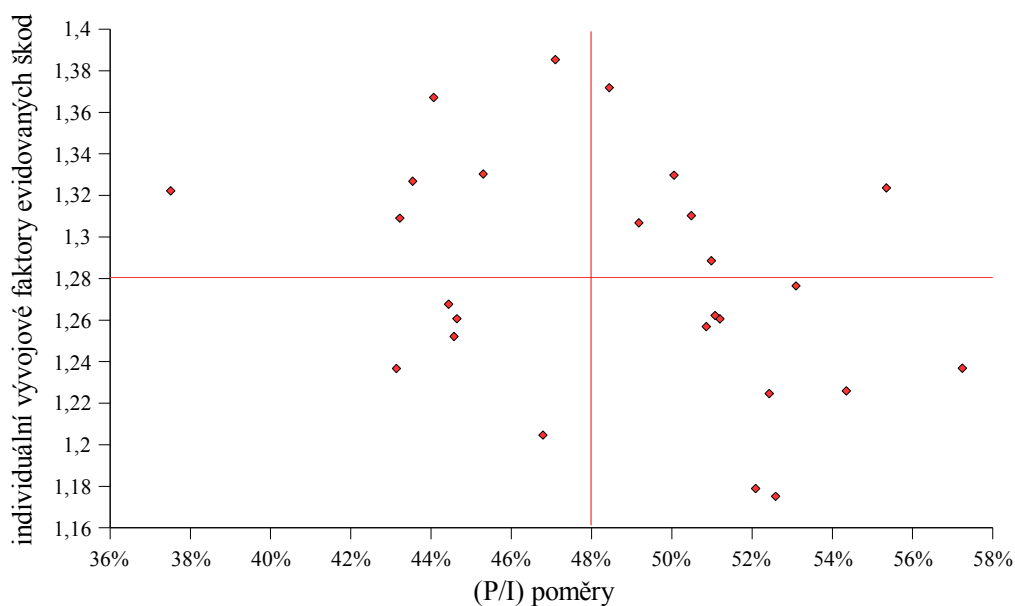
Pro přechod mezi prvním a druhým vývojovým čtvrtletím dostáváme z trojúhelníka P následující graf na obrázku 6.



Obrázek 6: Závislost vývojových faktorů zaplacených škod na předchozích (P/I) poměrech

Vertikální přímka v grafu zobrazuje průměrný (P/I) poměr, horizontální přímka pak znázorňuje průměrný individuální vývojový faktor. Body na obrázku 6 vykazují jasně klesající trend s korelací -92% (tj. sklon trendu je -0,92).

Podobně pro vývojové faktory evidovaných škod (z trojúhelníka I) získáme graf na obrázku 7.



Obrázek 7: Závislost vývojových faktorů evidovaných škod na předchozích (P/I) poměrech

Na obrázku 7 není závislost tak zřejmá. Body vykazují korelaci -29% (tj. sklon trendu je -0,29). Pro vývojové faktory evidovaných škod je však typická kladná korelace, neboť v minulosti poměrně nízký (P/I) poměr znamená, že buď jsme málo vyplatili nebo jsme zarezervovali více, než je obvyklé pro srovnatelná období. Můžeme tedy očekávat, že v dalším období výplaty porostou, tj. buď bude následující vývojový faktor zaplacených škod poměrně vysoký nebo vývojový faktor evidovaných škod poměrně nízký (případně obojí). Pro poměrně vysoký (P/I) poměr to platí obráceně.

Protože stanovení korelace je velmi citlivé na odlehlá pozorování, dospějeme ke kladné hodnotě korelace, pokud odstraníme odlehlé hodnoty v horním levém a spodním pravém kvadrantu (kvadranty vzhledem k průměrným hodnotám (P/I) poměrů a individuálních vývojových faktorů evidovaných škod).

Z obrázků 6 a 7 plyne, že bychom pro odhady budoucích hodnot neměli používat stále stejné (průměrné) vývojové faktory, ale měli bychom je upravit na základě minulé zkušenosti. Pokud je aktuální (P/I) poměr podprůměrný, měli bychom použít nadprůměrný vývojový faktor zaplacených škod nebo podprůměrný vývojový faktor evidovaných škod. Pro nadprůměrný aktuální (P/I) poměr to platí analogicky.

Nicméně předchozí pravidlo nám ještě nedává návod, jak moc máme vývojové faktory upravit a zda máme upravovat více vývojové faktory zaplacených nebo evidovaných škod. Při pohledu na obrázky 6 a 7 se jako jednoduché řešení jeví použití lineární regrese bez absolutního členu vzhledem k osám určeným průměrnými hodnotami individuálních vývojových faktorů a (P/I) poměrů. Podle aktuálního (P/I) poměru použijeme vývojový faktor určený regresní přímkou namísto průměrného vývojového faktoru.

V praxi má však takový postup několik nedostatků. Protože vývojové faktory zaplacených škod jsou obvykle větší nebo rovné jedné, není pro ně lineární aproximace vhodná. Mnohem lepší je v tomto případě použít hyperbolickou křivku. Jednodušší možností je namísto (P/I) poměrů uvažovat závislost na jejich inverzních hodnotách, tedy na (I/P) poměrech, které vyjadřují podíl evidovaných a zaplacených škod – pak se hyperbolická závislost transformuje na lineární a v případě malého rozptylu (P/I) poměrů se lineární závislost zachová i po přechodu k (I/P) poměrům (to je náš případ z obrázku 6).

Dalším problémem, který souvisí se zavedením lineární regrese, je poměrně nejistý odhad sklonu regresní přímky. Obzvláště pro poslední vývojová období máme pro regresi nedostatek pozorování.

Řešení tohoto problému přinesla Mnichovská metoda chain ladder (viz následující kapitola), která zavedením reziduí (tj. standardizací) umožnila založit regresi na všech doposud pozorovaných hodnotách.

Kapitola 5

Mnichovská metoda chain ladder

Mnichovská metoda chain ladder (dále jen *metoda MCL*) byla odvozena aktuáry Gerhardem Quargem a Thomasem Mackem v [9] jako rozšíření Mackova modelu chain ladder (viz kapitola 4). Metoda používá stejné předpoklady o střední hodnotě a rozptylu vývojových faktorů, rozšířený předpoklad nezávislosti na trojúhelníky zaplacených a evidovaných škod současně a nové předpoklady týkající se závislosti vývojových faktorů na předcházejících (P/I), resp. (I/P), poměrech. Hlavním cílem metody je zahrnout do výpočtů oba trojúhelníky zároveň a vyjádřit tak přesněji výši potřebné rezervy.

Mackův model, který jsme zavedli v kapitole 4, vychází ze znalosti pouze jednoho trojúhelníka – zaplacených nebo evidovaných škod. V praxi známe oba trojúhelníky, a proto chceme odhadnout budoucí hodnoty na základě na této znalosti, tj. zajímáme se o podmíněné střední hodnoty

$$E\left(\frac{P_{i,s+1}}{P_{i,s}} \mid P_{i,1}, \dots, P_{i,s}, I_{i,1}, \dots, I_{i,s}\right) \quad \text{a} \quad E\left(\frac{I_{i,s+1}}{I_{i,s}} \mid P_{i,1}, \dots, P_{i,s}, I_{i,1}, \dots, I_{i,s}\right).$$

Pro zjednodušení dalších zápisů zavedeme potřebné značení.

5.1 Značení

$s, t \in T \subset \mathbb{N}$ značí vývojový čas, obvykle $T = \{1, \dots, n\}$, n je počet škodních let

$P_i = (P_{i,t})_{t \in T}$ označuje vývoj zaplacených škod škodního roku i přes všechny vývojové roky,

$I_i = (I_{i,t})_{t \in T}$ označuje vývoj evidovaných škod škodního roku i přes všechny vývojové roky,

$P_i(s) = \{P_{i,1}, \dots, P_{i,s}\}$ zastupuje podmínku, že vývoj zaplacených škod škodního roku i je dán do konce vývojového roku s ,

$I_i(\mathbf{s}) = \{I_{i,1}, \dots, I_{i,s}\}$ zastupuje podmínku, že vývoj evidovaných škod škodního roku i je dán do konce vývojového roku s ,

$B_i(\mathbf{s}) = \{P_{i,1}, \dots, P_{i,s}, I_{i,1}, \dots, I_{i,s}\}$ zastupuje znalost obou průběhů škodního roku i do konce vývojového roku s ,

$$Q_i = \frac{P_i}{I_i} = \left(\frac{P_{i,t}}{I_{i,t}} \right)_{t \in T} \text{ značí } (P/I) \text{ průběh.}$$

5.2 Předpoklady metody MCL

Vzhledem k tomu, že některé předpoklady používají standardizované veličiny, tzv. *podmíněná rezidua*, uvádíme nejprve jejich definici.

Definice: Jestliže X je náhodná veličina, \mathbf{C} je podmínka a $\sigma(X | \mathbf{C}) = \sqrt{\text{Var}(X | \mathbf{C})}$ podmíněná směrodatná odchylka X při daném \mathbf{C} , pak

$$(5.2.1) \quad \text{Res}(X | \mathbf{C}) = \frac{X - E(X | \mathbf{C})}{\sigma(X | \mathbf{C})}$$

se nazývá *podmíněné reziduum* X při daném \mathbf{C} . Podmíněné reziduum je standardizováno s ohledem na jeho podmíněnou střední hodnotu a jeho podmíněný rozptyl:

$$(5.2.2) \quad E(\text{Res}(X | \mathbf{C}) | \mathbf{C}) = 0 \quad \text{a} \quad \text{Var}(\text{Res}(X | \mathbf{C}) | \mathbf{C}) = 1.$$

Nyní již můžeme uvést předpoklady metody MCL:

- Trojúhelníky P a I splňují předpoklady o střední hodnotě (4.1.1) a rozptylu (4.1.3) Mackova modelu, tj. s použitím předchozího značení a $t = s+1$ platí

$$(5.2.3) \quad E(P_{i,t} | \mathbf{P}_i(\mathbf{s})) = P_{i,s} f_{s \rightarrow t}^P, \quad f_{s \rightarrow t}^P > 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad s, t \in T,$$

$$(5.2.4) \quad \text{Var}(P_{i,t} | \mathbf{P}_i(\mathbf{s})) = P_{i,s} (\sigma_{s \rightarrow t}^P)^2, \quad \sigma_{s \rightarrow t}^P \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad s, t \in T,$$

$$(5.2.5) \quad E(I_{i,t} | \mathbf{I}_i(\mathbf{s})) = I_{i,s} f_{s \rightarrow t}^I, \quad f_{s \rightarrow t}^I > 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad s, t \in T,$$

$$(5.2.6) \quad \text{Var}(I_{i,t} | \mathbf{I}_i(\mathbf{s})) = I_{i,s} (\sigma_{s \rightarrow t}^I)^2, \quad \sigma_{s \rightarrow t}^I \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad s, t \in T.$$

- Rozšířený předpoklad nezávislosti (4.1.2) na oba trojúhelníky současně, tj.

$$(5.2.7) \quad \{P_{1,s}, I_{1,s} | s \in T\}, \dots, \{P_{n,s}, I_{n,s} | s \in T\} \text{ jsou stochasticky nezávislé,}$$

- Existuje konstanta λ^P taková, že pro všechna $s, t \in T$, $t = s+1$ a všechna $i = 1, \dots, n$

$$(5.2.8) \quad \mathbb{E} \left(\text{Res} \left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} \mid \mathbf{P}_i(s) \right) \mid \mathbf{B}_i(s) \right) = \lambda^P \cdot \text{Res}(Q_{i,s}^{-1} \mid \mathbf{P}_i(s))$$

nebo ekvivalentně

$$(5.2.9) \quad \mathbb{E} \left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} \mid \mathbf{B}_i(s) \right) = f_{s \rightarrow t}^P + \lambda^P \cdot \frac{\sigma \left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} \mid \mathbf{P}_i(s) \right)}{\sigma(Q_{i,s}^{-1} \mid \mathbf{P}_i(s))} \cdot (Q_{i,s}^{-1} - \mathbb{E}(Q_{i,s}^{-1} \mid \mathbf{P}_i(s))),$$

- Existuje konstanta λ^I taková, že pro všechna $s, t \in T$, $t = s+1$ a všechna $i = 1, \dots, n$

$$(5.2.10) \quad \mathbb{E} \left(\text{Res} \left(\frac{I_{i,t}}{I_{i,s}} \mid \mathbf{I}_i(s) \right) \mid \mathbf{B}_i(s) \right) = \lambda^I \cdot \text{Res}(Q_{i,s} \mid \mathbf{I}_i(s))$$

nebo ekvivalentně

$$(5.2.11) \quad \mathbb{E} \left(\frac{I_{i,t}}{I_{i,s}} \mid \mathbf{B}_i(s) \right) = f_{s \rightarrow t}^I + \lambda^I \cdot \frac{\sigma \left(\frac{I_{i,t}}{I_{i,s}} \mid \mathbf{I}_i(s) \right)}{\sigma(Q_{i,s} \mid \mathbf{I}_i(s))} \cdot (Q_{i,s} - \mathbb{E}(Q_{i,s} \mid \mathbf{I}_i(s))).$$

5.3 Analýza modelových předpokladů

Podívejme se podrobněji na předpoklady (5.2.8) a (5.2.10), které popisují závislost budoucích vývojových faktorů na minulých (I/P) nebo (P/I) poměrech. Názornější vyjádření (5.2.9) a (5.2.11) ukazují, že budoucí vývojový faktor metody MCL tvoří součet běžného chain ladder vývojového faktoru a korekčního členu, který je funkcí dat obou trojúhelníků. Z toho plyne, že metoda MCL k predikci budoucích hodnot nepoužívá stejný vývojový faktor pro všechna škodní období, jako tomu bylo u metody chain ladder nebo Mackova modelu, ale pro různá škodní období se vývojové faktory liší v závislosti na předchozím (P/I), resp. (I/P), poměru.

Korekční člen tvoří tři veličiny:

- Faktory λ^I a λ^P jsou obyčejné (tj. nezávislé na i a s) korelační koeficienty podmíněných reziduí vývojových faktorů a podmíněných reziduí (P/I), resp. (I/P), poměrů, proto se budeme dále na λ^I a λ^P odkazovat jako na *korelační parametry*.

Použitím (5.2.8) platí

$$(5.3.1) \quad \begin{aligned} & \text{Cov} \left(\text{Res}(Q_{i,s}^{-1} | \mathbf{P}_i(\mathbf{s})), \text{Res} \left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} | \mathbf{P}_i(\mathbf{s}) \right) \right) = \\ & \text{Cov} \left(\text{Res}(Q_{i,s}^{-1} | \mathbf{P}_i(\mathbf{s})), \text{E} \left(\text{Res} \left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} | \mathbf{P}_i(\mathbf{s}) \right) | \mathbf{B}_i(\mathbf{s}) \right) \right) = \\ & \lambda^P \cdot \text{Var} \left(\text{Res}(Q_{i,s}^{-1} | \mathbf{P}_i(\mathbf{s})) \right). \end{aligned}$$

Protože pro náhodné veličiny X a Y obecně platí

$$(5.3.2) \quad \text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)} \cdot \sqrt{\text{Var}(Y)}}$$

a podmíněná rezidua jsou standardizované veličiny, pak dostáváme

$$(5.3.3) \quad \text{Corr} \left(\text{Res}(Q_{i,s}^{-1} | \mathbf{P}_i(\mathbf{s})), \text{Res} \left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} | \mathbf{P}_i(\mathbf{s}) \right) \right) = \lambda^P,$$

resp.

$$(5.3.4) \quad \text{Corr} \left(Q_{i,s}^{-1}, \frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} | \mathbf{P}_i(\mathbf{s}) \right) = \lambda^P,$$

neboť standardizace korelační koeficient neovlivní.

Analogicky bychom mohli postupovat i při odvozování

$$(5.3.5) \quad \text{Corr} \left(\text{Res}(Q_{i,s} | \mathbf{I}_i(\mathbf{s})), \text{Res} \left(\frac{I_{i,t}}{I_{i,s}} | \mathbf{I}_i(\mathbf{s}) \right) \right) = \lambda^I,$$

$$(5.3.6) \quad \text{Corr} \left(Q_{i,s}, \frac{I_{i,t}}{I_{i,s}} | \mathbf{I}_i(\mathbf{s}) \right) = \lambda^I.$$

Hodnoty λ^I a λ^P jsou obvykle mezi 0 a 1. Když v datech není téměř žádná závislost, pak $\lambda^I \approx 0$ a $\lambda^P \approx 0$ a vývojové faktory jsou odhadovány jako v metodě SCL. Protože přiblížení pomocí podmíněných reziduí umožňuje uvažovat všechny

vývojové roky dohromady, tj. je dostupný dostatečný počet bodů, je jejich odhad relativně stabilní.

- Dalším činitelem korekčního členu je faktor směrodatné odchylky

$$(5.3.7) \quad \frac{\sigma\left(\frac{I_{i,t}}{I_{i,s}} \mid \mathbf{I}_i(s)\right)}{\sigma(Q_{i,s} \mid \mathbf{I}_i(s))}, \text{ resp. } \frac{\sigma\left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} \mid \mathbf{P}_i(s)\right)}{\sigma(Q_{i,s}^{-1} \mid \mathbf{P}_i(s))}.$$

Je to podíl podmíněných směrodatných odchylek vývojového faktoru a (P/I) , resp. (I/P) , poměru. Tento člen zajišťuje v podstatě normování korekčního členu.

- Poslední činitel - lineární člen $Q_{i,s} - E(Q_{i,s} \mid \mathbf{I}_i(s))$, resp. $Q_{i,s}^{-1} - E(Q_{i,s}^{-1} \mid \mathbf{P}_i(s))$, zahrnuje do odhadu budoucích výší škod (P/I) , resp. (I/P) , poměr. Když je (P/I) , resp. (I/P) , poměr průměrný, bude i použitý vývojový faktor průměrný jako v metodě SCL.

Z analýzy vidíme, že slabá korelace podmíněných reziduí vývojových faktorů zaplacených škod vzhledem k podmíněným reziduíům (I/P) poměrů způsobuje malé λ^P . Podobně slabá korelace podmíněných reziduí vývojových faktorů evidovaných škod vzhledem k podmíněným reziduíům (P/I) poměrů způsobuje malé λ^I . Pak se odhad budoucí výše zaplacených a evidovaných škod metodou MCL téměř neodchyluje od výpočtu metodou SCL.

5.4 Parametry metody MCL

Pro výpočet rezervy metodou MCL potřebujeme některé veličiny odhadnout, neboť nejsme schopni určit jejich přesnou hodnotu.

Stejně jako v Mackově modelu, použijeme pro odhad vývojových faktorů chain ladder $f_{s \rightarrow s+1}^P$ a $f_{s \rightarrow s+1}^I$ formulí (3.1.2) a pro odhad $\sigma_{s \rightarrow s+1}^P$ a $\sigma_{s \rightarrow s+1}^I$ formule (4.1.4) a (4.1.6).

K výpočtu podmíněných reziduí (P/I) a (I/P) poměrů potřebujeme znát následující odhady

$$(5.4.1) \quad \overline{E(Q_{i,s} \mid \mathbf{I}_i(s))} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n-s+1} I_{j,s}} \cdot \sum_{j=1}^{n-s+1} I_{j,s} \cdot Q_{j,s} = \frac{\sum_{j=1}^{n-s+1} P_{j,s}}{\sum_{j=1}^{n-s+1} I_{j,s}} \stackrel{\text{ozn.}}{=} \hat{q}_s, \quad s = 1, \dots, n.$$

Pro podmíněnou směrodatnou odchylku máme odhad

$$(5.4.2) \quad \overline{\sigma(Q_{i,s} | \mathbf{I}_i(\mathbf{s}))} = \frac{\widehat{\rho}_s^I}{\sqrt{I_{i,s}}},$$

kde $\widehat{\rho}_s^I$ definujeme pomocí

$$(5.4.3) \quad \widehat{\rho}_s^I{}^2 = \frac{1}{n-s} \cdot \sum_{j=1}^{n-s+1} I_{j,s} \cdot (Q_{j,s} - \widehat{q}_s)^2, \quad s = 1, \dots, n-1,$$

což je výraz nezávislý na indexu škodního roku i .

Pro podmíněné střední hodnoty a rozptyly (I/P) poměrů máme analogicky

$$(5.4.4) \quad \overline{E(Q_{i,s}^{-1} | \mathbf{P}_i(\mathbf{s}))} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n-s+1} P_{j,s}} \cdot \sum_{j=1}^{n-s+1} P_{j,s} \cdot Q_{j,s}^{-1} = \frac{\sum_{j=1}^{n-s+1} I_{j,s}}{\sum_{j=1}^{n-s+1} P_{j,s}} \stackrel{\text{ozn.}}{=} \widehat{q}_s^{-1}, \quad s = 1, \dots, n$$

a

$$(5.4.5) \quad \overline{\sigma(Q_{i,s}^{-1} | \mathbf{P}_i(\mathbf{s}))} = \frac{\widehat{\rho}_s^P}{\sqrt{P_{i,s}}},$$

kde $\widehat{\rho}_s^P$ je definováno pomocí

$$(5.4.6) \quad \widehat{\rho}_s^P{}^2 = \frac{1}{n-s} \cdot \sum_{j=1}^{n-s+1} P_{j,s} \cdot (Q_{j,s}^{-1} - \widehat{q}_s^{-1})^2, \quad s = 1, \dots, n-1.$$

Použitím formulí popsaných výše jsme již schopni odhadnout podmíněná rezidua. Abychom zjednodušili zápis, budeme používat následující značení:

$$(5.4.7) \quad \overline{\text{Res}\left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} | \mathbf{P}_i(\mathbf{s})\right)} \stackrel{\text{ozn.}}{=} \widehat{\text{Res}}(P_{i,t}), \quad \overline{\text{Res}\left(\frac{I_{i,t}}{I_{i,s}} | \mathbf{I}_i(\mathbf{s})\right)} \stackrel{\text{ozn.}}{=} \widehat{\text{Res}}(I_{i,t}),$$

$$(5.4.8) \quad \overline{\text{Res}(Q_{i,s}^{-1} | \mathbf{P}_i(\mathbf{s}))} \stackrel{\text{ozn.}}{=} \widehat{\text{Res}}(Q_{i,s}^{-1}), \quad \overline{\text{Res}(Q_{i,s} | \mathbf{I}_i(\mathbf{s}))} \stackrel{\text{ozn.}}{=} \widehat{\text{Res}}(Q_{i,s}).$$

Máme tedy z definice rezidua

$$(5.4.9) \quad \widehat{\text{Res}}(P_{i,t}) = \frac{P_{i,t} - \widehat{f}_{s \rightarrow t}^P}{\widehat{\sigma}_{s \rightarrow t}^P} \cdot \sqrt{P_{i,s}}, \quad \widehat{\text{Res}}(I_{i,t}) = \frac{I_{i,t} - \widehat{f}_{s \rightarrow t}^I}{\widehat{\sigma}_{s \rightarrow t}^I} \cdot \sqrt{I_{i,s}}$$

a

$$(5.4.10) \quad \widehat{\text{Res}}(Q_{i,s}^{-1}) = \frac{Q_{i,s}^{-1} - \widehat{q}_s^{-1}}{\widehat{\rho}_s^P} \cdot \sqrt{P_{i,s}}, \quad \widehat{\text{Res}}(Q_{i,s}) = \frac{Q_{i,s} - \widehat{q}_s}{\widehat{\rho}_s^I} \cdot \sqrt{I_{i,s}}$$

Pro parametry λ^P a λ^I použijeme odhady

$$(5.4.11) \quad \widehat{\lambda}^P = \frac{1}{\sum_{i,s} \widehat{\text{Res}}(Q_{i,s}^{-1})^2} \cdot \sum_{i,s} \widehat{\text{Res}}(Q_{i,s}^{-1})^2 \cdot \frac{\widehat{\text{Res}}(P_{i,t})}{\widehat{\text{Res}}(Q_{i,s}^{-1})} = \frac{\sum_{i,s} \widehat{\text{Res}}(Q_{i,s}^{-1}) \cdot \widehat{\text{Res}}(P_{i,t})}{\sum_{i,s} \widehat{\text{Res}}(Q_{i,s}^{-1})^2}$$

a

$$(5.4.12) \quad \widehat{\lambda}^I = \frac{1}{\sum_{i,s} \widehat{\text{Res}}(Q_{i,s})^2} \cdot \sum_{i,s} \widehat{\text{Res}}(Q_{i,s})^2 \cdot \frac{\widehat{\text{Res}}(I_{i,t})}{\widehat{\text{Res}}(Q_{i,s})} = \frac{\sum_{i,s} \widehat{\text{Res}}(Q_{i,s}) \cdot \widehat{\text{Res}}(I_{i,t})}{\sum_{i,s} \widehat{\text{Res}}(Q_{i,s})^2},$$

kde ve všech sumách probíhá index s od 1 do $n-2$ a index i od 1 do $n-s$. Pokud vývoj trojúhelníka skončí dříve než po n vývojových letech, může být výhodné nechat index s dosáhnout pouze konce vývoje.

Podle předpokladů závislosti vývojových faktorů na předchozích (I/P), resp. (P/I), poměrech (5.2.9) a (5.2.11) dostáváme rekurzivní vztahy pro doplnění trojúhelníka na čtyřúhelník:

$$(5.4.13) \quad \widehat{P}_{i,t} = \widehat{P}_{i,s} \cdot \underbrace{\left(\widehat{f}_{s \rightarrow t}^P + \widehat{\lambda}^P \cdot \frac{\widehat{\sigma}_{s \rightarrow t}^P}{\widehat{\rho}_s^P} \cdot \left(\frac{\widehat{I}_{i,s}}{\widehat{P}_{i,s}} - \widehat{q}_s^{-1} \right) \right)}_{\text{ozn. } \widehat{f}_{i,s \rightarrow t}^P}$$

a

$$(5.4.14) \quad \widehat{I}_{i,t} = \widehat{I}_{i,s} \cdot \underbrace{\left(\widehat{f}_{s \rightarrow t}^I + \widehat{\lambda}^I \cdot \frac{\widehat{\sigma}_{s \rightarrow t}^I}{\widehat{\rho}_s^I} \cdot \left(\frac{\widehat{P}_{i,s}}{\widehat{I}_{i,s}} - \widehat{q}_s \right) \right)}_{\text{ozn. } \widehat{f}_{i,s \rightarrow t}^I},$$

pro $s \geq n-i+1$ a počáteční hodnoty $\widehat{P}_{i,n-i+1} = P_{i,n-i+1}$ a $\widehat{I}_{i,n-i+1} = I_{i,n-i+1}$.

Stanovení rezervy na nevyřízené škody provedeme opět použitím vztahu pro odhad rezervy jednotlivých škodních období (3.1.5), tj.

$$(5.4.15) \quad \widehat{R}_i^P = \widehat{P}_{i,n} - P_{i,n-i+1}, \quad i = 2, \dots, n$$

a

$$(5.4.16) \quad \widehat{R}_i^I = \widehat{I}_{i,n} - I_{i,n-i+1}, \quad i = 2, \dots, n.$$

Přesnost výpočtu budeme ověřovat, stejně jako v Mackově modelu, pomocí střední kvadratické chyby, resp. směrodatné chyby.

Podle [3] získáme vzorec pro výpočet odhadu $\widehat{\text{mse}}(\widehat{R}_i)$ pro metodu MCL použitím vzorce (4.2.5) uvedeného pro Mackův model, kde nahradíme vývojové faktory $\widehat{f}_{s \rightarrow t}^P$, $\widehat{f}_{s \rightarrow t}^I$ a parametry $\widehat{\sigma}_{s \rightarrow t}^{P^2}$, $\widehat{\sigma}_{s \rightarrow t}^{I^2}$ Mackova modelu odpovídajícími vývojovými faktory $\widehat{f}_{i,s \rightarrow t}^P$, $\widehat{f}_{i,s \rightarrow t}^I$ a parametry $\widehat{\sigma}_{i,s \rightarrow t}^{P^2}$, $\widehat{\sigma}_{i,s \rightarrow t}^{I^2}$ metody MCL:

$$(5.4.17) \quad \widehat{\text{mse}}(\widehat{R}_i)^P = (\widehat{\text{s.e.}}(\widehat{R}_i)^P)^2 = \widehat{P}_{i,n}^2 \sum_{s=n-i+1}^{n-1} \frac{\widehat{\sigma}_{i,s \rightarrow t}^{P^2}}{\widehat{f}_{i,s \rightarrow t}^P} \left(\frac{1}{\widehat{P}_{i,s}} + \frac{1}{\sum_{k=1}^{n-s} \widehat{P}_{k,s}} \right),$$

kde $\widehat{\sigma}_{i,s \rightarrow t}^{P^2} = \text{Var}(\widehat{\lambda}^P) \cdot \widehat{\sigma}_{s \rightarrow t}^{P^2} \cdot (\widehat{\text{Res}}(Q_{i,s}^{-1}))^2$, $\widehat{\sigma}_{s \rightarrow t}^{P^2}$ odhadneme podle (4.1.4), (4.1.6),

$$(5.4.18) \quad \widehat{\text{mse}}(\widehat{R}_i)^I = (\widehat{\text{s.e.}}(\widehat{R}_i)^I)^2 = \widehat{I}_{i,n}^2 \sum_{s=n-i+1}^{n-1} \frac{\widehat{\sigma}_{i,s \rightarrow t}^{I^2}}{\widehat{f}_{i,s \rightarrow t}^I} \left(\frac{1}{\widehat{I}_{i,s}} + \frac{1}{\sum_{k=1}^{n-s} \widehat{I}_{k,s}} \right),$$

kde $\widehat{\sigma}_{i,s \rightarrow t}^{I^2} = \text{Var}(\widehat{\lambda}^I) \cdot \widehat{\sigma}_{s \rightarrow s+1}^{I^2} \cdot (\widehat{\text{Res}}(Q_{i,s}))^2$, $\widehat{\sigma}_{s \rightarrow t}^{I^2}$ odhadneme podle (4.1.4), (4.1.6).

Podobně pro střední kvadratickou chybu celkové rezervy dostaneme úpravou vztahu (4.2.6) pro Mackův model odhad pro metodu MCL. Odhad střední kvadratické chyby celkové rezervy pro trojúhelník P vypadá následovně:

$$(5.4.19) \quad \widehat{\text{mse}}(\widehat{R})^P = (\widehat{\text{s.e.}}(\widehat{R})^P)^2 = \sum_{i=2}^n \left\{ (\widehat{\text{s.e.}}(\widehat{R}_i)^P)^2 + \widehat{P}_{i,n} \left(\sum_{j=i+1}^n \widehat{P}_{j,n} \right) \sum_{s=n-i+1}^{n-1} \frac{\widehat{\sigma}_{i,s \rightarrow t}^{P^2}}{\widehat{f}_{i,s \rightarrow t}^P} \right\}.$$

Analogicky pro trojúhelník I dostáváme

$$(5.4.20) \quad \widehat{\text{mse}}(\widehat{R})^I = \widehat{(\text{s.e.}(\widehat{R})^I)^2} = \sum_{i=2}^n \left\{ \widehat{(\text{s.e.}(\widehat{R}_i)^I)^2} + \widehat{I}_{i,n} \left(\sum_{j=i+1}^n \widehat{I}_{j,n} \right) \sum_{s=n-i+1}^{n-1} \frac{2 \widehat{\sigma}_{i,s \rightarrow t}^I}{\widehat{f}_{i,s \rightarrow t}^I} \right\}.$$

5.5 Aplikace metody MCL

Než aplikujeme metodu MCL, provedeme opět testy předpokladů metody. Předpoklady o střední hodnotě (5.2.3), (5.2.5) a rozptylu (5.2.4), (5.2.6) jsou stejné jako v Mackově modelu, proto jejich testy nebudeme znovu uvádět. Předpoklad nezávislosti pro oba trojúhelníky (5.2.7) je rozšířením předpokladu (4.1.2) použitého zvlášť pro trojúhelníky P a I . Protože metoda MCL pracuje s (P/I) , resp. (I/P) , poměry, aplikujeme test vlivu kalendářních let právě na (P/I) poměry stejným způsobem, jakým byl popsán v Mackově modelu pro jednotlivé trojúhelníky P a I . Tímto postupem zjistíme, že předpoklad pro oba trojúhelníky současně není na 5% hladině splněný.

Předpoklady závislosti vývojových faktorů na předchozích (I/P) , resp. (P/I) , poměrech (5.2.8) a (5.2.10) je opět možné převést na regresní model. Pomocí statistického programu *R* 2.5.1 chceme ukázat, že absolutní člen není pro regresi důležitý a že body na grafu závislosti vývojových faktorů na předchozích (P/I) nebo (I/P) poměrech jsou rozloženy podél regresní přímky. Vzhledem k pravidlu o závislosti vývojových faktorů na předchozích (I/P) , resp. (P/I) , poměrech z kapitoly 4.6 bychom chtěli, aby regresní přímka měla sklon ≥ 0 .

Jelikož chceme regresi založit na všech doposud pozorovaných hodnotách, budeme pracovat s podmíněnými rezidui, jak jsme je definovali v kapitole 5.2.

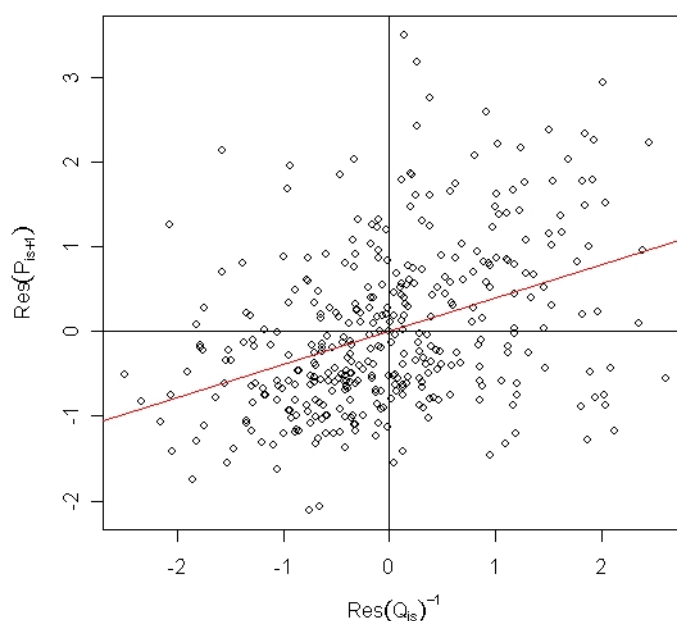
lm(formula = $\widehat{\text{Res}}(P_{i,s+1}) \sim \widehat{\text{Res}}(Q_{i,s}^{-1})$)				
Coefficients	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	0.003585	0.045811	0.078	0.938
$\widehat{\text{Res}}(Q_{i,s}^{-1})$	0.392178	0.047753	8.213	3.54e-15

Tabulka 7: Regrese pro rezidua vývojových faktorů zaplacených škod a (I/P) poměrů

V tabulce 7 mají sloupce následující význam: 'Estimate' označuje odhad koeficientu, 'Std. Error' směrodatnou odchylku, 't value' t-statistiku, tj. podíl 'Estimate' / 'Std. Error' a ' $Pr(> |t|)$ ' p-hodnotu.

Testujeme hypotézu, že jednotlivé parametry modelu jsou nevýznamné, tj., že odhady koeficientů jednotlivých parametrů jsou nulové.

Jak je vidět z p-hodnoty $Pr(> |t|)$, není absolutní člen (*intercept*) pro regresi důležitý. Můžeme tedy použít regresi bez absolutního členu. Regresní přímka pak bude procházet počátkem soustavy souřadnic. Graf závislosti reziduí vývojových faktorů zaplacených škod na reziduích předchozích (I/P) poměrů uvádíme na následujícím obrázku 8



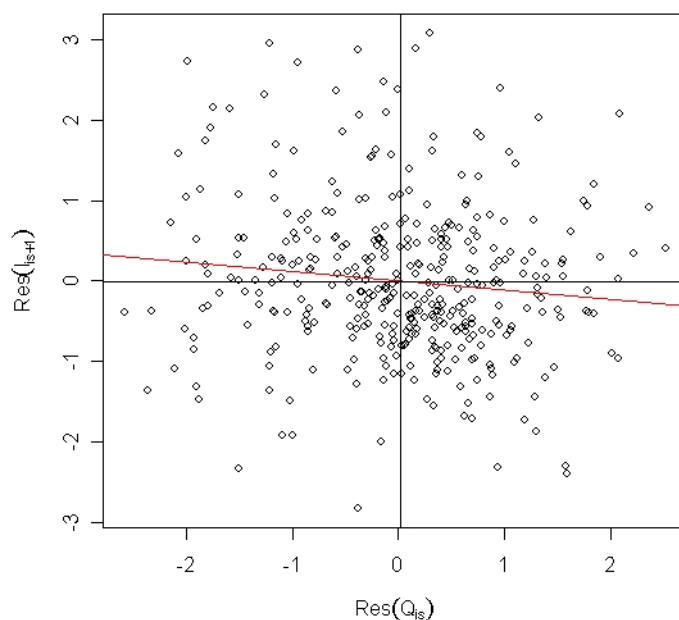
Obrázek 8: Reziduální graf pro trojúhelník P

Analogicky postupujeme pro rezidua vývojových faktorů evidovaných škod a rezidua předchozích (P/I) poměrů:

lm(formula = $\widehat{\text{Res}}(I_{i,s+1}) \sim \widehat{\text{Res}}(Q_{i,s})$)				
Coefficients	Estimate	Std. Error	t value	$Pr(> t)$
(Intercept)	-0.005087	0.049291	-0.103	0.9179
$\widehat{\text{Res}}(Q_{i,s})$	-0.114757	0.051442	-2.231	0.0263

Tabulka 8: Regrese pro rezidua vývojových faktorů evidovaných škod a (P/I) poměrů

Z tabulky je patrné, že sice absolutní člen (*intercept*) není pro regresi podstatný, nicméně vysvětlující proměnná $\widehat{\text{Res}}(Q_{i,s})$ nepopisuje regresi příliš dobře (p-hodnota je poměrně vysoká). Oproti našemu očekávání tedy vyšel koeficient pro $\widehat{\text{Res}}(Q_{i,s})$ záporný. Tato skutečnost je způsobena velkým počtem odlehlých pozorování, která jsou vidět na obrázku 9. Proto se také někdy používají namísto metody nejmenších čtverců jiné odhady, které potlačí nebo zcela vyloučí vliv odlehlých pozorování. V [2,3] je navrhováno použití např. *Huberovy robustní regrese (Huber's robust regression approach)*, *dvojitě (iterační) metody nejmenších čtverců (bisquare methods)* nebo *metody nejmenších useknutých čtverců (Least trimmed squares methods (LTS))*.



Obrázek 9: Reziduální graf pro trojúhelník I

Kontrolní grafy znázorňující homoskedascitu reziduí (tj., že odchylky od regresní přímky mají stejný rozptyl nezávislý na hodnotách vysvětlující regresní proměnné) uvádíme na příloženém CD.

Přestože máme opět nesplněný předpoklad nezávislosti a také výsledky předpokladů (5.2.8) a (5.2.10) nejsou nijak přesvědčivé, může dát aplikace této metody realističtější odhady rezervy než jsme dostali aplikací metody SCL.

Nejprve uvedme odhady potřebných parametrů. Průměrné vývojové faktory (tj. běžné vývojové faktory chain ladder) jsou uvedeny v tabulce 2.

Odhady parametrů σ podle (4.1.4) a (4.1.6) obsahuje následující tabulka 9:

s	1→2	2→3	3→4	4→5	5→6	6→7	7→8	8→9	9→10
$\widehat{\sigma}_{s \rightarrow s+1}^P$	1 758,264	371,229	212,015	107,384	81,699	68,936	64,068	29,678	65,405
$\widehat{\sigma}_{s \rightarrow s+1}^I$	720,003	202,070	87,222	73,799	52,313	54,480	38,587	19,176	64,583
s	10→11	11→12	12→13	13→14	14→15	15→16	16→17	17→18	18→19
$\widehat{\sigma}_{s \rightarrow s+1}^P$	38,896	24,345	33,676	65,591	19,830	47,378	17,534	92,246	135,087
$\widehat{\sigma}_{s \rightarrow s+1}^I$	22,133	17,937	21,233	47,322	17,674	10,726	12,311	64,483	133,359
s	19→20	20→21	21→22	22→23	23→24	24→25	25→26	26→27	27→28
$\widehat{\sigma}_{s \rightarrow s+1}^P$	171,843	95,628	15,740	34,620	9,884	6,604	10,561	0,000	0,000
$\widehat{\sigma}_{s \rightarrow s+1}^I$	96,219	77,219	18,691	14,753	10,876	1,719	0,000	0,000	0,000

Tabulka 9: Odhady parametrů σ

Pro odhady podmíněných reziduí budeme potřebovat znát parametry spočítané podle (5.4.1), (5.4.3) a (5.4.6). Odhadnuté hodnoty shrnuje tabulka 10:

s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
\widehat{q}_s	48,8%	78,0%	85,9%	89,2%	91,1%	92,4%	93,1%	93,7%	94,1%	94,4%
$\widehat{\rho}_s^P$	1 887,70	543,31	314,39	226,95	197,30	163,15	148,17	138,44	131,94	143,22
$\widehat{\rho}_s^I$	639,05	373,66	250,42	191,16	171,64	144,98	133,06	125,34	120,35	131,10
s	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
\widehat{q}_s	94,6%	94,8%	95,1%	95,3%	95,5%	95,9%	96,1%	96,6%	97,4%	98,5%
$\widehat{\rho}_s^P$	152,37	171,23	173,94	184,01	181,52	120,17	128,67	185,10	278,07	228,01
$\widehat{\rho}_s^I$	139,78	157,59	160,55	169,83	168,24	113,01	121,46	176,42	266,33	221,21
s	21	22	23	24	25	26	27	28		
\widehat{q}_s	99,5%	99,6%	99,8%	99,9%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%		
$\widehat{\rho}_s^P$	35,53	36,80	18,87	7,20	9,17	0,00	0,00			
$\widehat{\rho}_s^I$	35,23	36,59	18,81	7,19	9,16	0,00	0,00			

Tabulka 10: Odhady parametrů \widehat{q}_s , $\widehat{\rho}_s^P$ a $\widehat{\rho}_s^I$

Použitím odhadů z tabulek 2, 9 a 10 můžeme spočítat odhady podmíněných reziduí. Dostáváme tedy čtyři reziduální trojúhelníky, které vzhledem k jejich rozsáhlosti zařazujeme na konec textu do přílohy 3.

Poslední parametry, které potřebujeme k výpočtu rezervy metodou MCL, jsou $\hat{\lambda}^P$, $\hat{\lambda}^I$. Pro naše data použitím vztahů pro jejich odhady (5.4.11) a (5.4.12) vychází $\hat{\lambda}^P = 0,392$, $\hat{\lambda}^I = -0,115$. Záporný korelační parametr pro trojúhelník I je způsoben odlehými pozorováními, jak jsme uvedli v komentáři k obrázku 9.

Vzhledem k velikosti tabulek uvádíme trojúhelníky doplněné na čtyřúhelníky dle (5.4.13) a (5.4.14) v přílohách 4 a 5.

Použitím odhadů (5.4.17) - (5.4.20) můžeme opět spočítat střední kvadratickou chybu a směrodatnou chybu pro odhady rezerv.

Výsledky pro trojúhelník P jsou shrnuty v tabulce 11:

j	Diagonála v Kč	Konečná výše škod v Kč	IBNR + RBNS		$\widehat{mse}(R_j^P)$	$\widehat{s.e.}(R_j^P)$	$\widehat{s.e.}(\widehat{R}_j^P)/\widehat{R}_j^P$
			\widehat{R}_j^P	v Kč			
1	234 124 788,07	234 124 788,07		0,00	0,00	0,00	0,00%
2	206 953 411,82	206 953 411,82		0,00	0,00	0,00	0,00%
3	224 124 405,95	224 124 405,95		0,00	0,00	0,00	0,00%
4	231 588 567,29	231 652 111,28	63 543,99		19 758 439,91	4 445,05	7,00%
5	234 242 864,95	234 480 071,66	237 206,71		30 792 240,20	5 549,08	2,34%
6	249 336 272,03	249 669 464,63	333 192,60		26 016 100,40	5 100,60	1,53%
7	271 583 978,16	272 593 768,05	1 009 789,89		527 243 384,87	22 961,78	2,27%
8	294 663 014,09	295 312 174,21	649 160,12		1 138 747 078,16	33 745,33	5,20%
9	253 473 670,42	263 359 883,03	9 886 212,61		210 687 070 454,03	459 006,61	4,64%
10	294 679 079,35	304 085 296,44	9 406 217,09		61 026 758 018,05	247 035,94	2,63%
11	262 657 525,62	274 700 007,59	12 042 481,97		93 061 591 125,50	305 059,98	2,53%
12	250 691 497,78	261 841 482,46	11 149 984,68		42 761 220 313,29	206 787,86	1,85%
13	201 730 359,65	211 731 752,92	10 001 393,27		38 399 032 751,29	195 956,71	1,96%
14	202 438 231,30	218 758 190,66	16 319 959,36		201 732 604 324,48	449 146,53	2,75%
15	217 585 465,93	231 957 822,74	14 372 356,81		100 555 121 531,16	317 104,28	2,21%
16	204 506 772,18	216 398 188,98	11 891 416,80		38 831 158 160,19	197 056,23	1,66%
17	180 895 868,51	191 558 327,29	10 662 458,78		18 599 188 924,22	136 378,84	1,28%
18	191 875 782,62	201 759 800,39	9 884 017,77		11 028 731 822,78	105 017,77	1,06%
19	202 145 772,73	213 029 711,56	10 883 938,83		11 518 313 714,65	107 323,41	0,99%
20	201 627 342,44	214 678 597,07	13 051 254,63		17 041 131 798,82	130 541,69	1,00%
21	165 058 615,37	174 957 080,60	9 898 465,23		6 958 721 199,44	83 418,95	0,84%
22	169 491 551,70	183 680 752,74	14 189 201,04		14 106 973 337,40	118 772,78	0,84%
23	169 832 360,40	184 752 276,54	14 919 916,14		9 481 575 041,09	97 373,38	0,65%
24	176 048 505,67	194 144 500,09	18 095 994,42		10 597 572 399,61	102 944,51	0,57%
25	151 883 619,02	170 562 379,00	18 678 759,98		15 195 609 797,12	123 270,47	0,66%
26	143 393 657,79	166 966 544,20	23 572 886,41		48 840 859 917,09	220 999,68	0,94%
27	90 205 307,07	119 836 273,99	29 630 966,92		22 794 461 261,16	150 978,35	0,51%
28	54 070 309,17	111 731 910,09	57 661 600,92		2 446 639 085 275,79	1 564 173,61	2,71%
Celkem			328 492 376,96		6 383 059 240 871,53	2 526 471,70	0,77%

Tabulka 11: Směrodatné chyby rezerv pro trojúhelník P a metodu MCL

První sloupec vyjadřuje čtvrtletí vzniku, ve sloupci 'Diagonála v Kč' jsou poslední známé hodnoty trojúhelníka P (tj. poslední známá diagonála), sloupec 'Konečná výše škod v Kč' vyjadřuje poslední sloupec doplněného čtyřúhelníka. Obsah dalších sloupců je již zřejmý z nadpisů sloupců.

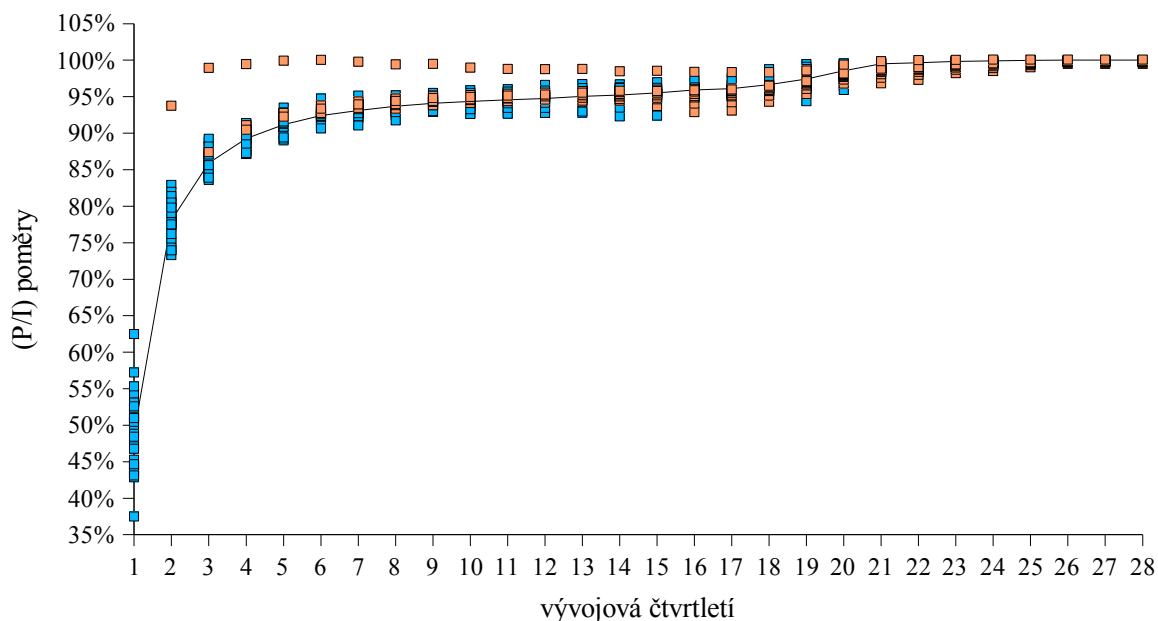
Z tabulky 11 vidíme, že celkový odhad rezervy (IBNR + RBNS) je 328 492 376,96 Kč s poměrně vysokou přesností, neboť relativní směrodatná chyba vychází 0,77%, což odpovídá částce 2 526 471,70 Kč.

Pro trojúhelník *I* máme odhad IBNR ve výši 41 563 557,69 Kč s relativní směrodatnou chybou 3,23%, což odpovídá částce 1 342 836,06 Kč - viz následující tabulka:

<i>j</i>	Diagonála v Kč	Konečná výše škod v Kč	IBNR \widehat{R}_j v Kč	$\widehat{mse}(R_j^I)$	$\widehat{s.e.}(R_j^I)$	$\widehat{s.e.}(R_j^I)/\widehat{R}_j^I$
1	234 124 788,07	234 124 788,07	0,00	0,00	0,00	0,00%
2	206 953 411,82	206 953 411,82	0,00	0,00	0,00	0,00%
3	224 124 405,95	224 124 405,95	0,00	0,00	0,00	0,00%
4	231 588 567,29	231 588 567,29	0,00	0,00	0,00	0,00%
5	234 507 436,95	234 492 376,96	-15 059,99	6 068 009,57	2 463,33	-16,36%
6	249 806 929,03	249 676 290,08	-130 638,95	13 015 944,13	3 607,76	-2,76%
7	272 869 308,93	272 663 625,39	-205 683,54	371 295 914,95	19 269,04	-9,37%
8	295 632 947,09	295 203 505,49	-429 441,60	480 205 475,41	21 913,59	-5,10%
9	264 264 367,62	264 682 052,09	417 684,47	2 678 518 346,55	51 754,40	12,39%
10	305 643 962,35	304 744 175,54	-899 786,81	11 625 854 462,09	107 823,26	-11,98%
11	275 777 886,56	275 402 154,58	-375 731,98	67 885 051 272,94	260 547,60	-69,34%
12	263 271 437,78	262 322 847,32	-948 590,46	127 343 161 209,16	356 851,74	-37,62%
13	212 738 939,11	212 166 244,69	-572 694,42	19 454 770 377,44	139 480,36	-24,36%
14	219 006 807,49	219 534 301,28	527 493,79	47 781 825 530,18	218 590,54	41,44%
15	232 630 301,42	232 568 100,31	-62 201,11	20 858 261 251,52	144 423,89	-232,19%
16	217 006 988,96	216 829 093,36	-177 895,60	22 748 454 973,99	150 825,91	-84,78%
17	192 079 766,54	191 912 671,33	-167 095,21	71 407 543 856,95	267 221,90	-159,92%
18	202 502 319,69	202 047 068,90	-455 250,79	56 402 023 796,57	237 491,10	-52,17%
19	213 662 580,28	213 325 109,95	-337 470,33	22 430 659 036,03	149 768,69	-44,38%
20	214 594 263,01	215 014 149,90	419 886,89	15 090 103 932,17	122 841,78	29,26%
21	174 940 348,57	175 173 759,86	233 411,29	5 278 208 603,07	72 651,28	31,13%
22	182 767 985,19	183 977 382,91	1 209 397,72	5 606 190 184,27	74 874,50	6,19%
23	183 399 064,05	185 015 752,68	1 616 688,63	8 391 433 523,95	91 604,77	5,67%
24	192 177 948,14	194 410 886,22	2 232 938,08	10 109 387 582,78	100 545,45	4,50%
25	167 756 468,27	170 767 365,81	3 010 897,54	8 421 333 481,49	91 767,82	3,05%
26	162 577 012,21	167 146 635,41	4 569 623,20	5 929 875 197,50	77 005,68	1,69%
27	113 004 188,75	119 981 295,16	6 977 106,41	25 039 880 908,17	158 239,95	2,27%
28	86 522 312,17	111 648 282,62	25 125 970,45	74 839 295 704,12	273 567,72	1,09%
Celkem			41 563 557,69	1 803 208 697 367,00	1 342 836,06	3,23%

Tabulka 12: Směrodatné chyby rezerv pro trojúhelník *I* a metodu MCL

Na obrázku 10 jsme graficky znázornili (*P/I*) poměry v jednotlivých vývojových čtvrtletích pro doplněné čtyřúhelníky (pozorované hodnoty modře, odhadnuté hodnoty oranžově). Pro metodu MCL predikované (*P/I*) poměry konvergují ke 100%, je tedy zachována zkušenost z již pozorovaných hodnot.



Obrázek 10: (P/I) poměry čtyřúhelníků doplněné metodou MCL

Na závěr této kapitoly uvádíme v následující tabulce shrnutí výší rezerv z jednotlivých trojúhelníků

	Trojúhelník <i>P</i>	Trojúhelník <i>I</i>
Výplata + RBNS	6 025 932 743,29	
Výplata	5 730 908 597,08	
IBNR + RBNS	328 492 376,96	
RBNS	295 024 146,21	295 024 146,21
IBNR	33 468 230,75	41 563 557,69

Tabulka 13: Výše rezerv v Kč spočítané metodou MCL

Z tabulky vidíme, že trojúhelníky *P* a *I* dávají srovnatelné odhady IBNR rezervy (oproti metodě SCL, resp. metodě chain ladder – viz tabulka 3). Pro vytvoření IBNR rezervy bude z těchto výsledků věrohodnější odhad na základě trojúhelníka evidovaných škod *I*.

Kapitola 6

Srovnání metod

6.1 Srovnání metod SCL a MCL

Nyní se pokusíme porovnat jednotlivé metody použité pro doplnění trojúhelníků na čtyřúhelníky a výpočet rezerv. Jelikož metody chain ladder i Mackův model (resp. metoda SCL) dávají stejné výsledky predikovaných hodnot a rezerv, budeme porovnávat pouze metody SCL a MCL.

Obě zmiňované metody mají problém se splněním některých předpokladů, zejména nezávislosti škodních období. Proto z tohoto pohledu nelze ani o jedné metodě říci, že je výhodnější. Jak jsme viděli na grafech na obrázcích 8 a 9, mezi daty zaplacených a evidovaných škod existuje korelace, kterou metoda SCL zcela ignoruje. Proto by se mohlo zdát, že je metoda MCL výhodnější. Na druhou stranu, metoda MCL je díky použité regresi závislá na dostatku pozorování a odhady korelačních parametrů $\hat{\lambda}^P$, $\hat{\lambda}^I$ jsou citlivé na odlehlá pozorování. Zkusíme tedy metody porovnat z jiného úhlu.

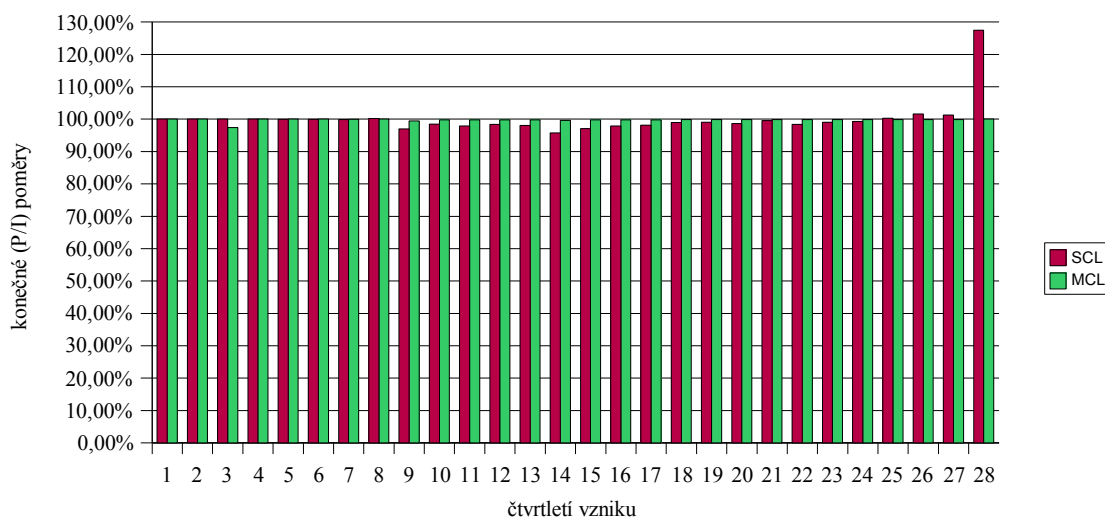
Již dříve jsme zmiňovali, že bychom očekávali podobné výše odhadů IBNR rezervy z trojúhelníků P a I . Zatímco metoda SCL dává výsledky dosti odlišné, navíc s poměrně vysokou nepřesností, výsledky metody MCL jsou již srovnatelné. Uveďme srovnání v následující tabulce

		IBNR
SCL	Trojúhelník P	9 584 464,00
	Trojúhelník I	36 462 193,28
MCL	Trojúhelník P	33 468 230,75
	Trojúhelník I	41 563 557,69

Tabulka 14: Srovnání výše IBNR rezervy v Kč

Podobné výsledky pro metodu MCL plynou z toho, že se pomocí metody MCL přiblížily predikované hodnoty v doplněných čtyřúhelnících. O tom jsme se mohli přesvědčit již na obrázku 10.

Zaměříme se ještě na poslední vývojové čtvrtletí. V následujícím grafu jsou znázorněné konečné hodnoty (P/I) poměrů pro metody SCL a MCL:



Obrázek 11: Srovnání konečných (P/I) poměrů pro metody SCL a MCL

Zatímco konečné (P/I) poměry metody SCL oscilují mezi 95,76% a 127,51%, konečné (P/I) poměry metody MCL jen mezi 97,40% a 100,07%. Graf na obrázku 11 potvrdil, že metoda MCL dává z trojúhelníků P a I bližší výsledky.

Pro naše data získáme aplikací metody MCL mnohem realističtější výsledky než aplikací metody SCL. Proto bychom se při tvorbě IBNR rezervy měli přiklonit spíše k odhadu metodou MCL. Poznamenejme ještě, že v trojúhelnících máme po 25. vývojovém čtvrtletí ukončený vývoj škod. Jelikož výsledky z trojúhelníka P jsou ovlivněny výší RBNS rezervy, bude výsledek na základě trojúhelníka I dávat přesnější odhad skutečné IBNR rezervy.

6.2 Run-off analýza

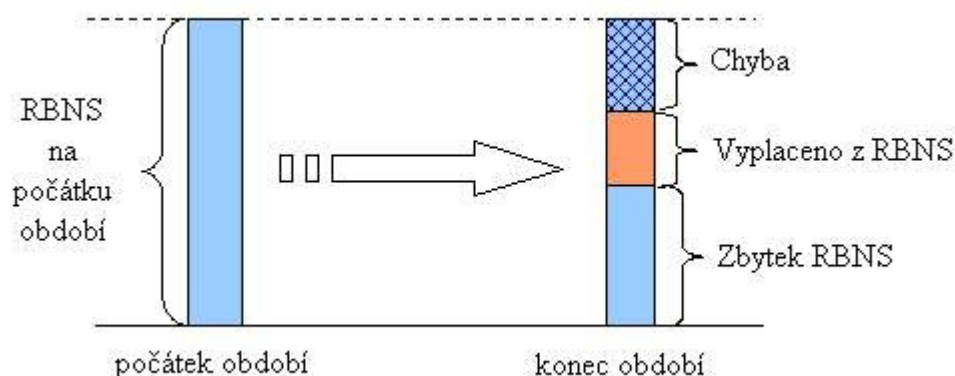
Na závěr se zaměříme na ověření výsledků jednotlivých metod, které jsme aplikovali na naše data.

Kontrolu provedeme pomocí tzv. *run-off analýzy* (nebo též *analýzy vývoje*). Zajímá nás, zda námi spočítané výše rezerv jsou dostatečné, ale zároveň nejsou příliš nadhodnocené.

Podle [10] máme několik základních možností, co sledovat, takže můžeme provést:

- run-off analýzu RBNS rezervy
- run-off analýzu IBNR rezervy
- run-off analýzu RBNS a IBNR rezerv dohromady.

Nyní rozebereme jednotlivé případy podrobněji. Při run-off analýze sledujeme vývoj rezervy v čase. Pro RBNS rezervu (rezerva na hlášené ale nezlikvidované škody) dochází k postupné likvidaci škod hlášených do počátku sledovaného období. Tím se část RBNS rezervy změní ve výplatu (oranžový sloupec na obrázku 12). Pro škody, které byly nahlášený do počátku sledovaného období, ale nebyly zlikvidovány ani do jeho konce, zůstává zbytek RBNS rezervy. Run-off analýza RBNS rezervy spočívá v porovnání výše RBNS rezervy na počátku sledovaného období a součtu zbytku RBNS rezervy a výplat na konci sledovaného období. Rozdíl těchto hodnot je na obrázku 12 vyznačen jako chyba. Pokud je chyba kladná, byla RBNS rezerva na počátku období nadhodnocená. Pokud je naopak záporná, byla RBNS rezerva podhodnocená. Tato kontrola je velmi důležitá, protože odhad RBNS rezervy je dán zkušenostmi likvidátora pojistných událostí a je tedy dobré, aby měla pojišťovna přehled, jak jsou tyto zkušenosti spolehlivé.

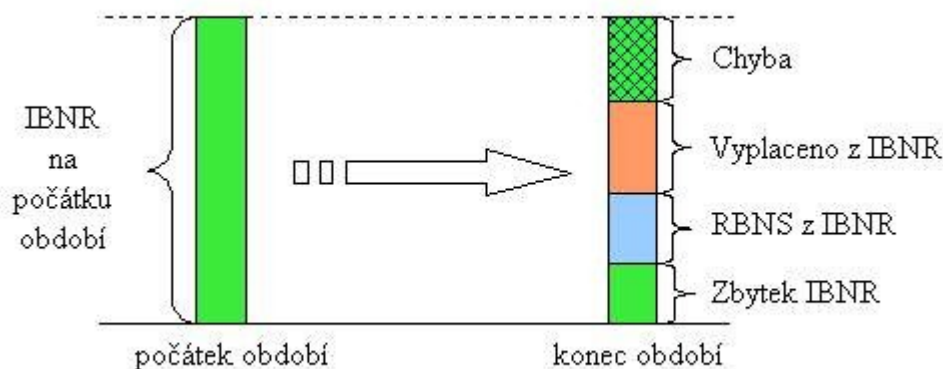


Obrázek 12: Schéma vývoje RBNS

Pro kontrolu IBNR rezervy je postup velmi podobný. IBNR rezerva je část škodní rezervy, která pokrývá vzniklé, ale dosud nehlášené škody. I u této rezervy dochází v čase k jejím transformacím do několika složek. Předně jsou během sledovaného období některé vzniklé škody nahlášený a na jejich nevyplacenou část je tedy třeba vytvořit RBNS rezervu.

U některých škod dojde k částečné nebo úplné výplatě a pro zbytek zůstává opět odpovídající IBNR rezerva.

Vše můžeme shrnout do následujícího obrázku:



Obrázek 13: Schéma vývoje IBNR

I zde platí, že pokud je výše chyby kladná, byla IBNR rezerva na počátku sledovaného období nadhodnocená, je-li záporná, byla naopak rezerva podhodnocená.

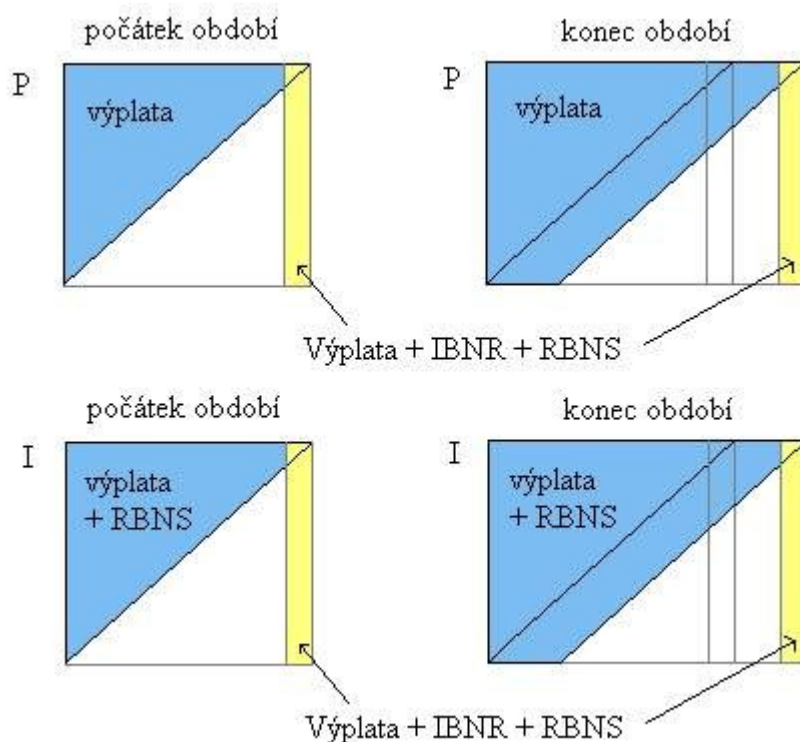
Vzhledem k tomu, že jsme při aplikaci metod pracovali s vývojovými trojúhelníky, provedeme společnou analýzu RBNS a IBNR rezerv právě na základě těchto trojúhelníků.

Na počátku období máme trojúhelníky P a I , z nichž jsme schopni spočítat výše IBNR a RBNS rezerv a zajímá nás, zda ke konci období (např. za rok) jsou naše odhady nadhodnocené nebo podhodnocené, případně zda jsme rezervy odhadli přesně.

Nejjednodušší, jak toto zjistit, je porovnat součet odhadů konečných výší škod na počátku období a na konci období, za které nás vývoj zajímá. Zjištěný rozdíl bude chyba součtu rezerv (IBNR + RBNS).

Na počátku období známe trojúhelníky P a I . Během sledovaného období nám přibývají další diagonály (vývoj starých škod, nahlášení nových škod). Nové trojúhelníky doplníme na čtyřúhelníky, avšak pro výpočty rezerv budeme vycházet pouze z lichoběžníků P a I (neuvažujeme nová období vzniku, pouze nová období zpoždění). Odečtením posledního sloupce doplněného lichoběžníka od posledního sloupce doplněného trojúhelníka (známého na počátku sledovaného období) dostaneme v obou případech chybu (IBNR + RBNS). Kladná hodnota zde znamená nadhodnocení, záporná podhodnocení.

Zobrazme si situaci graficky:



Obrázek 14: Schéma vývoje trojúhelníků

Tento postup nám neumožňuje určit, jak velká je chyba IBNR rezervy a jak velká je chyba RBNS rezervy. Abychom toto mohli rozlišit, budeme potřebovat odstranit z lichoběžníků škody nově vzniklé během sledovaného období.

Pro výpočet chyby RBNS rezervy vyjdeme z obrázku 12. Z původní RBNS rezervy se část vyplatí na staré škody a část ještě zůstane v RBNS rezervě. Chybu RBNS rezervy získáme podle vzorce

$$(6.2.1) \quad \text{chyba RBNS} = \text{diag}_{\text{trojúhelník}}^I - \text{diag}_{\text{lichoběžník}}^I,$$

kde 'diag' označuje poslední známou diagonálu, trojúhelník obsahuje všechny známé škody do počátku sledovaného období a lichoběžník tentokrát uvažujeme bez nově nahlášených škod ve sledovaném období.

Chyba IBNR rezervy se pak zjistí prostým odečtením celkové chyby rezerv a chyby RBNS rezervy, tedy

$$(6.2.2) \quad \text{chyba IBNR} = \text{chyba (IBNR + RBNS)} - \text{chyba RBNS}.$$

Jak je vidět z obrázku 14, budeme pro run-off analýzu potřebovat nejen konečné trojúhelníky P a I , ale také jejich další vývoj. Protože nemáme k dispozici data za rok 2007, budeme run-off analýzu provádět pro přechod od roku 2005 do roku 2006. Budeme potřebovat následující trojúhelníky (řádky x sloupce):

2000/1Q – 2005/4Q x 2000/1Q – 2005/4Q,

2000/1Q – 2006/4Q x 2000/1Q – 2006/4Q.

Dále budeme potřebovat lichoběžníky, které budou obsahovat nové informace za sledované období (v našem případě rok). Lichoběžníky budou dvojího typu – za prvé takové, které budou obsahovat veškeré informace za sledované období a za druhé takové, které nebudou zahrnovat 'nové' škody, tzn. nebudou zde započítány částky ke škodám, které se objevily až ve sledovaném období. Oba typy lichoběžníků budou vypadat následovně:

2000/1Q – 2005/4Q x 2000/1Q – 2006/4Q.

Protože se hodnoty v trojúhelnících a lichoběžnících, které obsahují veškeré informace, nemění (vždy jen příbude nová diagonála), získáme je 'nařezáním' příslušného trojúhelníka P nebo I (2000/1Q – 2006/4Q x 2000/1Q – 2006/4Q).

Lichoběžníky, které nezahrnují 'nové' škody, napočítáme přímo z databáze pojistných událostí (viz příložené CD).

Jelikož v roce 2005 nemáme ještě zcela ukončen vývoj škod, je nutné pro odhad konečné výše škod použít dodatečný vývojový faktor (*tail factor*). Pro výpočet předpokládáme, že je vývoj škod po sedmi letech ukončen. Různými odhady dodatečného vývojového faktoru se zabývá [1]. My jsme z [1] použili *Sherman-Boorovu metodu*.

Doplněné trojúhelníky (vývoj do roku 2005) uvádíme v přílohách 6 - 9. Sloupec 'Tail' označuje konečné odhady výší škod po aplikaci dodatečného vývojového faktoru. Doplněné lichoběžníky (vývoj do roku 2006) jsou uvedeny v přílohách 1, 2 pro metodu SCL a v přílohách 4, 5 pro metodu MCL, přičemž se omezíme pouze na období vzniku do roku 2005 (tj. do 24. čtvrtletí vzniku).

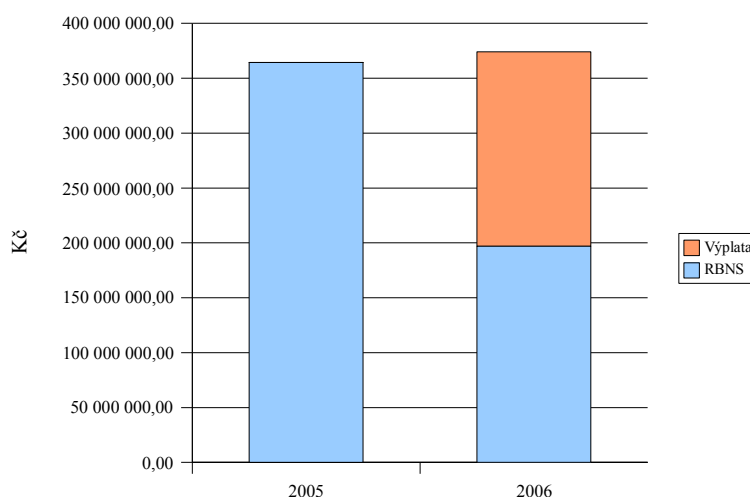
Pro naše data vychází chyba RBNS rezervy (tj. run-off starých škod) pro přechod mezi roky 2005 a 2006 a metodu SCL následovně

	2005	2006
RBNS	364 476 684,06	196 821 464,97
Výplata	0,00	177 236 328,17
Celkem	364 476 684,06	374 057 793,14
Chyba RBNS	-9 581 109,08	

Tabulka 15: Run-off RBNS rezervy v Kč pro metodu SCL (2005 – 2006)

Záporná hodnota chyby RBNS rezervy znamená její podhodnocení v roce 2005. Výsledek run-off analýzy slouží pojišťovně ke zhodnocení procesu likvidace pojistných událostí a procesu rezervování škod.

Následující obrázek znázorňuje data z tabulky 15 graficky:



Obrázek 15: Run-off RBNS rezervy pro metodu SCL

Při run-off analýze IBNR rezervy vycházíme z trojúhelníka evidovaných škod, ze kterého můžeme výši IBNR rezervy vyjádřit přímo. Výpočet na základě trojúhelníka zaplacených škod P je ovlivněn výší RBNS a jejím vývojem v čase, proto je výsledek na základě tohoto trojúhelníka méně spolehlivý než odhad z trojúhelníka evidovaných škod I .

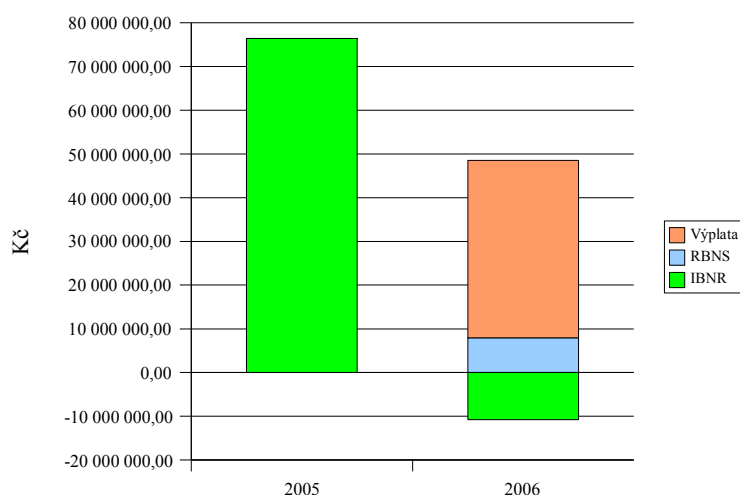
V následující tabulce uvádíme rozklad IBNR rezervy, jak bylo znázorněno na obrázku 13:

	2005	2006
IBNR	76 417 100,51	-10 755 541,14
RBNS	0,00	7 895 592,89
Výplata	0,00	40 600 371,37
Celkem	76 417 100,51	37 740 423,12
Chyba IBNR	38 676 677,39	

Tabulka 16: Run-off IBNR rezervy v Kč pro metodu SCL (2005 – 2006)

Z tabulky 16 vyplývá, že IBNR rezerva byla v roce 2005 nadhodnocená. Záporná hodnota IBNR rezervy v roce 2006 je způsobena tím, že vývojové faktory pro poslední vývojová čtvrtletí jsou menší než jedna. Proto je pak konečná výše škod (poslední sloupec lichoběžníka) nižší než poslední známé hodnoty (diagonála lichoběžníka). V praxi se záporná rezerva netvoří a obvykle se považuje za nulovou. Z tabulky 16 vidíme, že i pro nulovou IBNR rezervu v roce 2006, je IBNR rezerva z roku 2005 nahodnocená.

Výsledky z tabulky 16 můžeme opět znázornit graficky:



Obrázek 16: Run-off IBNR rezervy pro metodu SCL

Pro srovnání uvedme též run-off analýzu rezerv pro metodu MCL. Jelikož výpočet RBNS rezervy i jejího vývoje provádíme z již pozorovaných dat, tedy nezávisí na použité metodě pro doplnění trojúhelníka na čtyřúhelník, budou výstupy stejné jako v tabulce 15 a na obrázku 15.

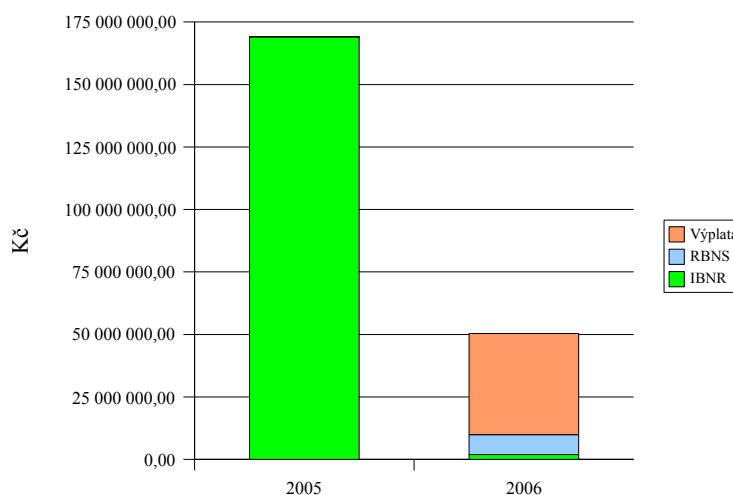
Pro run-off analýzu IBNR rezervy dostáváme pro metodu MCL následující tabulku:

	2005	2006
IBNR	168 923 536,47	1 879 960,09
RBNS	0,00	7 895 592,89
Výplata	0,00	40 600 371,37
Celkem	168 923 536,47	50 375 924,35
Chyba IBNR	118 547 612,12	

Tabulka 17: Run-off IBNR rezervy v Kč pro metodu MCL (2005 – 2006)

Také pro metodu MCL nám vyšlo, že rezerva spočítaná na základě dat známých do konce roku 2005 je nadhodnocená. Pro metodu MCL vyšlo nadhodnocení podstatně větší než pro metodu SCL.

Opět uveďme pro lepší představu graf:



Obrázek 17: Run-off IBNR rezervy pro metodu MCL

Větší nadhodnocení rezervy pro metodu MCL je dáno rozdílnými odhady konečných výší škod. Metoda MCL používá pro odhady vývojové faktory metody SCL upravené korekčním členem.

Parametry potřebné k odhadu korekčního členu získáme z již pozorovaných hodnot v trojúhelnících. Protože pro poslední vývojová čtvrtletí nemáme dostatek pozorování, jsou odhady parametrů značně nespolehlivé. Tedy také vývojové faktory metody MCL jsou pro poslední vývojová čtvrtletí nespolehlivé (vývojové faktory metody SCL jsou přesnější, protože odhadujeme méně parametrů).

Navíc na konci roku 2005 není vývoj škod zcela ukončen, proto poslední vývojové faktory dosti ovlivní konečné výše škod. Pro trojúhelník s ukončeným vývojem škod jsou odhady posledních vývojových faktorů také nespolehlivé, ale konečnou výši škod ovlivní jen nepatrně. Proto na konci roku 2006 vyšly odhady IBNR rezervy metodami SCL a MCL podobně (tabulka 14).

Jak jsme pomocí run-off analýzy ukázali, přestože ani metoda SCL ani metoda MCL nemají splněné všechny teoretické předpoklady pro jejich aplikaci, jsou jejich odhady rezerv použitelné. Pokud máme trojúhelníky s ukončeným vývojem škod v prvních obdobích vzniku, použijeme pro odhad IBNR rezervy metodu MCL. V opačném případě je lepší aplikovat metodu SCL, která odhad IBNR rezervy tolik nenadhodnocuje.

Závěr

Cílem práce bylo popsat základní matematické metody pro stanovení odhadu IBNR rezervy, demonstrovat jejich aplikaci na reálných datech a provést run-off analýzu vypočítaných rezerv.

V první části bylo nejprve nutné předzpracovat vstupní data, která jsme měli k dispozici. Jednalo se o pojistné události z pojištění odpovědnosti za škodu vyplývající z provozu pozemního motorového a jeho přípojného vozidla (tzv. povinné ručení) na riziku škoda na majetku. Z těchto dat jsme vytvořili kumulativní vývojové trojúhelníky, které byly vstupem pro jednotlivé matematické metody.

Ve druhé části byly popsány tři metody pro výpočet odhadu IBNR rezervy – metoda chain ladder, Mackův model (metoda SCL) a Mnichovská metoda chain ladder (metoda MCL). Následně jsme aplikovali metody na reálná data. Při aplikaci jsme měli problémy s nesplněním některých teoretických předpokladů, takže výsledky, ke kterým jsme došli, nejsou nejlepší, jaké by metody mohly dát. Na druhou stranu, pracovali jsme s reálnými daty, pro které všechny předpoklady nikdy splněné nebudou.

Ve třetí části práce jsme jednotlivé metody a jejich výsledky porovnali. Posuzovali jsme použitelnost odhadů IBNR rezervy a provedli jsme run-off analýzu jednotlivých složek rezerv.

Pro naše data vyšlo, že pro trojúhelníky s ukončeným vývojem škod pro nejstarší období vzniku dává metoda MCL realističtější výsledky odhadů IBNR rezervy než metoda SCL (resp. metoda chain ladder). Odhady na základě trojúhelníka zaplacených škod (P) a evidovaných škod (I) vyšly pro metodu MCL srovnatelné. Avšak pro trojúhelníky s neukončeným vývojem je vhodnější použít metodu SCL (resp. metodu chain ladder), která pro poslední vývojová období odhaduje méně parametrů a její výsledky jsou tudíž přesnější.

Run-off analýza odhadu IBNR rezervy potvrdila, že i přes nesplnění některých předpokladů metod jsou výsledky použitelné. Obě metody nadhodnocují odhad IBNR rezervy, pojišťovně tedy nehrozí nedostatek prostředků ke krytí závazků za převztá rizika.

Přílohy

Příloha 1: Kumulativní trojúhelník P, metoda chain ladder (hodnoty v mil. Kč)	53
Příloha 2: Kumulativní trojúhelník I, metoda chain ladder (hodnoty v mil. Kč)	54
Příloha 3: Reziiduální trojúhelníky	55
Příloha 4: Kumulativní trojúhelník P, metoda MCL (hodnoty v mil. Kč)	57
Příloha 5: Kumulativní trojúhelník I, metoda MCL (hodnoty v mil. Kč)	58
Příloha 6: Kumulativní trojúhelník P do 2005, metoda SCL (hodnoty v mil. Kč)	59
Příloha 7: Kumulativní trojúhelník I do 2005, metoda SCL (hodnoty v mil. Kč)	60
Příloha 8: Kumulativní trojúhelník P do 2005, metoda MCL (hodnoty v mil. Kč)	61
Příloha 9: Kumulativní trojúhelník I do 2005, metoda MCL (hodnoty v mil. Kč)	62
Příloha 10: Obsah příloženého CD	63

Příloha 1: Kumulativní trojúhelník P , metoda chain ladder (hodnoty v mil. Kč)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	
1	74,03	168,59	190,81	206,36	213,90	219,08	221,14	222,31	223,73	224,78	225,70	226,52	227,12	227,40	227,75	228,29	229,09	229,36	229,43	232,76	233,22	233,66	233,91	233,91	234,12	234,12	234,12	234,12	234,12
2	63,56	142,39	169,65	181,02	187,81	191,22	194,45	195,92	197,28	197,82	199,40	199,66	200,58	200,95	201,36	201,84	202,51	202,84	205,88	206,08	206,58	206,84	206,94	206,95	206,95	206,95	206,95	206,95	206,95
3	55,75	144,04	171,57	184,88	192,51	198,46	202,23	205,53	206,98	209,27	210,17	210,85	211,66	213,90	214,82	217,42	217,70	219,62	219,73	222,12	222,19	222,50	223,85	223,85	223,85	224,12	224,12	224,12	224,12
4	71,14	166,93	191,73	201,99	210,63	214,04	216,52	219,58	221,34	222,55	223,29	224,16	225,11	226,06	227,04	227,38	227,56	227,64	230,85	230,86	230,87	231,48	231,48	231,48	231,48	231,59	231,68	231,68	231,68
5	79,17	171,87	192,62	205,37	212,63	216,23	218,95	222,58	224,01	224,83	225,90	226,86	227,72	228,29	228,74	228,74	228,76	228,97	229,60	229,60	233,86	233,86	233,90	234,24	234,33	234,42	234,42	234,42	234,42
6	79,89	172,35	201,79	217,36	224,45	230,10	232,73	235,11	236,06	237,02	238,19	239,09	240,54	240,83	241,40	241,43	241,61	242,36	242,57	248,98	249,08	249,13	249,34	249,42	249,51	249,61	249,61	249,61	249,61
7	78,94	183,92	219,89	237,10	245,90	249,11	252,68	254,41	256,36	257,77	260,26	261,86	262,30	262,46	262,98	263,28	263,59	264,49	270,91	270,91	270,94	271,58	271,97	272,05	272,15	272,26	272,26	272,26	272,26
8	93,50	213,49	246,79	260,23	267,92	274,29	277,72	280,78	282,72	284,52	286,07	286,45	286,67	286,91	287,18	287,26	287,55	293,02	293,02	293,16	294,66	295,08	295,49	295,59	295,70	295,82	295,82	295,82	295,82
9	97,93	193,98	214,22	222,90	227,72	230,56	232,60	235,49	237,90	242,71	243,24	243,73	245,56	245,67	245,91	246,65	246,65	246,74	247,34	253,47	254,38	254,74	255,18	255,18	255,27	255,38	255,38	255,38	255,38
10	132,85	238,00	264,32	273,48	279,56	282,22	284,88	288,05	289,96	291,27	292,02	292,69	293,18	293,23	293,40	293,61	293,61	294,47	294,68	297,21	298,27	298,69	299,11	299,21	299,32	299,44	299,44	299,44	299,44
11	96,24	194,82	222,80	233,85	241,33	245,76	251,10	255,02	256,99	259,11	259,59	260,48	260,90	261,47	262,16	262,30	262,52	262,66	264,21	266,48	267,43	267,81	268,19	268,28	268,37	268,48	268,48	268,48	268,48
12	94,98	197,29	220,51	229,38	237,68	243,05	246,51	247,69	248,73	249,47	249,68	249,92	250,26	250,40	250,40	250,59	250,69	251,71	253,20	255,38	256,29	256,65	257,02	257,10	257,19	257,30	257,30	257,30	257,30
13	89,99	157,99	176,23	184,96	191,93	195,43	196,68	197,44	198,91	199,95	200,27	200,42	201,29	201,48	201,60	201,73	201,94	202,76	203,96	205,71	206,45	206,74	207,03	207,10	207,17	207,26	207,26	207,26	207,26
14	70,25	153,33	176,63	187,12	193,85	195,68	198,63	199,60	200,85	201,54	201,73	202,07	202,09	202,24	202,44	202,81	203,02	203,85	205,06	206,81	207,56	207,85	208,14	208,21	208,28	208,37	208,37	208,37	208,37
15	75,21	157,08	183,91	194,94	202,42	206,25	209,49	211,43	213,16	213,48	213,77	213,89	214,17	217,59	217,97	218,37	218,60	219,49	220,79	222,68	223,48	223,79	224,11	224,18	224,26	224,35	224,35	224,35	224,35
16	72,16	158,60	181,71	188,48	194,04	197,51	199,94	201,33	201,97	202,83	203,09	203,18	204,51	205,07	205,43	205,81	206,02	206,86	208,08	209,87	210,62	210,92	211,22	211,28	211,36	211,45	211,45	211,45	211,45
17	71,51	144,41	161,77	167,93	172,73	176,49	177,84	178,97	179,93	180,38	180,57	180,90	181,47	181,96	182,29	182,62	182,81	183,55	184,64	186,23	186,89	187,16	187,42	187,48	187,55	187,63	187,63	187,63	187,63
18	83,80	156,21	173,59	182,25	187,14	189,40	190,37	191,22	191,57	191,77	191,88	192,36	192,96	193,49	193,83	194,19	194,39	195,18	196,34	198,02	198,73	199,01	199,29	199,36	199,43	199,51	199,51	199,51	199,51
19	81,30	157,20	178,70	189,63	194,40	196,56	199,66	200,94	201,69	202,15	202,82	203,33	203,97	204,53	204,89	205,27	205,48	206,32	207,54	209,32	210,07	210,37	210,67	210,73	210,81	210,90	210,90	210,90	210,90
20	85,87	165,84	185,34	192,05	196,52	198,88	199,94	200,65	201,63	202,72	203,40	203,91	204,55	205,11	205,47	205,85	206,06	206,90	208,13	209,91	210,67	210,96	211,26	211,33	211,40	211,49	211,49	211,49	211,49
21	74,95	139,05	153,36	158,60	161,57	163,68	164,58	165,06	166,09	166,99	167,55	167,97	168,50	168,96	169,26	169,57	169,74	170,43	171,44	172,91	173,53	173,78	174,02	174,08	174,14	174,21	174,21	174,21	174,21
22	71,27	138,84	155,25	164,62	166,76	168,89	169,49	170,99	172,06	172,99	173,57	174,00	174,55	175,03	175,34	175,66	175,84	176,56	177,61	179,13	179,77	180,03	180,28	180,34	180,40	180,48	180,48	180,48	180,48
23	73,79	137,52	157,52	163,26	167,44	169,83	171,84	173,36	174,44	175,38	175,97	176,41	176,97	177,45	177,77	178,09	178,28	179,00	180,06	181,61	182,26	182,52	182,77	182,83	182,90	182,97	182,97	182,97	182,97
24	71,95	151,93	166,65	172,32	176,05	179,07	181,18	182,79	183,93	184,92	185,54	186,59	187,11	187,44	187,78	187,88	188,74	189,86	191,49	192,17	192,44	192,72	192,78	192,85	192,93	192,93	192,93	192,93	192,93
25	73,27	131,85	144,81	151,88	156,53	159,22	161,09	162,52	163,53	164,42	164,97	165,38	165,91	166,36	166,65	166,96	167,13	167,81	168,81	170,26	170,87	171,11	171,35	171,40	171,46	171,54	171,54	171,54	171,54
26	63,34	126,61	143,39	151,01	155,63	158,30	160,17	161,59	162,60	163,47	164,02	164,43	164,95	165,40	165,70	166,00	166,17	166,85	167,84	169,28	169,88	170,12	170,36	170,42	170,48	170,55	170,55	170,55	170,55
27	39,42	90,21	102,51	107,95	111,25	113,16	114,50	115,51	116,23	116,86	117,25	117,54	117,92	118,24	118,45	118,67	118,79	119,27	119,98	121,01	121,44	121,61	121,78	121,82	121,87	121,92	121,92	121,92	121,92
28	54,07	111,26	126,44	133,15	137,22	139,58	141,23	142,48	143,37	144,14	144,62	144,99	145,44	145,84	146,10	146,37	146,52	147,12	147,99	149,26	149,79	150,00	150,22	150,26	150,32	150,38	150,38	150,38	150,38

Příloha 2: Kumulativní trojúhelník *I*, metoda chain ladder (hodnoty v mil. Kč)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	
1	172,74	210,99	223,11	226,72	228,73	231,16	232,37	233,50	234,22	234,44	234,98	234,43	234,83	235,18	234,80	235,19	234,79	234,81	234,74	233,74	233,91	233,89	234,13	234,13	234,12	234,12	234,12	234,12	234,12
2	147,05	192,50	200,10	202,53	205,76	206,60	206,91	207,27	207,66	207,67	208,61	208,77	209,41	209,26	209,52	209,68	209,52	209,61	208,44	207,97	207,40	207,52	207,18	206,95	206,95	206,95	206,95	206,95	206,95
3	148,64	196,54	208,21	212,12	216,25	217,14	218,45	219,63	219,62	222,96	223,34	223,93	224,19	225,09	225,54	225,84	226,00	225,29	225,48	223,88	223,92	224,23	224,12	224,12	224,12	224,12	224,12	224,12	224,12
4	163,38	216,77	223,85	227,13	230,82	231,28	232,33	232,31	232,89	233,56	234,31	234,77	234,92	234,73	234,12	233,87	233,88	233,86	232,10	232,01	232,01	232,01	231,62	231,62	231,64	231,59	231,59	231,59	231,59
5	177,61	222,40	228,74	231,86	234,34	235,03	235,42	237,26	237,47	238,07	238,01	237,89	237,95	237,83	237,84	237,84	237,82	237,61	238,20	238,17	234,81	234,81	234,81	234,84	234,51	234,49	234,49	234,49	234,49
6	179,77	227,89	236,69	243,51	246,86	248,06	249,25	250,87	251,48	251,55	251,73	251,97	252,45	252,93	252,90	252,92	253,20	253,21	253,43	250,01	250,07	250,12	249,81	249,69	249,67	249,67	249,67	249,67	249,67
7	179,14	244,91	262,02	268,58	271,09	271,18	272,28	273,62	274,91	275,22	275,74	275,90	275,88	275,92	276,08	276,05	276,19	276,75	273,37	273,40	273,40	272,87	272,77	272,65	272,63	272,63	272,63	272,63	272,63
8	198,52	275,03	285,54	289,30	293,00	296,77	298,61	299,32	299,73	300,69	300,62	300,44	300,42	299,91	300,10	300,10	300,17	296,65	296,65	296,65	296,65	295,55	295,45	295,31	295,29	295,29	295,29	295,29	295,29
9	191,27	241,11	246,62	249,32	250,71	251,78	252,35	253,03	253,09	256,27	256,19	256,24	256,95	256,96	256,89	257,03	257,03	257,03	262,03	264,26	263,62	263,54	263,45	263,33	263,31	263,31	263,31	263,31	263,31
10	232,10	287,06	297,36	299,61	301,69	302,93	304,05	304,29	304,70	304,98	305,11	305,31	304,79	304,92	304,94	304,92	305,25	305,68	305,64	305,06	304,32	304,23	304,12	303,98	303,96	303,96	303,96	303,96	303,96
11	195,68	255,73	264,69	268,34	270,78	270,97	272,47	274,25	274,76	274,91	274,87	275,14	275,16	275,40	275,72	275,68	275,78	275,78	275,73	275,21	274,53	274,46	274,36	274,23	274,21	274,21	274,21	274,21	274,21
12	189,75	252,32	258,28	261,07	262,86	263,52	262,75	262,74	263,40	263,51	263,33	263,37	263,32	263,23	263,22	263,31	263,27	262,96	262,92	262,42	261,77	261,70	261,61	261,49	261,47	261,47	261,47	261,47	261,47
13	165,57	202,98	207,05	208,75	210,69	210,85	211,06	211,20	211,48	211,98	212,50	212,54	212,54	212,73	212,74	212,74	212,77	212,52	212,48	212,08	211,56	211,50	211,43	211,33	211,31	211,31	211,31	211,31	211,31
14	155,08	206,31	211,24	213,68	215,70	214,96	215,78	215,87	216,17	217,23	217,32	217,71	217,70	219,10	219,01	219,06	219,09	218,83	218,79	218,38	217,84	217,78	217,71	217,60	217,59	217,59	217,59	217,59	217,59
15	168,46	212,38	219,22	223,28	226,41	227,44	230,07	230,44	230,41	230,41	230,70	230,50	230,37	232,63	232,65	232,70	232,73	232,46	232,42	231,98	231,41	231,34	231,26	231,15	231,14	231,14	231,14	231,14	231,14
16	148,96	204,34	209,86	211,27	213,20	213,85	216,55	216,75	217,08	217,36	217,26	217,35	217,01	217,30	217,31	217,36	217,39	217,13	217,10	216,69	216,15	216,09	216,02	215,92	215,90	215,90	215,90	215,90	215,90
17	152,84	184,12	188,17	189,57	190,09	191,11	191,13	191,26	191,74	191,86	191,88	192,08	192,16	192,41	192,43	192,47	192,50	192,27	192,24	191,87	191,40	191,35	191,28	191,19	191,18	191,18	191,18	191,18	191,18
18	159,84	195,74	199,90	201,61	201,85	202,60	202,58	202,83	202,73	202,51	202,50	202,59	202,68	202,94	202,96	203,00	203,03	202,79	202,76	202,37	201,88	201,82	201,75	201,66	201,64	201,64	201,64	201,64	201,64
19	159,85	200,92	208,51	210,80	211,57	211,87	213,00	213,42	213,59	213,66	213,85	213,95	214,03	214,32	214,33	214,38	214,41	214,16	214,12	213,72	213,19	213,13	213,06	212,96	212,94	212,94	212,94	212,94	212,94
20	155,15	205,35	210,08	212,22	213,46	213,72	214,10	214,41	214,59	215,15	215,34	215,43	215,52	215,81	215,82	215,87	215,90	215,65	215,61	215,20	214,68	214,62	214,54	214,44	214,42	214,42	214,42	214,42	214,42
21	143,88	169,63	171,84	173,56	174,01	174,50	175,09	174,94	175,21	175,67	175,82	175,90	175,97	176,21	176,22	176,26	176,28	176,08	176,05	175,71	175,28	175,23	175,17	175,09	175,08	175,08	175,08	175,08	175,08
22	139,52	176,10	181,28	182,28	182,64	182,93	182,77	183,24	183,52	184,00	184,16	184,24	184,32	184,56	184,57	184,62	184,65	184,43	184,40	184,04	183,59	183,54	183,48	183,39	183,38	183,38	183,38	183,38	183,38
23	138,97	177,39	181,15	181,87	183,08	183,40	184,09	184,56	184,85	185,33	185,49	185,58	185,65	185,90	185,91	185,95	185,98	185,76	185,73	185,38	184,92	184,87	184,81	184,72	184,71	184,71	184,71	184,71	184,71
24	142,50	186,72	190,53	192,11	192,18	192,84	193,57	194,07	194,37	194,87	195,04	195,13	195,21	195,47	195,48	195,53	195,56	195,33	195,29	194,92	194,44	194,39	194,32	194,22	194,22	194,22	194,22	194,22	194,22
25	139,33	163,73	166,26	167,76	169,21	169,80	170,44	170,87	171,14	171,58	171,73	171,81	171,88	172,11	172,12	172,16	172,19	171,98	171,95	171,63	171,21	171,16	171,10	171,02	171,01	171,01	171,01	171,01	171,01
26	124,23	160,08	162,58	164,61	166,04	166,61	167,24	167,67	167,93	168,37	168,51	168,59	168,66	168,88	168,89	168,93	168,96	168,76	168,73	168,41	168,00	167,95	167,89	167,81	167,80	167,80	167,80	167,80	167,80
27	91,38	113,00	116,60	118,05	119,08	119,49	119,94	120,25	120,44	120,75	120,85	120,91	120,96	121,12	121,13	121,15	121,17	121,01	121,01	120,78	120,48	120,45	120,41	120,35	120,34	120,34	120,34	120,34	120,34
28	86,52	110,74	114,26	115,69	116,70	117,10	117,54	117,84	118,03	118,33	118,44	118,49	118,54	118,69	118,70	118,73	118,75	118,61	118,59	118,36	118,07	118,04	118,00	117,94	117,93	117,93	117,93	117,93	117,93

Příloha 3: Reziduální trojúhelníky

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
1	1,07	-0,16	1,85	0,80	1,26	-0,51	-0,83	0,08	-0,16	0,28	0,70	-0,22	-0,35	-0,18	0,18	2,14	-0,48	-0,63	0,52	-0,25	0,48	-0,16	-0,50	1,30	-0,60	
2	0,83	1,77	0,86	0,87	0,17	1,03	-0,29	0,34	-0,58	1,68	-0,68	0,59	-0,19	0,20	0,17	1,84	-0,38	0,96	-0,63	-0,17	-0,14	-0,39	-0,36	-0,78	-0,56	
3	2,23	1,77	1,51	1,36	2,33	1,47	1,65	0,40	1,25	0,34	0,44	0,30	1,74	1,86	3,18	0,21	0,76	-0,60	0,20	-0,51	-0,02	2,02	-0,49	-0,81	1,15	
4	1,39	0,43	0,02	1,61	-0,18	-0,05	1,22	0,88	0,02	-0,01	0,86	0,47	0,34	1,95	-0,11	-0,19	-0,61	0,91	-0,76	-0,57	1,20	-0,62	-0,46	0,22		
5	0,57	-0,55	0,86	0,63	-0,04	0,17	1,79	0,09	-0,40	0,55	1,08	0,28	-0,06	0,16	-0,59	-0,82	-0,52	-0,35	-0,76	2,37	-1,37	-0,54	1,78			
6	0,51	1,22	1,61	0,28	1,47	-0,08	0,32	-1,13	-0,31	0,61	0,83	1,32	-0,36	0,46	-0,56	-0,25	-0,17	-0,58	1,62	-0,53	-1,19	-0,27				
7	1,37	2,16	1,76	0,94	-0,78	0,58	-0,50	0,78	0,03	2,59	2,42	-0,72	-0,52	0,18	-0,24	0,11	-0,11	2,21	-0,82	-0,59	1,00					
8	1,24	0,77	0,10	-0,15	1,32	0,18	0,56	0,39	0,24	0,91	-0,82	-1,21	-0,49	-0,69	-0,56	-0,02	2,75	-0,75	-0,81	0,28						
9	-0,43	-1,20	-0,87	-1,24	-0,87	-0,65	0,85	2,07	3,49	-0,47	-0,31	2,02	-0,55	-0,62	0,39	-0,92	-0,63	-0,41	1,48							
10	-1,75	-1,07	-1,42	-1,29	-1,56	-0,58	0,60	0,21	-0,23	-0,35	-0,14	-0,75	-0,67	-1,02	-0,40	-1,00	-0,21	-0,66								
11	-0,19	0,27	-0,25	0,20	0,23	2,26	1,66	0,81	0,70	-0,62	0,60	-0,75	-0,13	0,73	-0,45	-0,18	-0,62									
12	0,11	-0,71	-0,91	0,79	1,03	0,55	-0,99	-1,09	-0,58	-1,03	-0,99	-0,86	-0,52	-1,41	-0,36	-0,58										
13	-1,63	-0,71	-0,23	0,90	0,18	-1,10	-1,09	0,56	-0,04	-0,63	-1,03	0,51	-0,39	-0,81	-0,37											
14	0,60	0,52	0,39	0,69	-1,32	0,66	-0,87	0,03	-0,43	-0,89	-0,48	-1,28	-0,44	-0,56												
15	0,15	1,16	0,44	1,02	0,30	0,82	0,09	0,96	-0,87	-0,76	-1,18	-0,79	2,94													
16	0,68	0,32	-1,01	-0,13	0,12	0,11	-0,42	-1,46	-0,25	-0,76	-1,20	1,43														
17	-0,18	-0,52	-0,90	-0,24	0,74	-0,80	-0,51	-0,39	-0,60	-0,80	-0,39															
18	-1,01	-0,84	-0,20	-0,47	-0,84	-1,34	-0,94	-2,06	-0,92	-0,99																
19	-0,64	0,01	0,51	-0,70	-1,04	0,81	-0,54	-1,21	-0,68																	
20	-0,67	-0,65	-1,09	-0,94	-0,88	-1,32	-1,17	-0,66																		
21	-1,00	-1,06	-1,11	-1,39	-0,64	-1,17	-1,19																			
22	-0,53	-0,58	0,43	-2,11	-0,69	-1,55																				
23	-0,95	0,29	-0,99	-0,60	-0,45																					
24	0,26	-1,31	-1,16	-1,10																						
25	-1,26	-1,18	-0,24																							
26	-0,27	-0,12																								
27	0,82																									

Tabulka 18: Reziduální trojúhelník P

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
1	-1,07	1,84	0,63	0,04	2,08	0,40	0,91	1,20	-0,39	0,99	-2,40	0,93	0,06	-1,45	2,03	-2,31	0,30	-0,02	-0,37	0,63	0,17	1,45	0,66	0,27	0,00	
2	0,49	0,53	-0,06	1,40	0,18	-0,60	-0,31	0,25	-0,57	2,39	0,26	1,79	-0,63	0,99	0,72	-1,12	0,37	-0,59	-0,05	-0,06	0,66	-1,24	-0,84	0,61	0,00	
3	0,72	1,91	1,04	2,14	0,19	0,60	1,09	-1,24	2,89	0,55	1,86	0,53	0,85	1,63	1,54	0,69	-0,46	0,12	-0,81	0,51	1,33	-0,15	0,65	0,63	0,00	
4	0,83	0,06	0,37	1,55	-0,43	0,22	-1,06	0,74	0,08	1,60	1,30	0,15	-0,68	-2,32	-1,88	-0,12	0,26	-0,84	0,24	0,48	-1,16	0,36	0,82	-1,47		
5	-0,51	-0,24	0,20	0,42	-0,14	-0,60	2,09	-0,52	-0,02	-0,79	-0,82	-0,10	-0,59	-0,03	-0,33	-0,31	0,08	0,30	0,29	-2,33	0,23	0,51	-1,32			
6	-0,23	0,51	2,87	1,07	0,43	0,30	1,61	0,70	-0,57	-0,11	0,42	1,12	0,19	-0,16	-0,22	1,24	0,30	0,13	-1,92	0,55	0,42	-0,97				
7	1,62	2,95	2,32	0,15	-0,98	0,09	1,01	2,71	-0,37	0,76	0,13	-0,41	-0,41	0,46	-0,53	0,51	0,83	-1,50	0,35	0,52	-1,48					
8	2,06	0,53	0,13	0,95	3,08	0,77	-0,08	-0,19	0,17	-0,87	-0,99	-0,41	-1,11	0,58	-0,38	0,09	-2,83	0,02	0,41	-0,30						
9	-0,37	-0,68	-0,28	-0,67	0,24	-0,43	0,04	-1,11	2,47	-0,87	-0,24	1,79	-0,44	-0,30	0,47	-0,19	0,30	2,36	1,75							
10	-0,91	0,34	-0,97	-0,41	0,21	-0,02	-0,81	-0,21	-0,45	-0,36	0,22	-1,73	-0,34	0,00	-0,48	1,32	0,71	0,00								
11	0,52	0,26	0,24	0,09	-0,86	0,52	1,70	0,24	-0,52	-0,78	0,51	-0,26	-0,16	1,02	-0,57	0,27	0,30									
12	0,95	-0,64	-0,32	-0,40	-0,28	-2,00	-1,09	0,79	-0,54	-1,16	-0,24	-0,47	-0,57	-0,09	0,17	-0,39										
13	-0,96	-0,83	-0,71	0,12	-0,75	-0,74	-0,72	-0,18	-0,05	1,04	-0,29	-0,21	-0,14	-0,03	-0,29											
14	0,87	-0,56	-0,16	0,16	-1,93	0,01	-0,82	-0,14	0,53	-0,32	1,14	-0,34	1,59	-0,40												
15	-0,35	0,03	1,02	1,08	0,32	2,16	-0,38	-1,36	-0,60	0,24	-1,10	-0,71	2,73													
16	1,56	-0,34	-0,97	0,09	-0,11	2,38	-0,63	-0,05	-0,29	-0,89	-0,02	-1,37														
17	-1,29	-0,66	-0,80	-1,11	0,50	-0,93	-0,67	0,68	-0,42	-0,48	0,45															
18	-0,97	-0,73	-0,64	-1,44	0,06	-1,01	-0,50	-1,52	-0,81	-0,59																
19	-0,40	0,42	-0,25	-0,98	-0,57	0,42	-0,23	-0,59	-0,51																	
20	0,76	-0,62	-0,39	-0,56	-0,62	-0,53	-0,42	-0,56																		
21	-1,68	-1,21	-0,38	-1,08	-0,17	-0,09	-1,18																			
22	-0,29	-0,16	-1,07	-1,23	-0,48	-1,16																				
23	-0,06	-0,70	-1,31	-0,37	-0,45																					
24	0,50	-0,77	-0,67	-1,56																						
25	-1,72	-1,04	-0,52																							
26	0,13	-1,01																								
27	-0,57																									

Tabulka 19: Reziduální trojúhelník I

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1	1,29	-0,73	0,21	-1,38	-2,07	-2,49	-2,34	-1,82	-1,78	-1,74	-1,57	-1,76	-1,54	-1,27	-1,31	-1,57	-1,90	-0,89	-0,20	-0,70	-0,89	-1,11	-0,57	0,31	-0,51
2	1,12	1,54	0,62	-0,10	-0,11	-0,18	-0,95	-0,95	-1,06	-0,96	-1,01	-0,77	-0,63	-0,65	-0,48	-0,46	-0,71	-0,10	-0,74	-0,35	-0,44	-0,15	-0,36	-1,63	-0,48
3	2,44	1,82	2,04	1,61	1,84	1,00	0,58	0,14	-0,16	0,59	0,53	0,60	0,62	0,20	0,26	-0,50	-0,33	-0,71	-0,03	-0,45	1,18	1,69	-0,35	0,85	1,50
4	1,10	0,40	0,13	0,25	-0,10	-0,19	-0,11	-1,00	-1,18	-1,05	-0,76	-0,67	-0,71	-0,93	-1,29	-1,78	-1,55	-0,60	-1,17	-0,65	-0,03	-1,26	-0,86	-0,27	-0,51
5	0,91	0,29	1,01	0,53	0,36	0,39	0,11	-0,15	-0,28	-0,07	-0,34	-0,56	-0,59	-0,65	-0,57	-0,37	-0,16	0,25	0,58	1,50	-0,42	0,17	1,91	0,66	
6	0,95	0,97	0,38	-0,02	0,20	-0,43	-0,32	-0,02	0,32	0,19	-0,02	-0,10	-0,20	0,04	0,08	0,63	0,84	0,85	1,01	-0,74	-0,47	0,14	0,19		
7	1,03	1,24	1,28	0,83	0,42	0,58	0,37	0,95	1,18	0,91	0,26	-0,13	0,00	0,14	0,28	0,78	0,86	1,02	-1,05	-0,40	1,88	0,49			
8	0,38	0,17	-0,38	-0,63	-0,30	-0,07	0,12	-0,15	-0,31	-0,32	-0,69	-0,60	-0,37	-0,41	-0,16	0,28	0,38	-2,06	-0,89	-0,19	-0,84				
9	-0,51	-1,00	-0,62	-0,13	0,29	0,88	1,11	0,80	0,14	-0,40	-0,39	-0,33	-0,48	-0,32	-0,17	-0,08	0,13	0,59	1,84	1,94					
10	-1,85	-2,15	-2,05	-1,82	-1,53	-0,95	-0,78	-1,34	-1,52	-1,49	-1,37	-1,18	-1,19	-0,92	-0,69	-0,60	-0,18	0,31	0,64						
11	-0,08	0,79	1,12	1,82	1,96	1,92	1,17	0,94	0,79	0,16	0,19	0,13	0,27	0,31	0,45	1,12	1,20	1,33							
12	-0,27	-0,08	0,32	1,18	0,68	0,16	-0,87	-0,74	-0,43	-0,36	-0,25	-0,11	0,04	0,13	0,39	1,06	1,13								
13	-1,05	0,07	0,44	0,49	0,04	-0,32	-0,10	0,24	0,06	0,06	0,37	0,45	0,34	0,47	0,67	1,40									
14	0,70	1,45	1,33	1,29	1,09	1,36	1,16	1,45	1,47	1,81	1,89	1,87	2,08	2,60	2,76										
15	0,87	1,62	1,18	1,53	1,53	1,77	2,35	2,38	2,03	2,02	2,12	1,94	2,01	1,56											
16	0,07	0,15	-0,41	0,02	0,11	0,01	0,85	0,95	1,31	1,20	1,19	1,23	0,77												
17	0,39	-0,16	-0,05	0,48	0,22	0,02	0,06	0,13	0,31	0,38	0,49	0,54													
18	-0,69	-0,66	-0,54	-0,85	-1,29	-1,09	-0,93	-0,66	-0,46	-0,34	-0,15														
19	-0,40	-0,09	0,10	-0,54	-0,63	-0,41	-0,70	-0,53	-0,39	-0,25															
20	-1,19	-1,04	-1,34	-0,95	-0,78	-0,69	-0,32	0,13	0,18																
21	-0,60	-1,35	-1,74	-1,46	-1,30	-1,30	-0,89	-0,69																	
22	-0,41	-0,29	0,12	-0,75	-0,13	0,04	0,37																		
23	-0,76	0,17	-0,58	-0,37	-0,25	-0,22																			
24	-0,31	-1,20	-0,87	-0,33	-0,38																				
25	-0,67	-0,85	-0,63	-0,87																					
26	-0,37	-0,37	-1,17																						
27	0,89	-0,51																							
28	-1,75																								

Tabulka 20: Reziduální trojúhelník I/P

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1	-1,22	0,74	-0,21	1,40	2,09	2,52	2,37	1,84	1,80	1,75	1,59	1,78	1,56	1,29	1,32	1,58	1,91	0,90	0,20	0,71	0,90	1,11	0,57	-0,31	0,51
2	-1,06	-1,50	-0,62	0,10	0,11	0,18	0,95	0,95	1,07	0,96	1,01	0,78	0,63	0,65	0,48	0,46	0,71	0,10	0,75	0,36	0,44	0,15	0,36	1,63	0,48
3	-2,15	-1,77	-2,00	-1,59	-1,82	-0,99	-0,58	-0,14	0,16	-0,59	-0,53	-0,60	-0,62	-0,21	-0,26	0,50	0,33	0,72	0,03	0,45	-1,18	-1,69	0,35	-0,85	-1,50
4	-1,05	-0,39	-0,13	-0,25	0,10	0,19	0,11	1,00	1,18	1,05	0,76	0,67	0,71	0,94	1,30	1,79	1,56	0,60	1,19	0,66	0,03	1,26	0,86	0,27	0,51
5	-0,88	-0,29	-1,00	-0,53	-0,36	-0,39	-0,11	0,15	0,28	0,07	0,34	0,56	0,60	0,66	0,58	0,37	0,16	-0,25	-0,58	-1,50	0,42	-0,17	-1,91	-0,66	
6	-0,91	-0,96	-0,38	0,02	-0,20	0,43	0,32	0,02	-0,32	-0,19	0,02	0,10	0,20	-0,04	-0,08	-0,62	-0,83	-0,84	-1,00	0,75	0,47	-0,14	-0,19		
7	-0,99	-1,22	-1,26	-0,83	-0,42	-0,58	-0,37	-0,95	-1,18	-0,91	-0,26	0,13	0,00	-0,14	-0,28	-0,77	-0,85	-1,02	1,06	0,40	-1,88	-0,49			
8	-0,37	-0,17	0,38	0,63	0,30	0,07	-0,12	0,15	0,31	0,32	0,69	0,61	0,37	0,41	0,16	-0,28	-0,38	2,08	0,90	0,19	0,84				
9	0,52	1,02	0,62	0,13	-0,29	-0,87	-1,11	-0,80	-0,14	0,40	0,39	0,33	0,49	0,32	0,18	0,08	-0,13	-0,59	-1,82	-1,93					
10	2,01	2,22	2,08	1,84	1,54	0,96	0,78	1,35	1,53	1,50	1,38	1,19	1,21	0,93	0,70	0,60	0,18	-0,31	-0,64						
11	0,09	-0,78	-1,10	-1,80	-1,93	-1,90	-1,16	-0,94	-0,79	-0,16	-0,19	-0,13	-0,27	-0,31	-0,45	-1,11	-1,19	-1,32							
12	0,27	0,08	-0,32	-1,17	-0,68	-0,16	0,88	0,75	0,43	0,36	0,25	0,11	-0,04	-0,13	-0,40	-1,05	-1,12								
13	1,12	-0,07	-0,43	-0,48	-0,04	0,32	0,10	-0,24	-0,06	-0,06	-0,37	-0,45	-0,34	-0,47	-0,67	-1,39									
14	-0,68	-1,42	-1,31	-1,28	-1,09	-1,35	-1,16	-1,45	-1,46	-1,80	-1,87	-1,85	-2,07	-2,58	-2,73										
15	-0,84	-1,58	-1,17	-1,51	-1,52	-1,75	-2,33	-2,36	-2,01	-2,00	-2,11	-1,93	-1,99	-1,55											
16	-0,07	-0,15	0,41	-0,02	-0,11	-0,01	-0,85	-0,95	-1,31	-1,20	-1,19	-1,22	-0,77												
17	-0,39	0,16	0,05	-0,48	-0,22	-0,02	-0,06	-0,13	-0,31	-0,38	-0,49	-0,54													
18	0,72	0,67	0,55	0,86	1,30	1,10	0,93	0,66	0,46	0,34	0,15														
19	0,41	0,09	-0,10	0,54	0,63	0,41	0,70	0,53	0,39	0,26															
20	1,28	1,06	1,36	0,95	0,79	0,69	0,32	-0,13	-0,18																
21	0,62	1,38	1,77	1,47	1,31	1,31	0,89	0,69																	
22	0,42	0,30	-0,12	0,75	0,13	-0,04	-0,37																		
23	0,79	-0,17	0,59	0,37	0,25	0,22																			
24	0,32	1,23	0,88	0,33	0,38																				
25	0,70	0,86	0,63	0,88																					
26	0,38	0,37	1,19																						
27	-0,85	0,52																							
28	1,99																								

Tabulka 21: Reziduální trojúhelník P/I

Příloha 4: Kumulativní trojúhelník *P*, metoda MCL (hodnoty v mil. Kč)

		28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
1	74,03	168,59	190,81	206,36	213,90	219,08	221,14	222,31	223,73	224,78	225,70	226,52	227,12	227,40	227,75	228,29	229,09	229,36	229,43	232,76	233,22	233,66	233,91	234,12	234,12	234,12	234,12	234,12	234,12
2	63,56	142,39	169,65	181,02	187,81	191,22	194,45	195,92	197,28	197,82	199,40	200,58	201,84	202,51	202,84	205,88	206,08	206,58	206,84	206,84	206,58	206,84	206,94	206,95	206,95	206,95	206,95	206,95	206,95
3	55,75	144,04	171,57	184,88	192,51	198,46	202,23	205,53	206,98	209,27	210,17	210,85	211,66	213,90	214,82	217,42	219,67	219,73	222,12	222,19	222,50	223,85	223,85	224,12	224,12	224,12	224,12	224,12	224,12
4	71,14	166,93	191,73	201,99	210,63	214,04	216,52	219,58	221,34	222,55	223,29	224,16	225,11	226,06	227,04	227,38	227,56	227,64	230,85	230,86	230,87	231,48	231,48	231,65	231,65	231,65	231,65	231,65	231,65
5	79,17	171,87	192,62	205,37	212,63	216,23	218,95	222,58	224,01	224,83	225,90	226,86	227,72	228,29	228,74	228,74	228,76	228,97	229,60	229,60	233,86	233,86	234,24	234,35	234,48	234,48	234,48	234,48	234,48
6	79,89	172,35	201,79	217,36	224,45	230,10	232,73	235,11	236,06	237,02	238,19	239,09	240,54	240,83	241,40	241,43	241,61	242,36	242,57	248,98	249,08	249,13	249,34	249,43	249,54	249,67	249,67	249,67	249,67
7	78,94	183,92	219,89	237,10	245,90	249,11	252,68	254,41	256,36	257,77	260,26	261,86	262,30	262,46	262,98	263,28	263,59	264,49	270,91	270,91	270,94	271,58	272,08	272,22	272,40	272,59	272,59	272,59	272,59
8	93,50	213,49	246,79	260,23	267,92	274,29	277,72	280,78	282,72	284,52	286,07	286,45	286,67	286,91	287,18	287,26	287,55	293,02	293,02	293,16	294,66	294,99	295,21	295,24	295,25	295,31	295,31	295,31	295,31
9	97,93	193,98	214,22	222,90	227,72	230,56	232,60	235,49	237,90	242,71	243,24	243,73	245,56	245,67	245,91	246,65	246,65	246,74	247,34	253,47	255,54	257,13	259,78	260,73	262,14	263,36	263,36	263,36	263,36
10	132,85	238,00	264,32	273,48	279,56	282,22	284,88	288,05	289,96	291,27	292,02	292,69	293,18	293,23	293,40	293,61	293,61	294,47	294,68	297,95	299,48	300,53	302,08	302,62	303,39	304,09	304,09	304,09	304,09
11	96,24	194,82	222,80	233,85	241,33	245,76	251,10	255,02	256,99	259,11	259,59	260,48	260,90	261,47	262,16	262,30	262,52	262,66	265,36	268,51	270,00	271,04	272,63	273,18	273,98	274,70	274,70	274,70	274,70
12	94,98	197,29	220,51	229,38	237,68	243,05	246,51	247,69	248,73	249,47	249,68	249,92	250,26	250,40	250,40	250,59	250,69	252,36	254,42	257,08	258,32	259,14	260,33	260,73	261,31	261,84	261,84	261,84	261,84
13	89,99	157,99	176,23	184,96	191,93	195,43	196,68	197,44	198,91	199,95	200,27	200,42	201,29	201,48	201,60	201,73	202,07	203,58	205,37	207,61	208,65	209,36	210,40	210,75	211,27	211,73	211,73	211,73	211,73
14	70,25	153,33	176,63	187,12	193,85	195,68	198,63	199,60	200,85	201,54	201,73	202,07	202,09	202,24	202,44	203,54	204,14	206,86	209,61	212,51	213,91	214,93	216,57	217,16	218,01	218,76	218,76	218,76	218,76
15	75,21	157,08	183,91	194,94	202,42	206,25	209,49	211,43	213,16	213,48	213,77	213,89	214,17	217,59	218,15	219,00	219,47	221,60	223,93	226,62	227,90	228,79	230,16	230,64	231,34	231,96	231,96	231,96	231,96
16	72,16	158,60	181,71	188,48	194,04	197,51	199,94	201,33	201,97	202,83	203,09	203,18	204,51	205,35	205,79	206,37	206,71	208,21	210,00	212,26	213,32	214,02	215,06	215,42	215,94	216,40	216,40	216,40	216,40
17	71,51	144,41	161,77	167,93	172,73	176,49	177,84	178,97	179,93	180,38	180,57	180,90	181,56	182,24	182,61	183,09	183,37	184,60	186,11	188,06	188,97	189,57	190,44	190,74	191,17	191,56	191,56	191,56	191,56
18	83,80	156,21	173,59	182,25	187,14	189,40	190,37	191,22	191,57	191,77	191,88	192,34	192,92	193,41	193,75	194,12	194,35	195,34	196,70	198,60	199,47	200,03	200,80	201,06	201,42	201,76	201,76	201,76	201,76
19	81,30	157,20	178,70	189,63	194,40	196,56	199,66	200,94	201,69	202,15	202,77	203,25	203,85	204,35	204,70	205,08	205,32	206,34	207,75	209,74	210,65	211,23	212,03	212,30	212,68	213,03	213,03	213,03	213,03
20	85,87	165,84	185,34	192,05	196,52	198,88	199,94	200,65	201,63	202,78	203,50	204,02	204,68	205,29	205,66	206,11	206,37	207,53	209,06	211,14	212,09	212,71	213,58	213,88	214,29	214,68	214,68	214,68	214,68
21	74,95	139,05	153,36	158,60	161,57	163,68	164,58	165,06	165,99	166,65	167,11	167,47	167,93	168,27	168,54	168,82	168,99	169,74	170,83	172,42	173,14	173,59	174,20	174,41	174,69	174,96	174,96	174,96	174,96
22	71,27	138,84	155,25	164,62	166,76	168,89	169,49	171,11	172,23	173,27	173,90	174,36	174,94	175,48	175,81	176,20	176,44	177,47	178,80	180,59	181,42	181,96	182,72	182,98	183,34	183,68	183,68	183,68	183,68
23	73,79	137,52	157,52	163,26	167,44	169,83	171,76	173,21	174,26	175,13	175,69	176,11	176,65	177,10	177,41	177,75	177,96	178,87	180,12	181,86	182,66	183,16	183,87	184,11	184,44	184,75	184,75	184,75	184,75
24	71,95	151,93	166,65	172,32	176,05	178,91	180,87	182,34	183,43	184,29	184,86	185,29	185,83	186,28	186,60	186,94	187,16	188,08	189,36	191,17	191,99	192,52	193,24	193,49	193,83	194,14	194,14	194,14	194,14
25	73,27	131,85	144,81	151,88	156,08	158,41	159,97	161,11	162,00	162,62	163,05	163,39	163,83	164,15	164,41	164,67	164,84	165,54	166,58	168,12	168,82	169,26	169,84	170,04	170,31	170,56	170,56	170,56	170,56
26	63,34	126,61	143,39	149,84	153,79	155,94	157,35	158,36	159,19	159,69	160,07	160,38	160,78	161,04	161,28	161,51	161,65	162,27	163,24	164,70	165,37	165,77	166,31	166,49	166,73	166,97	166,97	166,97	166,97
27	39,42	90,21	101,80	106,66	109,61	111,26	112,36	113,16	113,79	114,23	114,53	114,78	115,09	115,32	115,50	115,68	115,80	116,30	117,03	118,12	118,61	118,91	119,33	119,46	119,66	119,84	119,84	119,84	119,84
28	54,07	102,39	110,44	111,81	112,84	113,00	112,78	112,39	112,51	111,86	111,65	111,61	111,60	111,25	111,28	111,13	111,07	110,76	110,85	111,46	111,70	111,79	111,80	111,78	111,74	111,73	111,73	111,73	111,73

Příloha 6: Kumulativní trojúhelník *P* do 2005, metoda SCL (hodnoty v mil. Kč)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	Tail
1	74,03	168,59	190,81	206,36	213,90	219,08	221,14	222,31	223,73	224,78	225,70	226,52	227,12	227,40	227,75	228,29	229,09	229,36	229,43	232,76	233,22	233,66	233,91	233,91	234,79
2	63,56	142,39	169,65	181,02	187,81	191,22	194,45	195,92	197,28	197,82	199,40	199,66	200,58	200,95	201,36	201,84	202,51	202,84	205,88	206,08	206,58	206,84	206,94	206,94	207,71
3	55,75	144,04	171,57	184,88	192,51	198,46	202,23	205,53	206,98	209,27	210,17	210,85	211,66	213,90	214,82	217,42	217,70	219,62	219,73	222,12	222,19	222,50	222,67	222,67	223,50
4	71,14	166,93	191,73	201,99	210,63	214,04	216,52	219,58	221,34	222,55	223,29	224,16	225,11	226,06	227,04	227,38	227,56	227,64	230,85	230,86	230,87	231,22	231,40	231,40	232,26
5	79,17	171,87	192,62	205,37	212,63	216,23	218,95	222,58	224,01	224,83	225,90	226,86	227,72	228,29	228,74	228,74	228,97	229,60	229,60	229,60	229,60	229,87	230,22	230,40	231,26
6	79,89	172,35	201,79	217,36	224,45	230,10	232,73	235,11	236,06	237,02	238,19	239,09	240,54	240,83	241,40	241,43	241,61	242,36	242,57	243,86	244,14	244,52	244,70	244,70	245,62
7	78,94	183,92	219,89	237,10	245,90	249,11	252,68	254,41	256,36	257,77	260,26	261,86	262,30	262,46	262,98	263,28	263,59	264,49	265,91	267,33	267,64	268,05	268,26	268,26	269,26
8	93,50	213,49	246,79	260,23	267,92	274,29	277,72	280,78	282,72	284,52	286,07	286,45	286,67	286,91	287,18	287,26	287,55	288,34	289,90	291,44	291,78	292,22	292,45	292,45	293,54
9	97,93	193,98	214,22	222,90	227,72	230,56	232,60	235,49	237,90	242,71	243,24	243,73	245,56	245,67	245,91	246,65	247,00	247,68	249,02	250,34	250,63	251,01	251,21	251,21	252,15
10	132,85	238,00	264,32	273,48	279,56	282,22	284,88	288,05	289,96	291,27	292,02	292,69	293,18	293,23	293,40	294,10	294,52	295,34	296,93	298,50	298,85	299,31	299,54	299,54	300,66
11	96,24	194,82	222,80	233,85	241,33	245,76	251,10	255,02	256,99	259,11	259,59	260,48	260,90	261,47	262,00	262,62	263,00	263,73	265,15	266,56	266,87	267,28	267,48	267,48	268,48
12	94,98	197,29	220,51	229,38	237,68	243,05	246,51	247,69	248,73	249,47	249,68	249,92	250,26	250,80	251,30	251,91	252,27	252,97	254,33	255,68	255,98	256,37	256,57	256,57	257,53
13	89,99	157,99	176,23	184,96	191,93	195,43	196,68	197,44	198,91	199,95	200,27	200,42	201,05	201,49	201,90	202,38	202,67	203,23	204,32	205,41	205,65	205,96	206,12	206,12	206,90
14	70,25	153,33	176,63	187,12	193,85	195,68	198,63	199,60	200,85	201,54	201,73	202,30	202,95	203,39	203,80	204,29	204,58	205,15	206,25	207,35	207,59	207,91	208,07	208,07	208,85
15	75,21	157,08	183,91	194,94	202,42	206,25	209,49	211,43	213,16	213,48	214,32	214,93	215,62	216,09	216,52	217,04	217,35	217,95	219,12	220,29	220,55	220,88	221,05	221,05	221,88
16	72,16	158,60	181,71	188,48	194,04	197,51	199,94	201,33	201,97	203,19	203,99	204,57	205,22	205,67	206,08	206,58	206,87	207,44	208,56	209,67	209,91	210,23	210,40	210,40	211,18
17	71,51	144,41	161,77	167,93	172,73	176,49	177,84	178,97	180,18	181,27	181,97	182,49	183,08	183,47	183,84	184,28	184,55	185,06	186,05	187,04	187,26	187,55	187,69	187,69	188,40
18	83,80	156,21	173,59	182,25	187,14	189,40	190,37	192,22	193,51	194,68	195,44	196,00	196,63	197,05	197,45	197,92	198,21	198,76	199,83	200,89	201,12	201,43	201,59	201,59	202,34
19	81,30	157,20	178,70	189,63	194,40	196,56	199,02	200,96	202,31	203,53	204,33	204,91	205,57	206,01	206,43	206,92	207,22	207,79	208,91	210,02	210,27	210,59	210,75	210,75	211,54
20	85,87	165,84	185,34	192,05	196,52	200,03	202,54	204,51	205,89	207,13	207,94	208,53	209,20	209,65	210,07	210,58	210,88	211,46	212,60	213,73	213,98	214,31	214,47	214,47	215,28
21	74,95	139,05	153,36	158,60	163,73	166,65	168,74	170,39	171,53	172,57	173,24	173,74	174,29	174,67	175,02	175,44	175,69	176,18	177,13	178,07	178,28	178,55	178,69	178,69	179,36
22	71,27	138,84	155,25	163,70	168,99	172,01	174,16	175,86	177,04	178,11	178,81	179,32	179,89	180,28	180,64	181,08	181,34	181,84	182,82	183,79	184,00	184,29	184,43	184,43	185,12
23	73,79	137,52	156,65	165,17	170,51	173,56	175,73	177,44	178,64	179,72	180,42	180,93	181,51	181,91	182,27	182,71	182,97	183,48	184,46	185,45	185,66	185,94	186,09	186,09	186,79
24	71,95	148,42	169,07	178,27	184,03	187,32	189,66	191,51	192,80	193,96	194,72	195,28	195,90	196,33	196,72	197,19	197,48	198,02	199,09	200,15	200,38	200,69	200,84	200,84	201,59

Příloha 7: Kumulativní trojúhelník *I* do 2005, metoda SCL (hodnoty v mil. Kč)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	Tail
1	172,74	210,99	223,11	226,72	228,73	231,16	232,37	233,50	234,22	234,44	234,98	234,43	234,83	235,18	234,80	235,19	234,79	234,81	234,74	233,74	233,91	233,89	234,13	234,13	234,16
2	147,05	192,50	200,10	202,53	205,76	206,60	206,91	207,27	207,66	207,67	208,61	208,77	209,41	209,26	209,52	209,68	209,52	209,61	208,44	207,97	207,40	207,52	207,18	207,18	207,21
3	148,64	196,54	208,21	212,12	216,25	217,14	218,45	219,63	219,62	222,96	223,34	223,93	224,19	225,09	225,54	225,84	226,00	225,29	225,48	223,88	223,92	224,23	224,19	224,19	224,21
4	163,38	216,77	223,85	227,13	230,82	231,28	232,33	232,31	232,89	233,56	234,31	234,77	234,92	234,73	234,12	233,87	233,88	233,86	232,10	232,01	232,01	232,16	232,11	232,11	232,13
5	177,61	222,40	228,74	231,86	234,34	235,03	235,42	237,26	237,47	238,07	238,01	237,89	237,95	237,83	237,84	237,84	237,82	237,61	238,20	238,17	238,07	238,22	238,17	238,17	238,20
6	179,77	227,89	236,69	243,51	246,86	248,06	249,25	250,87	251,48	251,55	251,73	251,97	252,45	252,93	252,90	252,92	253,20	253,21	253,43	252,73	252,62	252,78	252,73	252,73	252,76
7	179,14	244,91	262,02	268,58	271,09	271,18	272,28	273,62	274,91	275,22	275,74	275,90	275,88	275,92	276,08	276,05	276,19	276,75	276,36	275,59	275,47	275,64	275,59	275,59	275,62
8	198,52	275,03	285,54	289,30	293,00	296,77	298,61	299,32	299,73	300,69	300,62	300,44	300,42	299,91	300,10	300,10	300,17	300,12	299,69	298,86	298,73	298,92	298,86	298,86	298,89
9	191,27	241,11	246,62	249,32	250,71	251,78	252,35	253,03	253,09	256,27	256,19	256,24	256,95	256,96	256,89	257,03	257,04	257,00	256,63	255,92	255,81	255,97	255,92	255,92	255,95
10	232,10	287,06	297,36	299,61	301,69	302,93	304,05	304,29	304,70	304,98	305,11	305,31	304,79	304,92	304,94	305,03	305,05	305,00	304,56	303,71	303,59	303,78	303,72	303,72	303,75
11	195,68	255,73	264,69	268,34	270,78	270,97	272,47	274,25	274,76	274,91	274,87	275,14	275,16	275,40	275,40	275,49	275,50	275,46	275,07	274,30	274,19	274,36	274,30	274,30	274,33
12	189,75	252,32	258,28	261,07	262,86	263,52	262,75	262,74	263,40	263,51	263,33	263,37	263,32	263,43	263,43	263,51	263,52	263,49	263,11	262,37	262,27	262,43	262,38	262,38	262,40
13	165,57	202,98	207,05	208,75	210,69	210,85	211,06	211,20	211,48	211,98	212,50	212,52	212,66	212,76	212,76	212,82	212,83	212,80	212,50	211,90	211,82	211,95	211,90	211,90	211,93
14	155,08	206,31	211,24	213,68	215,70	214,96	215,78	215,87	216,17	217,23	217,32	217,40	217,55	217,65	217,65	217,72	217,72	217,69	217,38	216,77	216,69	216,82	216,78	216,78	216,80
15	168,46	212,38	219,22	223,28	226,41	227,44	230,07	230,44	230,41	230,41	230,65	230,75	230,90	231,00	231,00	231,08	231,09	231,05	230,72	230,08	229,98	230,12	230,08	230,08	230,10
16	148,96	204,34	209,86	211,27	213,20	213,85	216,55	216,75	217,08	217,75	217,97	218,06	218,21	218,30	218,30	218,37	218,38	218,35	218,04	217,43	217,34	217,47	217,43	217,43	217,45
17	152,84	184,12	188,17	189,57	190,09	191,11	191,13	191,26	191,59	192,18	192,38	192,46	192,59	192,67	192,67	192,73	192,74	192,71	192,44	191,90	191,82	191,94	191,90	191,90	191,92
18	159,84	195,74	199,90	201,61	201,85	202,60	202,58	203,16	203,51	204,14	204,35	204,43	204,57	204,66	204,66	204,73	204,73	204,70	204,41	203,84	203,76	203,88	203,84	203,84	203,86
19	159,85	200,92	208,51	210,80	211,57	211,87	212,72	213,33	213,69	214,35	214,57	214,66	214,81	214,90	214,90	214,97	214,98	214,95	214,64	214,04	213,95	214,08	214,04	214,04	214,06
20	155,15	205,35	210,08	212,22	213,46	214,25	215,11	215,73	216,10	216,77	216,99	217,08	217,23	217,32	217,32	217,39	217,40	217,37	217,05	216,45	216,36	216,49	216,45	216,45	216,47
21	143,88	169,63	171,84	173,56	175,22	175,87	176,58	177,09	177,39	177,94	178,12	178,19	178,32	178,39	178,39	178,45	178,46	178,43	178,17	177,68	177,60	177,71	177,68	177,68	177,70
22	139,52	176,10	181,28	183,71	185,47	186,16	186,90	187,44	187,76	188,34	188,54	188,61	188,74	188,82	188,82	188,88	188,89	188,86	188,59	188,07	187,99	188,11	188,07	188,07	188,09
23	138,97	177,39	183,38	185,83	187,61	188,31	189,07	189,61	189,93	190,52	190,72	190,79	190,93	191,01	191,01	191,07	191,08	191,05	190,77	190,24	190,16	190,28	190,24	190,24	190,26
24	142,50	182,88	189,05	191,58	193,41	194,13	194,91	195,47	195,81	196,41	196,61	196,69	196,83	196,91	196,91	196,98	196,98	196,95	196,67	196,12	196,04	196,16	196,13	196,13	196,15

Příloha 8: Kumulativní trojúhelník *P* do 2005, metoda MCL (hodnoty v mil. Kč)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	Tail	
1	74,03	168,59	190,81	206,36	213,90	219,08	221,14	222,31	223,73	224,78	225,70	226,52	227,12	227,40	227,75	228,29	229,09	229,36	229,43	232,76	233,22	233,66	233,91	233,91	233,91	234,79
2	63,56	142,39	169,65	181,02	187,81	191,22	194,45	195,92	197,28	197,82	199,40	199,66	200,58	200,95	201,36	201,84	202,51	202,84	205,88	206,08	206,58	206,84	206,94	206,96	206,96	207,73
3	55,75	144,04	171,57	184,88	192,51	198,46	202,23	205,53	206,98	209,27	210,17	210,85	211,66	213,90	214,82	217,42	217,70	219,62	219,73	222,12	222,19	222,50	222,71	222,87	222,87	224,71
4	71,14	166,93	191,73	201,99	210,63	214,04	216,52	219,58	221,34	222,55	223,29	224,16	225,11	226,06	227,04	227,38	227,56	227,64	230,85	230,86	230,87	231,22	231,40	231,40	231,81	232,67
5	79,17	171,87	192,62	205,37	212,63	216,23	218,95	222,58	224,01	224,83	225,90	226,86	227,72	228,29	228,74	228,74	228,76	228,97	229,60	229,60	230,06	230,86	231,37	238,21	239,10	
6	79,89	172,35	201,79	217,36	224,45	230,10	232,73	235,11	236,06	237,02	238,19	239,09	240,54	240,83	241,40	241,43	241,61	242,36	242,57	244,73	245,18	245,98	246,48	252,89	253,84	
7	78,94	183,92	219,89	237,10	245,90	249,11	252,68	254,41	256,36	257,77	260,26	261,86	262,30	262,46	262,98	263,28	263,59	264,49	266,83	268,80	269,24	270,00	270,46	275,85	276,88	
8	93,50	213,49	246,79	260,23	267,92	274,29	277,72	280,78	282,72	284,52	286,07	286,45	286,67	286,91	287,18	287,26	287,55	288,54	290,58	292,48	292,92	293,67	294,12	298,94	300,06	
9	97,93	193,98	214,22	222,90	227,72	230,56	232,60	235,49	237,90	242,71	243,24	243,73	245,56	245,67	245,91	246,65	247,03	247,78	249,31	250,84	251,20	251,81	252,18	255,87	256,83	
10	132,85	238,00	264,32	273,48	279,56	282,22	284,88	288,05	289,96	291,27	292,02	292,69	293,18	293,23	293,40	293,93	294,30	295,03	296,53	298,20	298,60	299,28	299,68	303,41	304,54	
11	96,24	194,82	222,80	233,85	241,33	245,76	251,10	255,02	256,99	259,11	259,59	260,48	260,90	261,47	262,17	263,29	263,79	264,74	266,69	268,48	268,89	269,59	270,01	274,61	275,63	
12	94,98	197,29	220,51	229,38	237,68	243,05	246,51	247,69	248,73	249,47	249,68	249,92	250,26	251,01	251,61	252,50	252,93	253,75	255,45	257,08	257,46	258,11	258,50	262,55	263,53	
13	89,99	157,99	176,23	184,96	191,93	195,43	196,68	197,44	198,91	199,95	200,27	200,42	201,29	202,05	202,60	203,48	203,87	204,62	206,14	207,54	207,85	208,40	208,73	212,32	213,11	
14	70,25	153,33	176,63	187,12	193,85	195,68	198,63	199,60	200,85	201,54	201,73	202,64	203,84	205,02	205,74	207,07	207,57	208,52	210,48	212,10	212,45	213,07	213,45	217,93	218,75	
15	75,21	157,08	183,91	194,94	202,42	206,25	209,49	211,43	213,16	213,48	214,77	215,69	216,91	218,07	218,81	220,13	220,64	221,62	223,62	225,29	225,66	226,30	226,70	231,29	232,16	
16	72,16	158,60	181,71	188,48	194,04	197,51	199,94	201,33	201,97	203,65	204,69	205,45	206,41	207,28	207,88	208,87	209,29	210,10	211,75	213,22	213,55	214,13	214,47	218,33	219,15	
17	71,51	144,41	161,77	167,93	172,73	176,49	177,84	178,97	180,18	181,29	182,02	182,57	183,24	183,76	184,19	184,81	185,12	185,71	186,93	188,11	188,39	188,86	189,14	192,05	192,77	
18	83,80	156,21	173,59	182,25	187,14	189,40	190,37	191,90	193,05	193,88	194,48	194,95	195,48	195,81	196,17	196,60	196,86	197,38	198,45	199,59	199,87	200,33	200,61	203,23	203,99	
19	81,30	157,20	178,70	189,63	194,40	196,56	198,85	200,61	201,89	202,91	203,62	204,17	204,81	205,26	205,68	206,24	206,54	207,14	208,36	209,61	209,91	210,41	210,71	213,68	214,48	
20	85,87	165,84	185,34	192,05	196,52	199,63	201,80	203,44	204,67	205,56	206,21	206,71	207,28	207,64	208,03	208,49	208,77	209,33	210,47	211,68	211,97	212,47	212,76	215,57	216,37	
21	74,95	139,05	153,36	158,60	163,05	165,28	166,80	167,88	168,79	169,25	169,65	169,98	170,31	170,44	170,68	170,88	171,06	171,43	172,20	173,11	173,33	173,71	173,93	175,88	176,54	
22	71,27	138,84	155,25	163,70	169,00	171,99	174,11	175,76	176,92	177,93	178,61	179,13	179,74	180,21	180,61	181,17	181,45	182,01	183,16	184,29	184,56	185,01	185,28	188,04	188,74	
23	73,79	137,52	156,77	165,40	170,79	173,86	176,03	177,74	178,92	179,97	180,67	181,21	181,84	182,33	182,74	183,33	183,63	184,20	185,38	186,54	186,81	187,27	187,55	190,37	191,09	
24	71,95	146,05	164,84	172,58	177,63	180,27	182,09	183,43	184,49	185,15	185,66	186,08	186,52	186,76	187,07	187,39	187,62	188,08	189,02	190,07	190,32	190,75	191,01	193,35	194,07	

Příloha 9: Kumulativní trojúhelník *I* do 2005, metoda MCL (hodnoty v mil. Kč)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	Tail	
1	172,74	210,99	223,11	226,72	228,73	231,16	232,37	233,50	234,22	234,44	234,98	234,43	234,83	235,18	234,80	235,19	234,79	234,81	234,74	233,74	233,91	233,89	234,13	234,13	234,16	
2	147,05	192,50	200,10	202,53	205,76	206,60	206,91	207,27	207,66	207,67	208,61	208,77	209,41	209,26	209,52	209,68	209,52	209,61	208,44	207,97	207,40	207,52	207,18	207,20	207,23	
3	148,64	196,54	208,21	212,12	216,25	217,14	218,45	219,63	219,62	222,96	223,34	223,93	224,19	225,09	225,54	225,84	226,00	225,29	225,48	223,88	223,92	224,23	224,27	225,43	225,46	
4	163,38	216,77	223,85	227,13	230,82	231,28	232,33	232,31	232,89	233,56	234,31	234,77	234,92	234,73	234,12	233,87	233,88	233,86	232,10	232,01	232,01	232,01	232,16	232,11	232,52	232,54
5	177,61	222,40	228,74	231,86	234,34	235,03	235,42	237,26	237,47	238,07	238,01	237,89	237,95	237,83	237,84	237,84	237,82	237,61	238,20	238,17	238,19	238,78	239,42	246,23	246,26	
6	179,77	227,89	236,69	243,51	246,86	248,06	249,25	250,87	251,48	251,55	251,73	251,97	252,45	252,93	252,90	252,92	253,20	253,21	253,43	252,90	252,90	253,47	254,06	260,45	260,48	
7	179,14	244,91	262,02	268,58	271,09	271,18	272,28	273,62	274,91	275,22	275,74	275,90	275,88	275,92	276,08	276,05	276,19	276,75	276,61	275,95	275,95	276,43	276,89	282,26	282,29	
8	198,52	275,03	285,54	289,30	293,00	296,77	298,61	299,32	299,73	300,69	300,62	300,44	300,42	299,91	300,10	300,10	300,17	300,17	299,88	299,11	299,05	299,54	299,94	304,74	304,77	
9	191,27	241,11	246,62	249,32	250,71	251,78	252,35	253,03	253,09	256,27	256,19	256,24	256,95	256,96	256,89	257,03	257,05	257,03	256,71	256,04	255,97	256,36	256,66	260,34	260,36	
10	232,10	287,06	297,36	299,61	301,69	302,93	304,05	304,29	304,70	304,98	305,11	305,31	304,79	304,92	304,94	305,02	305,01	304,94	304,48	303,65	303,56	303,97	304,25	307,97	308,00	
11	195,68	255,73	264,69	268,34	270,78	270,97	272,47	274,25	274,76	274,91	274,87	275,14	275,16	275,40	275,49	275,63	275,68	275,70	275,45	274,75	274,70	275,16	275,54	280,12	280,15	
12	189,75	252,32	258,28	261,07	262,86	263,52	262,75	262,74	263,40	263,51	263,33	263,37	263,32	263,48	263,53	263,64	263,68	263,67	263,39	262,70	262,65	263,06	263,39	267,43	267,46	
13	165,57	202,98	207,05	208,75	210,69	210,85	211,06	211,20	211,48	211,98	212,50	212,52	212,74	212,91	212,98	213,09	213,14	213,15	212,96	212,43	212,39	212,74	213,05	216,62	216,65	
14	155,08	206,31	211,24	213,68	215,70	214,96	215,78	215,87	216,17	217,23	217,32	217,53	217,85	218,13	218,28	218,44	218,52	218,59	218,51	218,00	217,97	218,40	218,79	223,26	223,28	
15	168,46	212,38	219,22	223,28	226,41	227,44	230,07	230,44	230,41	230,41	230,78	230,99	231,31	231,59	231,74	231,89	231,97	232,03	231,92	231,37	231,34	231,78	232,18	236,76	236,79	
16	148,96	204,34	209,86	211,27	213,20	213,85	216,55	216,75	217,08	217,97	218,26	218,41	218,66	218,86	218,95	219,07	219,12	219,15	218,98	218,44	218,40	218,78	219,11	222,95	222,98	
17	152,84	184,12	188,17	189,57	190,09	191,11	191,13	191,26	191,59	192,19	192,40	192,49	192,65	192,76	192,79	192,87	192,89	192,88	192,67	192,17	192,12	192,42	192,66	195,56	195,58	
18	159,84	195,74	199,90	201,61	201,85	202,60	202,58	203,06	203,36	203,83	203,99	204,05	204,16	204,22	204,20	204,26	204,27	204,23	203,94	203,39	203,33	203,61	203,82	206,43	206,45	
19	159,85	200,92	208,51	210,80	211,57	211,87	212,64	213,20	213,54	214,10	214,30	214,38	214,52	214,61	214,62	214,69	214,70	214,68	214,40	213,83	213,78	214,09	214,33	217,28	217,31	
20	155,15	205,35	210,08	212,22	213,46	214,13	214,84	215,36	215,68	216,18	216,36	216,41	216,53	216,60	216,59	216,65	216,66	216,62	216,31	215,73	215,67	215,97	216,19	218,98	219,00	
21	143,88	169,63	171,84	173,56	174,97	175,41	175,87	176,21	176,43	176,71	176,82	176,83	176,89	176,90	176,85	176,89	176,87	176,82	176,52	176,03	175,97	176,20	176,34	178,27	178,29	
22	139,52	176,10	181,28	183,71	185,47	186,15	186,88	187,41	187,72	188,27	188,46	188,54	188,68	188,78	188,80	188,87	188,89	188,88	188,65	188,16	188,11	188,40	188,62	191,36	191,39	
23	138,97	177,39	183,41	185,89	187,68	188,39	189,14	189,68	190,00	190,57	190,77	190,85	191,00	191,11	191,13	191,21	191,23	191,22	190,99	190,49	190,45	190,74	190,97	193,79	193,81	
24	142,50	182,25	187,96	190,24	191,87	192,41	192,99	193,41	193,68	194,06	194,21	194,24	194,33	194,37	194,33	194,38	194,38	194,33	194,03	193,50	193,44	193,70	193,88	196,21	196,23	

Příloha 10: Obsah příloženého CD

[kapitola 2 – vstupní data]

Vstupní data a tvorba vývojových trojúhelníků. Nalezneme zde adresáře:

- [vstup] ... obsahuje vstupní data a sadu SQL příkazů pro zpracování vstupních dat a tvorbu vývojových trojúhelníků a lichoběžníků
- [výstup] ... obsahuje v *.txt napočítané vývojové trojúhelníky a lichoběžníky z databáze pojistných událostí

[kapitola 3 – chain ladder]

Výpočty metodou chain ladder. Obsahuje soubory:

- predpoklady.ods ... ověření předpokladu metody chain ladder
- CL.ods ... aplikace metody chain ladder na reálná data o škodách

[kapitola 4 – Mack_SCL]

Aplikace Mackova modelu (resp. metody SCL). Nalezneme zde soubory a podadresáře:

- [předpoklady] ... testování předpokladů modelu
 - [R 2.5.1] ... vstupy a výstupy statistického programu R 2.5.1
 - nezavislost.ods ... test nezávislosti škodních let
- Mack.ods ... aplikace Mackova modelu na reálná data o škodách

[kapitola 5 - MCL]

Výpočty metodou MCL. Obsahuje soubory a podadresáře:

- [předpoklady] ... testování předpokladů metody
 - [R 2.5.1] ... vstupy a výstupy statistického programu R 2.5.1
 - nezavislost.ods ... test nezávislosti škodních let v obou trojúhelnících (*P* a *I*)
- MCL.ods ... aplikace metody MCL na reálná data o škodách

[kapitola 6 - srovnání]

Srovnání metod SCL a MCL, run-off analýza rezerv. Obsahuje:

- srovnani.ods ... srovnání metod SCL a MCL
- [run-off] ... run-off analýza spočítaných rezerv pro metody SCL a MCL

[DP - text]

Text diplomové práce ve formátu pdf.

[články]

Originální články.

Literatura a použité zdroje

- [1] Boor, J.: Estimating Tail Development Factors: What to do When the Triangle Runs Out. Casualty Actuarial Society Forum (Winter 2006).
<http://www.casact.org/pubs/forum/06wforum/06w348.pdf>
- [2] Jedlička, P.: Recent developments in claims reserving. Proceedings of Week of doctoral students, Charles University, Prague, 2006.
http://www.mff.cuni.cz/veda/konference/wds/contents/pdf06/WDS06_121_m5_Jedlicka.pdf
- [3] Jedlička, P.: Various Extensions Based on Munich Chain Ladder Method. 37th International ASTIN Colloquium (19. - 22. 6. 2007).
<http://www.actuaries.org/ASTIN/Colloquia/Orlando/Papers/Jedlicka.pdf>
- [4] Mack, T.: Distribution – free Calculation of the Standard Error of Chain Ladder Reserve Estimates. ASTIN Bull. 23 (1993), 213 – 225.
<http://www.casact.org/library/astin/vol23no2/213.pdf>
- [5] Mack, T.: Measuring the Variability of Chain Ladder Reserve Estimates. Casualty Actuarial Society Forum (Spring 1994), vol. 1, 101 – 182.
<http://www.casact.org/pubs/forum/94spforum/94spf101.pdf>
- [6] Mack, T.: Schadenversicherungsmathematik. VVW Karlsruhe 1997.
- [7] Mack, T.: Which Stochastic Model is Underlying the Chain Ladder Method? Casualty Actuarial Society Forum (Fall 1995).
<http://www.casact.org/pubs/forum/95fforum/95ff229.pdf>
- [8] Mandl, P., Mazurová, L.: Matematické základy neživotního pojištění. Matfyzpress, Praha 1999.

- [9] Quarg, G., Mack, T.: Munich Chain Ladder. Munich Re 2004.
<http://www.aktuar.de/download/MunichChain.pdf>
- [10] Seminář z aktuárských věd 2004/05, Matfyzpress, Praha 2005,
příspěvek Šváb, J.: Praxe a test postačitelnosti technických rezerv
neživotních pojištění.
- [11] Schmidt, K. D., Schnaus, A.: An Extension of Mack's Model for the Chain
Ladder Method. ASTIN Bull. 26, No. 2 (1996), 247 – 262.
<http://www.casact.org/library/astin/vol26no2/247.pdf>
- [12] Stránky ČSÚ, míra inflace, 2007.
http://www.czso.cz/csu/redakce.nsf/i/mira_inflace
- [13] Stránky OpenOffice.org, 2007.
<http://www.openoffice.org/>
- [14] Stránky PostgreSQL, 2007.
<http://www.postgresql.org>
- [15] Stránky The R Project for Statistical Computing, 2007.
<http://www.r-project.org/>
- [16] Zákon č. 349/2006 Sb., o pojišťovnictví.
<http://web.mvcr.cz/sbirka/2006/sb108-06.pdf>