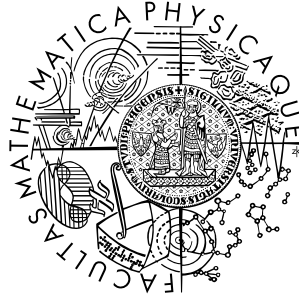


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Vojtěch Krejčířík

Toroidální černé díry?

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Oldřich Semerák, Dr.

Studijní program: fyzika, obecná fyzika

2007

Rád bych zde poděkoval svému školiteli doc. RNDr. Oldřichu Semerákovi, Dr. za podporu, poskytnutí literatury a odborné rady během práce.

Poděkování patří též mým rodičům, kteří mě podporovali po celou dobu studia.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 26.7.2007

Vojtěch Krejčířík

Obsah

Abstrakt	5
1 Úvod	6
1.1 Konvence a značení	7
2 Teorémy o jednoznačnosti	9
2.1 Definice černé díry	9
2.2 Schwarzschildovo řešení, Birkhoffův teorém	11
2.3 Reissnerovo-Nordströmovo řešení	12
2.4 Kerrovo-Newmanovo řešení	12
2.5 Některé pojmy	14
3 Topologická cenzura	15
3.1 Energetické podmínky	15
3.1.1 Slabá energetická podmínka	15
3.1.2 Dominantní energetická podmínka	16
3.1.3 Silná energetická podmínka	17
3.1.4 Nulová energetická podmínka	18
3.1.5 Vzájemné vztahy a implikace mezi podmínkami	18
3.2 Další pojmy a předpoklady	19
3.3 Teorém topologické cenzury	19
3.3.1 Hawking	19
3.3.2 Friedmann, Schleich a Witt	20
3.3.3 Galloway	20
3.4 Důsledky pro černé díry	20
4 Příklady prostoročasu s toroidálním horizontem	22
4.1 Metrika se statickou černou dírou	22
4.2 Metrika s rotující černou dírou	24

4.3 Geodetický pohyb	24
5 Závěr	28
Literatura	29

Název práce: Toroidální černé díry?
Autor: Vojtěch Krejčířik
Katedra (ústav): Ústav teoretické fyziky
Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Oldřich Semerák, Dr.
e-mail vedoucího: Oldrich.Semerak@mff.cuni.cz

Abstrakt:

V předložené práci podáváme přehled hlavních výsledků týkajících se topologie horizontu černých děr. V první části se věnujeme větám o jednoznačnosti izolovaných stacionárních černých děr, v druhé části pak větám, které omezují topologii horizontu na sférickou. Velkou pozornost věnujeme předpokladům uvedených vět. Otázka, zda by v reálném vesmíru mohly existovat i černé díry toroidálního tvaru, zůstává otevřená.

Klíčová slova: černé díry, věty o jednoznačnosti, topologie horizontu

Title: Toroidal black holes?
Author: Vojtěch Krejčířik
Department: Institute of theoretical physics
Supervisor: doc. RNDr. Oldřich Semerák, Dr.
Supervisor's e-mail address: Oldrich.Semerak@mff.cuni.cz

Abstract:

In this work we present the overview of main results relating to topology of black holes. In the first part, we study the uniqueness theorems of isolated stationary black holes, and in the second part theorems, that limit the topology of horizon to be spherical. We give attention to assumptions of presented theorems. The question, if there could be black holes with the toroidal shape in the real universe, is still opened.

Keywords: black holes, uniqueness theorems, topology of horizon

Kapitola 1

Úvod

Obecná teorie relativity, dokončená Albertem Einsteinem v roce 1915, je dnes všeobecně přijímanou teorií gravitace. Její cesta na výsluní však nebyla snadná. Vysvětlila jevy, které byly do té doby záhadou, např. stáčení perihelia Merkuru. Také předpověděla jiné, které byly krátce nato pozorovány, např. ohyb světelných paprsků v gravitačním poli. Předpověděla však i objekty, které odborná veřejnost dlouho nechtěla přijmout - černé díry.

Trvalo dlouhá desetiletí, než byla existence černých děr podpořena observačně. Vidět samotnou černou díru není možné. Lze však pozorovat její gravitační působení na okolní objekty. Například hvězda, která obíhá kolem "ničeho", je dobrým kandidátem na dvojhvězdu, kde jednou složkou je právě černá díra. Takovéto objekty bývají silnými zdroji rentgenového záření. Nejznámější z nich je dvojhvězda Cygnus X-1 v souhvězdí Labutě.

Samotný vznik černé díry je spojen s největší možnou katastrofou ve známém vesmíru. Pokud je hvězda dostatečně hmotná a vyčerpají se v ní termionukleární reakce, neexistuje již žádná síla, která by ji dokázala udržet v rovnováze proti vlastní gravitaci. Hvězdné jádro zkolabuje do černé díry a vnější slupky mohou být odvrženy v obrovské explozi supernovy. Tyto záblesky byly na hvězdné obloze pozorovány již ve starověku.

V 60. a 70. letech, kdy došlo k zásadním astronomickým objevům, významným z hlediska obecné relativity, zaznamenala velký rozvoj také teorie černých děr. Důležité hlavně z teoretického hlediska jsou tzv. věty o jednoznačnosti, které říkají, že za určitých předpokladů lze černou díru popsat jen několika málo parametry. S větami o jednoznačnosti je spojena i zajímavá otázka topologie horizontu (tvar černé díry). Známé hvězdy jsou sférického tvaru (koule), běžné jsou však i objekty s toroidálním (Saturnovy prstence)

nebo složitějším tvarem (preclíky). Nabízí se tedy otázka, jestli i horizont černé díry může nabývat různých topologií, nebo je-li tato možnost nějak omezena. Přesné formulace hlavních dosavadních výsledků v tomto směru tvoří základ této práce.

1.1 Konvence a značení

Pro zjednodušení zápisu budeme v práci používat geometrizovanou soustavu jednotek, v níž se gravitační konstanta a rychlost světla rovná jedné:

$$G = 1 \quad , \quad c = 1.$$

V této soustavě jednotek jsou veličiny buď bezrozměrné, nebo mají rozměr délky. Například hmotnost se z geometrizovaných jednotek do soustavy SI pře počítá podle vztahu

$$M[\text{kg}] = \frac{c^2}{G} M[\text{m}].$$

Matematickým aparátem obecné teorie relativity je diferenciální geometrie. Podrobné pojednání nalezne čtenář například v [1] nebo [6]. Zde uvedu jen značení a konvence užití v této práci. V celém textu se používá Einsteiнова sumační konvence. Pokud se ve výrazu vyskytují dva stejné indexy, tak se přes ně sčítá:

$$A_\mu B^\mu = \sum_{\mu=0}^3 A_\mu B^\mu.$$

Prostoročasy, kterými se budeme zabývat, jsou čtyřrozměrné s jedním časovým a třemi prostorovými rozměry. Časovou složku označíme indexem 0, prostorové indexy 1, 2, 3. Prostorčasové indexy budeme značit malými řeckými písmeny (μ, ν, α, \dots), ty probíhají hodnoty 0 až 3. Prostorové indexy budeme značit malými latinskými písmeny (i, j, k, \dots), ty probíhají hodnoty 1 až 3. Metrický tenzor $g_{\mu\nu}$ má signaturu $(-, +, +, +)$. Složky kontravariantních vektorů budeme značit horními indexy V^μ , složky kovariantních vektorů (forem) indexy dolními W_μ .

Tvar metrického tenzoru se přehledně zapisuje pomocí prostoročasového elementu

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

kde dx^μ jsou infinitesimální vektory ve směru souřadnicových čar.

Vztah mezi vektorem a formou je jednoznačně dán metrikou, např. snižování a zvyšování indexů se provádí pomocí metrického tenzoru:

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu, \quad B^\alpha = g^{\alpha\beta} B_\beta.$$

Skalární součin dvou vektorů A, B je definován pomocí metrického tenzoru:

$$(A, B) = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A_\nu B^\nu = A^\mu B_\mu.$$

Podle normy ($g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu$) můžeme rozdělit vektory do tří kategorií: časupodobné, jejichž norma je záporná, prostorupodobné, jejichž norma je kladná, a světelné (nulové), jejichž norma je rovna nule.

Parciální derivace podle souřadnic se značí čárkou:

$$A^\mu{}_{,\alpha} \equiv \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha}.$$

Její zobecnění do křivočarých prostoročasů, derivace kovariantní, se značí středníkem. Například pro vektor A^μ je

$$A^\mu{}_{;\alpha} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} A^\beta,$$

kde $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$ jsou složky afinní konexe.

Kapitola 2

Teorémy o jednoznačnosti

Ačkoli je soustava Einsteinových rovnic složitá, známe mnoho tříd jejích řešení. Jen velmi málo z nich je ovšem fyzikálně přijatelných jako popis gravitačního pole realistického zdroje. Z řešení pro izolovaný zdroj se takovému ideálu blíží některé metriky, které v centrální oblasti obsahují černou díru. V této kapitole se o nich zmíníme a formulujeme věty o jednoznačnosti, které se k nim vážou. Nejdříve však uvedeme několik důležitých definic (převzaty převážně z [2]).

2.1 Definice černé díry

Černá díra je intuitivně chápána jako objekt, jehož gravitační pole je tak silné, že ani světlo z něj nemůže uniknout. Formální definice upřesňuje tuto představu pomocí pojmů z kauzální struktury prostoročasů.

Kauzální minulost bodu P (značí se $J^-(P)$), jsou všechny body prostoročasu, které lze s daným bodem P spojit do budoucnosti mířící *kauzální křivkou*, t.j. takovou křivkou, která je v každém místě časupodobná nebo světelná. Jedná se tedy o oblast uvnitř světelných kuželů mířících do minulosti. Analogicky se definuje *kauzální budoucnost* ($J^+(P)$) jako množina všech bodů, kam se lze z daného bodu P dostat po *kauzální křivce* mířící do budoucnosti. Silnější možností je *chronologická minulost* nebo *budoucnost* ($I^\mp(P)$). Ta uvažuje jen časupodobné spojnice bodů.

Budoucí časové nekonečno (značí se i^+), je oblast, ve které končí všechny do budoucnosti mířící časupodobné geodetiky, které nekončí v singularitě. *Prostorové nekonečno* (i^0) je oblast, kde končí všechny prostorupodobné geodetiky, které nekončí v singularitě. *Minulé časové nekonečno* (i^-) je oblast,

ve které končí všechny do minulosti mířící časupodobné geodetiky, které nekončí v singularitě.

Obdobně *budoucí světelné nekonečno* (značí se \mathcal{I}^+) je oblast, kde končí všechny do budoucnosti mířící světelné křivky, které nekončí v singularitě. *Minulé světelné nekonečno* (\mathcal{I}^-) je oblast, kde končí všechny do minulosti mířící světelné křivky, které nekončí v singularitě.

Pro nadplochy S se zavádí ještě pojem *oblast budoucí závislosti* ($D^+(S)$). Jedná se o množinu takových bodů, že všechny kauzální křivky mířící z nich do minulosti protnou S .

Nyní již máme definované všechny pojmy potřebné k definici černé díry.

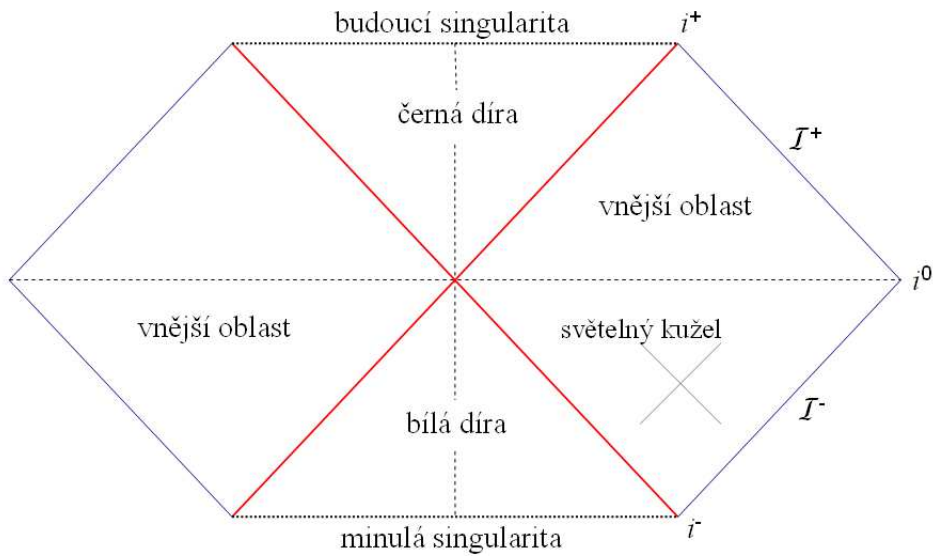
Definice (Černá díra)

Černá díra je taková část prostoročasové variety (M, g) , která není v kauzální minulosti J^- budoucího světelného nekonečna \mathcal{I}^+ .

Definice (Horizont událostí)

Horizont událostí je hranice černé díry v (M, g) , $H^+ = M \cap \partial J^-(\mathcal{I}^+)$.

Kauzální struktura je nejlépe vidět na Penroseových-Carterových konformních diagramech.



obrázek č.1: Penroseův-Carterův diagram Schwarzschildova řešení

Příklad takového diagramu pro Schwarzschildovu metriku je na obrázku 1. Jeho odvození vychází z analytického rozšíření metriky a čtenář je může najít například v [4]. Shrnu zde jen základní výsledky. Důležitou vlastností

je, že hranice světelných kuželů svírají s prostorovou i časovou osou úhel 45° . Červeně jsou na obrázku znázorněny horizonty, ty svírají s osami úhel 45° (jedná se tedy o světelné nadplochy). Modře jsou označena světelná nekonečna (\mathcal{I}^\pm), body (i^\pm, i^0) časová a prostorová nekonečna, tečkovaně singularity.

Uvážíme-li, co kauzální minulost znamená, zjistíme, že intuitivní představa uvedená na začátku odstavce souhlasí s formální definicí. To také vidíme na obrázku 1. Oblast okolo minulé singularity se označuje jako bílá díra. Odpovídá záměně $t \rightarrow -t$ a je důsledkem nezávislosti Schwarzschildovy metriky na čase. Vágně řečeno se jedná o "inverzní černou díru". Její přesné definice jsou obdobné jako u díry černé. Při reálných kolapsech hvězd se tato část prostoročasu nerealizuje.

Důležité je si uvědomit, že pro černou díru není podstatná samotná singularita v metrice, nýbrž horizont událostí. Nahá singularita jako taková může existovat, alespoň matematicky. Jelikož by takový objekt přinášel spoustu problémů, byla vyslovena domněnka kosmické cenzury, která jejich vznik zakazuje.

2.2 Schwarzschildovo řešení, Birkhoffův teorem

Řešení odvozené Karlem Schwarzschildem v roce 1915 má tento tvar:

$$ds^2 = -S^2 dt^2 + S^{-2} dr^2 + r^2 (d\theta + \sin^2 \theta d\phi), \quad (2.1)$$

kde

$$S^2 = 1 - \frac{2M}{r}. \quad (2.2)$$

Jedná se tedy o jednoparametrickou třídu řešení s parametrem M . Z porovnání s newtonovskou limitou plyne, že M má význam hmotnosti zdroje.

Krátce nato, v roce 1923, dokázal George D. Birkhoff následující větu:

Věta (Birkhoffův teorem)

Každé sféricky symetrické řešení vakuových Einsteinových rovnic je částí Schwarzschildova prostoročasu.

Z toho vidíme, jak silným předpokladem je sférická symetrie. Takové řešení je už nutně statické. Zároveň toto pole nemusí být jen kolem černé

díry, ale kolem jakéhokoli sféricky symetrického objektu, např. "hvězdy" nebo slupky.

Realizuje-li se tato metrika v celém prostoročase, je na $r = 0$ singularita a na $r = 2M$ horizont událostí. Jedná se o jednu izolovanou sféricky symetrickou černou díru s hmotností M .

2.3 Reissnerovo-Nordströmovo řešení

Zobecněním Schwarzschildova řešení pro nabité objekty je tříparametrické Reissnerovo-Nordströmovo řešení. Metrika tohoto řešení má tvar (2.1), kde

$$S^2 = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2 + P^2}{r^2}. \quad (2.3)$$

Z analýzy Maxwellových rovnic plyne, že parametr Q má význam elektrického náboje zdroje a parametr P náboje magnetického. Je vidět, že v limitě $Q \rightarrow 0$ a $P \rightarrow 0$ přechází na metriku Schwarzschildovu.

Jedná se též o sféricky symetrický prostoročas a platí pro něj zobecnění Birkhoffova teorému.

Věta (Birkhoffův teorém pro elektrovakuové rovnice)

Každé sféricky symetrické řešení elektrovakuových Einsteinových-Maxwellových rovnic je částí Reissnerova-Nordströmova prostoročasu.

Je-li celý prostoročas popsán touto metrikou, nachází se na $r = 0$ singularita. Aby existoval horizont a řešení reprezentovalo černou díru musí být splněna nerovnost:

$$M^2 \geq Q^2 + P^2. \quad (2.4)$$

V takovém případě je vnější horizont (hranice černé díry) na

$$r = M + \sqrt{M^2 - Q^2 - P^2}.$$

2.4 Kerrovo-Newmanovo řešení

Omezíme-li požadavek sférické symetrie a statičnosti na pouhou stacionaritu, je nejobecnějším řešením Kerrovo-Newmanovo. V něm se navíc objevuje čtvrtý parametr

$$a = \frac{J}{M},$$

který má význam specifického momentu hybnosti. Metrika má v Boyerových-Lindquistových souřadnicích tvar:

$$ds^2 = -\frac{\Delta\Sigma}{\mathcal{A}} dt^2 + \frac{\mathcal{A}}{\Sigma} \sin^2 \theta (d\varphi - \omega dt)^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2, \quad (2.5)$$

kde

$$\begin{aligned} \Delta &= r^2 - 2Mr + Q^2 + P^2 + a^2, \\ \Sigma &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \\ \mathcal{A} &= (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta, \\ \omega &= (2Mr - Q^2 - P^2) \frac{a}{\mathcal{A}}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Snadno lze nahlédnout, že když $a = 0$, přechází na Reissnerovu-Nordströmovu metriku, a pokud i $Q = P = 0$ redukuje se dále na metriku Schwarzschildovu. Je tedy nejobecnější z dosud uvedených příkladů.

Pokud platí nerovnost

$$M^2 \geq Q^2 + P^2 + a^2, \quad (2.7)$$

reprezentuje metrika jednu izolovanou nabitou rotující černou díru s vnějším horizontem na

$$r = M + \sqrt{M^2 - Q^2 - P^2 - a^2}.$$

Pro toto řešení platí věta:

Věta (Jednoznačnost Kerrova-Newmanova řešení)

Jediné stacionární asymptoticky ploché řešení elektrovakuových Einsteinových-Maxwellových rovnic, které je regulární na a vně horizontu černé díry, je Kerrova-Newmanova metrika.

Tedy uvedené čtyři parametry (M, Q, P, a) stačí k popisu libovolné stacionární izolované černé díry v regulárním asymptoticky plochém prostoročase. Topologie jejího horizontu je sférická. Tento výsledek je v literatuře znám jako výrok, že "černé díry nemají vlasy".

2.5 Některé pojmy

Ve formulacích vět se vyskytují některé pojmy, které je třeba objasnit.

Einsteinovy rovnice mají obecně tvar:

$$R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

kde $T_{\mu\nu}$ je tenzor energie a hybnosti a Λ kosmologická konstanta. Ve vakuových Einsteinových rovnicích je na pravé straně nula. V elektrovakuových rovnicích stojí na pravé straně nejvýše tenzor energie a hybnosti elektromagnetického pole:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu} \left(F_{\mu}{}^{\nu} F_{\nu\mu} - \frac{1}{4} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right). \quad (2.9)$$

Spolu s Einsteinovými rovnicemi pro gravitační pole je třeba vyřešit i Maxwellovy rovnice pro pole elektromagnetické:

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0, \quad F_{[\mu\nu;\rho]}{}_{\text{cycl}} = 0. \quad (2.10)$$

Tato soustava se souhrnně nazývá Einsteinovy-Maxwellovy rovnice.

Stacionarita znamená, že metrika nezávisí na čase t , přesněji řečeno že existuje takový souřadný systém, ve kterém

$$g_{\mu\nu,0} = 0.$$

Statičnost znamená, že navíc všechny nediagonální elementy metriky s jedním časovým indexem jsou rovny nule. Tedy existuje takový souřadný systém, ve kterém

$$g_{0i} = g^{0i} = 0.$$

Asymptotická plochost znamená, že daleko od zdroje přechází prostoročas v plochý, přičemž koeficienty metriky $g_{\mu\nu}$ "ubývají" určitým způsobem. Mimo jiné to také znamená, že kosmologická konstanta je v těchto případech rovna nule:

$$\Lambda = 0,$$

Což bude v dalším textu důležité.

Kapitola 3

Topologická cenzura

Věty v předchozí kapitole se týkaly jen izolovaných objektů, což je předpoklad ryze akademický. Metrika závisí na konkrétním případě, ale některé vlastnosti černých děr jsou obecně platné. V dalším textu se budeme zabývat otázkou topologie horizontu. Odpověď na tuto otázku přináší teorém topologické cenzury a věty z něj plynoucí. Před jejich formulací se blíže věnujeme předpokladům, jež v nich vystupují, hlavně energetickým podmínkám.

3.1 Energetické podmínky

V Einsteinových rovnicích (2.8) jsou zdroje pole popsány tenzorem energie a hybnosti $T_{\mu\nu}$. Pro formulaci vět není třeba znát jeho přesný tvar. Stačí, aby měl jisté základní vlastnosti, které můžeme od hmoty vždy očekávat. Ty jsou zpravidla vyjádřeny nerovnostmi, které se nazývají energetické podmínky.

V literatuře se objevují čtyři - slabá, silná, nulová a dominantní. V této podkapitole (převzaté převážně z [3] a [5]) je uvedu spolu s ilustrací jejich významu na příkladu dokonalé tekutiny, která je popsána tenzorem energie a hybnosti:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

kde ρ je hustota a p tlak v klidovém systému daného elementu a u^μ vektor jeho čtyřrychlosti.

3.1.1 Slabá energetická podmínka

Slabá energetická podmínka (WEC) říká, že tenzor energie a hybnosti splňuje v každém bodě prostoročasu nerovnost

$$T_{\mu\nu}W^\mu W^\nu \geq 0 \quad (3.2)$$

pro každý časupodobný vektor W^μ .

V případě ideální tekutiny nabývá tato podmínka tvar

$$(\rho + p) u_\mu u_\nu W^\mu W^\nu + p g_{\mu\nu} W^\mu W^\nu \geq 0.$$

V soustavě spojené s tekutinou je $u_\mu = (-1, 0, 0, 0)$ a $W^\mu = \gamma(1, a, b, c)$, kde $\gamma = (1 - a^2 - b^2 - c^2)^{-1/2}$ je kladný normalizační faktor a $a < 1$, $b < 1$, $c < 1$ další složky vektoru W^μ (norma W^μ nechť je $g_{\mu\nu} W^\mu W^\nu = -1$). Pomocí tohoto přepíšeme (3.2)

$$\begin{aligned} (\rho + p) \gamma^2 - p &\geq 0, \\ \rho + (a^2 + b^2 + c^2)p &\geq 0. \end{aligned}$$

Nerovnost má platit pro libovolný vektor W^μ , tedy pro libovolné koeficienty a, b, c nulové i nenulové, tedy se podmínka redukuje na vztahy pro hustotu a tlak

$$\begin{aligned} \rho &\geq 0, \\ \rho + p &\geq 0, \end{aligned}$$

Každý fyzikální pozorovatel (jehož vektor čtyřrychlosti je časupodobný) má tedy naměřit nezápornou hustotu a nezáporný součet hustoty a tlaku.

3.1.2 Dominantní energetická podmínka

Dominantní energetická podmínka (DEC) říká, že v každém bodě prostoročasu a pro každý normalizovaný časupodobný vektoru W^μ splňuje tenzor energie a hybnosti následující nerovnost

$$T_{\mu\nu}W^\mu W^\nu \geq 0 \quad (3.3)$$

a vektor

$$T^\mu{}_\nu W^\nu = X^\mu$$

není prostorupodobný. Tedy pro jeho normu platí:

$$X^\nu X_\nu \leq 0.$$

První nerovnost je identická se slabou podmínkou, pro ideální tekutinu tedy implikuje

$$\rho \geq 0 \quad , \quad \rho + p \geq 0.$$

Druhá nerovnost nabývá tvaru:

$$[(\rho + p) u^\nu u_\alpha W^\alpha + p g^\nu_\alpha W^\alpha] [(\rho + p) u_\nu u^\beta W_\beta + p g_\nu^\beta W_\beta] \leq 0.$$

V další úpravě využijeme stejný postup a značení jako v předchozí podkapitole. Uvážíme-li, že norma čtyřrychlosti tekutiny $u^\mu u_\mu = -1$ a $g^\nu_\mu = \delta^\nu_\mu$, obdržíme po jednoduchých úpravách

$$\begin{aligned} -(\rho + p)^2 \gamma + 2p(\rho + p) \gamma - p^2 &= \\ -\rho^2 + p^2(a^2 + b^2 + c^2) &\leq 0. \end{aligned}$$

Vztah musí platit pro libovolná a, b, c . S přihlédnutím k tomu, že $\rho \geq 0$, redukuje se druhá část podmínky na nerovnost:

$$\rho \geq |p|.$$

Každý fyzikální pozorovatel má tedy naměřit nezápornou hustotu a tlak, jehož velikost je menší než hustota.

3.1.3 Silná energetická podmínka

Silná energetická podmínka (SEC) je dána nerovností

$$\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) W^\mu W^\nu \geq 0, \quad (3.4)$$

kde W^μ je libovolný časupodobný vektor.

Pro ideální tekutinu obdržíme stejným postupem jako výše nerovnost

$$\rho + 3p + (\rho - p)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 0.$$

Tato nerovnost musí platit pro libovolné a, b, c nulové i nenulové, odtud

$$\begin{aligned} \rho + 3p &\geq 0, \\ \rho + p &\geq 0. \end{aligned}$$

Porovnáme-li podmínku (3.4) s "duálním" tvarem Einsteinových rovnic (pro $\Lambda = 0$)

$$T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi} R_{\mu\nu}, \quad (3.5)$$

nahlédneme, že silná energetická podmínka je také podmínkou na Ricciho tenzor $R_{\mu\nu}$.

3.1.4 Nulová energetická podmínka

Nulová energetická podmínka (NEC) je dána nerovností

$$T_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \geq 0 \quad (3.6)$$

pro všechny nulové vektory k^μ ($k_\mu k^\mu = 0$). Pro ideální tekutinu obrátíme stejným postupem jako výše nerovnost

$$\rho + p \geq 0.$$

Používají se i slabší, zprůměrované verze energetických podmínek. Konkrétní tvar zprůměrované nulové energetické podmínky (ANEC) je

$$\int d\lambda T_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \geq 0, \quad (3.7)$$

kde λ je afinní parametr podél nulové geodetiky a k^μ příslušný tečný nulový vektor.

3.1.5 Vzájemné vztahy a implikace mezi podmínkami

Z definic je zřejmé, že dominantní energetická podmínka vychází ze slabé, jen je přidána další nerovnost. Tedy každý tenzor, jenž splňuje dominantní energetickou podmínku, splňuje zároveň podmínku slabou. Formálně by se to dalo zapsat jako

$$\text{DEC} \Rightarrow \text{WEC}.$$

Dále platí:

$$\begin{aligned} \text{SEC} &\Rightarrow \text{NEC}, \\ \text{WEC} &\Rightarrow \text{NEC}, \\ \text{NEC} &\Rightarrow \text{ANEC}. \end{aligned}$$

Nejslabší požadavky na hmotu klade nulová energetická podmínka, respektive její zprůměrovaná verze.

3.2 Další pojmy a předpoklady

Vnější oblast (domain of outer communication) je oblast prostoročasu která je vně černé i bílé díry, formálně $I^-(\mathcal{I}^+) \cap I^+(\mathcal{I}^-)$ (viz Penroseův-Carterův diagram).

Podmínka silné kauzality v bodě P je splněna tehdy, pokud existuje takové okolí P , které žádná kauzální křivka neprotne více než jednou.

Množina \mathcal{N} je *globálně hyperbolická*, pokud splňuje podmínku silné kauzality a pro každé dva body $p, q \in \mathcal{N}$ je průnik $J^-(p) \cap J^+(q)$ kompaktní v \mathcal{N} . Množina tedy neobsahuje žádné singularity a nejde v ní "cestovat v čase". Název globálně hyperbolický souvisí s tím, že řešení vlnové rovnice (hyperbolická rovnice) pro zdroj typu δ -funkce v bodě P je v takové oblasti jednoznačné a vymizí vně $J^+(P)$.

Cauchyho povrch je taková nadplocha v prostoročase, kterou každá časupodobná nebo světelná křivka protne nejvýše jednou. Musí se tedy jednat o prostorupodobnou nadplochu.

Prostoročas je *regulárně predikabilní* z Cauchyho nadplochy S , pokud ta je homeomorfní \mathbb{R}^3 (otevřená s kompaktním uzávěrem) a jednoduše souvislá, budoucí světelné nekonečno \mathcal{I}^+ je obsaženo v uzávěru $D^+(S)$ a $J^+(S) \cap J^-(\mathcal{I}^+)$ je obsaženo v uzávěru $D^+(S)$. Tedy z nadplochy S se dá předpovědět okolí horizontu. Jde o další nuanci takového prostoročasu, který neobsahuje nahé singularity a ve kterém není možné cestovat v čase.

3.3 Teorém topologické cenzury

První se možností topologií horizontu věnoval Hawking v 70. letech [3]. Samotný teorém topologické cenzury pochází až z 90. let 20. století, z prací Friedmana, Schleicha a Witta [7] a Gallowaye [8].

3.3.1 Hawking

Věta Každá spojitá část horizontu v $J^+(\mathcal{I}^-)$ ve stacionárním regulárně predikabilním prostoročase, v němž tenzor energie a hybnosti splňuje dominantní energetickou podmínku, je homeomorfní 2-sféře.

Hawking v důkazu vychází ze vztahu mezi křivostí $R_{\mu\nu}$ a Eulerovou charakteristikou povrchu a dokazuje, že pro ni platí $\chi(H^+) \geq 0$.

3.3.2 Friedmann, Schleich a Witt

Věta Necht (M, g) je asymptoticky plochý globálně hyperbolický prostoročas splňující zprůměrovanou nulovou energetickou podmínku. Potom každá kauzální křivka z minulého světelného nekonečna \mathcal{I}^- do budoucího světelného nekonečna \mathcal{I}^+ je deformovatelná do křivky poblíž nekonečna.

Důkaz byl proveden sporem.

Z teorému vyplývá, že žádná kauzální křivka nemůže projít topologickou strukturou. Tedy žádný pozorovatel, který se nachází mimo všechny černé (i bílé) díry, nemůže vyslat signál, kterým by ověřil topologii horizontů.

3.3.3 Galloway

Věta Necht (M, g) je asymptoticky plochý prostoročas splňující zprůměrovanou nulovou energetickou podmínku a necht jeho vnější oblast je globálně hyperbolická. Potom vnější oblast je jednoduše souvislá.

Toto jsou dvě ekvivalentní formulace teorému topologické cenzury.

3.4 Důsledky pro černé díry

Výše uvedené věty vedou k omezením na topologie horizontů černých děr. V článku [9] ukázali Chruściel a Wald z teorému topologické cenzury, že stacionární černá díra musí mít sférickou topologii.

Věta Necht (M, g) je stacionární asymptoticky plochý prostoročas splňující zprůměrovanou nulovou energetickou podmínku a necht jeho vnější oblast je globálně hyperbolická. Dále necht existuje prostorupodobný řez vnější oblasti \mathcal{S} , jehož hranice v M protíná horizont \mathcal{H} v průřezu K . Je-li K kompaktní, potom každá jeho spojitá část je homeomorfní sféře.

Opuštění předpokladu stacionarity vede ke slabším výsledkům. Jejich přesná formulace je příliš složitá, proto jen shrnu výsledky z článků [10], [11]:

Řezy horizontu Cauchyho povrchem, který leží v budoucnosti minulého světelného nekonečna nebo jehož topologie se nemění, mají sférickou topologii.

Byly také provedeny numerické výpočty, které ukazují, že při speciálním nastavení počátečních podmínek kolapsu jde docílit toho, že vznikne alespoň na chvíli horizont s toroidální topologií, např. [13]. I když se torus vytvoří, vždy se uzavře dříve, než dírou uvnitř stačí proletět světlo. To je přesně v souladu s teorémem topologické cenzury.

Kapitola 4

Příklady prostoročasu s toroidálním horizontem

V této kapitole se věnuji analýze prostoročasu s toroidální topologií horizontu. Z předchozí kapitoly vyplývá, že taková stacionární řešení nejsou možná. Zde uvedené řešení však nespĺňuje jeden z předpokladů uvedených vět. Jedná se o prostoročas s nenulovou (přesněji řečeno zápornou) kosmologickou konstantou Λ . Není tedy splněn předpoklad asymptotické plochosti.

4.1 Metrika se statickou černou dírou

Tvar metriky pro toroidální černou díru je převzat z článků [14], [15] a [16]:

$$ds^2 = - \left(-\frac{2M}{r} - \Lambda \frac{r^2}{3} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{-\frac{2M}{r} - \Lambda \frac{r^2}{3}} + r^2 (dP^2 + d\phi^2), \quad (4.1)$$

kde Λ je (záporná) kosmologická konstanta. Souřadnice ϕ a P jsou periodické s periodou 2π , resp. T . Na první pohled nemusí být jasné, co tato metrika popisuje.

V metrice se vyskytují 2 singularity, na $r = 0$ a na $r = \sqrt[3]{-6M/\Lambda}$. Pro zjištění povahy singularit spočítám Kretschmannův invariant:

$$R_{\mu\nu\kappa\lambda} R^{\mu\nu\kappa\lambda} = \frac{8\Lambda^2}{3} + \frac{48M^2}{r^6}.$$

V $r = 0$ má Kretschmannův invariant singularitu $1/r^6$, nachází se zde skutečná prostoročasová singularita. Druhá singularita, $r = \sqrt[3]{-6M/\Lambda}$, se však

nezdá být fyzikální. Ze zkušenosti můžeme očekávat, že se zde nachází horizont událostí. Časový Killingův vektor $(1, 0, 0, 0)$, který je na větším r časupodobný, se na $r = r_H = \sqrt[3]{-6M/\Lambda}$ stává světelným, tedy se jedná o Killingův horizont, r_H udává "poloměr" horizontu.

Význam souřadnic lze nahlédnout tak, že si uvědomíme, že torus se dá získat postupnou identifikací protilehlých stran obdelníka. Lze jej tedy popsat dvěma periodickými souřadnicemi. V případě naší metriky hrají tuto roli souřadnice ϕ a P . Všimněme si, jaký povrch má plocha na konstantních hodnotách r a t :

$$S = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^T dP \sqrt{g_{\phi\phi} g_{PP}} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^T dP r^2 = 2\pi T r^2.$$

Konkrétně se podívejme, jaký je povrch horizontu

$$S_H = 2\pi T r_H^2.$$

Tedy veličina T přímo určuje plochu horizontu. Porovnáme-li výraz se vzorcem pro plochu toru $S = 2\pi a 2\pi b$, kde a je vzdálenost středu toru k ose symetrie (velký poloměr) a b poloměr průřezu toru (malý poloměr), nahlédneme, že veličina T mezi sebou svazuje také velký a malý poloměr toru. Je to další nezávislý parametr nutný k popisu toroidální černé díry.

4.2 Metrika s rotující černou dírou

Tvar metriky pro rotující toroidální černou díru je převzat z článku [16]:

$$ds^2 = -\frac{\Sigma \Delta_r \Delta_P}{\mathcal{A}} dt^2 + \frac{\mathcal{A}}{\Sigma} (d\phi - \omega dt)^2 + \frac{\Sigma}{\Delta_r} dr^2 + \frac{\Sigma}{\Delta_P} dP^2, \quad (4.2)$$

kde

$$\begin{aligned} \Delta_r &= a^2 - 2Mr - \frac{1}{3}\Lambda r^4, \\ \Delta_P &= 1 - \frac{1}{3}\Lambda a^2 P^4, \\ \Sigma &= r^2 + a^2 P^2, \\ \mathcal{A} &= r^4 \Delta_P - a^2 P^4 \Delta_r, \\ \omega &= \frac{\Delta_r P^2 + r^2 \Delta_P}{\Sigma^2} a. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Tato metrika je zobecněním metriky (4.1) pro případ rotující černé díry. Skutečně provedeme-li limitu $a \rightarrow 0$, přejde tato metrika na (4.1). O rotaci vypovídá nenulový element metriky $g_{t\phi}$. Parametr a má význam specifického momentu hybnosti, obdobně jako v Kerrově metrice. Provedeme-li limitu $\Lambda \rightarrow 0$, nezískáme Kerrovo řešení. Stejně jako z metriky (4.1) nevznikne takovou limitou Schwarzschildovo řešení.

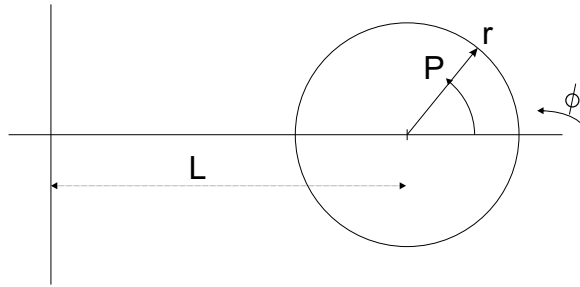
4.3 Geodetický pohyb

Vlastnosti prostoročasu se dají studovat také na pohybu volných testovacích částic. Takový pohyb se děje po (časupodobných) geodetických křivkách popsaných rovnicí

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0, \quad (4.4)$$

parametr τ má význam vlastního času a $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ jsou složky afinní konexe.

Rovnici geodetiky jsme řešili v poli statické toroidální černé díry popsané metrikou (4.1). Numerické řešení jsme provedli pomocí programu Mathematica. Při zobrazení do třírozměrného prostoru jsme postupovali podle obrázku 2.



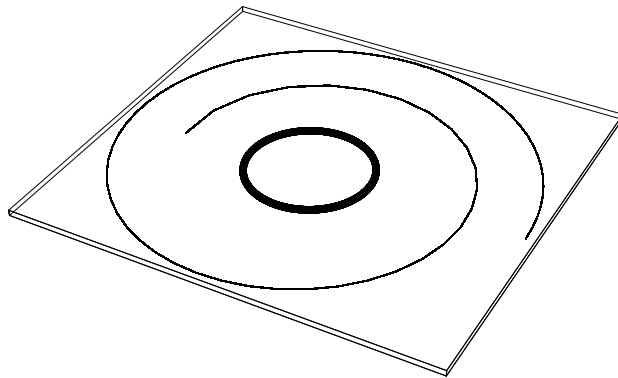
obrázek č.2: zobrazení souřadnic

L je nezávislým parametrem systému (spolu s hmotností M a kosmologickou konstantou Λ). Je svázán s periodou souřadnice P (T) a určuje velikost toru. Jeho hodnota by tedy měla být větší než je poloměr horizontu r_H . Zobrazení dává dobrý smysl jen v okolí horizontu (pro hodnoty $r < L$), jinak už nemusí být jednoznačné. To souvisí také s tím, že metrika (4.1) má cylindrickou symetrii (ve směrech P a φ) a toroidální černá díra vznikla "uměle" prohlášením φ za periodickou souřadnici. Hlubší vlastnosti metriky a případné lepší zobrazení by stály za promyšlení.

V uvedených řešeních jsou použity tyto parametry prostoročasu:

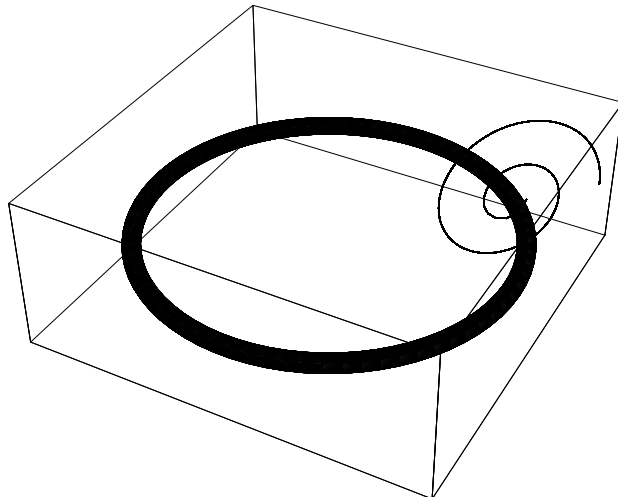
$$\begin{aligned} M &= 1, \\ \Lambda &= -0,001. \end{aligned}$$

Pro tyto hodnoty vychází poloměr horizontu $r_H \approx 18$, proto volím $L = 400$. Pro ověření správnosti numerického výpočtu jsme sledovali normalizaci čtyřrychlosti na hodnotu -1 . U všech řešení se zachovávala na 4 platné cifry ($0.999 < |g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu| < 1.001$). Obrázky 3 až 6 ukazují geodetiky s různými počátečními podmínkami.



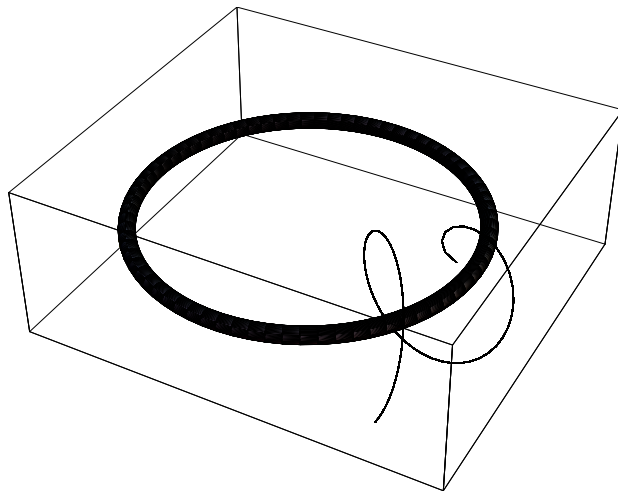
obrázek č.3: geodetika s počátečními podmínkami

$$\begin{aligned}
 r^{(0)} &= 1000 & P^{(0)} &= 0 & \varphi^{(0)} &= 0 \\
 u_r^{(0)} &= 0 & u_P^{(0)} &= 0 & u_\varphi^{(0)} &= 0.1
 \end{aligned}$$



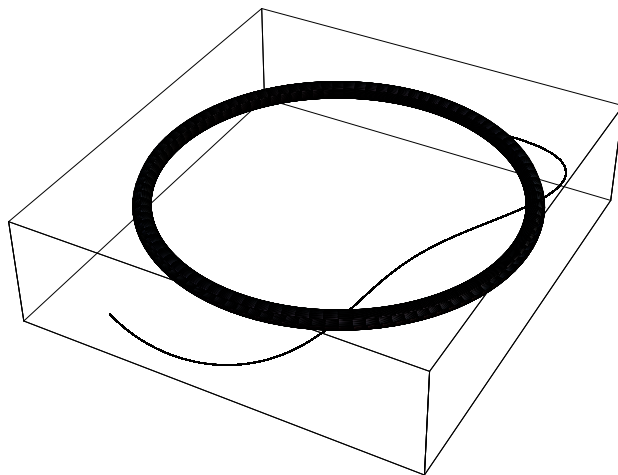
obrázek č.4: geodetika s počátečními podmínkami

$$\begin{aligned}
 r^{(0)} &= 200 & P^{(0)} &= 0 & \varphi^{(0)} &= \pi/4 \\
 u_r^{(0)} &= 0 & u_P^{(0)} &= 0.1 & u_\varphi^{(0)} &= 0
 \end{aligned}$$



obrázek č.5: geodetika s počátečními podmínkami

$$\begin{aligned}
 r^{(0)} &= 200 & P^{(0)} &= 0 & \varphi^{(0)} &= -0.8 \\
 u_r^{(0)} &= 0 & u_P^{(0)} &= 0.2 & u_\varphi^{(0)} &= 0.02
 \end{aligned}$$



obrázek č.6: geodetika s počátečními podmínkami

$$\begin{aligned}
 r^{(0)} &= 150 & P^{(0)} &= 0 & \varphi^{(0)} &= -2.3 \\
 u_r^{(0)} &= 0 & u_P^{(0)} &= -0.1 & u_\varphi^{(0)} &= 0.05
 \end{aligned}$$

Kapitola 5

Závěr

V práci jsme shrnuli nejdůležitější výsledky získané při zkoumání otázky, zda černé díry mohou mít horizont jiné než sférické topologie. Zcela vyloučen není toroidální horizont, ale je jasné, že takový může existovat jen za speciálních podmínek. Očekáváme, že některé z obvyklých předpokladů (globální hyperboličnost, energetická podmínka) jsou ve skutečném vesmíru splněny. Jiná situace je u asymptotické plochosti (kosmologická konstanta). Je-li kosmologická konstanta nulová, pak stacionární toroidální černé díry neexistují. Současná experimentální data však nasvědčují tomu, že kosmologická konstanta je nenulová. Je-li záporná, mohou toroidální černé díry existovat, jak víme z kapitoly 4. Stejně tak mohou existovat v prostoročasech s vyšším počtem prostorových rozměrů. V těchto případech jsou známy celé třídy černých děr, které nejsou sférické. Souhrnně se označují jako topologické černé díry.

Mohlo by se zdát, že toroidální černé díry jsou jen matematickou konstrukcí. Projevy některých astrofyzikálních objektů (zejména aktivních galaktických jader, viz [17], [18]) by však mohly být interpretovány i pomocí toroidálních černých děr. Otázka existence tohoto exotičtějšího typu černých děr tak zůstává i z observačního hlediska otevřená.

Literatura

- [1] Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A.: *Gravitation*, Freeman, New York, 1973.
- [2] Heusler M.: *Black hole uniqueness theorems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [3] Hawking S.W., Ellis G.F.R.: *The large scale structure of space-time*, Cambridge University Press, Cambridge, 1973.
- [4] Dvořák L.: *Obečná teorie relativity a moderní fyzikální obraz vesmíru*, skriptum SPN, Praha, 1984.
- [5] Poisson E.: *A Relativist's Toolkit. The Mathematics of Black-Hole Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [6] Kowalski O.: *Základy Riemannovy geometrie*, Karolinum, Praha, 1995.
- [7] Friedman J.L., Schleich K., Witt D.: Phys. Rev. Lett., **71**, 1486 (1993).
- [8] Galloway, G.J.: Class. Quantum Grav., **12**, L99 (1995).
- [9] Chruściel P.T., Wald R.M.: Class. Quantum Grav., **11**, L147 (1994).
- [10] Jacobson T., Venkataramani S.: Class. Quantum Grav., **12**, 1055 (1994).
- [11] Browdy S.F., Galloway G.J.: J. Math. Phys., **36**, 4952 (1995).
- [12] Friedman J.L., Higuchi A.: Ann. Phys. (Leipzig), **15**, 109 (2006).
- [13] Hughes S.A., Keeton C.R., Walker P., Walsh K., Shapiro S.L., Teukolsky S.A.: Phys. Rev. D, **49**, 4004 (1994).
- [14] Huang C., Liang C.: Phys. Lett. A, **201**, 27 (1995).

- [15] Vanzo L.: Phys. Rev. D, **56**, 6457 (1997).
- [16] Klemm D., Moretti V., Vanzo L.: Phys. Rev. D, **57**, 6127 (1998).
- [17] Spivey R.J.: Mon. Not. R. Astron. Soc., **316**, 856 (2000).
- [18] Pompilio F., Harun-or-Rashid S.M., Roos M.: Astron. Astrophys., **362**, 865 (2000).