

Identifikace reologických vlastností  
meziobratlové ploténky *in vitro*  
metodou volných oscilací

PETRA ZEMANOVÁ

DISERTAČNÍ PRÁCE

FTVS UK  
PRAHA 2007

**Děkuji Prof. S. Otáhalovi, CSc. za laskavé vedení této práce.**

Nemalý dík zaslouží všichni níže jmenovaní, kteří svou radou i odbornou pomocí přispěli ke zdárnému a smysluplnému dokončení této disertační práce:

Doc. RNDr. Jiří Bok, CSc.-MFF UK Praha, Fyzikální ústav

RNDr. Jiří Buben, CSc.-AVČR Praha, Ústav struktury a mechaniky hornin

Doc. RNDr. Aleš Drápal, CSc.-MFF UK Praha, Katedra algebry

Prof. Ing. František Maršík, DrSc.-AVČR Praha, Ústav termodynamiky

Doc. Ing. Miloslav Sochor, CSc.-ČVUT, Fakulta strojní

Doc. RNDr. Miloš Zahradník, CSc.-MFF UK, Katedra matematické analýzy

Mgr. Josef Zeman-FTVS UK, Katedra anatomie a biomechaniky

Zvláštní poděkování firmě PEMAR, spol. s r. o., jmenovitě paní Jiřině Zemanové a panu Josefu Zemanovi, za finanční podporu mé rodiny během studia.

### **Projekt podpořily:**

#### **Grantová agentura Univerzity Karlovy**

grant 93/2003/C:

Nedestrukční a neinvazivní identifikace mechanických vlastností meziobratlové ploténky

grant 17/2005/C:

”Spinální vibrační přenosová funkce určovaná *in vivo*”

#### **Grantová agentura České Republiky**

grant 106/03/0958:

”Aplikace tkáňové biofluidiky v inovaci biomateriálů”

#### **Ministerstvo průmyslu a obchodu ČR**

Program TANDEM MPO ČR ev.č.: FT-TA3/13:

”Řešení problematiky páteřních onemocnění z pohledu degenerativních a poúrazových stavů s využitím poznatků tkáňového inženýrství, biomechaniky obratlů, osseointegrace umělých náhrad a studia důvodů jejich selhání”

Prohlašuji, že jsem na této disertační práci pracovala samostatně a použila jsem pouze uvedené literatury.

V Praze 21. února 2007

# Obsah

Úvod	5
Cíle a hypotézy	7
<b>I Teoretická východiska</b>	<b>9</b>
<b>2 Meziobratlová ploténka</b>	<b>10</b>
2.1 Anatomie páteře	10
2.1.1 Morfologie a fyziologie meziobratlové ploténky	14
<b>3 Základní třídění reologických polí</b>	<b>19</b>
3.1 Linearita	22
3.1.1 Volné kmitání tlumené soustavy	23
3.2 Kyvadlo se suchým třením	27
3.3 Kyvadlo s viskózním útlumem	28
3.4 Kmity kubického kyvadla	29
3.5 Eukleidovské kyvadlo	32
3.6 Kyvadlo s obecnou mocninou	36
3.7 Kmitání ve 3D	37
<b>II Experiment</b>	<b>39</b>
<b>4 Metodika</b>	<b>40</b>
4.1 Experimentální materiál	40
4.2 Popis měřících aparatur	41
<b>5 Zpracování naměřených dat</b>	<b>48</b>
5.1 Rekonstrukce potenciálu z experimentálních dat	49
5.2 Materiálové konstanty	54
5.3 Trojosa měření	58

<b>Diskuze</b>	<b>61</b>
<b>Závěr</b>	<b>66</b>
<b>Literatura</b>	<b>68</b>
<b>Rejstřík</b>	<b>72</b>
<b>Dodatky</b>	<b>74</b>
<b>A Výpočtový program pro potenciálovou jámu v Octave</b>	<b>74</b>
<b>B Fotodokumentace</b>	<b>76</b>
<b>C Kalibrace aparatury</b>	<b>79</b>
C.1 Kalibrace na ocelové tyči . . . . .	79
C.2 Kalibrace na polyetylenové tyči . . . . .	83
C.2.1 Měření metodou ohybových kmitů-flexe-pro kruhovou tyč . . . . .	84
C.2.2 Testovací experiment pro měření pomocí torzních kmitů . . . . .	85
<b>D Rozbor chyb měření</b>	<b>88</b>
<b>E Rešeršní přehled podobné tematiky ve světě</b>	<b>90</b>
<b>F Teorie měření</b>	<b>92</b>

# Úvod

Diskogenní onemocnění páteře patří k nejčastějším onemocněním v současné společnosti a jako příčina pracovní neschopnosti stojí na jednom z předních míst především proto, že převážně postihuje nemocné v produktivním věku. Jsou také častou příčinou úplné nebo částečné pracovní neschopnosti. Chirurgii meziobratlových plotének přehledně ukazuje Šourek [16]. V posledním desetiletí se do popředí dostávají náhrady meziobratlových disků různými typy protéz. Kritickému přehledu současně užívaných ploténkových náhražek se ve své diplomové práci věnovala Prokešová [14].

Předkládaná práce se zabývá výzkumem mechanických vlastností meziobratlové ploténky v oblasti malých výchylek hluboko uvnitř fyziologického rozsahu pohybu. Řešení této problematiky započalo i pod vlivem diplomové práce Zemanové [19], při jejímž vypracování vyplynula důležitost přesného popisu mechanických vlastností ploténky jak pro pochopení funkce tohoto lidského konstrukčního prvku tak pro eventuelní návrh konstrukce ploténkových náhražek, neboť takové náhrady, které se s maximální měrou podobají svými vlastnostmi své předloze-ploténce fyziologické, nebudou způsobovat předvídatelné i nepředvídatelné poimplantační komplikace [14]. Některé základní ideje byly načrtnuty již v citované diplomové práci, zde jsou pak konkretizovány, rozšířeny a vypracovány. Detailní znalost a schopnost matematicky relevantního popisu ploténky jako celku, neboť to je hledisko, ze kterého je v rámci celé práce vycházeno, je zajímavé i na obecnější úrovni, neboť popis, ke kterému je směřováno, se zdá být použitelný i pro jiné biologické tkáně jako jsou cévy nebo kůže [20].

Práce má dvě části, část experimentální, ve které se na zvířecích ploténkách prováděla oscilační a úhlová měření pro deformace typu rotace, laterální flexe a flexe především o jednom stupni, ale i o třech stupních volnosti, a část teoretickou, ve které jsou analyzována získaná data a rekonstruován potenciál mechanické energie a vyvozeny závěry o přenosu energie mezi jednotlivými složkami pohybu. Pro výzkumnou práci na tomto úkolu byl udělen tříletý grant GAUK 93/2003/C: Nedestrukční a neinvazivní identifikace mechanických vlastností meziobratlové ploténky, který však byl z důvodů reorganizace grantové agentury Univerzity Karlovy ukončen po prvním roce řešení; výzkum byl pak prováděn především za podpory grantu GAČR 106/03/0958: "Aplikace tkáňové biofluidiky v inovaci biomateriálů", a z určité části i za podpory grantu GAUK 17/2005/C: "Spinální vibrační přenosová funkce určovaná *in vivo*" a grantu Ministerstva průmyslu a obchodu ČR Program TANDEM MPO ČR ev.č.: FT-TA3/13: "Řešení problematiky páteřních onemocnění z pohledu degenerativních a poúrazových stavů s využitím poznatků tkáňového

inženýrství, biomechaniky obratlů, osseointegrace umělých náhrad a studia důvodů jejich selhání”.

Funkce meziobratlové ploténky jsou mnohé, známe jen některé. Abychom vyhověli i těm funkcím, které ještě neznáme, je nutno poznat a napodobit přesné vlastnosti meziobratlové ploténky a zohlednit je v modelech i konstrukci ploténkové náhražky. Meziobratlová ploténka je nesmírně složitá struktura, jejíž mechanické vlastnosti se mění v denním cyklu, s věkem a, bohužel pro zjišťování chování této struktury za fyziologických podmínek, i s okamžikem úmrtí. Jemnostmi těchto typů změn se tato práce nezabývá, je zde měřena pouze vnější reologie, ovšem v plné složitosti. Pro maximální přiblížení živé tkáni byla všechna měření prováděna v technicky nejkratší možné době po porážce, řádově v hodinách.

Pro výše uvedené měření byl zkonstruován přístroj, který umožňuje měřit viskoelastické vlastnosti IVD pro torzi (T), laterální flexi (LF), flexi (F) a extenzi (E). Aparatura prošla během výzkumné práce vývojem podle potřeb měření. Aparatura se zásadně od jiných v literatuře uváděných [24] liší tím, že neomezuje přenos energie z jednoho směru do druhého, a tedy se při identifikaci tohoto mezisměrového přenosu energie více blížíme fyziologickému stavu zatížení této struktury.

Pro bližší pochopení chování meziobratlové ploténky v různých směrech zatížení se teoretická část této práce zabývá i ontogenetickým vývojem měřené struktury, stejně tak i její anatomickou stavbou. S využitím digitálního mikroskopu Olympus se detailní strukturou meziobratlové ploténky za využití fluorescenčních technik zabýval Lukeš [10], z jehož práce zde též vycházíme.

Základní smysl této práce spočívá v určení přenosu energie mezi jednotlivými směry pohybu. Dobrá náhražka meziobratlové ploténky musí být schopná energii i absorbovat a nebýt pouze ”ocelovým” kloubem umožňující pohyb.

# Cíle

Cílem této práce je detailní popis některých dosud neprobádaných materiálových a strukturálních vlastností meziobratlové ploténky ve fyziologickém rozsahu pohybu a zatížení. Panuje přesvědčení, že optimální případně později konstruovaná ploténková náhrada by měla opisovat především co nejpřesněji vlastnosti své předlohy, a to zejména právě v oblasti malých a velmi malých výchylek a zatížení ve fyziologickém rozsahu, neboť toto je oblast, ve které bude po implantaci nejčastěji využívána. I drobná odchylka od těchto vlastností může způsobovat následné funkční potíže, byť v současné době chybí predikce jaké [14].

## Hypotézy

- H1** Meziobratlová ploténka se oblasti fyziologických výchylek chová jako lineární elastický materiál.
- H2** Útlum v ploténce je lineárně viskózní.
- H3** Existuje korelace mezi vlastní rezonanční frekvencí FSU a frekvencí maximálního útlumu.
- H4** Existuje mezisměrový přenos sil v ploténce.

**ad H 1** Tato vlastnost bude zkoumána v torzním kyvadle, kdy jeden obratel bude fixován k nehybné podložce a na druhém bude připevněno vahadlo o známém momentu setrvačnosti. Jedinou mechanickou vazbu mezi obratlem s pohyblivým vahadlem a obratlem pevně fixovaným k podložce bude tvořit meziobratlová ploténka. Kmity takového vahadla v oblasti malých a velmi malých výchylek se chovají tak, že jejich perioda kmitu je amplitudově nezávislá.

**ad H 2** Ve stejném experimentu jako v případě H1 bude studován pozvolný amplitudový útlum jednotlivých kmitů a vzájemný vztah těchto amplitud. Při čistě viskózním tlumení je disipace energie přímo úměrná okamžité rychlosti pohybujících se částí. Budeme-li proto snímat rychlost pohybu kyvadla elektromagnetickým měničem, budeme schopni vyhodnotit tvar a lineárnost útlumového procesu.



**ad H 3** Citlivost rezonančního systému tvořeného pružně spojenými nepřetlumenými hmotnými částmi je různá pro různé frekvence. Také může obecně platit, že útlumové vlastnosti takové soustavy jsou rovněž frekvenčně závislé. Pokusíme se zjistit pomocí vynucených kmitů různých frekvencí jaké vztahy mezi těmito veličinami v reálné páteři panují. Vynucené kmity budou buzeny na pohyblivém obratli způsobem uvedeným v H1 s k aparatuře přidaným elektromagnetickým měničem.

**ad H 4** Zatímco v přímo orientovaném lineárním modelu kmitá daná soustava pouze v rovině původně vybuzených kmitů, dá se předpokládat, že optimalizované biologické soustavy budou mít tendenci nekmitat pouze v původně vybuzeném směru, ale přenést kmitání i do směrů ostatních a rozložit tak namáhání a disipovanou energii do co největšího objemu. Jeden obratel bude opět fixován k nehybné podložce, zatímco druhý bude opatřen třemi navzájem kolmými akcelerometry na konci dvou navzájem kolmých symetrických vahadel. Po vybuzení delta pulzem v některém ze třech směrů (F-E, LF, T) bude pozorován útlumový děj a jeho případná disipace do směrů nekolineárních se směrem původního vybuzení.

Část I  
Teoretická východiska

# Kapitola 2

## Meziobratlová ploténka

V této kapitole je shrnuto několik základních poznatků o anatomickém uspořádání a ontogenetickém vývoji páteře a meziobratlové ploténky, základní struktura páteřních elementů a rozdílech těchto struktur u člověka a některých obratlovců, jejichž páteře byly použity v experimentu.

### 2.1 Anatomie páteře

Páteř jako celek je součástí axiálního systému. Vzhledem ke vzpřímenému držení těla ve stoji i při lokomoci je totiž axiální systém hlavní pohybovou bází, od které se každý pohyb odvíjí. Není pohyb, který by neměl v axiálním systému odezvu, zároveň neexistuje pohyb vlastního axiálního systému, který by se nepromítal do organismu [35].

Axiální systém se skládá z řady stavebních komponent, soustředěných kolem páteře, které mají nosnou, ochrannou a hybnou funkci. Systém tvoří: osový skelet-páteř, spoje na páteři, svaly pohybující osovým skeletem, kosterní základ hrudníku i jeho spoje a dechové svaly. V širším kontextu patří k axiálnímu systému i příslušná řídicí složka, tj. ta část nervové soustavy, která zabezpečuje funkce systému, popřípadě je jeho činností přímo dotčena (např. výstupy míšních nervů).

Základní složkou osového systému je páteř (obr. 2.1). Základní funkční jednotkou páteře je pohybový segment páteře (funkční pohybová jednotka páteře). Anatomicky se pohybový segment skládá z polovin sousedních obratlových těl, páru meziobratlových kloubů, meziobratlové ploténky, krátkých páteřních vazů a svalů. Z funkčního hlediska má pohybový segment tři základní složky:

- 1) nosnou-nosnými a pasivně fixačními složkami segmentu jsou obratle a meziobratlové vazy
- 2) hydrodynamickou-hydrodynamickou složku segmentu představuje meziobratlová ploténka a cévní systém



Obrázek 2.1: Páteř, pohled zepředu a ze strany

3) pohybovou-pohybovou a aktivně fixační složkou jsou meziobratlové klouby a svaly

Pro potřeby této práce však funkční pohybovou jednotkou (FSU) nazýváme pouze dvojici obratlů zbavenou vazů a svalů (obr. 4.1).

Obratel je základním stavebním prvkem nosné složky páteře. Každý samostatný obratel, s výjimkou prvních dvou krčních, se skládá z těla obratle, z obratlového oblouku ohraničující obratlový otvor, ze čtyř kloubních výběžků, ze dvou příčných výběžků a z trnového výběžku. Přehled obratlů jednotlivých oddílů páteře nastiňují obr. 2.2 až 2.5 [36].

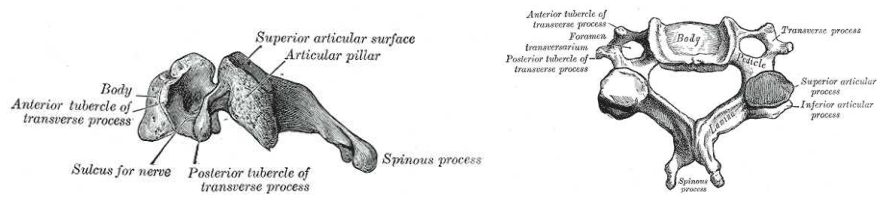
Obratlová těla jsou nosnými prvky páteře. Mezi jednotlivými úseky páteře jsou z hlediska mechanické odolnosti obratlových těl velké rozdíly. Hlavní zatížení nesou masivní těla bederních obratlů a těla dolních hrudních obratlů.

Oblouk obratle má především ochrannou funkci. Je místem úponu páteřních vazů, které dotvářejí a uzavírají páteřní kanál obsahující míchu, míšní obaly, cévní pleteně a míšní kořeny (obr. 2.6).

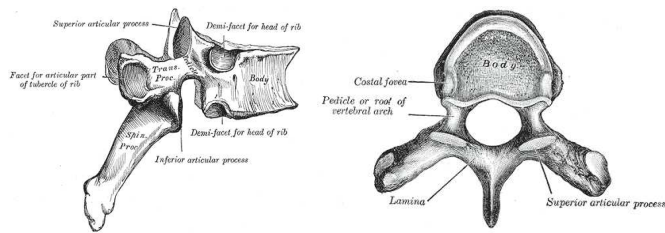
Obratlové kloubní výběžky jsou kloubními konci meziobratlových kloubů, obratlové výběžky příčné a trnové slouží jako místa začátků vazů (obr. 2.6) fixujících obratle a svalů zajišťujících pohyb páteře.

Obratle jsou fixovány vazy a svaly. Vazivové spoje jsou pasivní částí nosné složky segmentu. Anatomicky lze na páteři rozlišit krátké a dlouhé vazy, oba typy se podílejí na fixaci segmentů. K dlouhým vazům patří *ligamentum longitudinale anterius* a *ligamentum longitudinale posterius*, krátké vazy-*ligamentum flavum*, *ligamentum interspinale* a *ligamentum intertransversalis*-spojují oblouky a výběžky sousedních obratlů.

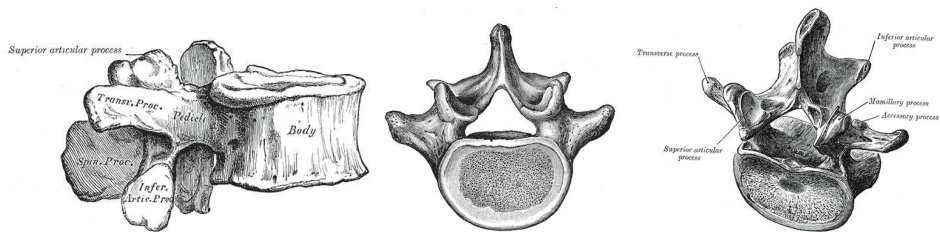
Přední podélný vaz běží po přední ploše obratlových těl-od předního oblouku atlasu až na přední plochu křížové kosti. Je to 20 – 25 mm široký pruh kolagenního vaziva, který



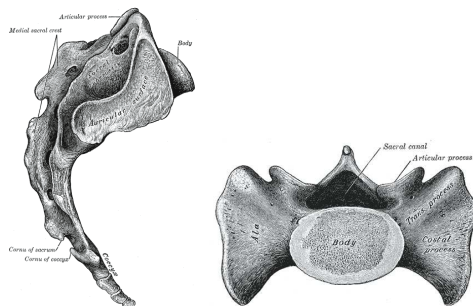
Obrázek 2.2: Krční obratel.



Obrázek 2.3: Hrudní obratel.



Obrázek 2.4: Bederní obratel.



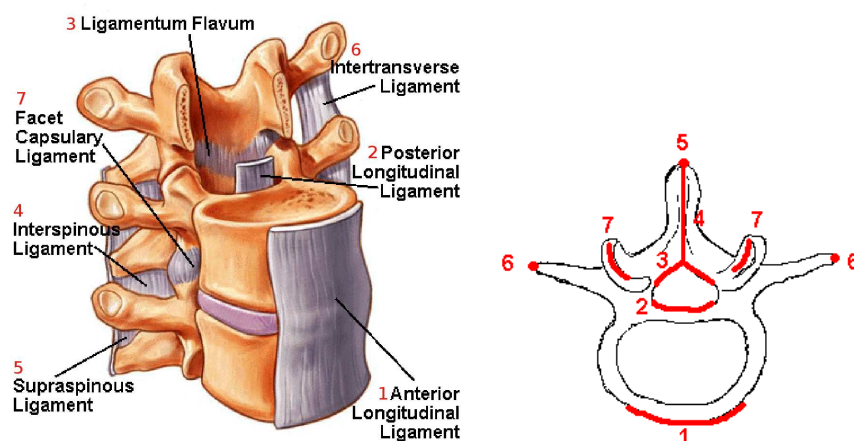
Obrázek 2.5: Kost křížová.

je vždy pevněji fixován k hornímu okraji obratlového těla, než k jeho dolnímu okraji. Tradované volnější spojení s vazivovými prstenci meziobratlové ploténky neurochirurgické zkušenosti nepotvrzují. Přední podélný vaz svazuje a zpevňuje prakticky celou páteř. Napíná se při retroflexi (záklonu) a brání ventrálnímu vysunutí meziobratlové destičky. Funkční význam předního vazy i ostatních vazivových struktur páteře není jen v relativně pasivní roli vaziva svazujícího kosterní prvky axiálního skeletu. Tyto a další vazivové komponenty páteře jsou bohatě inervovány a vazivo je proto významným zdrojem informací, signalizujících napětí, resp. směr pohybu určitého úseku páteře.

Zadní podélný jde po přední stěně páteřního kanálu-od týlní kosti až do kanálu křížové kosti. Zadní podélný vaz je užší než přední vaz, a v bederním úseku je redukován pouze na několik vazivových proužků. Vaz nekryje celou zadní plochu meziobratlové destičky a zejména v bederním úseku, kde je velmi úzký, je fixován spíše k periostu obratlových oblouků než k tělům a meziobratlovým destičkám bederní páteře.

Mezi přední plochou vazy a skeletem, resp. meziobratlovými destičkami je štěrbinovitý prostor vyplněný žilními pleteněmi.

Přední i zadní podélný vaz zpevňují páteř jako celek a brání vysunutí meziobratlové ploténky při retroflexi resp. anteflexi ventrálně resp. dorzálně.



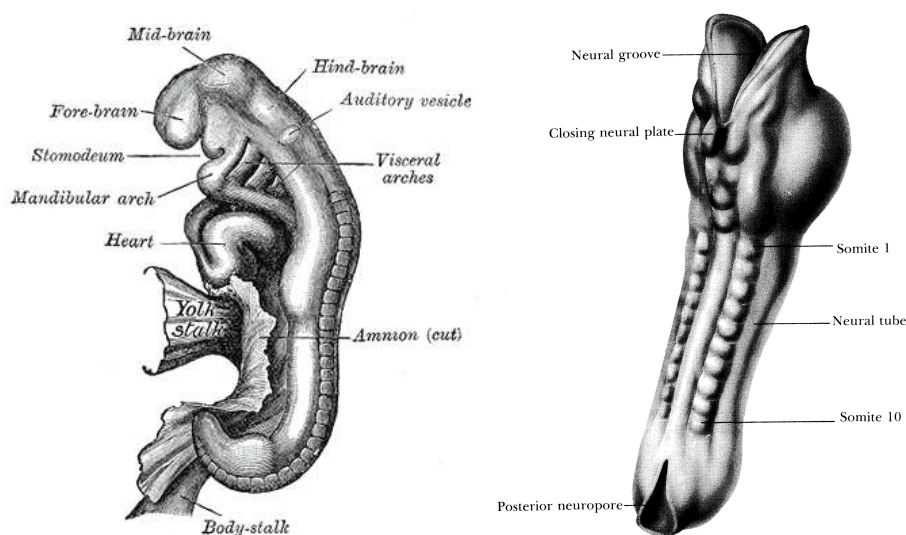
Obrázek 2.6: Krátké a dlouhé vazy páteře [34, 38].

## 2.1.1 Morfologie a fyziologie meziobratlové ploténky

### Embryologický vývoj

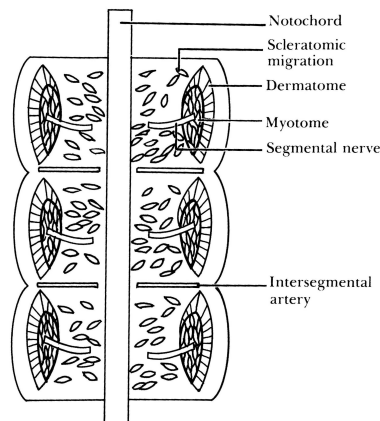
Páteř je segmentová struktura, jednotlivé segmenty lze rozpoznat již kolem 21. dne gestace. V tomto období se paraxiální mesoderm začíná formovat do párových kubických oddílů, které se nazývají somity (obr. 2.7). Během dalšího vývoje se somity formují do tří oddělených částí (obr. 2.8) [5]:

- 1) laterální povrchové dermatomy
- 2) laterální hlubší myotomy
- 3) mediální centrální sklerotomy

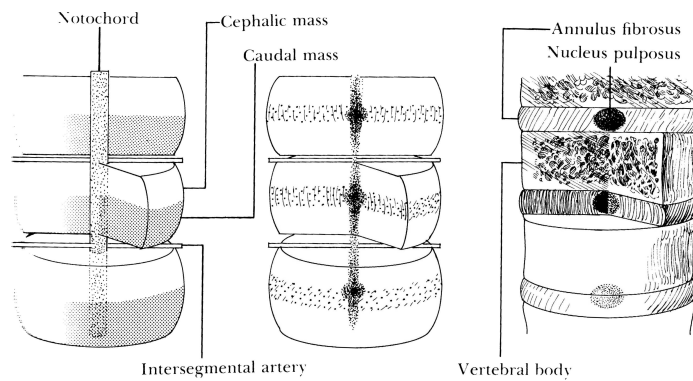


Obrázek 2.7: Embryo, 18.-23. den [36, 5].

Sklerotomy migrují mediálně a obklopí notochord, čímž jej oddělí od neurální trubice a střev (obr. 2.8). Každý z původních sklerotomů se dále rozdělí na kraniální a kaudální polovinu. Každá kaudální polovina posléze splyne s kraniální polovinou sousedního sklerotomu. Tato dvojice tvoří budoucí obratlové tělo. Z centrální části původního sklerotomu se formuje meziobratlová ploténka. Notochord podléhá mukózní degeneraci a na konci desátého týdne embryonálního vývoje jej nalzáme již pouze zavzatý do prostoru disku, kde dává základ vzniku *nucleus pulposus*. *Annulus fibrosus* je formován mesodermálními buňkami, zprvu bez jasného uspořádání, posléze se buňky protahují a vytvářejí specifické lamelózní uspořádání. V období porodu je diferenciace buněk *annulus fibrosus* již definitivně dokončena.



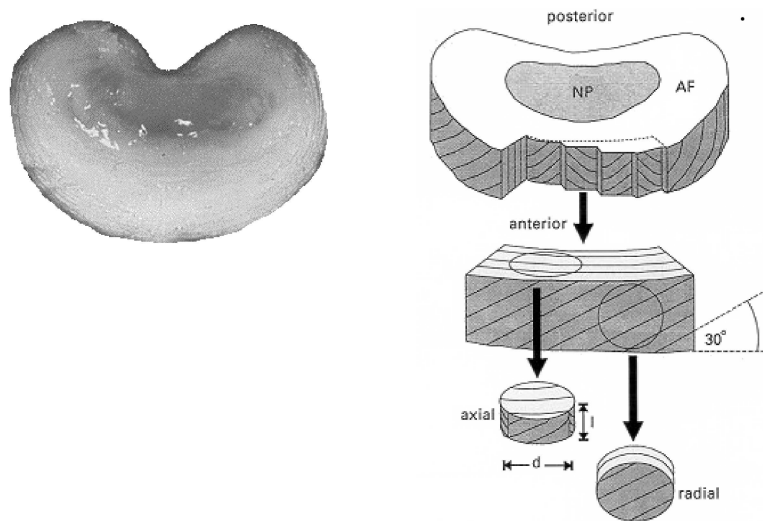
Obrázek 2.8: Sklerotomy migrují mediálně a obklopí notochord, čímž jej oddělí od neurální trubice a střev [5].



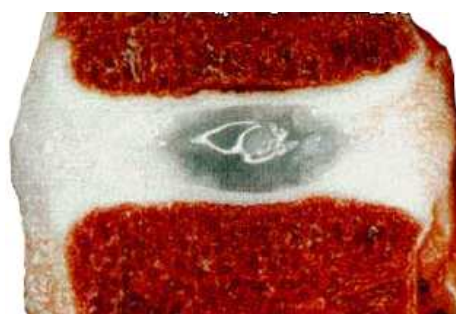
Obrázek 2.9: Každý z původních sklerotomů se dále rozdělí na kraniální a kaudální polovinu. Každá kaudální polovina posléze splyne s kraniální polovinou sousedního sklerotomu. Tato dvojice tvoří budoucí obratlové tělo. Z centrální části původního sklerotomu se formuje meziobratlová ploténka. Notochord podléhá mukózní degeneraci a na konci desátého týdne embryonálního vývoje jej nalézáme již pouze zavzatý do prostoru disku, kde dává základ vzniku nucleus pulposus [5].

Meziobratlové ploténky jsou významnou strukturální a funkční součástí páteře. Meziobratlová ploténka je útvar z vazivové chrupavky, která má tvar a rozsah intervertebrálních ploch obratlových těl, které spojuje.





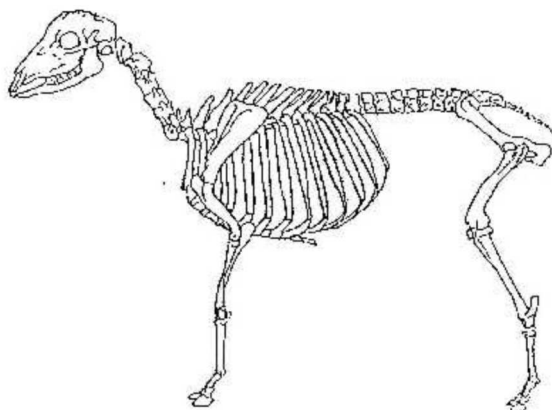
Obrázek 2.10: Příčný řez meziobratlovou ploténkou a její schema [31, 32]



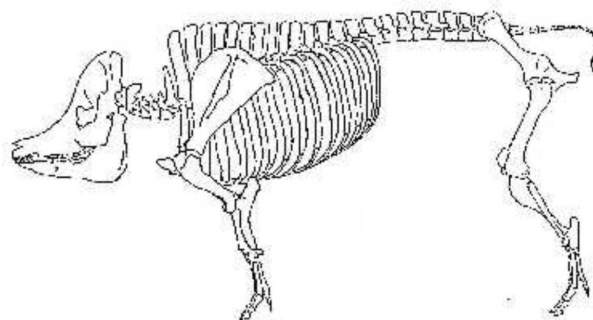
Obrázek 2.11: Adolescentní meziobratlová ploténka [33]

## Základní anatomie páteře ovce domácí a prasete domácího

Pro experimenty byly použity vzorky meziobratlových plotének ovce domácí (*ovis domestica*) a prasete domácího (*sus scrofa*). Základní anatomické odlišnosti páteře ovce, prasete a člověka shrnuje tabulka 2.1 [13, 12].



Obrázek 2.12: Kostra ovce domácí (*ovis domestica*).



Obrázek 2.13: Kostra prasete domácího (*sus scrofa*).

Shodu mechanického chování lidské a ovčí páteře prokázal Wilke [26]. Pro srovnání i snadnou dostupnost vzorků prasete domácího byly pro tuto práci použity i tyto. Vzhledem k potřebě měření čerstvých vzorků pro vyloučení vlivu konzervace i vlivu stárnutí vzorku na naměřená data, a především vzhledem k etické problematice nebyly měřeny vzorky meziobratlové ploténky člověka.

Obratle	Ovce	Prase	Člověk
Krční	7	7	7
Hrudní	13	14-15	12
Bederní	6-7	6-7	5
Křížové	4	4	5
Ocasní (kostrč)	16-24	20-23	5

Tabulka 2.1: Základní anatomické rozdíly páteře lidské a v této práci měřené.

# Kapitola 3

## Základní třídění reologických polí

V této kapitole jsou na demonstračních příkladech ukázány základní typy lineárních materiálových vztahů a v podkapitole 3.1 ukázáno užití linearitu jako části nelineární charakteristiky. To je zde ukazováno proto, že i naše základní rozborů zkoumaných neznámých materiálových vlastností meziobratlových disků jsou zpočátku analyzovány jako lineární, neboť je-li možné jejich chování dostatečně přesně vystihnout jako lineární, je pak možné snadno různě porovnávat je mezi sebou i s tabelovanými hodnotami viskozit a tuhostí. Teprve na základě takového rozboru, který je početně snadný a poskytuje široké možnosti výpočtů, je v jednodimenzionálním případě vypracována možnost popisovat meziobratlovou ploténku jako objekt s nelineární tuhostí.

Každý systém, který je schopen po deformaci relaxovat a alespoň částečně se nevrátit do stavu před deformací, je schopen oscilace a má minimálně jednu rezonanční frekvenci. Nestačí tedy, aby hmota či systém kladly odpor vůči deformačním snahám, tato nechuť se deformovat musí být současně doprovázena schopností částečného návratu. Tuto vlastnost, pokud se týká vlastností hmoty, nazýváme elasticitou. Tato vlastnost nezpůsobuje přeměnu energie na teplo, pouze vzájemně přeměňuje jednotlivé složky mechanické energie (kinetickou na potenciální a obráceně). Naopak disipační složky způsobují vždy výhradně přeměnu pohybové energie na energii tepelnou, nevracejí tedy systém do původního stavu. Rozeznáváme tři základní typy disipací:

Disipativní síla působící nezávisle na pohybu a mající stále konstantní velikost. Nazýváme ji síla suchého tření.

Disipativní síla závislá na rychlosti pohybu. Nazýváme ji síla viskózní. Tato síla se tedy projevuje výhradně již v započatém pohybu a je úměrná první mocnině jeho rychlosti. Pokud se jedná o materiálovou vlastnost, nazýváme ji viskozitou.

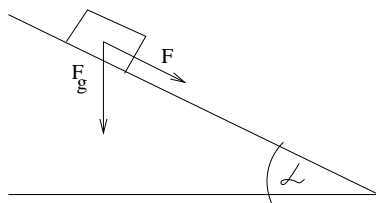
Disipativní síla úzce související s turbulencí. Tato síla je rovněž závislá na rychlosti, ovšem na její druhé mocnině. Projevuje se zejména v systémech se snadným mísením.

Příkladem elasticity budiž pružina, u které je návratová síla úměrná výchylce

$$F = -kx \tag{3.1}$$

V biologických materiálech s touto lineární úměrností však často nevystačíme. A nevystačíme ani s třísloužkovou lineární závislostí, kdy se těleso v různých směrech deformuje různě, avšak lineárně, v závislosti na síle (takové těleso nazýváme hookovské). Pak je nutno zavést elasticitu nelineární, kdy je závislost elastické síly na deformaci složitější než lineární.

Příkladem suchého tření je špalíček smýkající se po nakloněné rovině.



Obrázek 3.1: Příklad suchého tření

Špalíček se dá do pohybu až při určitém úhlu náklonu  $\alpha_{min}$  a poté, jak z definice této síly vyplývá, konstantní silou brání jeho pohybu, a tento se tedy pohybuje pohybem rovnoměrně zrychleným se zrychlením

$$a = \frac{(m_g \sin \alpha) - F_t}{m} \quad (3.2)$$

V živém těle obratlovců výskyt tohoto typu disipace souvisí vždy s patologií (např. kloub bez chrupavky, úlomky fraktury třoucí se po sobě).

Viskózní síla naopak představuje základní disipační složku mechanických dějů obratlovců. Vyskytuje se v celém organismu. Je přítomna v proudění krve, vzájemném pohybu fascií, při pohybu v kloubu či pohybu střevního obsahu. Příkladem viskózního tření je pohyb kovové kuličky v medu (obr. 3.2).

Pokud je ve funkci

$$F_o = \nu(v\dot{x}) \quad (3.3)$$

a pokud je

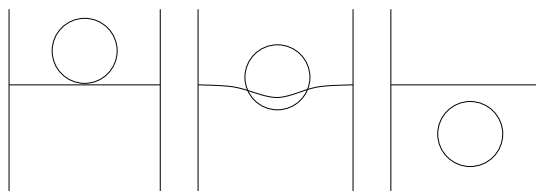
$$\frac{d(\nu)}{d\dot{x}} \neq 0 \quad (3.4)$$

neboli je člen úměrnosti závislý na rychlosti, nazýváme prostředí nenewtonovské. Existují jak prostředí, kde viskozita pro vzrůstající rychlost roste

$$\frac{d(\nu)}{d\dot{x}} > 0$$

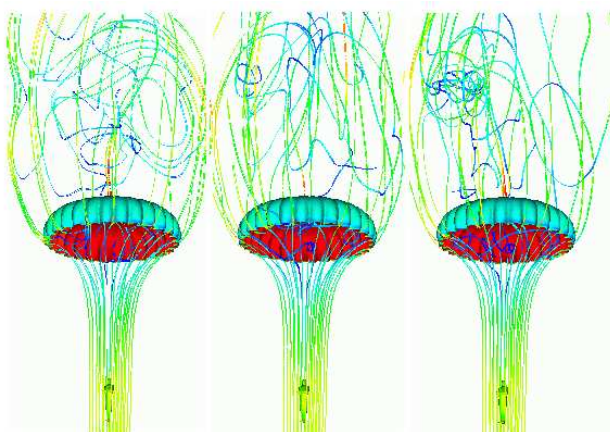
tak prostředí, kde viskozita pro vzrůstající rychlost klesá

$$\frac{d(\nu)}{dx} < 0$$



Obrázek 3.2: Příklad vazkého tření—"kulička v medu"

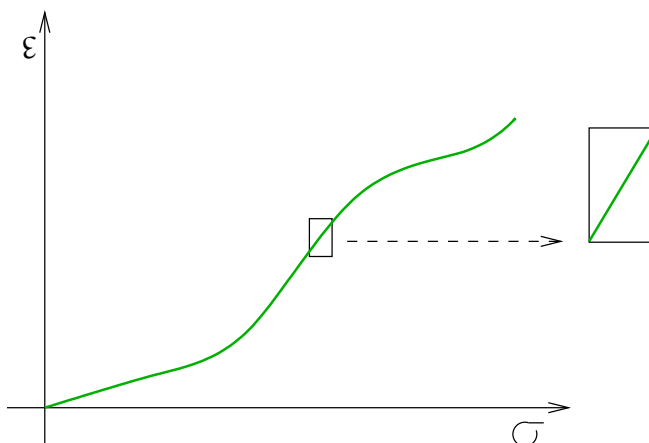
Příkladem pohybového neboli viskózního tření úměrné čtverci rychlosti může být např. tření při skoku padákem, odpor prostředí, který klade vzduch padáku. Fyziologicky tento typ odporu v organismu nalzáme jen zřídka, a to zejména v plicích při proudění vzduchu.



Obrázek 3.3: Příklad vazkého tření úměrného kvadrátu rychlosti [29].

## 3.1 Linearita

Navzdory tradovanému tvrzení nelineárnosti světa je v leckterém případě popis fyzikálního problému lineárními diferenciálními rovnicemi více než vhodný v prvním přiblížení analýzy problému. To ukazují i naše dřívější práce [19], kde jsme si vytkli za cíl ověření linearitu tuhosti a útlumu mechanické energie v meziobratlové ploténce. Ukázalo se, že ve fyziologickém rozsahu pohybu není stávajícími metodami možné identifikovat jiný než lineární útlum, a nelineární oprava k tuhosti nepřevyšuje 15%. Nelineární redukce k viskóznímu členu se ukázala menší než 1% (a pro nás neměřitelně malá). Jak uvidíme dále, pro zkoumané modely mechanického kmitání má zvláště pro malé amplitudy, kterými se ovšem v této práci zabýváme, dává lineární přiblížení ne sice postačující, avšak již velmi názorný náhled na zkoumanou soustavu. To je nepochybně způsobeno tím, že křivka závislosti tuhosti na amplitudě je spojitá a nepříliš strmá a v každé její části je možné ji úspěšně nahradit konstantou.



Obrázek 3.4: Lineární přiblížení

V grafu závislosti napětí na deformaci můžeme tedy malý úsek křivky ještě nahradit přímkou. Tento fakt nás ospravedlňuje pro následující kapitolu nejdříve se zabývat rovnicemi lineárními a teprve poté v nich zavést korekce na nelineární tuhost.

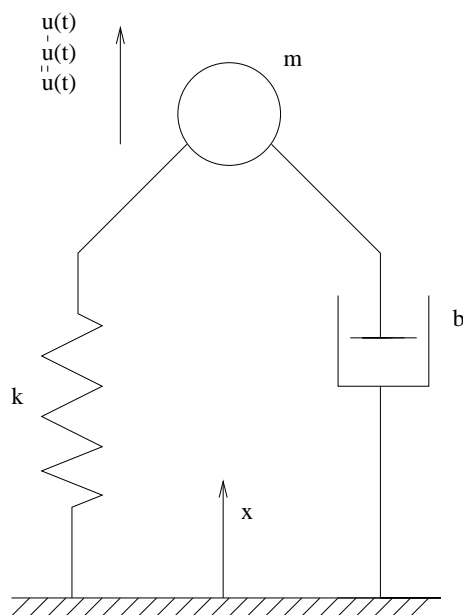
### 3.1.1 Volné kmitání tlumené soustavy

Pro výpočet výchylky netlumené soustavy s jedním stupněm volnosti platí pohybová rovnice [2]:

$$m\ddot{u} + ku = F(t). \quad (3.5)$$

Volné tlumené soustavy z obr. 3.5 je dáno řešením homogenní pohybové rovnice

$$m\ddot{u} + b\dot{u} + ku = 0. \quad (3.6)$$



Obrázek 3.5: Model kmitavé tlumené soustavy o jednom stupni volnosti.

Tlumení se uvažuje úměrné rychlosti  $\dot{u}(t)$  s konstantou úměrnosti  $b$ . Rovnici C.3 lze upravit na tvar

$$\ddot{u} + 2b_p\Omega\dot{u} + \Omega^2u = 0, \quad (3.7)$$

kde  
 $b_p = \frac{b}{b_k}$  poměrný útlum,  
 $b_k = 2\sqrt{km} = 2m\Omega$  součinitel kritického, též aperiodického tlumení,  
 $\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  vlastní úhlová frekvence netlumené soustavy.

Pro volné kmitání tlumené soustavy platí vztah

$$u(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t}. \quad (3.8)$$



Integrační konstanty  $C_1$  a  $C_2$  se určí z počátečních podmínek  $u(0)$   $\dot{u}(0)$  popřípadě z jiných dvou podmínek pro  $u(t)$ . Z frekvenční (charakteristické) rovnice

$$\lambda^2 + 2b_p\Omega\lambda + \Omega^2 = 0 \quad (3.9)$$

se vypočtou kořeny  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$ . Jsou možné tři případy řešení dle velikosti poměrného útlumu  $b_p$  (tab. 3.1).

Ze vztahu pro vlastní úhlovou frekvenci tlumené soustavy  $\Omega_t$  (tab. 3.2) plyne

$$\left(\frac{\Omega_t}{\Omega}\right)^2 + b_p^2 = 1$$

Tuto závislost lze pro  $b_p \leq 1$  zobrazit v souřadnicové soustavě  $\Omega_t/\Omega$ ,  $b_p$  čtvrtkružnicí o poloměru rovném jedné v prvním kvadrantu (obr. 3.7). Přirozený logaritmus poměru dvou po sobě jdoucích amplitud volného kmitání tlumené soustavy  $u_{0,n}$  v čase  $t_n$  a  $u_{0,n+1}$  v čase  $t_n + 2\pi/\Omega_t$  se nazývá logaritmický dekrement  $\theta$ , viz obr. 3.6. Jelikož amplituda v čase  $t_n$  je  $u_{0,n} = Ce^{-b_p\Omega t_n}$  a v čase  $t_{n+1}$  je  $u_{0,n+1} = Ce^{-b_p\Omega(t_n + 2\pi/\Omega_t)}$ , platí

$$\theta = \ln \frac{u_{0,n}}{u_{0,n+1}} = \frac{2\pi b_p}{\sqrt{1 - b_p^2}}. \quad (3.10)$$

Ze změřeného logaritmického dekrementu lze stanovit poměrný útlum  $b_p$  soustavy. S ohledem na přesnost je výhodné stanovit logaritmický dekrement z jednoho průběhu  $u(t)$  při uvažování poměru několika libovolných párů amplitud např.  $u_{0,n}$  a  $u_{0,n+k}$ . Pak lze logaritmický dekrement určit např. jako střední hodnotu z výrazů

$$\theta = \frac{1}{k} \ln \frac{u_{0,n}}{u_{0,n+k}}. \quad (3.11)$$

Pro malé tlumení je možno poměrný útlum  $b_p$  vypočítat z přibližného vzorce

$$b_p \simeq \frac{1}{2\pi k} \ln \frac{u_{0,n}}{u_{0,n+k}}. \quad (3.12)$$

Logaritmický dekrement se rovněž určí z úbytku maximální potenciální energie. Označíme-li maximální potenciální energii v  $n$ -té periodě  $E_{p,n}$ , v  $(n+k)$ -té periodě  $E_{p,n+k}$  a její měřený úbytek  $\Delta E_p = E_{p,n} - E_{p,n+k}$ , pak pro logaritmický dekrement platí vztah

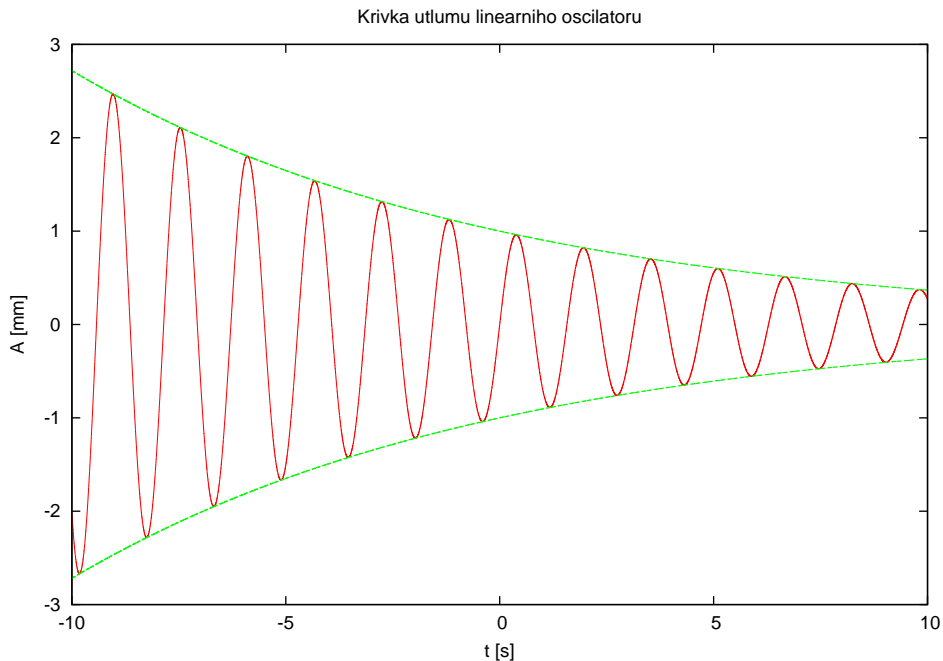
$$\theta = \frac{1}{2k} \frac{\Delta E_p}{E_{p,n}}. \quad (3.13)$$

$F(t)$	$u(t)$
Diracova funkce $\bar{F}_0 \delta(t) =$ $= \bar{F}_0 \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} [H(t) - H(t - T)]$	$\frac{\bar{F}_0}{m\Omega} \sin \Omega t$
$F_0 [H(t)(1 - \frac{t}{t_1}) + H(t - t_1) \frac{t-t_1}{t_1}]$	$\frac{F_0}{k} [(1 - \cos \Omega t) + \frac{1}{t_1(\frac{\sin \Omega t}{\Omega} - t)} \text{ pro } 0 < t < t_1$  $\frac{F_0}{k} [\frac{1}{\Omega t_1} (\sin \Omega t - \sin \Omega(t - t_1)) - \cos \Omega t] \text{ pro } t > t_1$
$F_0 [H(t) - H(t - t_1)]$	$\frac{F_0}{k} (1 - \cos \Omega t) \text{ pro } 0 < t < t_1$  $\frac{F_0}{k} [\cos \Omega(t - t_1) - \cos \Omega t] \text{ pro } t > t_1$
$F_0 [H(t) \frac{t}{t_1} - H(t - t_1) \frac{t-t_1}{t_1}]$	$\frac{F_0}{kt_1} (t - \frac{\sin \Omega t}{\Omega}) \text{ pro } 0 < t < t_1$  $\frac{F_0}{k} \{1 + \frac{1}{\Omega t_1} [\sin \Omega(t - t_1) - \sin \Omega t]\} \text{ pro } t > t_1$
$F_0 [H(t) \frac{2t}{t_1} - H(t - \frac{t_1}{2}) \frac{4(t-\frac{t_1}{2})}{t_1} +$ $+ H(t - t_1) \frac{2(t-t_1)}{t_1}]$	$\frac{2F_0}{kt_1} (t - \frac{\sin \Omega t}{\Omega}) \text{ pro } 0 < t < \frac{t_1}{2}$  $\frac{2F_0}{kt_1} \{t_1 - t + \frac{1}{\Omega} [2 \sin \Omega(t - \frac{t_1}{2}) - \sin \Omega t]\} \text{ pro } \frac{t_1}{2} < t < t_1$  $\frac{2F_0}{\Omega kt_1} [2 \sin \Omega(t - \frac{t_1}{2}) \sin \Omega(t - t_1) - \sin \Omega t] \text{ pro } t > t_1$

Tabulka 3.1: Řešení  $u(t)$  z pohybové rovnice 3.5 pro některé zvláštní případy budící funkce  $F(t)$  a nulové počáteční podmínky  $u(0) = \dot{u}(0) = 0$

$b_p$	$\lambda_1, \lambda_2$	$u(t)$
$< 1$ podkritické tlumení	$\lambda_{1,2} = -b_p\Omega \pm i\Omega_t$ kořeny komplexně sdružené	$e^{-b_p\Omega t}(A \sin \Omega_t t + B \cos \Omega_t t)$ resp. $e^{-b_p\Omega t}C \sin(\Omega_t t + \varphi)$  Integrační konstanty  $A = \frac{\dot{u}(0) + b_p\Omega u(0)}{\Omega_t}, B = u(0);$  $C = \sqrt{A^2 + B^2}, \varphi = \text{arc tg} \frac{B}{A}$  $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$
$> 1$ nadkritické tlumení	$\lambda_{1,2} = -b_p\Omega \pm \Omega_t$ kořeny reálné různé	$e^{b_p\Omega t}(A \sin h\Omega_t t + B \cos h\Omega_t t)$ resp. $e^{b_p\Omega t}C \sin h(\Omega_t t + \varphi)$  Integrační konstanty  $A, B$ viz $b_p < 1$ resp.  $C = \sqrt{A^2 + B^2}, \varphi = \text{arc tgh} \frac{B}{A}$
$= 1$ kritické tlumení	$\lambda_1 = \lambda_2 = -b_p\Omega$ dvojnásobný reálný kořen	$e^{-\Omega t}(C_1 + C_2 t)$ integrační konstanty  $C_1 = u(0)$  $C_2 = \dot{u}(0) + \Omega u(0)$

Tabulka 3.2: Výsledky řešení frekvenční rovnice C.6 a výchylky  $u(t)$  pro různé případy viskózního tlumení ( $\Omega_t = \Omega\sqrt{1 - b_p^2}$  -vlastní úhlová frekvence tlumené soustavy).



Obrázek 3.6: Průběh  $u(t)$  při podkritickém tlumení.

## 3.2 Kyvadlo se suchým třením

Jako první příklad nelineárního kyvadla uvedeme popis soustavy se suchým třením. Vznik odporové síly, o jejíž příčině vzniku nic nevíme, zvládáme však její popis, můžeme vidět například na obrázku 3.1. Jak jsme již uvedli, velikost třecí síly tohoto charakteru je vzhledem k pohybovým proměnným konstantní a má směr opačný ke směru rychlosti pohybu. Pohybová rovnice tedy odpovídá vztahu 3.14, jak jsme viděli již v kapitole 3 (strana 19). Příklad řešení této rovnice 3.14 vidíme na obrázku 3.9. Názorně zde vidíme nespojitost zrychlení, a tedy i nespojitost derivace rychlosti. Křivka průběhu výchylky je již hladká (spojitá i pro svou derivaci). Maximální amplitudy klesají lineárně.

$A_{n+1} - A_n = konst.$  Pohyb obecně nekončí v nulové výchylce, zato jeho konec nastane v konečném čase. Pohyb je po částech dělených nulovou osou sinusový.

Matlabovsky generující model:

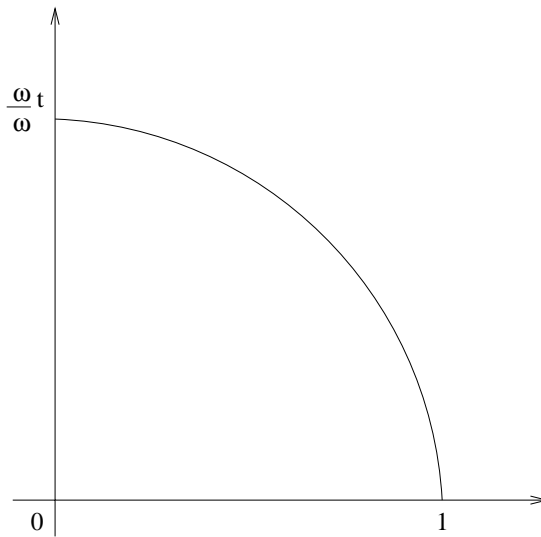
```
dt = 0.000001; ax1 = 0; x1 = 15; vx1 = 0; m = 3; a = .0; k = 3900000; b = 3790000;
```

```
for i = 2 : 25000 xi = xi-1 + dt * vxi-1; vxi = vxi-1 + dt * (axi-1);
```

```
axi = (-k * xi - sign(vxi) * b) / m; endfor; plot(x(1 : 25000))
```

odpovídal řešení rovnice 3.14

$$\ddot{x}m + \text{sig}(\dot{x})b + kx = 0 \quad (3.14)$$



Obrázek 3.7: Závislost poměru vlastních frekvencí  $\Omega_t/\Omega$  na poměrném útlumu  $b_p$ .

### 3.3 Kyvadlo s viskózním útlumem

Maximální amplitudy klesají exponenciálně (obr. 3.8).  $A_{n+1}/A_n = konst$ , ( $A_n$ -maximální amplituda  $n$ -tého pulsu). Pohyb vždy končí v nulové výchylce, ovšem v nekonečném čase. Pohyb je spojitý ve všech řádech derivace.

Matlabovsky generující model:

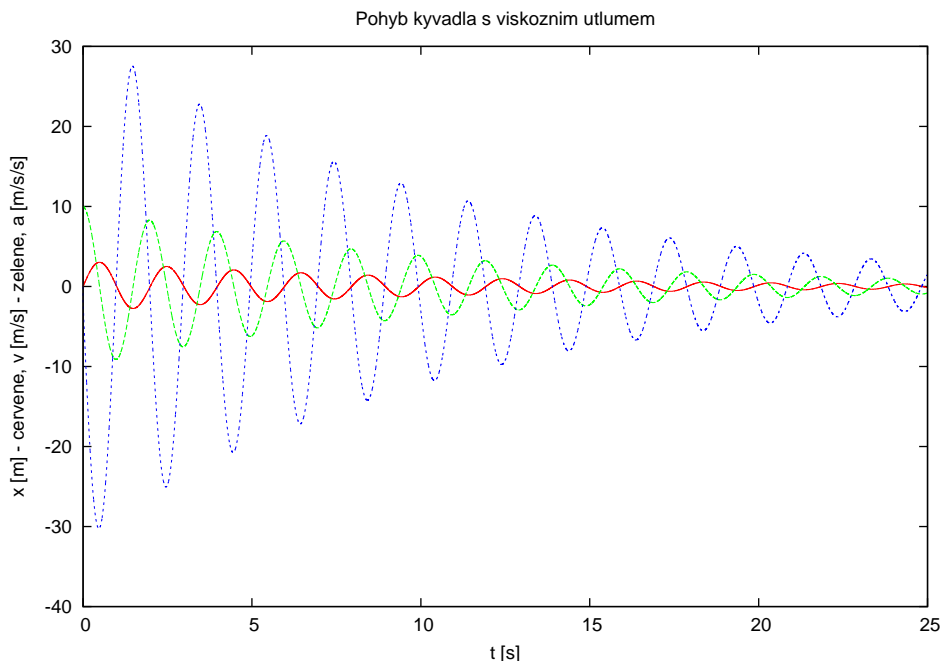
$dt = 0.001; ax_1 = 0; x_1 = 0; vx_1 = 10; m = 0.1; a = .0; k = 1; b = 0.02;$

for  $i = 2 : 25000$   $x_i = x_{i-1} + dt * vx_{i-1}; vx_i = vx_{i-1} + dt * (ax_{i-1}); ax_i = (-k * x_i - b * vx_i) / m;$

endfor; plot( $x(1 : 25000)$ )

odpovídal řešení rovnice 3.15

$$\ddot{x}m + b\dot{x} + kx = 0 \quad (3.15)$$



Obrázek 3.8: Pohyb viskózně tlumeného kyvadla.

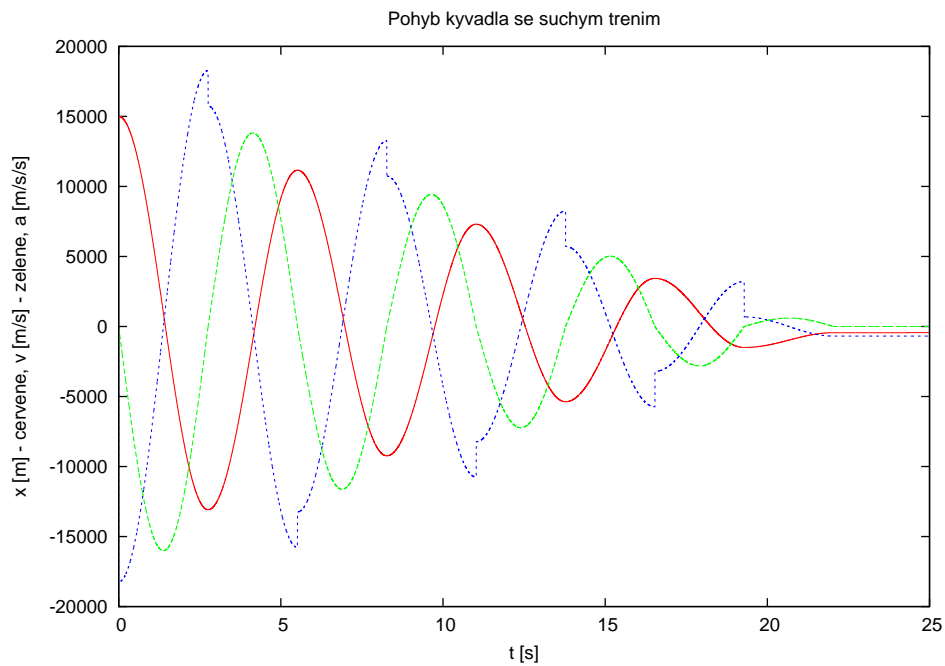
### 3.4 Kmity kubického kyvadla

Nyní se podíváme na biologicky poněkud zajímavější model. Zde nebude nelinearita ukryta v disipativním členu, ale v členu tuhostním. Předpokládáme, že tuhost obsahuje člen úměrný druhé mocnině výchylky. Tento předpoklad znamená přítomnost kubického členu v diferenciální rovnici. Je to vlastně jednodušší započtení změny tuhosti velikostí výchylky. Direkční síla by z důvodu symetrie měla být totiž lichá funkce, neboť požadujeme navrácení bodu do počátku. Tento fakt způsobí, že například z Taylorova rozvoje tuhosti bereme vždy jen sudé členy. Tento systém má body nestability, tedy místa, pokud kterými systém projde, změní se charakter jeho další trajektorie a začne se blížit jinému bodu stability než ze kterého původně vzešel. Křivka, na které tyto body zlomů leží, se nazývá separatrixa. Na obrázku 3.10 je vidět pohyb vybuzený z nulové polohy impulzem, pohyb se blíží až těsně k bodu zvratu, zde se pohybuje velmi pomalu, poté si to rozmyslí a začne se vracet zpět do nulové polohy. Kyvadlo má periodu kyvu zjevně závislou na amplitudě. Se zmenšující amplitudou se postupně začíná stále více podobat lineárnímu tlumenému oscilátoru. Pohyb tedy končí v nulové poloze. Pokles amplitudy je zpočátku pomalý, později se blíží exponenciálnímu. Pohyb vždy končí v nulové výchylce, ovšem v nekonečném čase. Pohyb je spojitý ve všech řádech derivace. Velmi ilustrativní je průběh zrychlení.

Octavovský model:

$$dt = 0.001; ax_1 = 0; x_1 = 0; vx_1 = 10; m = 1; a = .50358038217977; k = 10; b = 0.02;$$

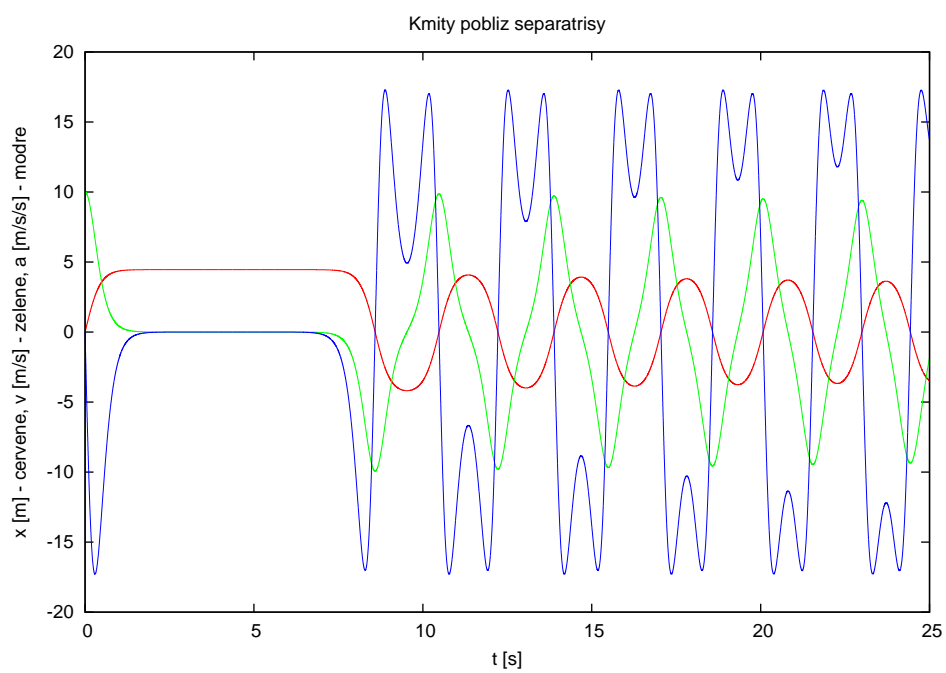
$$\text{for } i = 2 : 25000 \quad x_i = x_{i-1} + dt * vx_{i-1}; vx_i = vx_{i-1} + dt * (ax_{i-1});$$



Obrázek 3.9: Pohyb kyvadla se suchým třením.

`ax_i = -k * x_{i-1} + (a * x_{i-1} * x_{i-1} * x_{i-1} - b * vx_{i-1}); endfor; plot(x(1 : 25000))`  
 odpovídal řešení rovnice 3.16

$$\ddot{x}m + b\dot{x} + kx - ax^3 = 0 \tag{3.16}$$



Obrázek 3.10: Kmity poblíž separatory. Výchylka (červeně), zrychlení (modře) a rychlost (zeleně).



### 3.5 Eukleidovské kyvadlo

Jiným příkladem kyvadla s nekonstantní tuhostí a čistě viskózní disipací může být kyvadlo, v jehož potenciálu se vyskytuje člen známý z výpočtu vzdálenosti v eukleidovském prostoru. Nazveme jej tedy eukleidovským kyvadlem. Tuto úlohu si rozebereme podrobněji. Vyšetříme kyvadlo s potenciálem

$$U(x) = \frac{k_0}{2}x^2 + \alpha\sqrt{1 + \beta x^2}, \quad (3.17)$$

z čehož vyplývá, že pohyb kyvadla je tedy popsán rovnicí

$$m\ddot{x} = -\left(k_0x + \frac{\alpha x}{\sqrt{1 + \beta x^2}}\right) - \nu\dot{x}, \quad (3.18)$$

Vidíme tedy, že tuhost sestává ze dvou členů, konstanty a členu opravného:

$$k = k_0\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \beta x^2}}\right), \quad (3.19)$$

kde

$k_0$  je počáteční tuhost

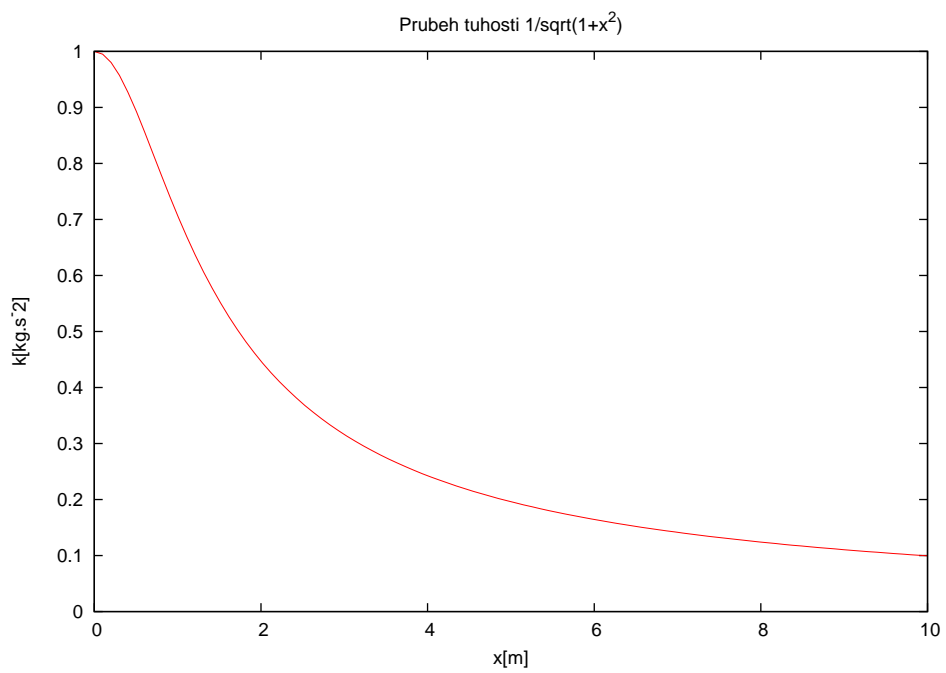
$k$  je tuhost

$m, \alpha, \beta \in R^+$ ,

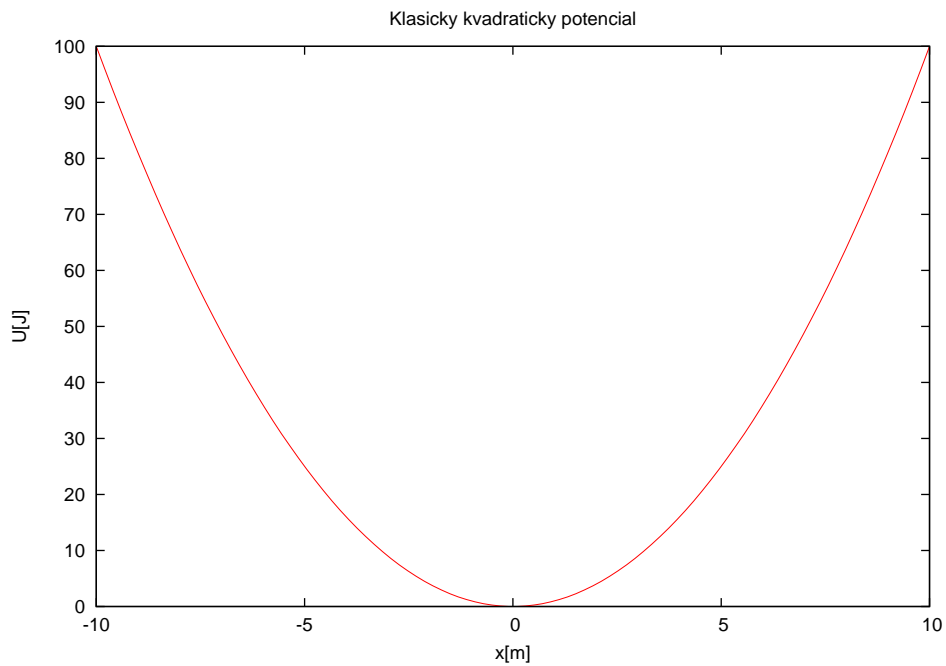
Průběh velikosti opravy tuhosti vidíme na obrázku 3.11, čili pro malé výchylky se taková pružina jeví jako tužší než obyčejná a pro velké výchylky se asymptoticky blíží normálnímu kyvadlu rychlostí  $\frac{1}{x}$ . Průběh potenciálu lineárního kyvadla znázorňuje parabola, kterou vidíme na obrázku 3.12.

Křivka, zobrazující opravu k parabolickému potenciálu tvořící eukleidovský člen, je vidět na obrázku 3.13.

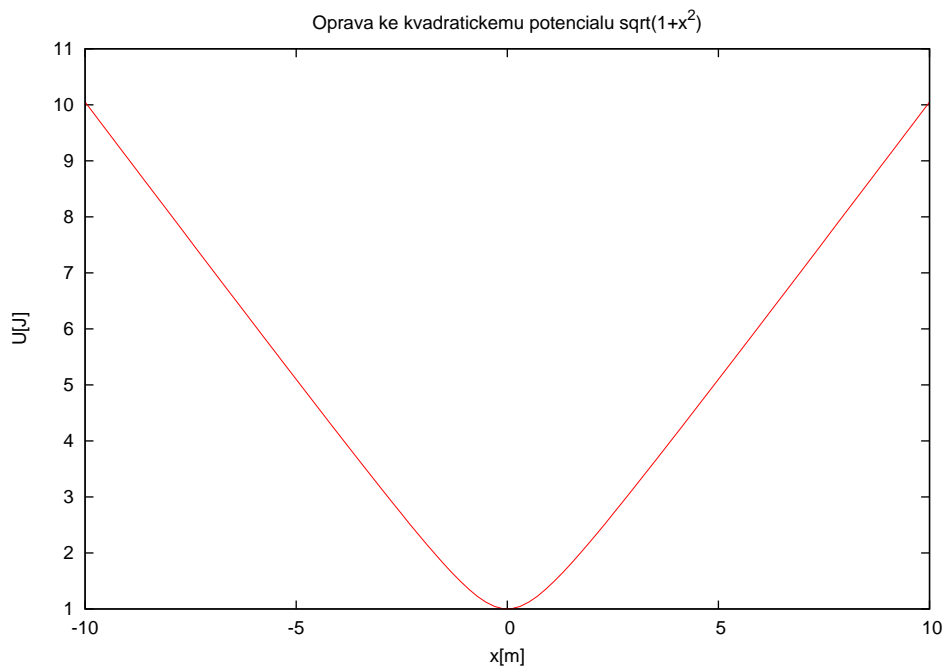
Součet parabolického průběhu a eukleidovské opravy dává potenciál na obrázku 3.14. S tímto potenciálem, který si můžeme představit jako mýdlo klouzající v dolíku tohoto tvaru, již pochopitelně nemá vlastnosti lineárního kyvadla a perioda kyvu již závisí na amplitudě. Pro amplitudy kolem jedné je například názorně vidět, že perioda kyvu takového kyvadla roste s amplitudou. Toto je vlastnost, kterou můžeme očekávat u leckterých biologických tkání v oblasti velmi malých výchylek. O tom však v následujících kapitolách.



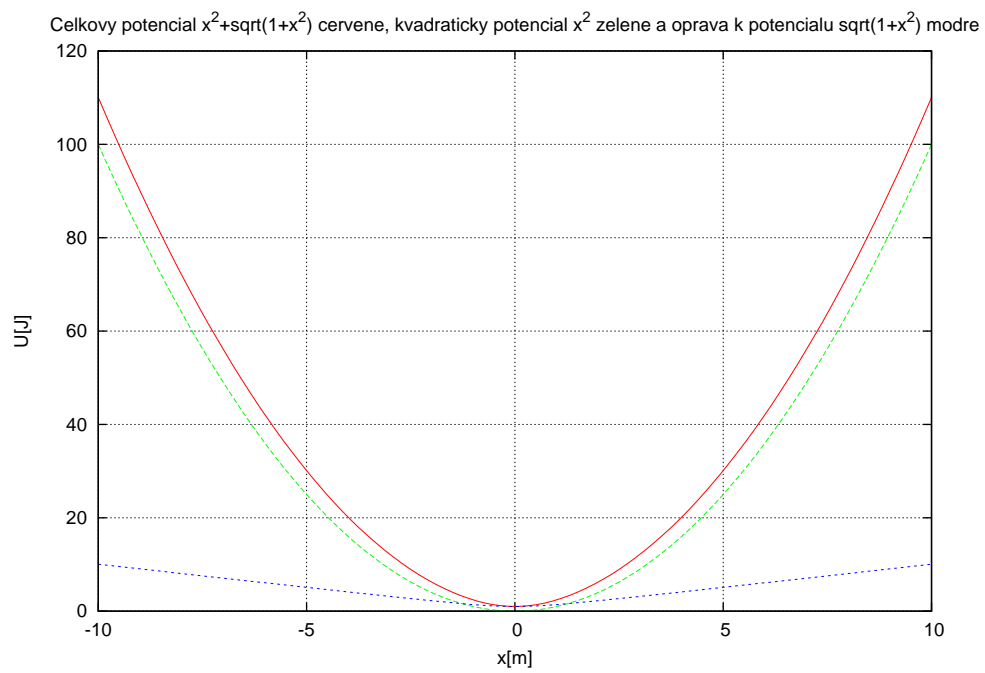
Obrázek 3.11: Korekce k tuhosti u eukleidovského kyvadla klesá pro větší výchylky přibližně jako  $x^{-1}$ .



Obrázek 3.12: Potenciálem lineárního kyvadla s konstantní tuhostí je parabola.



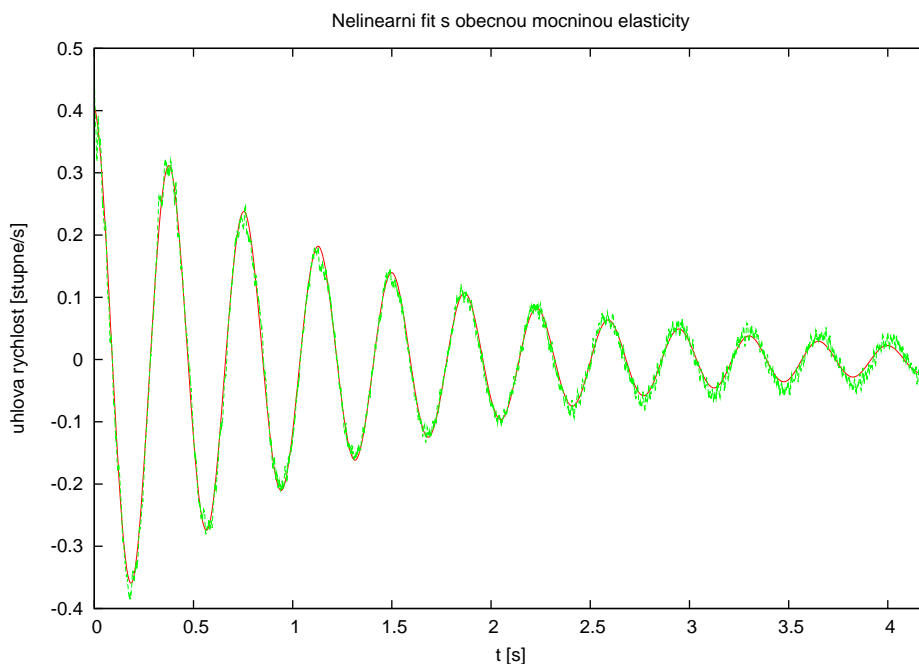
Obrázek 3.13: Nelineární člen definující kvadratický potenciál má tvar výpočtu vzdálenosti v Eukleidovském prostoru. Tento člen tvoří opravu k parabolickému potenciálu na obrázku 3.12.



Obrázek 3.14: Neporušený parabolický potenciál (zeleně), jeho eukleidovská oprava (modře) a součtový výsledný potenciál (červeně).

## 3.6 Kyvadlo s obecnou mocninou

Posledním speciálním příkladem kyvadla s nekonstantní tuhostí a čistě viskózním tlumením, kterým se budeme zabývat, je kyvadlo s obecnou mocninou tuhosti.



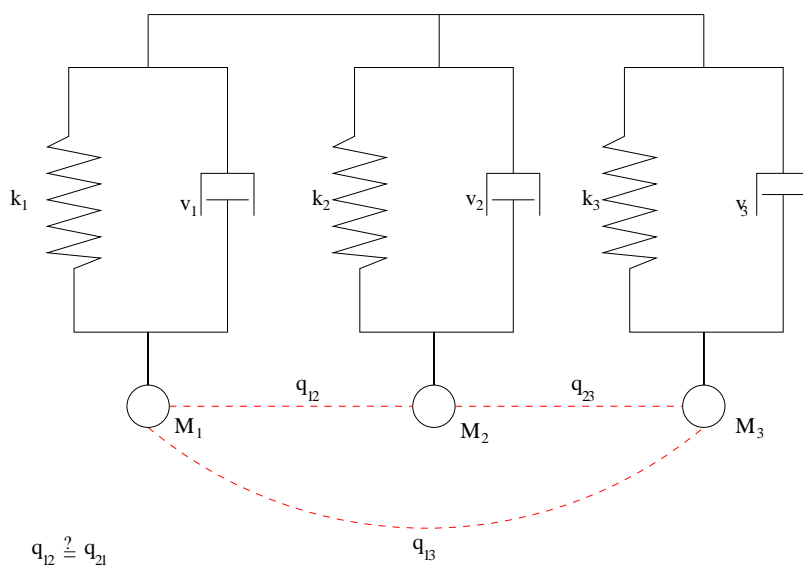
Obrázek 3.15: Porovnání nejlepšího naitovaného řešení rovnice (3.20) a naměřených dat pro ploténku L4 ukazuje téměř dokonalou shodu v periodicitě signálu, avšak mírně se zvětšující odchylku maximálních amplitud způsobenou nelinearitou viskózního disipačního členu, který není dosud v rovnici zahrnut.

$$\ddot{x} + \beta\dot{x} + \omega^2|x|^\gamma \text{sign}(x) = 0 \quad (3.20)$$

Zde je pro problémy se znaménkem obecné mocniny obecná mocnina tuhosti užita jen pro určení velikosti návratového puzení kyvadla, zatímco fakt, že jeho směr vždy působí proti směru výchylky je zohledněno násobitelem  $\text{sign}(x)$ .

### 3.7 Kmitání ve 3D

Další velmi zajímavou kapitolu v popisu kmitajících soustav navštívíme, pokud opustíme rovinné kmitání a pohlédneme na soustavy kmitajících ve více volných osách. Jelikož se tato práce zabývá kyvadly biologickými, je třeba i v prvním náhledu uvažovat tlumení. To dvojnásob platí pro páteř, která je vlastně velmi sofistikovaně řešeným tlumičem s obrovským tlumícím účinkem s trvanlivostí tanku. Nejjednodušší takovou soustavu vidíme na obrázku 3.16.



Obrázek 3.16: Schema soustavy mající možnost kmitat se třemi stupni volnosti.  $k_{1-3}$  značí tři obecně nelineární tuhosti, každou v jiné složce pohybu, podobně  $\nu_{1-3}$  jsou vazké tlumící členy, rovněž obecně nelineární pro různé složky pohybu.  $q_{12,23,13}$  značí vazby mezi jednotlivými směry pohybu.  $M_{1-3}$  jsou tři momenty hybnosti pro různé směry pohybu.

Obecně platí, že při nenulových vazbách  $q_{ij}$  má tato soustava tendenci vybudit kmitání i v jiných směrech než ve kterých byla vybuzena. Věnujme se nyní případu, kdy všechny prvky i vazby v tomto modelu budou lineární, tedy například když platí:

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} &= -\kappa_{11}x - \nu_1\dot{x} - \kappa_{12}y - \kappa_{13}z \\
 \ddot{y} &= -\kappa_{22}y - \nu_2\dot{y} - \kappa_{21}x - \kappa_{23}z \\
 \ddot{z} &= -\kappa_{33}z - \nu_3\dot{z} - \kappa_{31}x - \kappa_{32}y
 \end{aligned}
 \tag{3.21}$$

$$\kappa = \begin{pmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & \kappa_{13} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & \kappa_{23} \\ \kappa_{31} & \kappa_{32} & \kappa_{33} \end{pmatrix}$$

nebo

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} &= -\kappa_{11}x - \nu_1\dot{x} - (x-y)\kappa_{12} - (x-z)\kappa_{13} \\
 \ddot{y} &= -\kappa_{22}y - \nu_2\dot{y} - (y-x)\kappa_{21} - (y-z)\kappa_{23} \\
 \ddot{z} &= -\kappa_{33}z - \nu_3\dot{z} - (z-x)\kappa_{31} - (z-y)\kappa_{32}
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

První ze soustav můžeme také přepsat v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\kappa_{11} & -\kappa_{12} & -\kappa_{13} & -\nu_1 & 0 & 0 \\ -\kappa_{21} & -\kappa_{22} & -\kappa_{23} & 0 & -\nu_2 & 0 \\ -\kappa_{31} & -\kappa_{32} & -\kappa_{33} & 0 & 0 & -\nu_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

Obecnou vlastností těchto lineárních soustav je, že alespoň pro tři ortogonální směry existují taková vybuzení, aby se až na amplitudu periodicky opakovala až do úplného utlumení. Toto tvrzení samozřejmě neznamená, že pohyb v těchto třech směrech bude rovinný, naopak pravděpodobně bude poměrně komplikovaný, leč až na amplitudu periodický.

Část II  
Experiment



# Kapitola 4

## Metodika

Vycházejíc ze základních prací [24, 18], tématicky podobných prací [26, 22] a především pak vlastní práce [19], provedli jsme, s teoretickým podkladem předchozích kapitol (str. 19-27), několik sérií dvou typů experimentu. První typ experimentu probíhal na postupně se zdokonalující aparatuře, která umožňovala proměřit chování v jednom páteřním segmentu vždy v jedné ose kyvu. Aparatura byla navržena ve všech svých verzích tak, aby umožňovala zafixovat tělo jednoho obratle a tělo sousedního obratle opatřit vahadlem s definovaným momentem setrvačnosti, na který byl připevněn snímač rychlosti pohybu v daném směru. Na rozdíl od druhého typu experimentu (viz dále) byl použitý moment veliký  $0,1 - 1,5 [kgm^2]$ . Tento moment definoval rovinu kyvu natolik, že bylo možné i bez vnějších mechanických vazeb a s dostatečnou přesností doměřit útlumový děj v jedné rovině.

V druhém typu měření, stejně jako v prvním, byl jeden obratel fixován a druhý opatřen vahadlem se snímači. Na rozdíl od prvního typu měření bylo vahadlo symetrické, opatřené třemi navzájem ortogonálními snímači zrychlení. Moment setrvačnosti zde činil kolem  $1 [gm^2]$ , byl tedy přibližně 1000x menší než u vahadla v prvním typu měření. Na této aparatuře jsme provedli série experimentů zaměřených na stanovení přenosu pohybové energie mezi jednotlivými stupni volnosti pohybu.

### 4.1 Experimentální materiál

Jako lidské ploténce biomechanicky rovnocenný materiál, který se pro výzkum této tkáně běžně užívá [22, 26], jsme použili vzorky bederní a hrudní páteře ovce domácí (*ovis domestica*) a prasete domácího (*sus scrofa*) resp. páteřní pohybovou jednotku (obratel-ploténka-obratel) zbavené svalů a vazů (FSU dle definice na straně 11), obr. 4.1. Pro většinu měření byl navíc prováděn řez intervertebrálními klouby a tím došlo k odstranění dorzální části vzorku včetně míšního kanálu. Pro získání vzorku byla poražena vždy zvířata podobného stáří (*ovis domestica* 3-6 měsíců, samci; *sus scrofa* 9-12 měsíců, samci). Zvířata k porážce poskytla a porážku provedla firma Jan Růžička, soukromý zemědělec, Slivenec Praha. Pro vyloučení zkreslujících vlivů konzervace jsme použili vždy vzorky nekonzerv-

vované a měření probíhala v co nejkratším možném čase od porážky, ve střední hodnotě 8 hodin od porážky. Experimentálně jsme určovali vliv stárnutí a teploty na mechanické vlastnosti vzorku, poté jsme dopočítali korekce na nulové stáří a tělesnou teplotu (tab. 4.1). Anatomickými odlišnostmi páteře lidské a páteře ovce a prasete domácího se zabývá kapitola 2.1.1. Pro opakované měření byly vzorky vlhčeny Ringerovým roztokem (tab. 4.2), aby se zamezilo jejich nadměrné dehydrataci.

	tělesná teplota	tepová frekvence	dechová frekvence	dechový objem
Ovce domácí	$39,5^{\circ}C$	$60 - 120/min$	$19/min$	$300 ml$
Prase domácí	$39,0 \pm 0,5^{\circ}C$	$58 - 86/min$	$10 - 20/min$	$420 ml$

Tabulka 4.1: Srovnání vitálních charakteristik ovce domácí a prasete domácího.

Voda	$1000 ml$
Chlorid sodný	$860 g$
Chlorid draselný	$0,30 g$
Chlorid vápenatý $2 H_2O$	$0,33 g$
Osmolarita	$309 mOsm/l$
Titrační acidita ( $pH 7,4$ )	$< 0,3 mmol/l$
$pH$	$5,0 - 7,0$
<hr/>	
Elektrolyty	$mmol/l$
Sodík	$147$
Draslík	$4,0$
Vápník	$2,3$
Chloridy	$156$

Tabulka 4.2: Složení  $1000ml$  Ringerova roztoku.

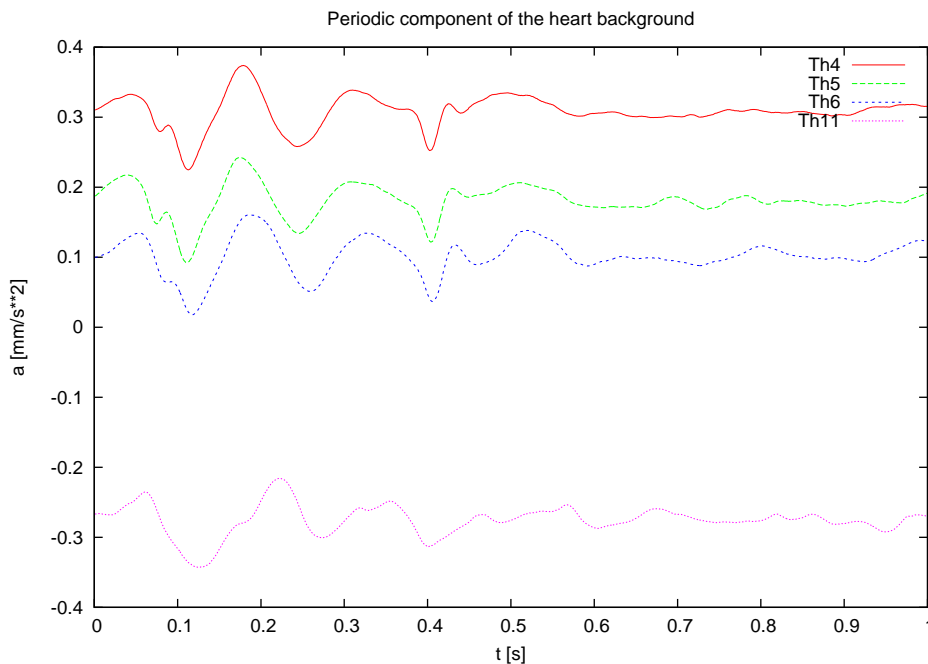
## 4.2 Popis měřících aparatur

Jak bylo řečeno v úvodu, k analýze vlastností plotének byly použity dva měřící přístupy. Lišily se jak stupněm volnosti pohybu, tak snímanou veličinou. V obou případech byl k digi-



Obrázek 4.1: Biologický materiál připravený k měření. Vzorčky byly zbaveny svalů a vazů, dorzální část páteře byla odstraněna vertikálním řezem páteřním kanálem. Řez je naznačen modře.

talizaci signálu použit AD převodník firmy PaPouch DRAK5. Tento byl přes sériový port připojen na počítač a námi napsaným programem v jazyce C obsluhován z operačního systému Linux (distribuce Debian). Samplovací frekvence pro všechna měření byla nastavena na 1000 vzorků/s. V případě měření s jedním stupněm volnosti byly použity magnetoelektrické snímače zhotovené z ramének harddisků. Vzhledem k této konstrukci byla snímána rychlost pohybu. V případě trojdimenzionálního měření byly použity citlivé akcelerometry firmy Sensor Modular System, s.r.o. typu SV162 pracující na piezoelektrickém principu obsahující střížně namáhaný křemíkový krystal. Ten byl připojen na nábojový zesilovač vlastní konstrukce (obr. B.1 a B.3). Pro představu o citlivosti těchto akcelero-  
metrů v tomto uspořádání uvádíme záznam odezvy střední srdeční činnosti podél páteře na obrázku 4.2.



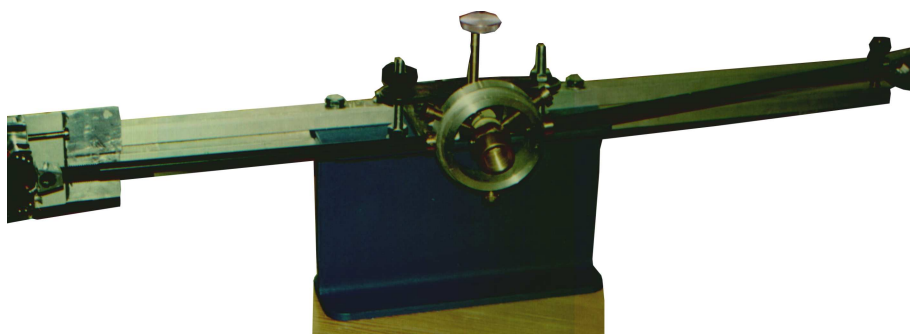
Obrázek 4.2: Periodická složka srdečního pozadí.

Veškeré experimenty totiž probíhaly při amplitudách nepřevyšujících  $\frac{1}{10}$  fyziologického rozsahu charakteristického pro dané obratlové spojení. Proto i zrychlení, která jsme měřili,

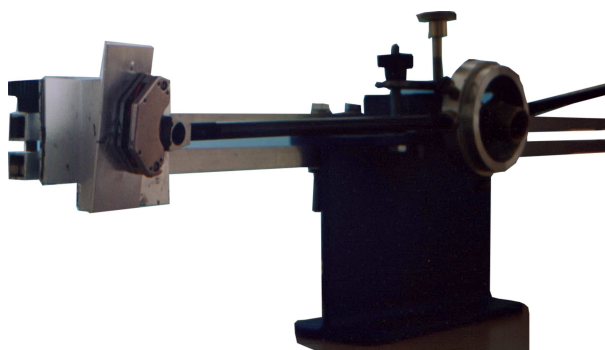
nepřevyšovala  $1 \text{ mms}^{-2}$ .

Všechna naše měření na všech vzorcích probíhala pro torzi, flexi a laterální flexi. V těchto směrech se ploténka jeví minimálně jako desetkrát méně tuhá než v axiálním směru, pro který bychom museli zvolit pro přesná měření zcela jinou konstrukci aparatury. První verze aparatury (obr. B.2) umožňovala měření rychlosti vahadla vždy pouze pro jeden směr pohybu. Vahadlo se k obratli připojovalo přímo třemi vruty. Závaží vyvolávající moment se na vahadlo pokládala a udržela pouze vlivem suchého tření indukovaného hmotou závaží. Tento způsob připevnění vahadla na vzorek měl jednu výhodu: u žádné z pokročilejších verzí měřící aparatury se nám nepodařilo vytvořit upevnění méně hmotné a vyvolující menší moment.

Pokročilejší verzi aparatury vidíme na obrázcích 4.3 až 4.5.

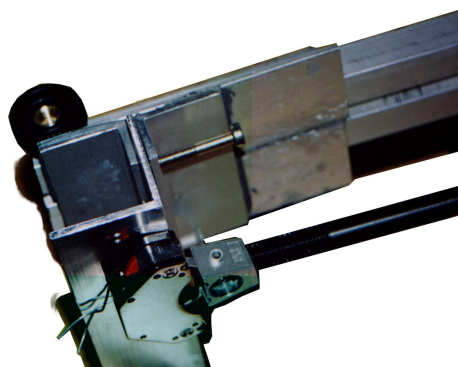


Obrázek 4.3: Druhá verze aparatury ke snímání kmitů v rovině obsahovala snímací prvky pro větší citlivost umístěné až na konci vahadla. Moment se nastavoval posunem závaží po ramenech vahadla a měnil se tak se vzdáleností od středu otáčení mechanický moment, aniž by se měnilo předpětí vzorku.



Obrázek 4.4: Tatáž aparatura z jiného úhlu pohledu.

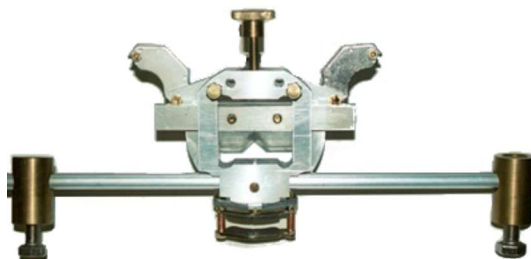
Tato aparatura již umožňovala buď měření okamžité rychlosti vahadla ve dvou osách pohybu nebo současné měření pohybu a jeho buzení za pomoci programovatelného DA převodníku firmy PaPouch, s.r.o. ProgGen. Závaží se upevňovalo již přítláčným šroubovým hrotem na vahadlo kruhového průřezu. K upínání vahadla na vzorek sloužily tři šrouby



Obrázek 4.5: Detail prvku snímajícího rychlost vahadla při torzi. Při flexi jej bylo nutno otočit o  $\frac{\pi}{2}$ .

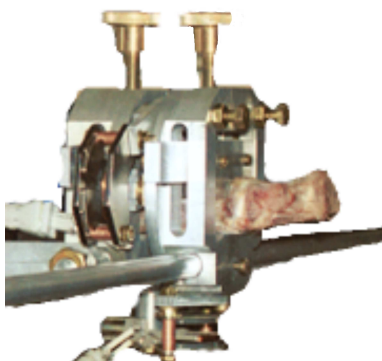
rozmístěné po  $\frac{2}{3}\pi$  po obvodu kruhového nosníku tak, aby se jejich konce opatřené hroty střetávaly při maximálním utažení v centru kružnice tvořené nosníkem. Tento způsob upínání byl mnohem rychlejší a umožňoval vyloučit dlouhé prostoje mezi odměřením jednotlivých vzorků. S touto aparaturou bylo odměřeno asi padesát vzorků.

Naší nejdokonalejší aparaturu umožňující velmi snadnou výměnu vzorků a současné měření ve dvou osách pohybu při zapnutém buzení generátorem ProgGen jsme vytvořili za přispění ze zdrojů grantu GAUK 93/2003/C. Od předchozí verze se kromě konstrukce upínače (zde je tvořen jakousi tupou gilotinou ovládanou jediným šroubem) liší především existencí třetí cívky umístěné kolmo k cívce budící a rotaci snímající (obr. 4.6 až 4.10).

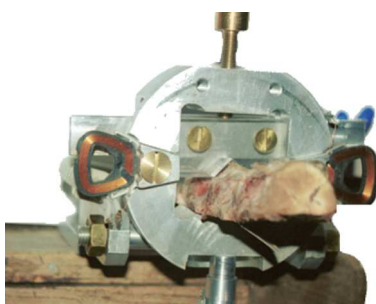


Obrázek 4.6: Nejdokonalejší verze aparatury měřící rychlost pohybu raménka ve dvou směrech a umožňující i jeho harmonické buzení byla vybavena pohyblivými závažími, kterými bylo lze měnit mechanický moment kmitadla v poměrně širokém rozmezí (1 : 30) bez nutnosti změny mechanického předpětí vzorku.

Velká výhoda všech těchto tří generací měřící aparatury spočívala v použití mechano-magneto-elektrického převodníku, který je teplotně téměř nezávislý a hlavně měří přímo rychlost, čili určení okamžité kinetické energie nečiní žádných potíží na rozdíl od převodníku piezoelektrického, který, byv použit při velké citlivosti, má tendenci patrně vlivem pomalých teplotních změn měnit stejnosměrnou složku a velice znepríjemňovat při výpočtech numerickou integraci zrychlení, které měří, neboť hodnoty rychlosti, a zvláště pak polohy, s oblibou úspěšně divergují. Použité mechano-magneto-elektrické převodníky byly získávány ve všech případech ze starších harddisků, přičemž bylo využito jak značné ho-



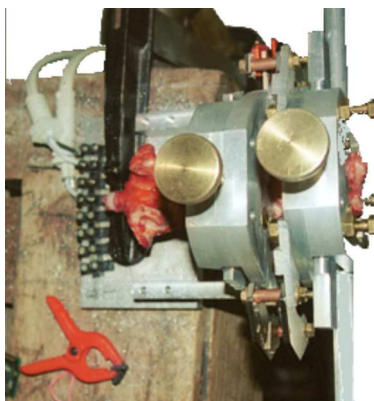
Obrázek 4.7: Způsob uchycení biologického vzorku do měřící aparatury byl snadný.



Obrázek 4.8: Při odklopených keramických permanentních magnetech je dobře vidět budící i snímací cívky.

mogenity permanentního magnetického pole v nich, tak i kruhové symetrie uchycení harddiskových hlaviček. Nutno říci, že s přibývajícím počtem snímačů a budičů bylo nastavení aparatury pro každý vzorek stále komplikovanější, neboť hrozil kontakt snímací cívky s permanentním magnetem a tím vznik suchého tření, čímž by bylo měření do značné míry znehodnoceno. Na této poslední, nejdokonalější aparatuře bylo provedeno cca tři sta měření.

Dalším typem aparatury byl trojdimenzionální akcelerometrický kmitoměr (obr. 4.11), koncepčně zcela odlišný od třech výše uvedených modifikací principiálně stále stejné aparatury. Při konstrukci této aparatury jsme rezignovali na maximální přesnost dosahovanou v předcházejících případech. Odměnou nám bylo naprosté uvolnění kmitavého pohybu a umožnění snímat přelévání mechanické energie  $\delta$  pulsem vybuzeného útlumového děje mezi jednotlivými složkami. Základní předpětí vzorku je u této aparatury velmi malé, což je značnou výhodou. Závislostí mechanických parametrů na předpětí se zabýval White a Panjabi [18]. Při tomto měření je jeden obratel pevně fixován mocným svěračem k nehybné podložce a druhý pak je přímo čtyřmi vruty v rovině kolmé k ose páteře upevněn pevný symetrický kříž o délce ramen  $0,15\text{ m}$ , na jejichž koncích je optřen třemi piezoelektrickými akcelerometry typu SV 162 (obr. 4.11). I přesto, že krystaly v těchto snímačích jsou již namáhány stříhově, na rozdíl od jejich předchůdců dovážených z NDR (typ KD 35 a KD 17 firma Metra Mess-U Frequenztechnik MMF RADEBEUL) namáhaných ještě ještě tlakově a používaných se střídavými úspěchy dříve, je vliv teplotních změn při citlivostech

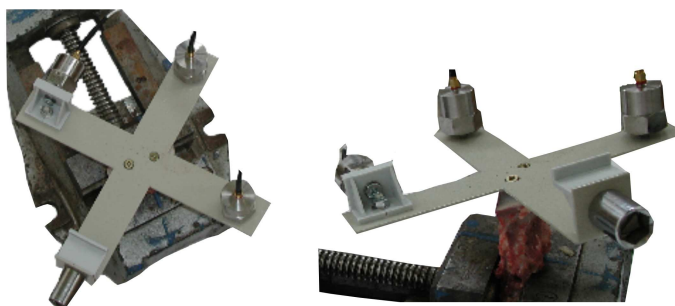


Obrázek 4.9: Vzorek horní krční ovčí páteře upnutý do aparatury.

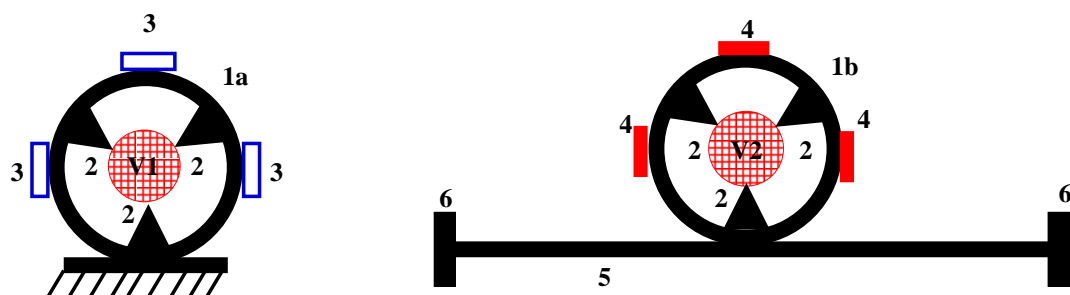


Obrázek 4.10: Celkový pohled na měřící aparaturu se vzorkem ovčí ploténky.

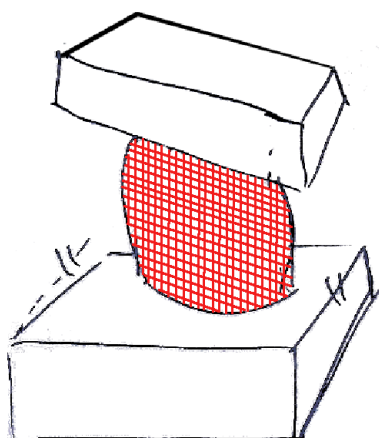
námi používaných ještě velmi patrný, přestože již asi třicetkrát menší. Tato měnicí se stejnosměrná složka znesnadňuje některé matematické operace.



Obrázek 4.11: Aparatura se třemi stupni volnosti. Akcelerometry typu SV 162 jsou připevněny k pevnému kříži ve vzájemně kolmých směrech.



Obrázek 4.12: Schema konečné verze měřící aparatury. Přípravek (1a) pro uchycení prvního těla obratle (V1) k pevné nehybné podložce; přípravek 1b připojuje na tělo sousedního obratle (V2) momentovou tyč (5) a současně permanentní magnety (4), které tvoří pohyblivou součást snímačů rychlosti pohybu vahadla (momentové tyče). Na momentovou tyč se navléká symetricky závaží (6) určující jednak předpětí, hlavně pak ale moment kmitadla; (2) upevnění obratlů do přípravků.



Obrázek 4.13: Náčrt způsobu zatěžování meziobratlové ploténky v aparatuře se třemi stupni volnosti.



# Kapitola 5

## Zpracování naměřených dat

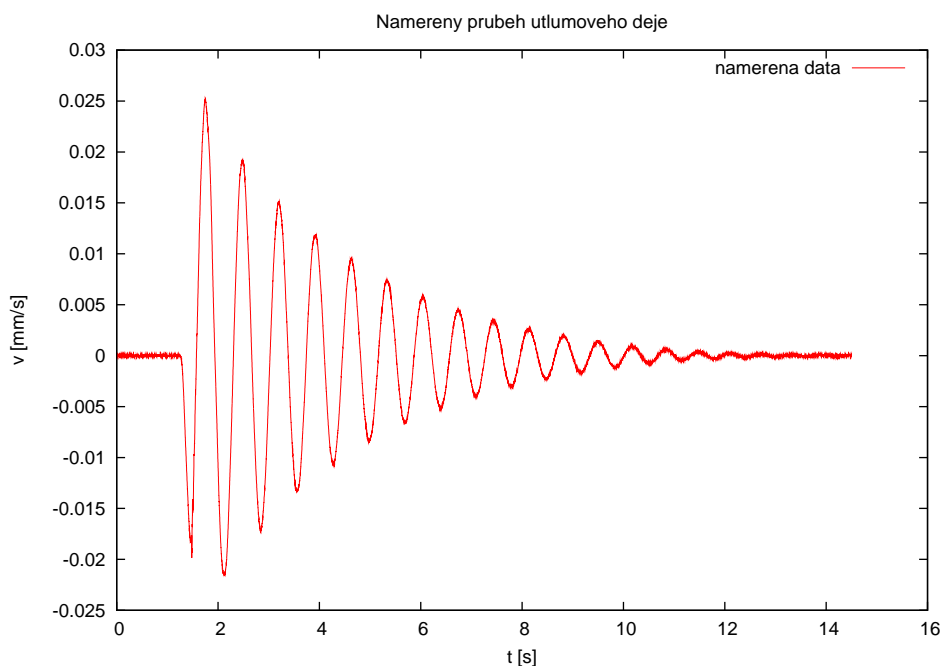
### Vyhodnocení naměřených dat

V předchozích kapitolách byl připraven a na případech volných lineárních a nelineárních tlumených kmitajících soustav popsán kompletní aparát, který byl použit pro vyhodnocení experimentálních dat. Naměřené útlumové křivky byly vždy analyzovány nejprve jako jednoduché kyvadlo nebo soustava lineárních kyvadel, a to tak, aby řešení rovnice 3.5 anebo soustavy 3.22 co nejlépe odpovídalo průběhu naměřených dat. Z nafitovaných koeficientů těchto lineárních rovnic byly pomocí přibližných vzorců určovány materiálové konstanty tuhostí a viskozit. Pro jednodimenzionální kyvadlo jsme se dále věnovali co nejlepšímu vystižení nelinearity tuhosti, kde nejlepších výsledků bylo dosaženo pomocí rovnice 3.20, viz dále.

Při analýze signálu z akcelerometru (měření 3D kmitu) bylo nejprve potřeba odfiltrovat nízkofrekvenční složku způsobenou teplotním gradientem na piezokrystalu. K tomuto účelu byla od signálu odečtena hodnota odpovídající gaussovsky váženému průměru pološířce třikrát širší než byla nejnižší dominantní periodičita signálu. Tato upravený signál mohl být již integrován a dala se tedy z něj vypočíst jak rychlost tak okamžitá energie kyvadel v jednotlivých směrech.

## 5.1 Rekonstrukce potenciálu z experimentálních dat

Na tvar potenciálového "dolíku" se teoreticky můžeme podívat i přímo z experimentálních dat. Vycházíme z dat naměřených pro jednosložkový pohyb (obr. 5.1).



Obrázek 5.1: Ukázka naměřeného průběhu okamžité rychlosti útlumového děje na obratlo L4 *sus crofa*.

Po odeznění budícího impulsu ( $\delta$  pulzu) je energie v systému již jen disipována a žádná další do systému nepřitéká. Podle všech dosud známých faktů je energie v našem systému disipována výhradně viskozními silami, tedy silami úměrnými okamžité rychlosti. Průběh rychlosti však v rámci experimentu stanovujeme. Jsme tedy schopni stanovit závislost celkové energie v systému na čase. Celková energie systému se skládá z energie potenciální a kinetické. V tomto vztahu tedy známe průběh celkové energie  $U(t)$  a z rychlosti jsme schopni stanovit i energii kinetickou  $E_k(t) = \frac{1}{2}mv^2(t)$ . Jedinou neznámou funkční závislostí v rovnici je tedy průběh potenciální energie  $E_p(t)$ . Celková absorbovaná energie je dána vztahem 5.1 [1]:

$$\int_0^x F_v(t)dx, \quad (5.1)$$

kde  $F_v$  je průběh viskózní síly.

Za viskózní sílu dosadíme  $F_v(t) = \nu v(t)$  a integraci přes dráhu změňme na integraci přes čas. Pro absorbovanou energii tedy dostáváme vztah

$$E_k(t) = \int_0^t \nu v(t)v(t)dt = \nu \int_0^t v^2(t)dt \quad (5.2)$$

Celková mechanická energie v daném okamžiku tedy je

$$U(t) = E_0 - \nu \int_0^t v^2 dt, \quad (5.3)$$

kde  $E_0 \in \mathbb{R}^+$  je počáteční energie dodaná do systému  $\delta$  pulzem.

Příklad je na obrázku 5.4.

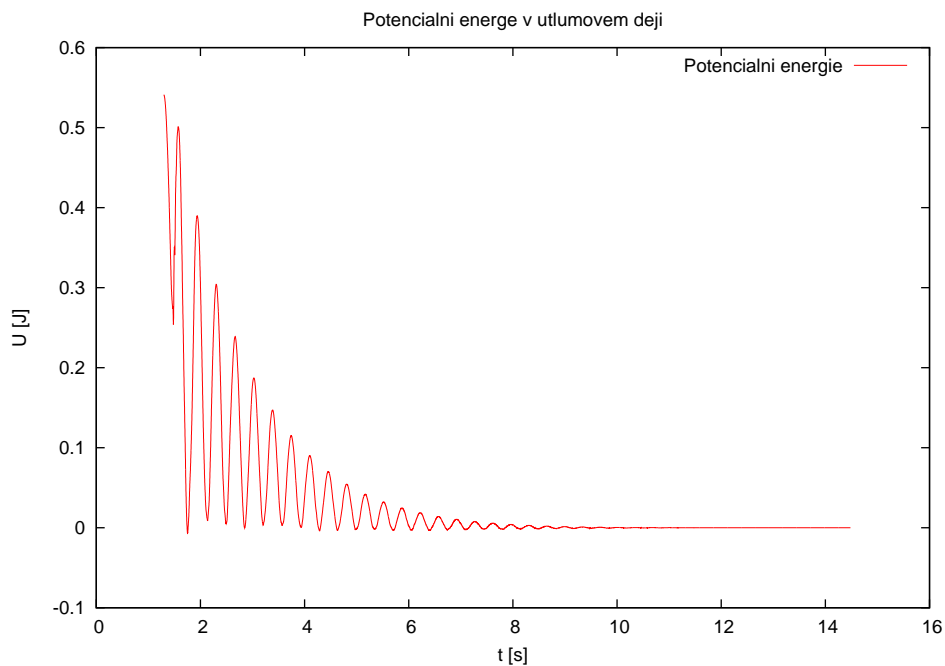
Pro průběh potenciální energie je pak celý vztah:

$$E_p(t) = E_0 - \nu \int_0^t v^2()dt - \frac{1}{2}mv^2(t) \quad (5.4)$$

Z požadavku na nulovost potenciální energie při každém průchodu kyvadla rovnovážnou polohou dostáváme podmínku pro koeficienty v rovnici. Okamžiky  $t_i$  definujeme podmínkou

$$x(t_i) = 0 \quad \forall t_i \text{ je } E_p(t_i) = 0 \quad (5.5)$$

Situaci pro vhodné nalezené koeficienty dokumentuje obrázek 5.2.

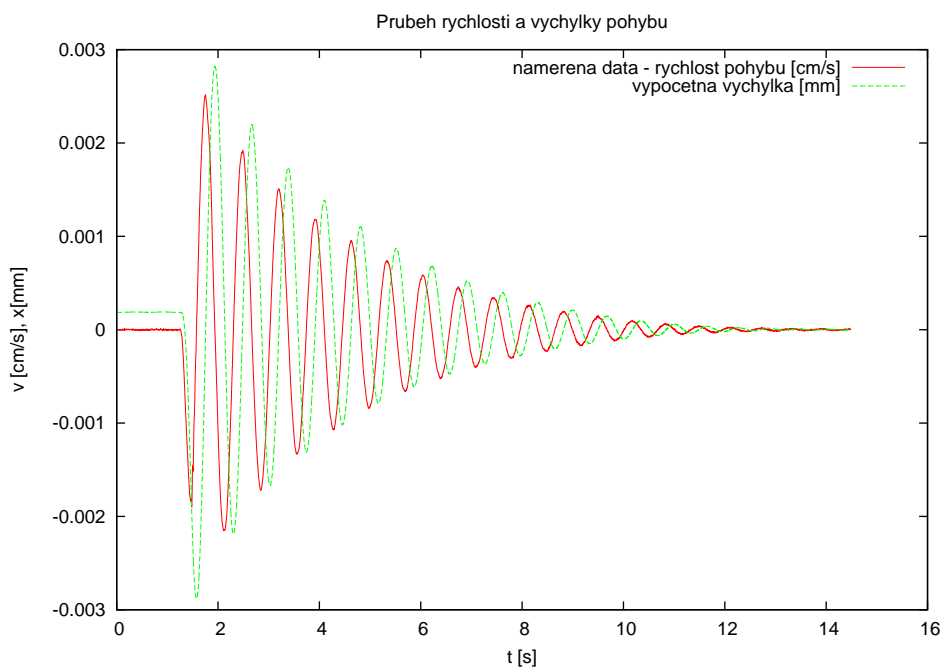


Obrázek 5.2: Zrekonstruovaný průběh potenciální energie naměřeného útlumového děje.

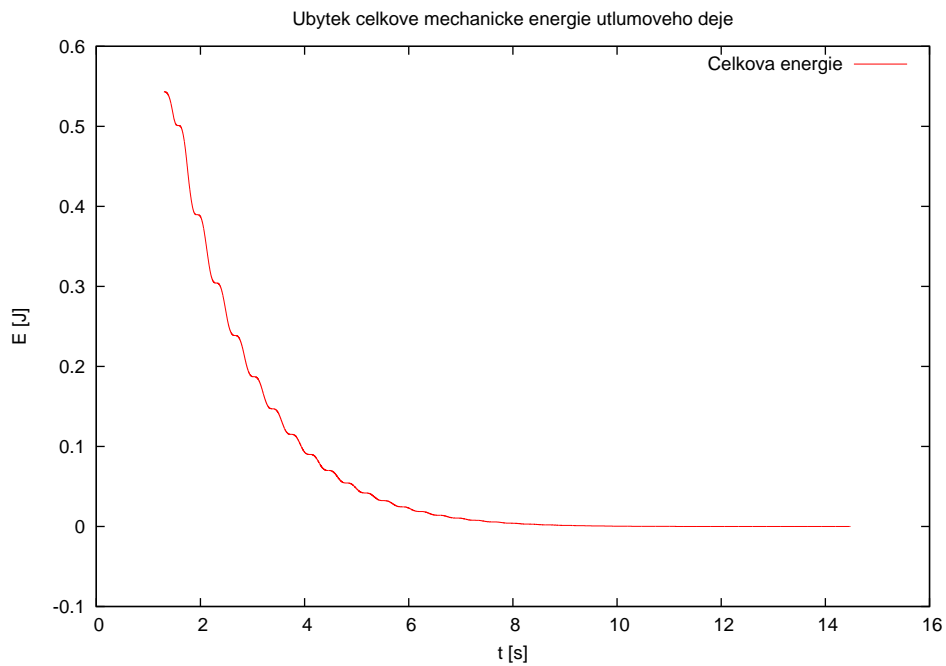
Integrací naměřené rychlosti získáme polohu kyvadla v závislosti na čase  $x(t) = \int_0^t v(t)dt$ , viz obrázek 5.3.

Do grafu poté můžeme vynést závislost potenciální energie na výchylce a názorně tak spatřit potenciálový "dolík" (obr. 5.5).

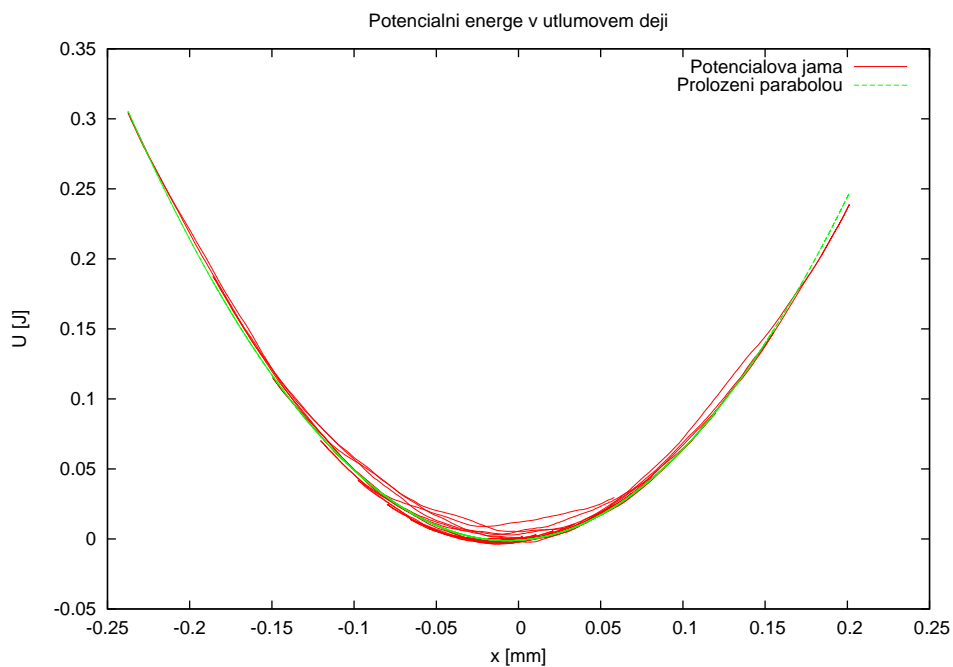
Na obrázku 5.5 je pro srovnání potenciální energie proložena nejlepší možnou parabolou ve smyslu minima čtverců odchylek. Graf závislosti velikosti těchto odchylek na výchylce vidíme na obrázku 5.6.



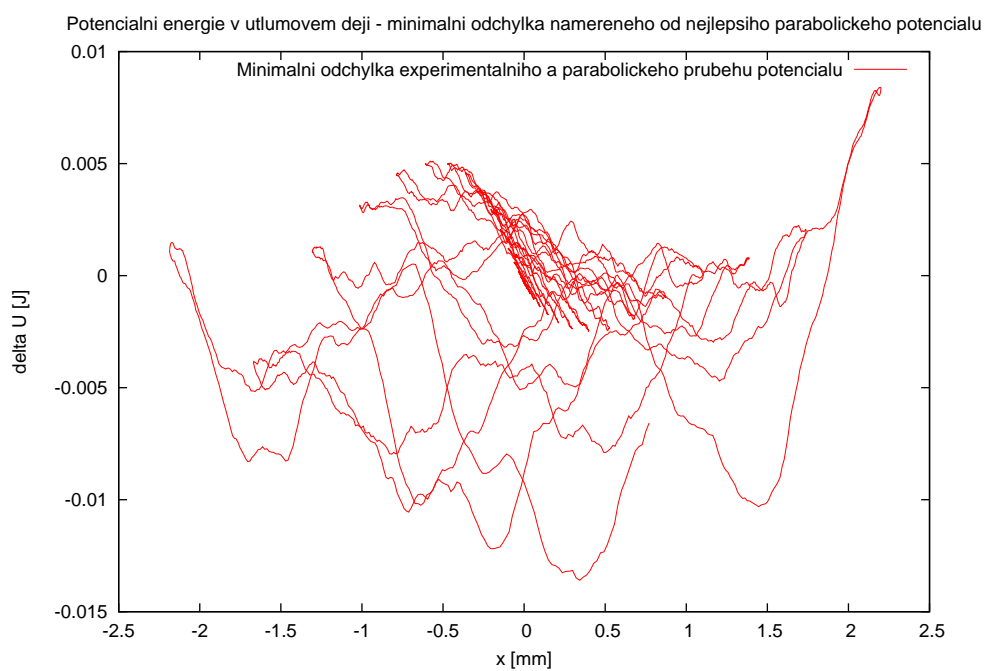
Obrázek 5.3: Naměřená rychlost a zrekonstruovaná poloha vahadla útlumového děje na ploténce L4 *sus crofa*.



Obrázek 5.4: Zrekonstruovaný průběh celkové mechanické energie naměřeného útlumového děje.



Obrázek 5.5: Zrekonstruovaný tvar potenciálového dolíku útlumového děje, ukazuje závislost potenciální energie vahadla od nulové polohy.



Obrázek 5.6: Vývoj odchyky z měření zrekonstruovaného potenciálového dolíku a nejlepšího klasického parabolického dolíku nedává příliš přehledný obraz.

## 5.2 Materiálové konstanty

Při hledání vhodného tvaru diferenciální rovnice popisující naměřenou útlumovou křivku se ukázala být v dobré shodě řešení rovnice (rov. 3.20).

Její fitovací hodnoty jsou v tabulkách (5.2) a (5.3)

$T_{max}$	$\beta[m^{-1}s^{-1}]$	$\omega[s]$	$v_0[m/s]$	$\sqrt{\sum s^2}$
2.0	0.705842	8.855772	0.028329	0.000324
3.0	0.737315	8.887579	0.028528	0.000665
4.0	0.750027	8.916015	0.028595	0.001487
5.0	0.765199	8.939243	0.028712	0.002733
6.0	0.778611	8.958149	0.028826	0.004405
7.0	0.793356	8.970145	0.028989	0.006272
8.0	0.806981	8.977314	0.029156	0.007896
9.0	0.818162	8.978633	0.029317	0.009021
10.0	0.824395	8.978108	0.029411	0.009559
11.0	0.824335	8.977943	0.029405	0.009758
12.0	0.826938	8.977418	0.029451	0.009796

Tabulka 5.1: Fitovaná data od třetího průchodu kyvadla nulovou polohou. V prvním sloupečku tabulek je uveden čas, do kterého jsou fitovaná data brána v úvahu pro daný fit, výpočet sumy čtverců odchylek je uveden v posledním sloupečku. Druhý sloupeček obsahuje fitem získaný nejlepší koeficient  $\beta$ , třetí sloupeček lineární elastický člen  $\omega$ , ve čtvrtém sloupečku vidíme hodnoty fitem získaných počátečních rychlostí. Nejlepší řešení rovnice (C.4).

Koeficienty  $\omega$  a  $\gamma$  jsou velmi stabilní pro libovolný řešení rovnice (3.20) fitovaný úsek dat. Součet čtverců nebývá poklesl v podstatě na úroveň, kdy odchylky jsou tvořeny jen měřícím šumem (viz. obr. 5.7). Jediným nestabilním parametrem je viskózní parametr  $\beta$ . Tento fakt nasvědčuje tomu, že i tento tlumící viskózní člen je rychlostně závislý, a to přímo úměrně.

Nyní uvedeme ještě několik parametrů  $\beta$ ,  $\omega$  a  $\gamma$  pro jiná měření na téže ploténce. Jednalo se o ploténku L4 o rozměrech  $4 \times 3 \text{ cm}$ , tloušťce  $6 \text{ mm}$  zatěžovanou torzně vahadlem o momentu  $0,1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  o hmotnosti  $415 \text{ g}$  uchycenou s páteří osou horizontálně. Z těchto faktů a dat uvedených v tabulkách vyplývají z použití vzorce C.4 tyto přibližné materiálové konstanty (tyto jsou přibližné, protože materiál považují za lineární, homogenní, izotropní a průřez ploténky kruhový):

Křivku na obrázku (obr. 5.14 vlevo) můžeme v tomto přiblížení popsat pomocí lineárních materiálových konstant  $\nu$ -viskozita a  $G$ -Youngův modul ve smyku pomocí rovnice 5.6 [3, 4], z čehož porovnáním s rovnicí C.4 jsou materiálové konstanty určeny vztahy 5.7 a 5.8.

$$\phi = Ae^{-\frac{r^4\nu}{4IJ}t} \sin \left( \sqrt{\frac{r^4G}{2IJ} - \frac{r^4\nu}{4IJ}} t + \alpha \right) \quad (5.6)$$

$T_{max}$	$\beta$	$\omega$	$\gamma \cdot 10^{-9}$	$v_0[m/s]$	$\sqrt{\sum s^2}$
2.0	0.722428	7.314247	0.938962	0.028692	0.000193
3.0	0.751464	7.472314	0.945852	0.028915	0.000279
4.0	0.763003	7.441332	0.944587	0.029047	0.000350
5.0	0.777977	7.461576	0.945466	0.029230	0.000476
6.0	0.787784	7.453517	0.945144	0.029362	0.000581
7.0	0.796207	7.460610	0.945433	0.029483	0.000757
8.0	0.801825	7.390117	0.942626	0.029582	0.000880
9.0	0.805599	7.362395	0.941510	0.029647	0.000997
10.0	0.807353	7.344764	0.940776	0.029673	0.001084
11.0	0.809187	7.346379	0.940836	0.029705	0.001166
12.0	0.809928	7.347067	0.940859	0.029719	0.001213

Tabulka 5.2: Fitovaná data od třetího průchodu kyvadla nulovou polohou. V prvním sloupečku tabulek je uveden čas, do kterého jsou fitovaná data brána v úvahu pro daný fit, výpočet sumy čtverců odchylek je uveden v posledním sloupečku. Druhý sloupeček obsahuje fitem získaný nejlepší koeficient  $\beta$ , třetí sloupeček lineární elastický člen  $\omega$ , čtvrtý sloupeček nelineární elastický člen  $\gamma$ , v pátém sloupečku vidíme hodnoty fitem získaných počátečních rychlostí. Nejlepší řešení rovnice (3.20).

$$\frac{(\omega^2 + \beta)2lJ}{r^4} = G \quad (5.7)$$

$$\nu = \frac{4lJ\beta}{r^4} \quad (5.8)$$

Dosazením hodnot z tabulky 5.1 dostaneme pro smykový Youngův modul pružnosti  $G$  přibližnou hodnotu  $G = 1,6 \cdot 10^6 [Pa]$ , a pro dynamickou viskozitu  $\nu$  hodnotu  $\nu = 8 \cdot 10^3 [Pa \cdot s]$ .

Zajímavé chování parametrů rovnice (3.20) vidíme pro ploténku mezi obratlovými těly C2-C3 v tabulce 5.4 a grafu (obr. 5.8). Můžeme vidět, že i přes neustálé zvlhčování ploténky Ringerovým roztokem dochází k systematickému posunu hodnot těchto parametrů. Tuhost vzorku roste, zatímco nelinearita se zmenšuje, neboť  $\gamma$  konverguje k jedné.

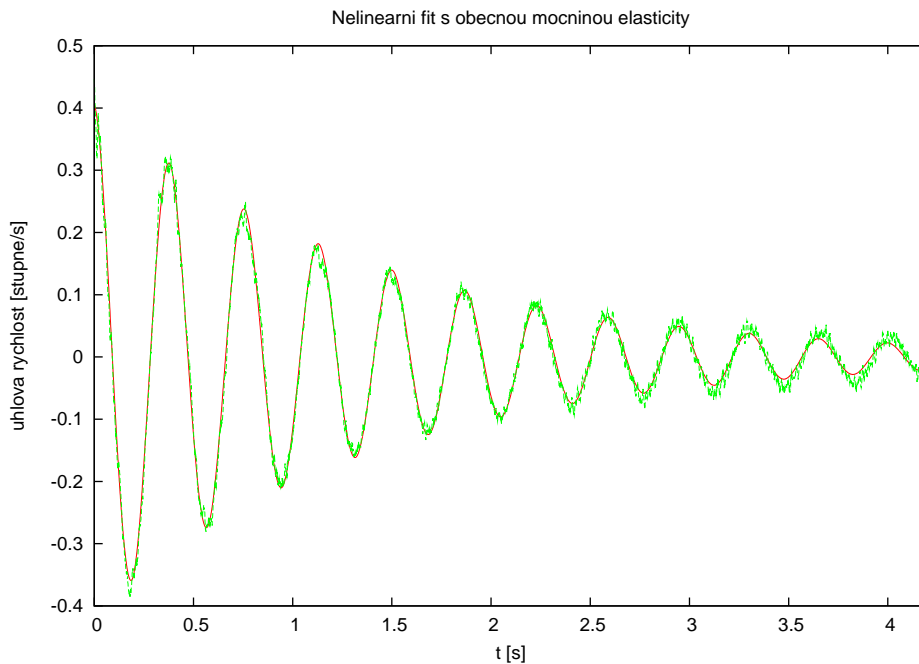


$T_{max}$	$\beta$	$\omega$	$\gamma \cdot 10^{-9}$	$v_0[m/s]$	$\sqrt{\sum s^2}$
2.0	0.893845	7.322157	0.940187	0.010153	0.000069
3.0	0.904774	7.345294	0.941170	0.010189	0.000078
4.0	0.921978	7.372244	0.942170	0.010247	0.000121
5.0	0.932044	7.363498	0.941822	0.010287	0.000142
6.0	0.940139	7.299066	0.939491	0.010320	0.000165
7.0	0.944273	7.303852	0.939619	0.010341	0.000190
8.0	0.946007	7.213518	0.936374	0.010348	0.000223
9.0	0.945983	7.213544	0.936364	0.010349	0.000248

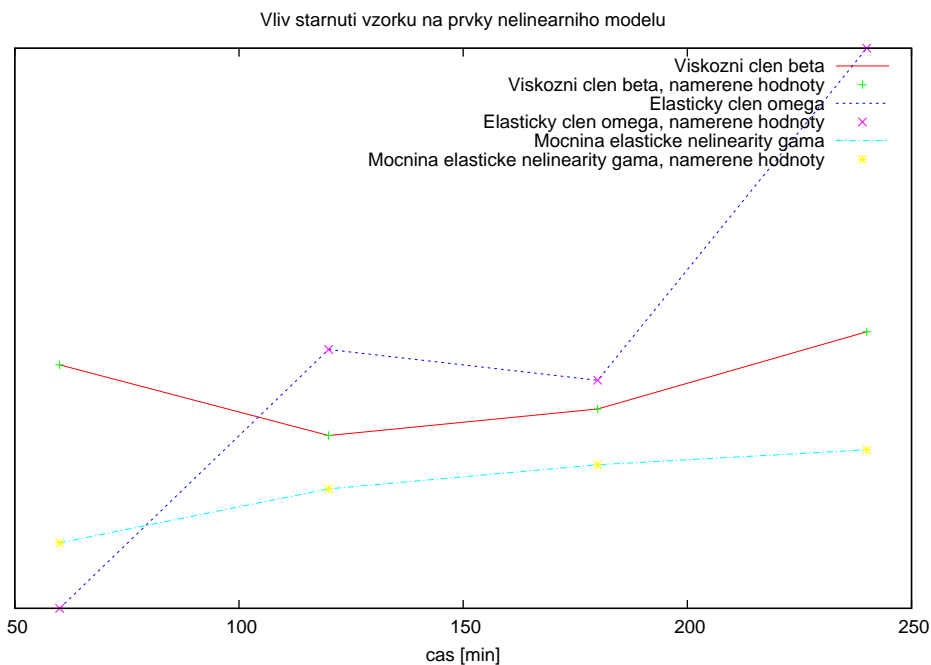
Tabulka 5.3: Fitovaná data od pátého průchodu kyvadla nulovou polohou. V prvním sloupečku tabulek je uveden čas, do kterého jsou fitovaná data brána v úvahu pro daný fit, výpočet sumy čtverců odchylek je uveden v posledním sloupečku. Druhý sloupeček obsahuje fitem získaný nejlepší koeficient  $\beta$ , třetí sloupeček lineární elastický člen  $\omega$ , čtvrtý sloupeček nelineární elastický člen  $\gamma$ , v pátém sloupečku vidíme hodnoty fitem získaných počátečních rychlostí. Nejlepší řešení rovnice (3.20).

Počet minut od porážky	Disipační viskózní člen $\beta$	Elastický člen $\omega$	Mocnina nelineární elasticity $\gamma$	$v_0[m/s]$	$\sqrt{\sum s^2}$
60	1.435920	14.116273	.924416	.406790	.696413
120	1.053240	15.519229	.966320	.400673	2.552066
180	1.196933	15.352205	.985000	.414674	14.257716
240	1.615298	17.152080	.996477	.220074	1.258591

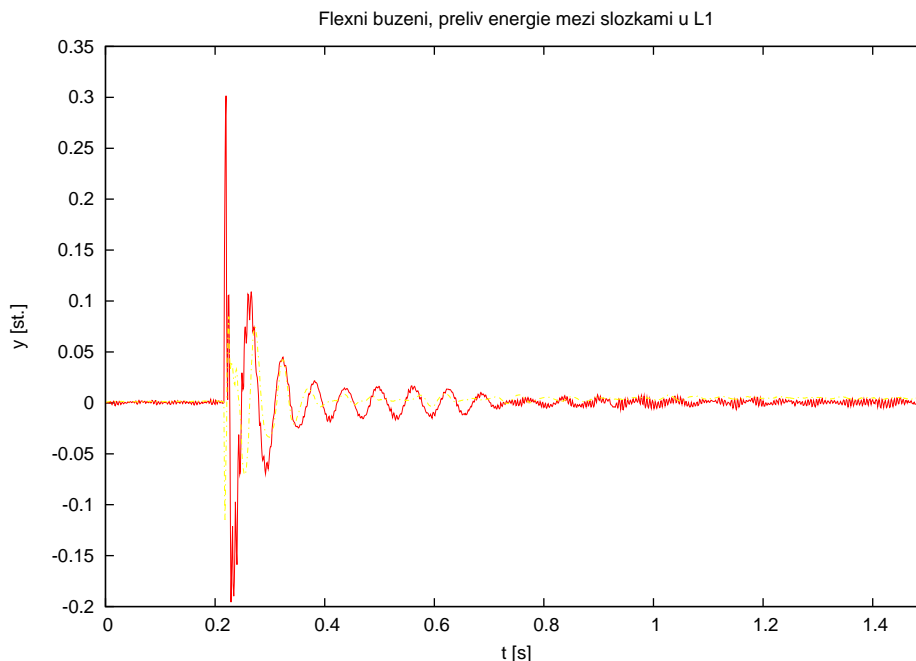
Tabulka 5.4: Vliv stárnutí vzorku na velikost jednotlivých parametrů ve fitovací rovnici (3.20).



Obrázek 5.7: Porovnání nejlepšího naitovaného řešení rovnice (3.20) a naměřených dat pro ploténku L4 ukazuje téměř dokonalou shodu v periodicitě signálu, avšak mírně se zvětšující odchytku maximálních amplitud způsobenou nelinearitou viskózního disipačního členu, který není dosud v rovnici zahrnut.



Obrázek 5.8: Grafické znázornění trendu jednotlivých parametrů z rovnice (3.20) v závislosti na stárnutí vzorku, jejichž hodnoty jsou uvedeny v tabulce (5.4), naznačují systematické tuhnutí vzorku a snižování nelinearity.

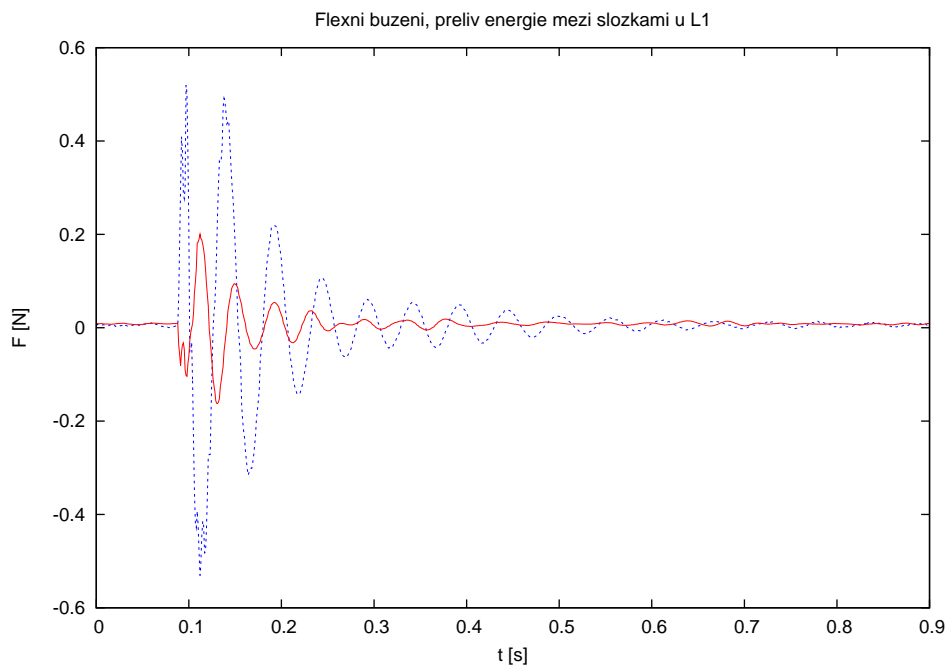


Obrázek 5.9: Pokud neprivilegujeme jeden ze směrů volnosti, tak se u FSU kyvadla energie distribuuje z původního směru, v němž byla oscilace vyvolána, i do směrů ostatních. Vidíme, že energie je velmi rychle předána i do ostatních směrů volnosti a pak v nich tlumena stejně významně jako ve směru původním. Červená křivka popisuje původní směr kmitů odpovídající čisté laterální flexi, žlutá kmitů přenesené do směru čisté flexe. Je možné si povšimnout, že vlastní rezonanční frekvence jsou pro laterální flexi a flexi různé. Ukazuje se, že jejich vzájemný poměr velmi dobře odpovídá poměru poloos elipsy opisující vnější hranu hraniční plochy obratle.

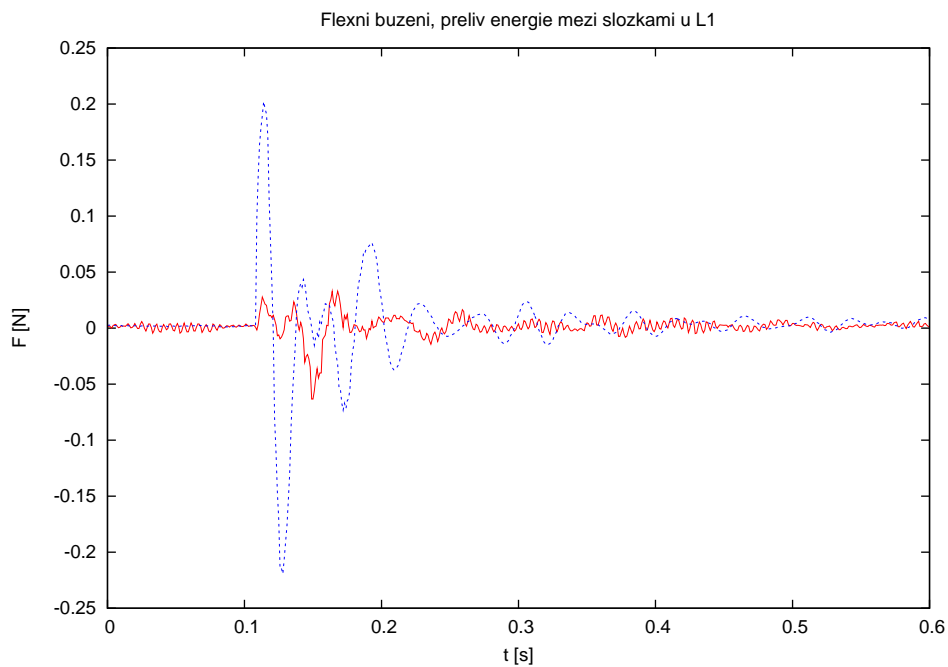
### 5.3 Trojosa měření

Pro vyšetřování situace popsané v kapitole 3.7 jsme použili aparaturu z obrázku 4.11 k analýze mezisměrových přenosů energie. Vybuzení proběhlo vždy ve směru jedné z hlavních os symetrie obratle  $\delta$  pulzem o velikosti několika  $mJ$ . Sledovali jsme přenos vibrací vybuzených tímto pulzem do jiných ortogonálních směrů. Tyto pohyby odpovídaly flexi a laterální flexi. Příklady naměřených křivek zobrazují obrázky 5.9, 5.10 a 5.11. Aparatura byla konstruována tak, že těžiště vahadlového kříže se senzory bylo umístěno na přední stěně páteřního kanálu, tedy v oblasti, která odpovídá přirozenému středu otáčení (obr. 5.12).

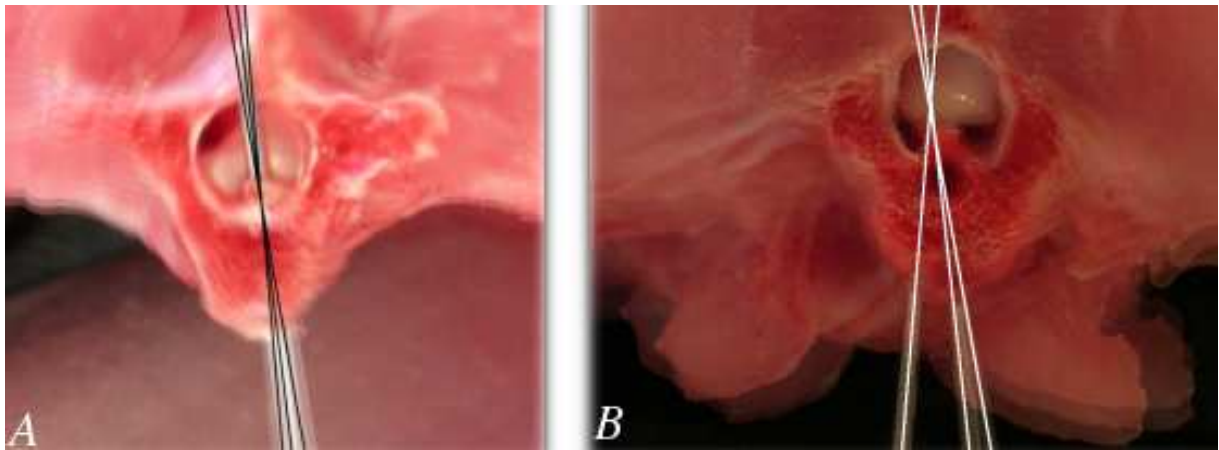
Pro další zpracování bylo třeba z naměřeného průběhu odfiltrovat  $32\text{ Hz}$  signál, který odpovídal vlastní rezonanční frekvenci měrných ramen. Takto upravená data byla analyzována v lineárním přiblížení, tedy byly hledány parametry  $\nu^j$ ,  $\kappa^{i,j}$ , viz rovnice 3.23. Hledali jsme takové řešení této soustavy, která je ve smyslu minimalizace sumy čtverců odchylek optimální. Získali jsme šest materiálových parametrů a tři vektory os, které, jak se dalo předpokládat, přibližně odpovídaly osám symetrie obratle. Poměry tuhostí a útlumů pro osy odpovídající laterální flexi a flexi byly v dobré shodě s poměrem geometrických rozměrů měřené obratlové plošky. Tuhosti i tlumení odpovídaly s chybou 20% tuhostem zjištěným metodou rovinných kmitů měřených na aparatuře (obr. 4.3) při řešení v lineárním přiblížení.



Obrázek 5.10: Modrá křivka popisuje původní směr kmitů odpovídající čisté flexi, červená kmity přenesené do směru čisté laterální flexe.



Obrázek 5.11: Modrá křivka popisuje původní směr kmitů odpovídající čisté torzi, červená kmity přenesené do směru čisté flexe. Jemné vlnky jsou artefaktem způsobeným oscilací vahadla.



Obrázek 5.12: Ověření umístění středu otáčení obratle při torzi. V tomto experimentu jsme provedli řez testovaným obratlem savce (*oryctolagus cuniculus f. domesticus*). Zbylou část obratle jsme upevnili na páku s jemným posunem. Obratel následující jsme pevně fixovali svěrkou k nehybné stolici. Snímali jsme CCD kamerou o vysokém rozlišení (Nikon CoolPix 5400 v makro režimu) pro každý diskretní úhel pootočení 1 snímek. Získané snímky jsme přeložili přes sebe s částečnou průhledností a vyznačili pohyb několika dominantních bodů. Průsečík středu křivosti jednotlivých obloučků vymezuje oblast center rotace, která je umístěna na přední stěně páteřního kanálu. A obratel C7; B obratel Th12.

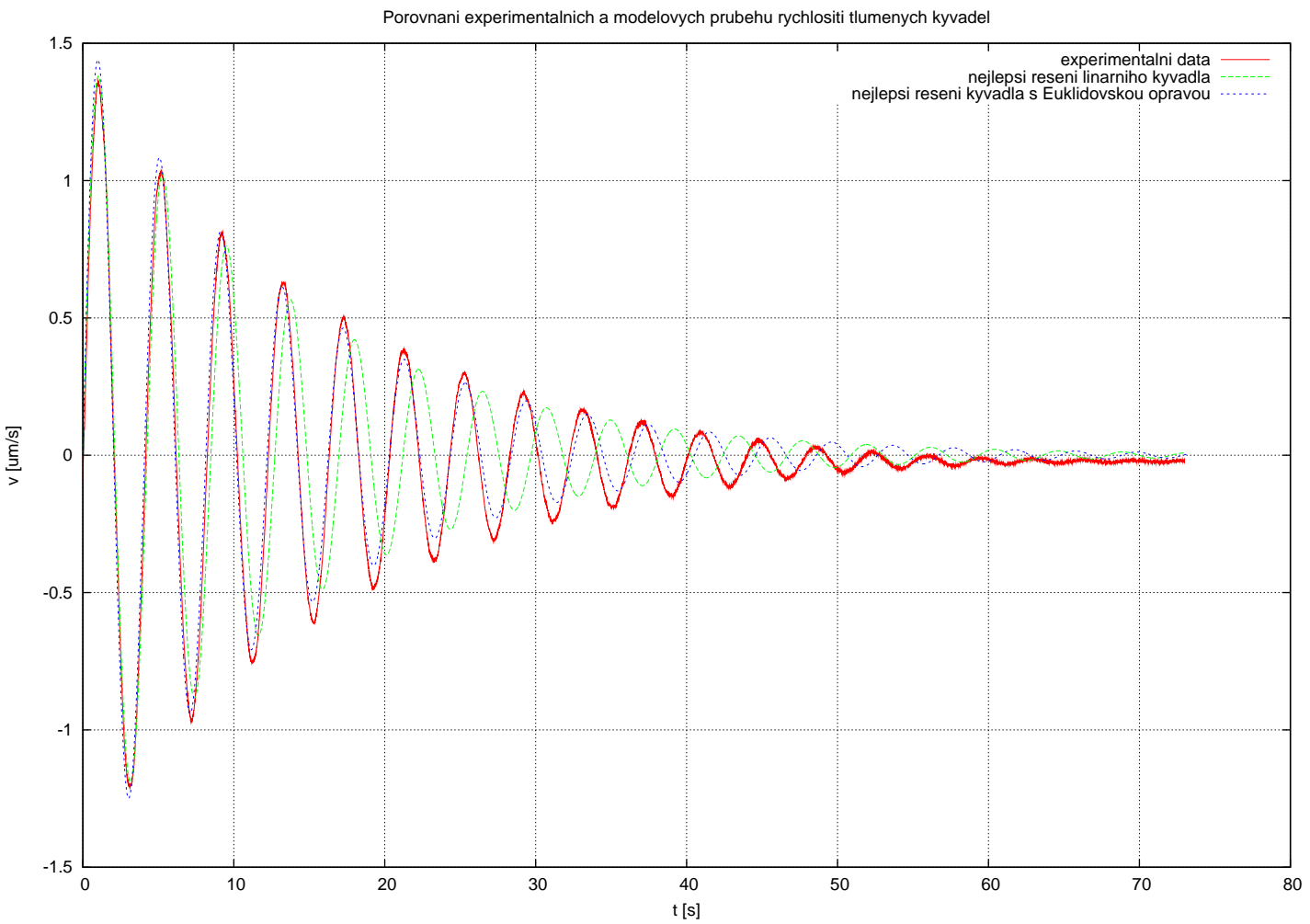
# Diskuze

Obecně se v modelech meziobratlové ploténky předpokládá tuhost nezávislá na amplitudě pohybu nebo rostoucí s amplitudou. Tato práce ukazuje, že toto platí pouze pro amplitudy na horním okraji fyziologického rámce nebo i za ním. V oblasti malých výchylek hluboko uvnitř tzv. Panjabiho neutrální zóny [18], jejíž existenci tímto zpochybňujeme, však zcela jednoznačně platí opak, tedy měknutí se vzrůstající amplitudou. Je nepochybné, že k určení viskoelastických vlastností meziobratlové ploténky je vhodné přistupovat různými měřicími metodami. Naše poměrně nekonvenční metoda má mimo jiné za cíl nezaujatě vyhledat maximálně účelně skupinu parametrů popisujících v nejlepší možné míře hlavní vlastnosti ploténky v oblasti jejího nejčastějšího využití. Ačkoli u některých nekonvenčních parametrů, které navrhujeme pro posouzení rozdílů jak autentických plotének tak meziobratlových implatnátů, například koeficient  $\gamma$ , nevíme, jaké reálné přímo měřitelné veličině mohou odpovídat, pokládáme je však za velmi účelné, a to i přesto, že naše pokusy přímou rekonstrukcí potenciálů z naměřených dat nepřinášejí příliš povzbudivé výsledky a nedá se říci, že by jednoznačně potvrzovaly vhodnost vysvětlení zkrácení periody s klesající amplitudou jako deformaci potenciálové jámy. Naproti tomu je korelace průběhu řešení rovnice 3.18 s naměřenými útlumovými daty typu jako na obr. 5.1 velice přesvědčivá. Pro jeho důležitost jej uvádíme ještě jednou (obr. 5.13).

Tento obrázek ukazuje reálnou možnost popisu změny periody s amplitudou jako odchylky od kvadratického potenciálu. Pokud by to tak bylo, znamenalo by to rozpor s tvrzením prof. Ďoubala [20], který naměřil podobné závislosti pro cévní stěny a kůži, ovšem interpretuje je (bez matematického popisu) jako únavu materiálu. Konečnou odpověď na otázku, která z interpretací je správná, může nejspíše dát jen jiný typ experimentu:

Budeme-li například elektromechanickým budičem budit na konstantní frekvenci oscilace na vzorku v blízkosti jeho rezonanční frekvence, bude možné pozorovat buď zhruba dvacetiprocentní zmenšení amplitudy během cca třiceti až padesáti kmitů, pak dá příroda za pravdu spíše prof. Ďoubalovi, anebo se amplituda měnit nebude, resp. bude po začátku buzení jen monotónně stoupat, pak bude pravda je spíše na naší straně.

Jinou zajímavou otázkou je analýza přelivu energie u kmitání s třemi složkami. Zatím se nám nepodařilo popsat mezisložkový energetický přenos natolik, abychom byli schopni napsat vazební podmínky  $q_{ij}$  (obr. 3.16) takové, aby zaručovaly jednostrannost energetického přenosu (obr. 5.15) nebo aby naopak mohlo v rámci jediného útlumového děje docházet k mnohonásobným energetickým přesunům mezi jednotlivými složkami oscilačního pohybu (obr. 5.16). Nejsme ani schopni rozhodnout, který z těchto dvou typů útlumu je v ploténce



Obrázek 5.13: Porovnání experimentálních dat (sus *crofa* L4-5, torze) rovinného kyvadla s ložiskem tvořeným ploténkou s nejlepším možným řešením rovnice matematického kyvadla  $\ddot{x} + 0,14\dot{x} + 2,2x = \delta$  a nejlepšího řešení s potenciálem rovnice  $3,17\ddot{x} + 0,145\dot{x} + 2,21x + \frac{0,1}{\sqrt{1+x^2}} = \delta$ .

realizovatelný, potažmo pro ni optimální.

Také se můžeme například ptát, zda je možné, aby amplituda v primární budící složce byla ve fyziologickém případě v nějaké části útlumu menší než v sekundárně vybuzeném směru oscilace. Ještě podstatnější otázkou však je, zda celkový energetický útlum v sekundárním směru může překročit energii utlumenou ve směru primárního pohybu. Jakou asi podmínku pro  $q_{ij}$  by tato omezení znamenala?

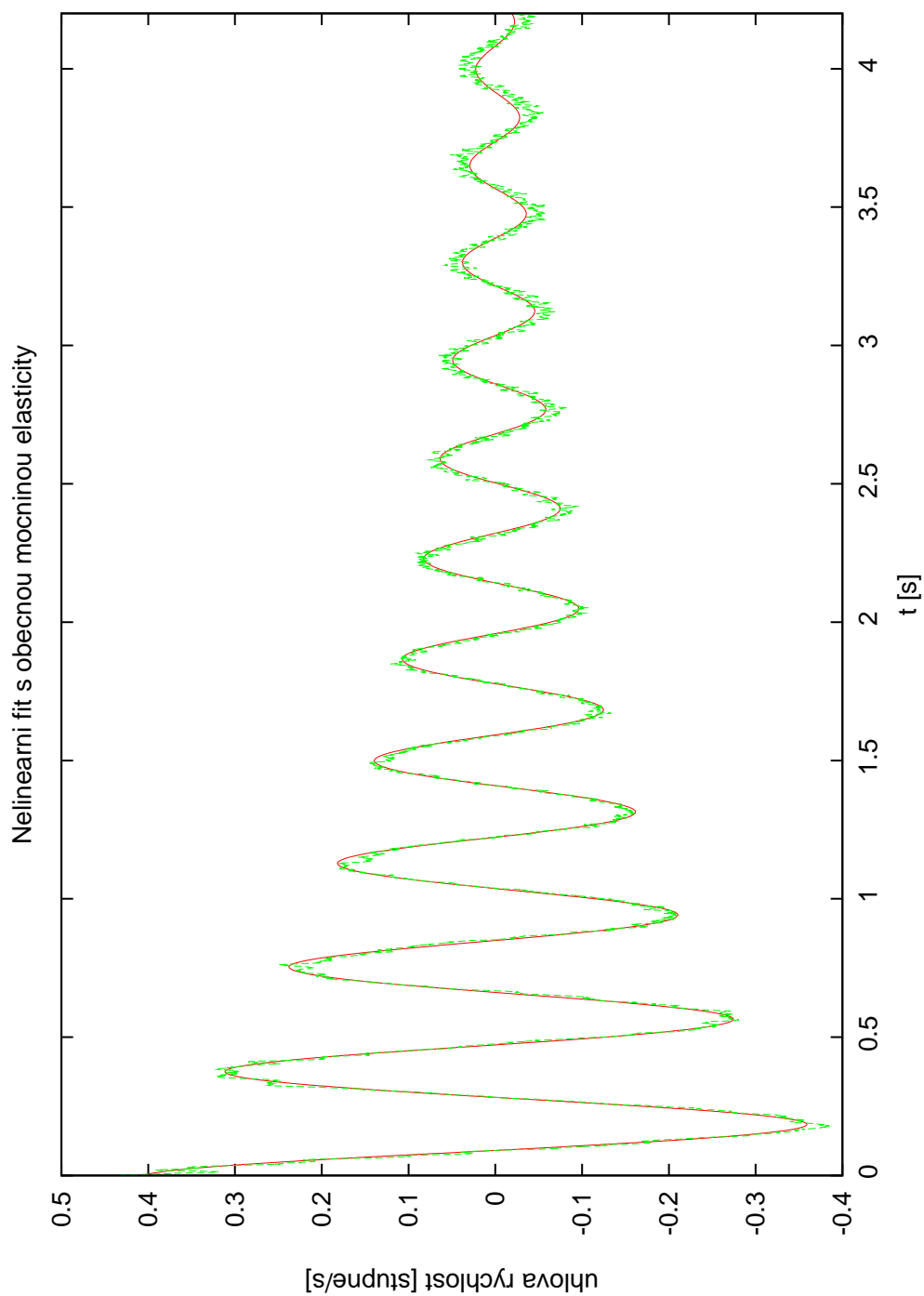
Podářilo se nám naopak ukázat, že mezisložkový přeliv energie je velmi rychlý s relaxační dobou kolem dvou period rezonančního kmitu. Jsme přesvědčeni, že další analýza takto rozvolněného útlumového děje by odhalila další strukturální prvky popisu ploténkového útlumu.

Co se týče použitého biologického materiálu potvrzujeme v podstatě skutečnosti udávané v literatuře [26], že totiž na použitém konkrétním zvířecím druhu je charakter naměřeným dynamických veličin nezávislý. Toto tvrzení je platné i přestože počet lamel *annulus fibrosus* je u ovcí typicky třikrát vyšší (tloušťka naopak pětikrát nižší) a *nucleus pulposus* je mnohem hutnější.

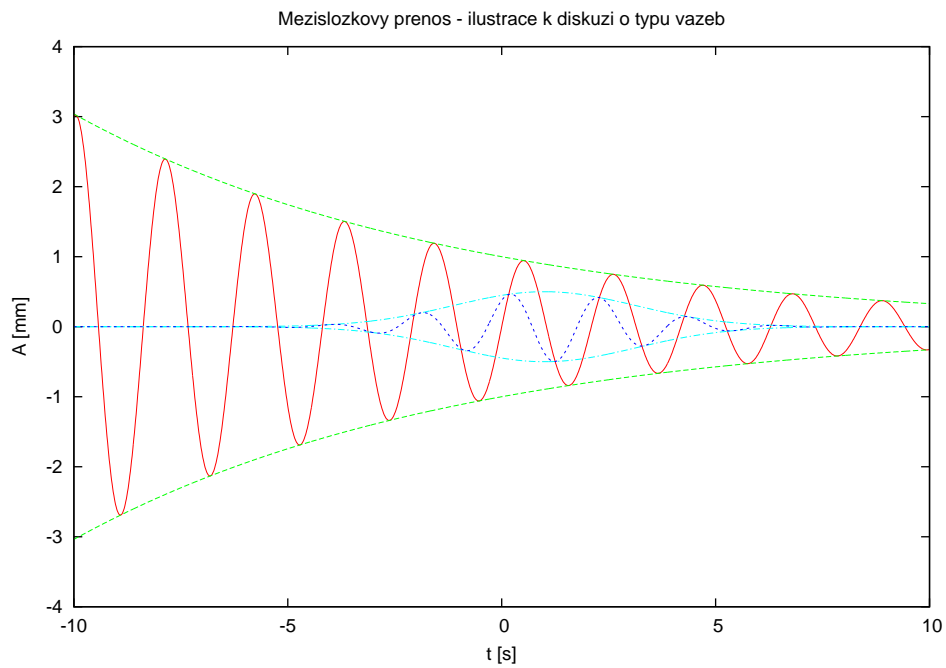
Daleko větší problém než typ zvířete je podle našich zkušeností stáří vzorku. Svalstva a šlach zbavená páteř si uchovává bez použití Ringerova roztoku svoje mechanické vlastnosti jen několik desítek minut, při vlhčení Ringerovým roztokem asi desetkrát déle. Zamrazení vzorku, byť obaleného ochranným textilním materiálem napuštěným tímto roztokem a uzavřeným v neprodyšném polyetylenovém krytu, ponechaný tak po několik týdnů, ovlivní po opětovném rozmrazení vzorku mechanické hodnoty minimálně o desítky procent. Získávání biologického materiálu ve vhodné podobě nebyl díky soukromým zemědělcům a chovatelům větší problém a vzorky se podařilo měřit velmi čerstvé. Většina zvířat pocházela od soukromého chovatele p. J. Růžičky z Prahy-Slivence. Rozmanipulováním zvířat řezníkem nepředstavovalo problém zejména u ovcí a jehňat, u prasat a selat bylo zapotřebí vyhledat řezníka ochotného provádět porážku takovým způsobem, aby se nepoškodila páteř. Tento způsob rozmanipulování je však běžný u soukromých chovatelů v celých jižních Čechách, čili ani to nepředstavovalo větších problémů.

I přestože jsme dosáhli ve výpočtu parametrů z tabulky 5.1 pomocí vzorců 5.6, 5.7 a 5.8 s literaturou srovnatelných hodnot youngových modulů a viskozit, hlavní přínos této práce vidíme zvláště ve vytvoření dvou nových metodik, které jsou s to bez přídavných mechanických vazeb velmi jemně ukázat charakter nelinearity meziobratlového spojení i pro velmi malé výchylky. Tento charakter byl poměrně úspěšně popsán pomocí rovnice s mocninnou tuhostí (rov. 3.20), kde jsme zavedli parametr  $\gamma$  a mnohými měřeními ukázali jeho stabilitu a prospěšnost.

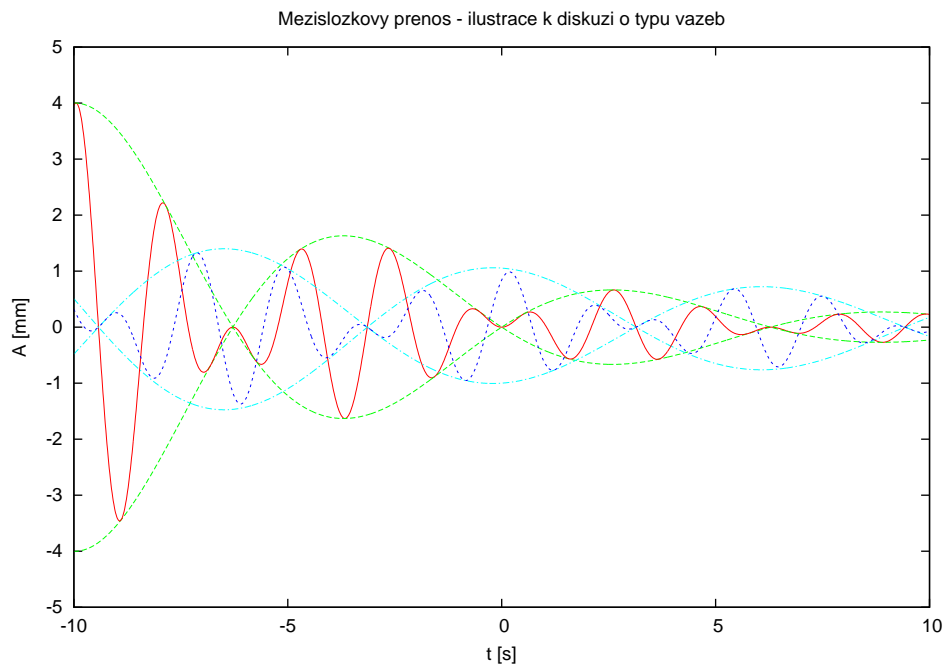




Obrázek 5.14: Porovnání nejlepšího naitovaného řešení rovnice (3.20) a naměřených dat pro ploténku L4 ukazuje téměř dokonalou shodu v periodicitě signálu, avšak mírně se zvětšující odchylku maximálních amplitud způsobenou nelinearitou viskózního disipačního členu, který není dosud v rovnici zahrnut.



Obrázek 5.15: Náčrtek případu, kdy je energie disipována i ve druhé složce volnosti, avšak nedochází již k jejímu zpětnému přenosu. V obrázku jsou kromě konkrétního oscilačního průběhu zakresleny i obalové křivky.



Obrázek 5.16: Tlumený záznějový děj, kde dochází k několikanásobnému přelivu energie mezi složkami pohybu. V obrázku jsou kromě konkrétního oscilačního průběhu zakresleny i obalové křivky.

# Závěr

Metodou volné oscilace, která se nám zdá pro určení viskoelastických vlastností ploténky jako celku vhodnější než konvenční trhací techniky [22], se nám podařilo identifikovat nelineárnost tuhosti v oblasti malých fyziologických kmitů pro flexe a rotaci. Za pomoci detailní analýzy útlumové křivky jsme stanovili poměrně úspěšnou opravu k potenciálu v rovnici matematického tlumeného kyvadla.

Tento opravný koeficient tvoří obecnou mocninu tuhosti a pohybuje se u čerstvých vzorků v rozmezí 0,92-0,95. Pro vzorky starší konverguje k 1. Tento opravný člen úspěšně vystihuje velkou část charakteru tuhosti, tedy měknutí materiálu při větších výchylkách. Ukazuje se, že tentýž koeficient je vhodné použít pro popis velmi malých oscilací i jiných tkáňových struktur jako je kůže či cévy [20]. Kupodivu i u nich se nalézají jeho hodnota ve stejných rozmezích jako u zde zkoumané ploténky.

Nyní již k samotným hypotézám této práce, viz vytýčené cíle (str. 7).

- ad **H1** Vyvrácena. Ukázalo se, že i v tak malém rozmezí deformací, kde probíhá deformace ploténky za života jedince běžně, a kterou nazýváme fyziologický rozsah deformací, platí, že deformace na deformační síle nezávisí beze zbytku lineárně, ale je třeba zde zavést nelineární opravný koeficient. Pozoruhodné je, že tento koeficient má za úkol vystihovat právě opačný trend, než by se z dříve publikovaných prací dalo předpokládat. Pro větší výchylky se totiž v této oblasti mikrovýchylek dynamického zatížení ploténka jeví jako méně tuhá než pro výchylky menší. Tento poznatek je ve svém důsledku v přímém rozporu s teorií tzv. Panjabihho neutrálních zón [23], které vymezují oblast klesající nebo až nulové tuhosti.
- ad **H2** Potvrzena. Přestože se ukazuje, že větší amplitudy jsou i ve fyziologických rychlostech deformace tlumeny rychleji než by odpovídalo prostému lineárnímu tlumení, je tato oprava velmi malá.
- ad **H3** Potvrzena. Ukazuje se, že útlum FSU jako celku nabývá svého maxima při vlastní rezonanční frekvenci stejné FSU.
- ad **H4** Potvrzena. Struktura ploténky je "navržena" tak, aby co možná nejrychleji odvedla přetížení z daného směru do směrů ostatních a zrovnoměnila tak zatížení svých struktur.

Modifikací měřící aparatury jsme získali možnost experimentálně zkoumat mezisměrové energetické přenosy v rámci jednoho útlumového děje. O těchto přenosech jsme přesvědčeni, že významnou měrou přispívají k rozložení zátěže do všech substruktur ploténky, a tím k její větší odolnosti, stejně jako k maximálnímu útlumovému efektu.

Přestože jsme si vědomi nelineárnosti charakteru ploténky, pokoušíme se nejprve popsat mezisměrový přenos mechanické energie v ploténce jako lineární soustavu rovnic, což nám umožňuje stanovit tři vlastní frekvence a tři vlastní vektory systému ploténky, které, jak se dalo předpokládat, vycházejí téměř kolineárně s hlavními osami symetrie ploténky.

Tato práce především poukázala na neprobádanost mechanických přeměn a přenosu v meziobratlové ploténce v oblasti malých výchylek. Tedy takových, které jsou během života jedince nejčastěji používány a o přesné až o úzkostlivě přesné dodržení charakteru vazeb bychom se měli snažit. V rámci této práce byly vytvořeny především metody jak tyto vazby efektivně zkoumat (třebaže v podmínkách *in vitro*). Zde rozpracované metody se zdají být nástrojem velmi kvalitním pro porovnávání vhodnosti nových ploténkových náhrad, jakož i pro další výzkum parametrů a charakteru vazeb meziobratlového ploténkového spojení.

# Literatura

- [1] ARNOLD, V. I.: *Matematiceskije metody klassičeskoj mehaniki*. Moskva: Vydavatelství Nauka 1979.
- [2] BREPTA, R., PŮST, L., TUREK, F.: *Mechanické kmitání*. Praha: Sobotáles 1994.
- [3] BROŽ.: *Základy fyzikálních měření I*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství 1983.
- [4] BROŽ.: *Základy fyzikálních měření II*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství 1983.
- [5] DEPALMA, A. F., ROTHMAN, R. H.: *The Intervertebral Disk*. Philadelphia: W. B. Saunders Company 1970.
- [6] DOOB, M.: *Jemný úvod do T<sub>E</sub>Xu*. Manuál pro samostatné studium. Praha: Karolinum 1990.
- [7] HORÁK, J., KRLÍN, L.: *Deterministický chaos a matematické modely turbulence*. Praha: Academia 1996.
- [8] KOPKA, H., DALY, P. W.: *A Guide to L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2<sub>ε</sub>*. Padstow: TJ Press 1995.
- [9] KOPKA, H., DALY, P. W.: *L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X Podrobný průvodce*. Brno: Computer Press 2004.
- [10] LUKEŠ, J.: *Microstructure and microrheology of intervertebral disc*. Diplomová práce ČVUT. Praha 2005.
- [11] MARŠÍK, F., DVOŘÁK, I.: *Biotermodynamika*. Praha: Academia 1998
- [12] MARVAN, F. & kol.: *Morfologie hospodářských zvířat*. Praha: Nakladatelství Brázda 1998.
- [13] NAJBRT, R. & kol.: *Veterinární anatomie*. Praha: Státní zemědělské nakladatelství 1973.
- [14] PROKEŠOVÁ, E.: *Moderní náhrady bederních meziobratlových plotének z pohledu biomechaniky a fyzioterapie*. Diplomová práce FTVS UK. Praha 2004.
- [15] REKTORYS, K. & SPOL.: *Přehled užití matematiky*. Praha: Nakladatelství Prometheus, s.r.o. 1995.

- [16] ŠOUREK, K.: Chirurgie meziobratlových bederních plotének. 1. vydání. Praha: Avicenum 1984.
- [17] WEINSTEIN, J. N., WIESEL S. W.: The Lumbar Spine. Philadelphia: W. B. Saunders Company 1990.
- [18] WHITE A, PANJABI M.: Clinical Biomechanics of the Spine. 2nd Ed. Philadelphia, PA: J.B. Lippincott Co. 1990.
- [19] ZEMANOVÁ, P.: Popis struktury a viskoelastických vlastností meziobratlové ploténky. Diplomová práce FTVS UK. Praha 2001.
- [20] ĎOUBAL, S.: Reologické vlastnosti viskoelastických těles-identifikace modelů a odhad parametrů. *Česká a slovenská farmacie* , Vol. XLIX, Num. 3, pp. 124-130, 2000.
- [21] HALL, L. T., ESSES, S. I., NOBLE, P. C., KAMARIC, E. : Morphology of the Lumbar Vertebral Endplates. *Spine 14*, Vol. 23, pp. 1517-1523, 1998.
- [22] IATRIDIS, J. C., MACLEAN, J. J., RYAN, D.A.: Mechanical damage to the intervertebral disc annulus fibrosus subjected to tensile loading. In *Journal of Biomechanic* 2005 Vol. 35, Issue 9, Pages 1163-1171.
- [23] PANJABI, M. M., KRAG, M. H., CHUNG, T. Q.: Effects of Disc Injury on Mechanical Behavior of the Spine. *Spine 7*, Vol. 9, pp. 707-713, 1984.
- [24] PANJABI, M. M., KRAG, M. H., GOEL, V. K.: A Technique for Measurement and Description of Three-Dimensional Six Degree-of-Freedom Motion of a Body Joint with an Application to the Human Spine. *J. Biomechanics 14*, pp. 447-460, 1981.
- [25] PANJABI, M. M., BROWN, M., LINDHAL S. & AL.: Intrinsic Disc Pressure as a Measure of Integrity of the Lumbar Spine. *Spine 8*, Vol. 13, pp. 913-917, 1988.
- [26] WILKE, H. J., KETTLER, A., CLAES, L. E.: Are Sheep Spines a Valid Biomechanical Model for Human Spines? *Spine 22(20)*, Vol. 15, pp. 2365-2374, 1997.
- [27] TAYLOR, T. K. F., MELROSE, J., BURKHARDT, D.: Spinal Biomechanics and Aging Are Major Determinants of the Proteoglycan Metabolism of Intervertebral Disc Cells. *Spine 25 (23)*, Vol. 1, pp.3014-3020 2000.
- [28] <http://www.efunda.com/materials/polymers/properties/>. Staženo 19.2.2007.
- [29] [www.mems.rice.edu/TAFSM/PROJ/AS/parachute.html](http://www.mems.rice.edu/TAFSM/PROJ/AS/parachute.html). Staženo 19.8.2005.
- [30] [www.nlm.nih.gov](http://www.nlm.nih.gov). Staženo 6.8.2005.
- [31] [www.learntech.uwe.ac.uk](http://www.learntech.uwe.ac.uk). Staženo 6.8.2005.
- [32] [www.emba.uvm.edu](http://www.emba.uvm.edu). Staženo 6.8.2005.

- [33] [www.chirogeek.com](http://www.chirogeek.com). Staženo 7.8.2005.
- [34] [www.spineuniverse.com](http://www.spineuniverse.com). Staženo 7.8.2005.
- [35] <http://biomech.ftvs.cuni.cz/pbpk/kompendium/anatomie/axsystem.php>.  
Staženo 24.8.2005
- [36] <http://www.bartleby.com/107/>. Staženo 24.8.2005
- [37] <http://moon.ouhsc.edu/dthomпсо/namics/trunk.htm>. Staženo 24.8.2005
- [38] <http://www.spineuniverse.com/displayarticle.php/article107.html>. Staženo 24.8.2005
- [39] <http://iacuc.cwru.edu/policy/shgtaa.html>. Staženo 2.10.2005.

# Index

- amplituda, 23
- cíl, 8
- disipace, 20, 21
- elasticita, 20
  - lineární, 21
  - nelineární, 21
- energie
  - útlum, 23
  - kinetická, 20
  - mechanická, 20
  - potenciální, 20, 25
  - tepelná, 20
- hypotéza, 8
- kmitání, 24, 33
- kyvadlo
  - eukleidovské, 42, 44
  - kubické, 30, 40
  - lineární, 45
  - s obecnou mocninou, 43
  - se suchým třením, 29, 39
  - s viskózním útlumem, 28, 38
  - torzní, 9
- obratel, 12
  - bederní, 13
  - hrudní, 13
  - kost křížová, kostrč, 13
  - krční, 13
  - oblouk, 12
  - tělo, 12
- páteř, 11
  - funkční pohybová jednotka (FSU), 11
  - vazy, 12, 14
- ploténka
  - meziobratlová, 11, 14, 15
  - náhrada, 7, 8
- pružina, 20
- soustava
  - netlumená
    - kmitání, 24, 33
  - tlumená
    - kmitání, 24, 25, 33
- tření
  - suché, 21
  - viskózní, 21, 22
- výchylka, 24
- viskozita, 20



# Seznam obrázků

2.1	Páteř, pohled zepředu a ze strany . . . . .	11
2.2	Krční obratel. . . . .	12
2.3	Hrudní obratel. . . . .	12
2.4	Bederní obratel. . . . .	12
2.5	Kost křížová. . . . .	12
2.6	Krátké a dlouhé vazy páteře [34, 38]. . . . .	13
2.7	Embryo, 18.-23. den [36, 5]. . . . .	14
2.8	Sklerotomy migrují mediálně a obklopí notochord, čímž jej oddělí od neurální trubice a střev [5]. . . . .	15
2.9	Každý z původních sklerotomů se dále rozdělí na kraniální a kaudální polovinu. Každá kaudální polovina posléze splyne s kraniální polovinou sousedního sklerotomu. Tato dvojice tvoří budoucí obratlové tělo. Z centrální části původního sklerotomu se formuje meziobratlová ploténka. Notochord podléhá mukózní degeneraci a na konci desátého týdne embryonálního vývoje jej nalézáme již pouze zavzatý do prostoru disku, kde dává základ vzniku nucleus pulposus [5]. . . . .	15
2.10	Příčný řez meziobratlovou ploténkou a její schema [31, 32] . . . . .	16
2.11	Adolescentní meziobratlová ploténka [33] . . . . .	16
2.12	Kostra ovce domácí ( <i>ovis domestica</i> ). . . . .	17
2.13	Kostra prasete domácího ( <i>sus scrofa</i> ). . . . .	17
3.1	Příklad suchého tření . . . . .	20
3.2	Příklad vazkého tření-”kulička v medu” . . . . .	21
3.3	Příklad vazkého tření úměrného kvadrátu rychlosti [29]. . . . .	21
3.4	Lineární přiblížení . . . . .	22
3.5	Model kmitavé tlumené soustavy o jednom stupni volnosti. . . . .	23
3.6	Průběh $u(t)$ při podkritickém tlumení. . . . .	27
3.7	Závislost poměru vlastních frekvencí $\Omega_i/\Omega$ na poměrném útlumu $b_p$ . . . . .	28
3.8	Pohyb viskózně tlumeného kyvadla. . . . .	29
3.9	Pohyb kyvadla se suchým třením. . . . .	30
3.10	Kmity poblíž separatrixy. Výchylka (červeně), zrychlení (modře) a rychlost (zeleně). . . . .	31
3.11	Korekce k tuhosti u eukleidovského kyvadla klesá pro větší výchylky přibližně jako $x^{-1}$ . . . . .	33
3.12	Potenciálem lineárního kyvadla s konstantní tuhostí je parabola. . . . .	34
3.13	Nelineární člen definující kvadratický potenciál má tvar výpočtu vzdálenosti v Eukleidovském prostoru. Tento člen tvoří opravu k parabolickému potenciálu na obrázku 3.12. . . . .	34
3.14	Neporušený parabolický potenciál (zeleně), jeho eukleidovská oprava (modře) a součtový výsledný potenciál (červeně). . . . .	35

3.15	Porovnání nejlepšího nafitovaného řešení rovnice (3.20) a naměřených dat pro ploténku L4 ukazuje téměř dokonalou shodu v periodicitě signálu, avšak mírně se zvětšující odchylku maximálních amplitud způsobenou nelinearitou viskozniho disipačního členu, který není dosud v rovnici zahrnut. . . . .	36
3.16	Schema soustavy mající možnost kmitat se třemi stupni volnosti. $k_{1-3}$ značí tři obecně nelineární tuhosti, každou v jiné složce pohybu, podobně $\nu_{1-3}$ jsou vazké tlumící členy, rovněž obecně nelineární pro různé složky pohybu. $q_{12,23,13}$ značí vazby mezi jednotlivými směry pohybu. $M_{1-3}$ jsou tři momenty hybnosti pro různé směry pohybu. . . . .	37
4.1	Biologický materiál připravený k měření. Vzorky byly zbaveny svalů a vazů, dorzální část páteře byla odstraněna vertikálním řezem páteřním kanálem. Řez je naznačen modře. . . . .	42
4.2	Periodická složka srdečního pozadí. . . . .	42
4.3	Druhá verze aparatury ke snímání kmitů v rovině obsahovala snímací prvky pro větší citlivost umístěné až na konci vahadla. Moment se nastavoval posunem závaží po ramenech vahadla a měnil se tak se vzdáleností od středu otáčení mechanický moment, aniž by se měnilo předpětí vzorku. . . . .	43
4.4	Tatáž aparatura z jiného úhlu pohledu. . . . .	43
4.5	Detail prvku snímajícího rychlost vahadla při torzi. Při flexi jej bylo nutno otočit o $\frac{\pi}{2}$ . . . . .	44
4.6	Nejdokonalejší verze aparatury měřící rychlost pohybu raménka ve dvou směrech a umožňující i jeho harmonické buzení byla vybavena pohyblivými závažími, kterými bylo lze měnit mechanický moment kmitadla v poměrně širokém rozmezí (1 : 30) bez nutnosti změny mechanického předpětí vzorku. . . . .	44
4.7	Způsob uchycení biologického vzorku do měřící aparatury byl snadný. . . . .	45
4.8	Při odklopených keramických permanentních magnetech je dobře vidět budící i snímací cívkou. . . . .	45
4.9	Vzorek horní krční ovčí páteře upnutý do aparatury. . . . .	46
4.10	Celkový pohled na měřící aparaturu se vzorkem ovčí ploténky. . . . .	46
4.11	Aparatura se třemi stupni volnosti. Akcelerometry typu SV 162 jsou připevněny k pevnému kříži ve vzájemně kolmých směrech. . . . .	46
4.12	Schema konečné verze měřící aparatury. Přípravek (1a) pro uchycení prvního těla obratle (V1) k pevně nehybné podložce; přípravek 1b připojuje na tělo sousedního obratle (V2) momentovou tyč (5) a současně permanentní magnety (4), které tvoří pohyblivou součást snímačů rychlosti pohybu vahadla (momentové tyče). Na momentovou tyč se navléká symetricky závaží (6) určující jednak předpětí, hlavně pak ale moment kmitadla; (2) upevnění obratlů do přípravků. . . . .	47
4.13	Náčrt způsobu zatěžování meziobratlové ploténky v aparatuře se třemi stupni volnosti. . . . .	47
5.1	Ukázka naměřeného průběhu okamžité rychlosti útlumového děje na obratlo L4 <i>sus crofa</i> . . . . .	49
5.2	Zrekonstruovaný průběh potenciální energie naměřeného útlumového děje. . . . .	50
5.3	Naměřená rychlost a zrekonstruovaná poloha vahadla útlumového děje na ploténce L4 <i>sus crofa</i> . . . . .	51
5.4	Zrekonstruovaný průběh celkové mechanické energie naměřeného útlumového děje. . . . .	52
5.5	Zrekonstruovaný tvar potenciálového dolíku útlumového děje, ukazuje závislost potenciální energie vahadla od nulové polohy. . . . .	52
5.6	Vývoj odchylky z měření zrekonstruovaného potenciálového dolíku a nejlepšího klasického parabolického dolíku nedává příliš přehledný obraz. . . . .	53
5.7	Porovnání nejlepšího nafitovaného řešení rovnice (3.20) a naměřených dat pro ploténku L4 ukazuje téměř dokonalou shodu v periodicitě signálu, avšak mírně se zvětšující odchylku maximálních amplitud způsobenou nelinearitou viskozniho disipačního členu, který není dosud v rovnici zahrnut. . . . .	57

5.8	Grafické znázornění trendu jednotlivých parametrů z rovnice (3.20) v závislosti na stárnutí vzorku, jejichž hodnoty jsou uvedeny v tabulce (5.4), naznačují systematické tuhnutí vzorku a snižování nelinearity. . . . .	57
5.9	Pokud neprivilujeme jeden ze směrů volnosti, tak se u FSU kyvadla energie distribuuje z původního směru, v němž byla oscilace vyvolána, i do směrů ostatních. Vidíme, že energie je velmi rychle předána i do ostatních směrů volnosti a pak v nich tlumena stejně významně jako ve směru původním. Červená křivka popisuje původní směr kmitů odpovídající čisté laterální flexi, žlutá kmitů přenesené do směru čisté flexe. Je možné si povšimnout, že vlastní rezonanční frekvence jsou pro laterální flexi a flexi různé. Ukazuje se, že jejich vzájemný poměr velmi dobře odpovídá poměru poloos elipsy opisující vnější hranu hraniční plochy obratle. . . . .	58
5.10	Modrá křivka popisuje původní směr kmitů odpovídající čisté flexi, červená kmitů přenesené do směru čisté laterální flexe. . . . .	59
5.11	Modrá křivka popisuje původní směr kmitů odpovídající čisté torzi, červená kmitů přenesené do směru čisté flexe. Jemné vlnky jsou artefaktem způsobeným oscilací vahadla. . . . .	59
5.12	Ověření umístění středu otáčení obratle při torzi. V tomto experimentu jsme provedli řez testovaným obratlem savce ( <i>oryctolagus cuniculus f. domesticus</i> ). Zbylou část obratle jsme upevnili na páku s jemným posunem. Obratel následující jsme pevně fixovali svěrkou k nehybné stoličce. Snímali jsme CCD kamerou o vysokém rozlišení (Nikon CoolPix 5400 v makro režimu) pro každý diskretní úhel pootočení 1 snímek. Získané snímky jsme přelozili přes sebe s částečnou průhledností a vyznačili pohyb několika dominantních bodů. Průsečík středu křivosti jednotlivých obloučků vymezuje oblast center rotace, která je umístěna na přední stěně páteřního kanálu. A obratel C7; B obratel Th12. . . . .	60
5.13	Porovnání experimentálních dat ( <i>sus crofa</i> L4-5, torze) rovinného kyvadla s ložiskem tvořeným ploténkou s nejlepším možným řešením rovnice matematického kyvadla $\ddot{x} + 0,14x + 2,2x = \delta$ a nejlepšího řešení s potenciálem rovnice 3.17 $\ddot{x} + 0,145x + 2,21x + \frac{0,1}{\sqrt{1+x^2}} = \delta$ . . . . .	62
5.14	Porovnání nejlepšího naitovaného řešení rovnice (3.20) a naměřených dat pro ploténku L4 ukazuje téměř dokonalou shodu v periodicitě signálu, avšak mírně se zvětšující odchylku maximálních amplitud způsobenou nelinearitou viskózního disipačního členu, který není dosud v rovnici zahrnut. . . . .	64
5.15	Návrh případu, kdy je energie disipována i ve druhé složce volnosti, avšak nedochází již k jejímu zpětnému přenosu. V obrázku jsou kromě konkrétního oscilačního průběhu zakresleny i obalové křivky. . . . .	65
5.16	Tlumený zánějový děj, kde dochází k několikanásobnému přelivu energie mezi složkami pohybu. V obrázku jsou kromě konkrétního oscilačního průběhu zakresleny i obalové křivky. . . . .	65
B.1	Osazený plošný spoj dvoukanalového nábojového zesilovače a 30-ti násobného předzesilovače k akcelometru SV163. . . . .	76
B.2	Pionýrské začátky. . . . .	77
B.3	Vypreprovaná páteř prasete domácího ( <i>sus scrofa</i> ). . . . .	77
B.4	Příprava měření. . . . .	78
B.5	Konzultace.... . . . .	78
C.1	Torzni kyvadlo užitá pro kalibraci měřicí aparatury. . . . .	80
C.2	Torzni kyvadlo užitá pro kalibraci měřicí aparatury v režimu krutu. . . . .	82
C.3	Torzni kyvadlo užitá pro kalibraci měřicí aparatury v režimu ohybu. . . . .	82
C.4	Polyetylenový šroub použitý pro kalibraci měřicí aparatury s vyznačenou namáhanou částí. . . . .	83
C.5	Kalibrace měřicí aparatury pomocí polyetylenové tyče. . . . .	83

C.6	.....	86
C.7	.....	86

# Seznam tabulek

2.1	Základní anatomické rozdíly páteře lidské a v této práci měřené. . . . .	18
3.1	Řešení $u(t)$ z pohybové rovnice 3.5 pro některé zvláštní případy budící funkce $F(t)$ a nulové počáteční podmínky $u(0) = \dot{u}(0) = 0$ . . . . .	25
3.2	Výsledky řešení frekvenční rovnice C.6 a výchylky $u(t)$ pro různé případy viskózního tlumení ( $\Omega_t = \Omega\sqrt{1 - b_p^2}$ -vlastní úhlová frekvence tlumené soustavy). . . . .	26
4.1	Srovnání vitálních charakteristik ovce domácí a prasete domácího. . . . .	41
4.2	Složení 1000ml Ringerova roztoku. . . . .	41
5.1	Fitovaná data od třetího průchodu kyvadla nulovou polohou. V prvním sloupečku tabulek je uveden čas, do kterého jsou fitovaná data brána v úvahu pro daný fit, výpočet sumy čtverců odchylek je uveden v posledním sloupečku. Druhý sloupeček obsahuje fitem získaný nejlepší koeficient $\beta$ , třetí sloupeček lineární elastický člen $\omega$ , ve čtvrtém sloupečku vidíme hodnoty fitem získaných počátečních rychlostí. Nejlepší řešení rovnice (C.4). . . . .	54
5.2	Fitovaná data od třetího průchodu kyvadla nulovou polohou. V prvním sloupečku tabulek je uveden čas, do kterého jsou fitovaná data brána v úvahu pro daný fit, výpočet sumy čtverců odchylek je uveden v posledním sloupečku. Druhý sloupeček obsahuje fitem získaný nejlepší koeficient $\beta$ , třetí sloupeček lineární elastický člen $\omega$ , čtvrtý sloupeček nelineární elastický člen $\gamma$ , v pátém sloupečku vidíme hodnoty fitem získaných počátečních rychlostí. Nejlepší řešení rovnice (3.20). . . . .	55
5.3	Fitovaná data od pátého průchodu kyvadla nulovou polohou. V prvním sloupečku tabulek je uveden čas, do kterého jsou fitovaná data brána v úvahu pro daný fit, výpočet sumy čtverců odchylek je uveden v posledním sloupečku. Druhý sloupeček obsahuje fitem získaný nejlepší koeficient $\beta$ , třetí sloupeček lineární elastický člen $\omega$ , čtvrtý sloupeček nelineární elastický člen $\gamma$ , v pátém sloupečku vidíme hodnoty fitem získaných počátečních rychlostí. Nejlepší řešení rovnice (3.20). . . . .	56
5.4	Vliv stárnutí vzorku na velikost jednotlivých parametrů ve fitovací rovnici (3.20). . . . .	56
C.1	Rozměry kalibrační aparatury, kalibrovaného přípravku a pomocných zařízení. . . . .	79
C.2	Kalibrační měření na ocelovém lanku, naměřené hodnoty pro výpočet ohybových a torzních momentů ocelového lanka bez a s měřícím přípravkem. . . . .	81
C.3	Konkrétní hodnoty získané z experimentu obratel-ploténka-obratel, ohyb. . . . .	84
C.4	Konkrétní hodnoty získané z experimentu obratel-ploténka-obratel, torze. . . . .	87
E.1	Porovnání řešení podobné tematiky ve světě. ?=autoři neuvádějí; NP= <i>nucleus pulposus</i> ; AF= <i>annulus fibrosus</i> . . . . .	91

# Dodatek A

## Výpočtový program pro potenciálovou jámu v Octave

```
R=load("roto_L4_L5_lf03.txt");
X1 = R(48000:62500,3);
X1=X1.+ 0.0004;
gset terminal postscript eps enhanced monochrome
gset output "nahled.eps"

x(10)=0;
index=(1:14501)/1000;

for i=11:14491 P=polyfit (index(i-10:i+9),X1(i-10:i+9)',3);
x1(i)=polyval(P,index(i)); Pi= polyinteg (P);
dt(1)=index(i-1)-(index(i)-index(i-1))/2;
dt(2)=index(i-1)+(index(i)-index(i-1))/2;
dx=polyval(Pi,dt); x(i)=x(i-1)+dx(2)-dx(1); endfor;

ylabel "v [mm/s]"
xlabel "t [s]"
title "Namereny prubeh utlumoveho deje"

gset output "nahledx.eps"
plot (index,X1,";namerena data - rychlost pohybu [mm/s];",index(1:14491),
X1(1:14491),,"; vypocetna vychylka [mm];")

v2(10)=0
for i=11:14491 v2(i)=x1(i)*x1(i); endfor;

Ed(10)=0
for i=11:14482 P=polyfit (index(i-10:i+9),v2(i-10:i+9),3);
```

```

Pi=polyinteg(P);dt(1)=index(i-1)-(index(i)-index(i-1))/2;
dt(2)=index(i-1)+(index(i)-index(i-1))/2;
dx=polyval(Pi,dt); Ed(i)=Ed(i-1)+dx(2)-dx(1); endfor;

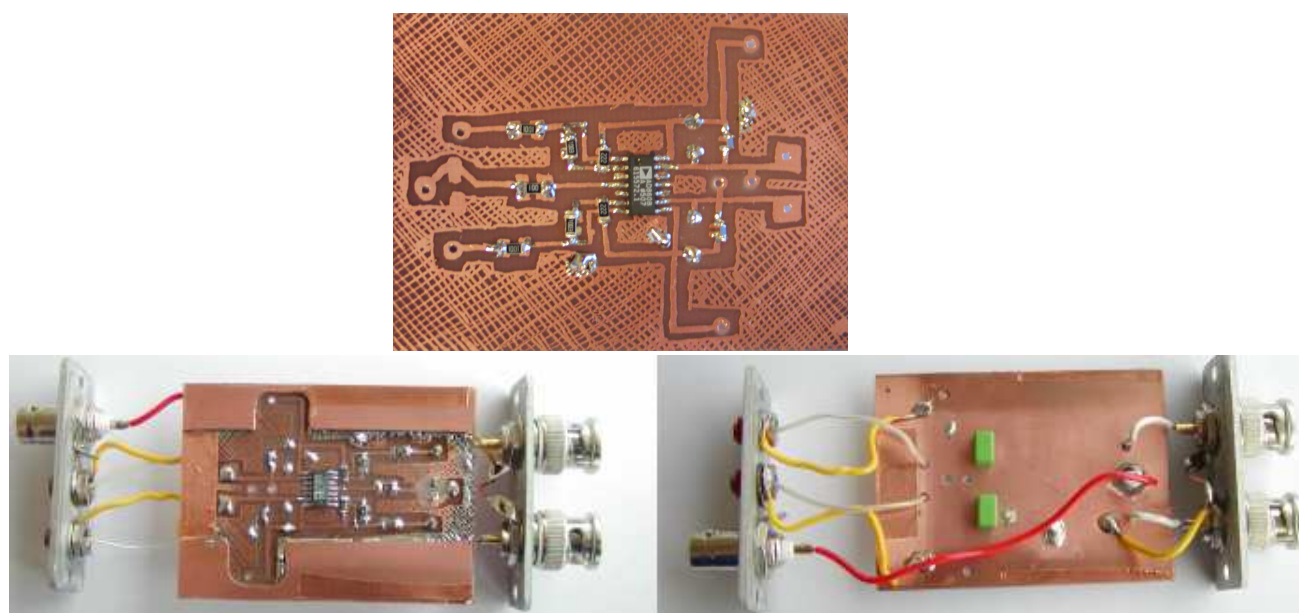
plot (index(1300:14482),0.54330-(Ed(1300:14482)*1000),"Celkova energie;");
for i=11:14482 U(i)=Ed(14482)-Ed(i)-0.750*v2(i); endfor;
plot (index(1300:14482),-U(1300:14482),"Potencialni energie;");
plot ((x(2100:14482)-x(14444))*1000,U(2100:14482)*1000,"Potencialova jama;");

py=polyval(P,xr);
plot (xr(2100:14480),-Uerr(2100:14480),"
Minimalni odchylna experimentalniho a parabolickeho prubehu potencialu;")

```

## Dodatek B

### Fotodokumentace



Obrázek B.1: Osazený plošný spoj dvoukanálového nábojového zesilovače a 30-ti násobného předzesilovače k akcelometru SV163.





Obrázek B.2: Pionýrské začátky.



Obrázek B.3: Vypreovaná páteř prasete domácího (*sus scrofa*).



Obrázek B.4: Příprava měření.



Obrázek B.5: Konzultace....

# Dodatek C

## Kalibrace aparatury

### C.1 Kalibrace na ocelové tyči

Zjištění momentů setrvačnosti přípravku pro uchycení obratle ve směru torzních kmitů a kmitů ohybových.

Měření se provádělo na zařízení, které se nazývá torzní kyvadlo, jehož součástí je proměřovaná tenká válcová zkušební tyč o poloměru  $r = 1,6075 [mm]$  a délce  $l = 937 [mm]$ . Je vetknuta v závěsu a volně visí ve vertikálním směru. Ve spodní části je tyč vetknuta do masivního disku (hustota  $\rho = 7,86 [gcm^{-3}]$ ) o poloměru  $R = 121,2 [mm]$  a výšce  $h = 7,5239 [mm]$  (obr. C.1, tab. C.1). Měření začíná vždy počátečním nakroucením zkušební tyče o několik stupňů do libovolného směru otáčení s následným uvolněním. Po uvolnění se začne tyč s diskem periodicky natáčet, tj. vykonávat torzní kmity kolem rotační osy symetrie tyče, průběh těchto kmitů je možno okem sledovat.

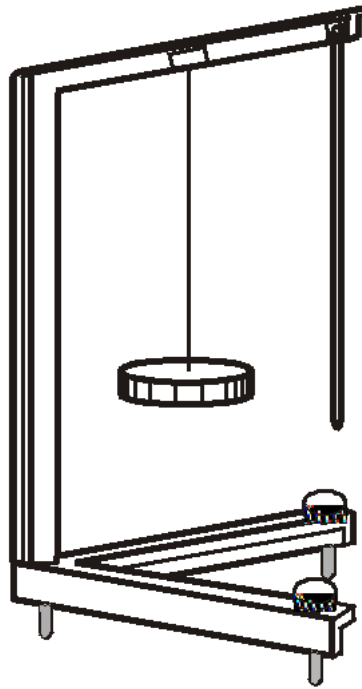
hmotnost vahadla	126 g
hmotnost setrvačníku	656,2 g
délka závěsného drátu	937 mm
poloměr disku	121,2 mm
hmotnost lepenky pro upevnění setrvačníku pro torzi	7,1 g
hmotnost lepenky pro upevnění setrvačníku pro flexi	5,16 g

Tabulka C.1: Rozměry kalibrační aparatury, kalibrovaného přípravku a pomocných zařízení.

Nejprve byla změřena doba trvání 31 kmitů a to 16x (tab. C.2). Z těchto hodnot byla vypočítána průměrná doba kmitu  $T = 928,1 [ms]$ . Moment setrvačnosti disku pak vychází  $I_G = J = \frac{mR^2}{2} = 0,020045 [kgm^2]$ . Pro kontrolu byl konvenčním vzorcem C.1

$$G = \frac{8\pi l J}{T^2 r^4} \quad (C.1)$$

určen moment setrvačnosti ve smyku oceli  $G_{ocel} = 8,21 \cdot 10^{10} [Pa]$ , což je hodnota ne-



Obrázek C.1: Torzní kyvadlo užívané pro kalibraci měřící aparatury.

rozcházející se s tabulkovým údajem  $6,87 - 8,34 \cdot 10^{10} [Pa]$ .

Asi není od věci poznamenat, že vzorcem z příkladu 37 (příloha F) vychází tato  $5,23 \cdot 10^{10} [Pa]$ , což je o něco méně.

V dalším kroku byl ke stávajícímu disku tvořícího setrvačnick připraven přípravek pro uchycení těla obratle tak, aby osa ocelové tyče procházela středem obratle tak, jak byl měřen pro torzní namáhání (obr. C.2). Měření bylo opět provedeno 16krát pro 31 kmitů (tab. C.2). Výsledkem bylo  $T = 1,1827 [s]$ . Vycházejíc nyní z předpokladu, že poměr druhých mocnin period je roven poměru (prvých mocnin) momentů setrvačnosti, vychází pro přípravek v tomto směru kmitání  $I_G = J = 0,01251 [kgm^2]$ .

Dále byla provedena stejná měření i pro takovou pozici přípravku, která odpovídá jeho pozici při měření flexe nebo-li ohybu ploténky (obr. C.3). Výsledkem byla perioda  $T = 1,17 [s]$  a  $I_G = J = 0,01181 [kgm^2]$ .

Ve výpočtech se neuvažovalo předpětí tyče způsobené zavěšením setrvačnicku ani moment upínadla setrvačnicku k desce, ani moment lepicích pásek sloužících ke spojení setrvačnicků. Hmotnosti těchto pásek byly  $7,1 [g]$  pro polohu odpovídající torzi a  $15,16 [g]$  pro polohu odpovídající měření flexe. Chyby tím způsobené mohou činit až  $0,5\%$  ze zjištěných momentů

počet měření	čas [s]; disk	čas [s]; disk+přípravek v torzi	čas [s]; disk+přípravek v ohybu
1	27,93	36,73	36,16
2	28,70	36,80	36,26
3	28,66	36,74	36,09
4	28,78	36,70	36,38
5	28,86	36,71	36,24
6	28,78	36,70	36,32
7	28,79	36,70	36,21
8	28,92	36,46	36,31
9	28,87	36,62	36,22
10	28,94	36,48	36,25
11	28,88	36,64	36,30
12	28,89	36,65	36,39
13	28,78	36,68	36,27
14	28,93	36,70	36,40
15	28,73	36,70	36,34
16	28,89	36,63	36,19

Tabulka C.2: Kalibrační měření na ocelovém lanku, naměřené hodnoty pro výpočet ohybových a torzních momentů ocelového lanka bez a s měřícím přípravkem.

setrvačnosti směrem k jejich podhodnocení. Uvedené hodnoty tloušťky desky setrvačníku a průměru deformované tyče jsou průměry vždy z 9 respektive 12-ti naměřených hodnot.



Obrázek C.2: Torzní kyvadlo užívané pro kalibraci měřicí aparatury v režimu krutu.



Obrázek C.3: Torzní kyvadlo užívané pro kalibraci měřicí aparatury v režimu ohybu.

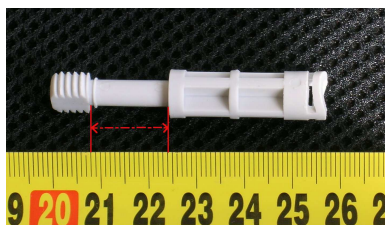
## C.2 Kalibrace na polyetylenové tyči

Stanovení Youngova modulu pružnosti  $E$  [ $Pa$ ], smykového modulu  $\hat{\mu}$  [ $Pa$ ] a Poissonova čísla  $\sigma$  [1] a dynamické viskozity  $\mu$  [ $Pa \cdot s$ ]. Pro Hookův materiál platí relace

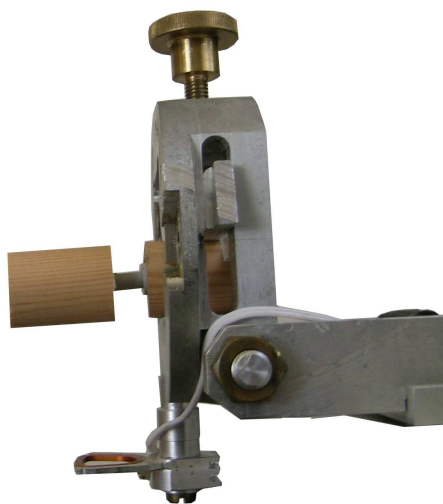
$$\sigma = \frac{E}{2\hat{\mu}} - 1 \quad (C.2)$$

Použit byl materiál "high density homopolymer" následujících materiálových vlastností: Youngův modul  $E = 1070-1091$  [ $MPa$ ], hustota  $\rho = 960$  [ $kgm^{-3}$ ], prakticky nestlačitelný, tj.  $\sigma = 0,5$  [28].

Pro experiment byla použita polyetylenová tyčka ohýbané délky  $L = 16,8$  [ $mm$ ] a poloměru  $R = 3$  [ $mm$ ] C.4.



Obrázek C.4: Polyetylenový šroub použitý pro kalibraci měřící aparatury s vyznačenou namáhanou částí.



Obrázek C.5: Kalibrace měřící aparatury pomocí polyetylenové tyče.

### C.2.1 Měření metodou ohybových kmitů-flexe-pro kruhovou tyč

Ve vztahu

$$E = \varrho \left( \frac{8L^2}{\pi^2 R} \right)^2 (4\omega_{exp}^2 + \beta^2) \left( 1 + \frac{M_G}{m} \right) [Pa], \quad \mu = \varrho \left( \frac{2L}{\pi} \right)^2 \beta_{exp} \left( 1 + \frac{M_g}{m} \right) [Pas] \quad (C.3)$$

využijeme toho, že při měření je  $\frac{M_G}{m} \cong 1$  a  $\omega_{exp}^2 \cong \beta_{exp}^2$ , takže pro tyčku kruhového průřezu platí

$$E = \left( \frac{4L}{\pi R} \right)^4 \frac{M_G \omega_{exp}^2}{\pi L} [Pa], \quad \mu = \left( \frac{2L}{\pi R} \right)^2 \frac{M_G \beta_{exp}}{\pi L} [Pas] \quad (C.4)$$

Z lineární aproximace testované polyetylenové tyčky plyne frekvence  $\omega_{exp} = 23,5 [s^{-1}]$  a koeficient útlumu  $\beta_{exp} = 2 [s^{-1}]$ . Ze vztahu C.4 stanovíme

$$M_G = \frac{\pi E L}{\omega_{exp}^2} \left( \frac{\pi R}{4L} \right)^4 = \frac{3,14 \cdot 1,8 \cdot 10^9 \cdot 1,68 \cdot 10^{-2}}{(23,5)^2} = \left( \frac{3,14 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 1,68 \cdot 10^{-2}} \right)^4 = 39,8 [kg] \quad (C.5)$$

Tato hodnota neodpovídá skutečné přidané hmotnosti, ale je to fiktivní hmotnost vyvolávající kmitů odpovídající frekvence modelu pružina závaží.

Analogicky pro obdélníkový průřez  $a, b$ , kde kmitání probíhá ve směru strany  $b$ , platí

$$E = \frac{3bM_g}{4aL} \frac{2L}{\pi b} \omega_{exp}^2 [Pa], \quad \mu = \frac{4LM_g \beta_{exp}}{\pi^2 ab} [Pas] \quad (C.6)$$

Pro konkrétní hodnoty experimentu obratel-ploténka-obratel jsme dostali pro  $L = 7 [mm]$ ,  $a = 40 [mm]$ ,  $b = 30 [mm]$ ,  $M_G = 39,8 [kg]$ ,  $\varrho = 1,2 \cdot 10^3 [kgm^3]$  je podle odvozeného vztahu C.6 velikost materiálových konstant

$$E = \frac{3 \cdot 3 \cdot 10^{-2} \cdot 39,8}{4 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 6 \cdot 10^{-3}} \cdot \left( \frac{2 \cdot 7 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 10^{-2}} \right) \cdot \omega_{exp}^2 = 1,82 \omega_{exp}^2 [Pa] \quad (C.7)$$

$$\mu = \frac{4 \cdot 7 \cdot 10^{-3} \cdot 39,8}{(3,14)^2 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 3 \cdot 10^{-2}} \beta_{exp}^2 = 94,1 \beta_{exp}^2 [Pas] \quad (C.8)$$

$\omega_{exp} [s^{-1}]$	$E [kPa]$	$\beta_{exp} [s^{-1}]$	$\mu [Pas]$
110	22	6,5	611
200	72,8	7	658

Tabulka C.3: Konkrétní hodnoty získané z experimentu obratel-ploténka-obratel, ohyb.



## C.2.2 Testovací experiment pro měření pomocí torzních kmitů

Modul ve smyku je

$$\hat{\mu} = \frac{E}{2(1 + \sigma)} = \frac{1,08 \cdot 10^9}{2(1 + 0,5)} = 0,36 \cdot 10^9 \text{ [Pa]} \quad (\text{C.9})$$

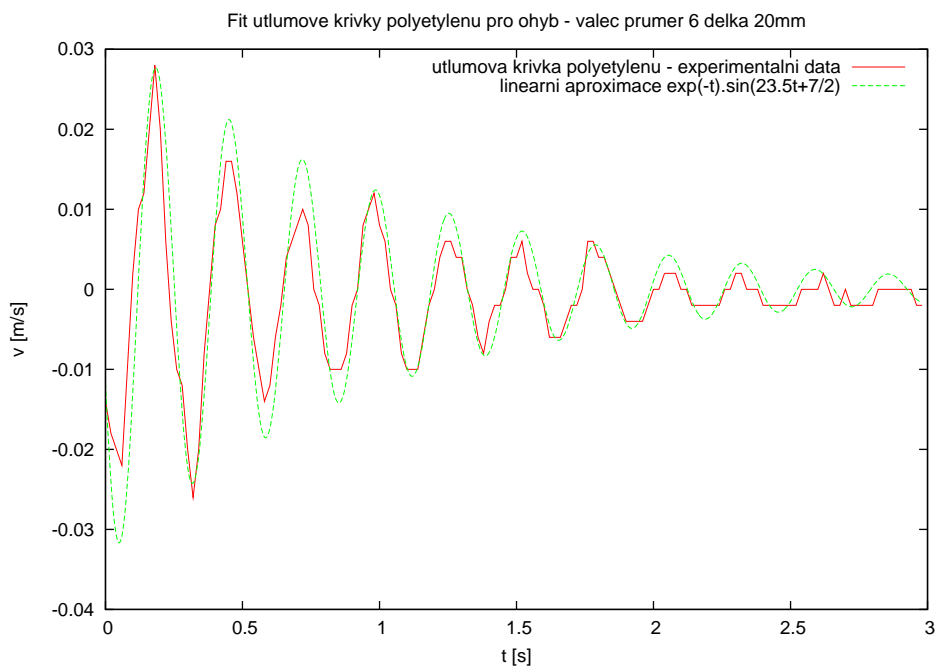
který souvisí s vlastními kmity torzní tyče podle vztahu

$$\hat{\mu}_{cylinder} = \frac{4LI_G}{\pi^2 R^2} \omega_{r,exp}^2 \text{ [Pa]} \quad (\text{C.10})$$

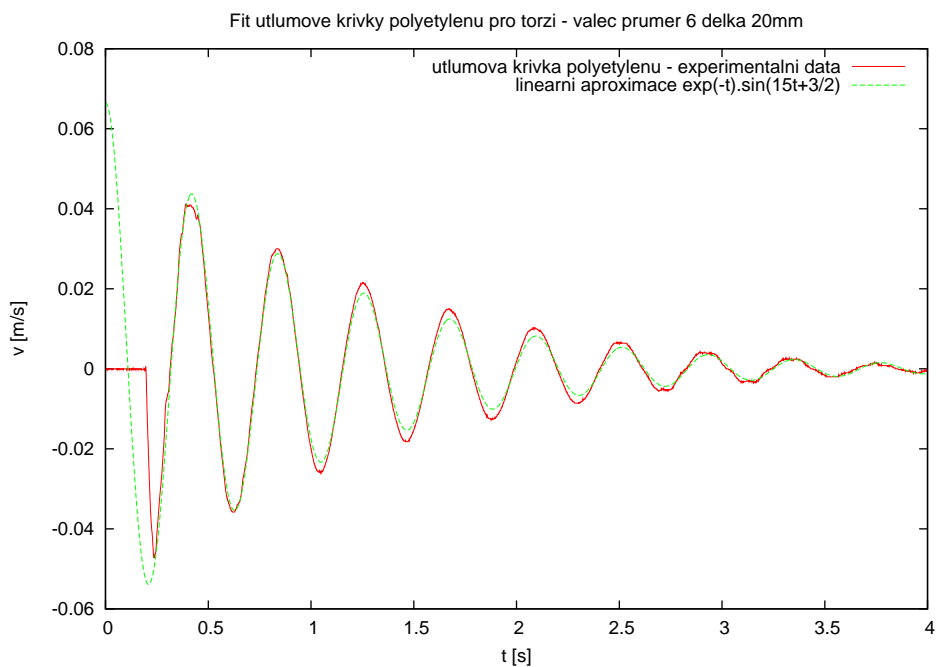
Neznámý moment setrvačnosti  $I_G$  měřícího zařízení je roven

$$I_G = \frac{\pi^2 R^4}{4L\omega_{exp}^2} \hat{\mu}_{cylinder} = \frac{(3,14)^2 (3 \cdot 10^{-3})^4}{4(1,68 \cdot 10^{-2}) \cdot 15^2} 0,36 \cdot 10^9 = 1,9 \cdot 10^{-2} \text{ [kgm}^2\text{]} \quad (\text{C.11})$$

Tuto hodnotu použijeme k výpočtu smykového modulu z torzních kmitů podle vztahu C.11.



Obrázek C.6:



Obrázek C.7:

## Frekvence torzních kmitů-Torze

Vyhodnocení elastických konstant

Při kmitání kruhové tyče o poloměru  $R = 17,5 [mm]$ , délce  $L = 6 [mm]$  (jen délka chrupavky) a hustotě  $\rho = 1,2 \cdot 10^3 [Kgm^{-3}]$ . Moment setrvačnosti měřícího zařízení byl stanoven měřením polyetylénové tyčky  $I_G = 1,9 \cdot 10^{-2} kgm^2$ . Modul pružnosti ve smyku  $\hat{\mu}$  a viskozita  $\mu$  jsou určeny vztahy

$$\hat{\mu}_{cylinder} = \frac{4LI_G}{\pi^2 R^2} \omega_{r,exp}^2 [Pa], \quad \mu_{cylinder} = \frac{4\sqrt{2}LI_G}{\pi^2 R^2} \beta_{exp} [Pas] \quad (C.12)$$

Youngův modul pružnosti je v případě Hookova materiálu roven  $E = 2\hat{\mu}(1 + \sigma) [Pa]$

$$\hat{\mu}_{cylinder} = \frac{4 \cdot 6 \cdot 10^{-3} \cdot 1,9 \cdot 10^{-2}}{(3,14)^2 \cdot (1,75 \cdot 10^{-2})^4} \omega_{r,exp}^2 = 493 \omega_{r,exp}^2 [Pa] \quad (C.13)$$

$$\mu = \frac{4 \cdot \sqrt{2} \cdot 6 \cdot 10^{-3} \cdot 1,9 \cdot 10^{-2}}{(3,14)^2 \cdot (1,75 \cdot 10^{-2})^4} \beta_{exp} = 697 \beta_{exp} [Pas] \quad (C.14)$$

Pro konkrétní hodnoty experimentu obratel-ploténka-obratel jsme dostali

$\omega_{exp} [s^{-1}]$	$\hat{\mu} [kPa]$	$E = 2(1 + \sigma) \hat{\mu} [kPa]$	$\beta_{exp} [s^{-1}]$	$\mu [Pas]$
7,3	26	78	0,8	557
9,0	40	120	0,9	627
14,0	996	290	1,0	700

Tabulka C.4: Konkrétní hodnoty získané z experimentu obratel-ploténka-obratel, torze.

# Dodatek D

## Rozbor chyb měření

Veličinou kriticky ovlivňující přesnost stanovení materiálových konstant z mých experimentů (tj. Youngova modulu v tahu a ve smyku a viskozity materiálu ploténky) jsou především příčné rozměry ploténky a stanovení její délky. Teprve čtyřikrát menší úlohu hraje přesnost určení jejího podélného rozměru. Ve srovnání s těmito chybami je určení momentu setrvačnosti jak ploténky tak vahadla jakož i experimentální oscilační frekvence a útlum a hustota ploténky pouze podružnou záležitostí, neboť na rozdíl od výše zmíněných rozměrů ploténky jsou navíc snadno změřitelné dostatečně přesně a výsledná odchylka všech těchto nekritických veličin dohromady nezpůsobí více jak pětiprocentní chybu měření. Podívejme se proto podrobněji na kritické parametry, jelikož ty nám mohou výsledek zatížit chybou řádu mnoha desítek procent.

Samotný pojem výšky ploténky je jak fyziologicky tak geometricky těžko definovatelnou veličinou. Fyziologicky proto, že například u dospělého člověka se výška ploténky liší ráno a večer až o padesát procent, geometricky proto, že chrupavčité endplates jsou poměrně komplikované plošné útvary, které se kromě drobného zvrásnění povrchu vyznačují taktéž drobnou vpoklostí do objemu obratle. Vlivem toho je jednak poněkud problematické výšku ploténky přesně definovat, jednak ji přímo z experimentu měřit. Musíme mít na paměti, že ploténka je silně hydrofilní, na druhou stranu však snadno vysychá, takže pozdější měření, například až po několika desítkách hodin, by výsledek značně ovlivnilo. Nabízí se však možnost v příštích podobných experimentech v co nejkratší době pořídit rentgenograf FSU a to alespoň ve třech základních směrech (nárýs, půdorys, bokorys). Stanovení příčných rozměrů ploténky se provádí o něco snáz a vnější rozměr je poměrně dobře definován, ovšem vzhledem ke čtvrté mocnině při jeho užití ve výpočtu materiálových konstant i tak zůstává chybově nejkritičtější veličinou vůbec. Musíme mít také na paměti, že použité vzorce uvedené v příloze F přistupují k tělu ploténky jako k homogennímu eliptickému útvaru. Nehomogenost ploténky bychom mohli do jisté míry započítat tak, že bychom nepočítali plnou elipsu, ale jakési mezivrstvy soustředných stejně orientovaných elips. Aproximace ploténky elipsou je u člověka velmi dobrá nebo dokonce vynikající pro endplates mezi L5 a S1, avšak od L3 vzhůru se dopouštíme poměrně značného zjednodušení, neboť tyto tvary by bylo mnohem lepší popisovat srdcovkou [21]. Také si musíme uvědomit,

že narozdíl od většiny měření v literatuře uvedených pracujeme jednak s velmi čerstvou ploténkou (vliv stárnutí na zvyšování tuhosti ploténky je v této práci dostatečně rozebírán) a jednak se měření prováděla v oblasti velmi malých výchylek, kde i jiným autorům vychází tuhost menší a Panjabi ji dokonce pokládá za nulovou [23]. V tomto světle se výsledky měření v této práci, kde elastické moduly vyšly maximálně dvoutřetinové ve srovnání s literaturou, jeví jako reálné vzhledem k uvedenému.

Charakteristickým rysem používaných metod ale je detailní průzkum slabých nelinearit elasticity a viskozity. Z grafu 5.13 vidíme, že nejlepší lineární proložení je v protifázi z experimentálně zjištěným průběhem útlumu v 10-té periodě, to tedy znamená, že v tento okamžik dosáhlo zpoždění  $\frac{\pi}{2}$  a lze odhadnout, že tedy chyba lineární aproximace je menší než sedm procent. U viskozity je v rámci měřených rychlostí pod dvě procenta. Nelineární fit tuhosti s obecnou mocninou dává protifázi až v 56 periodě (aproximace řady zpoždění), což znamená významné zlepšení shody (jedno procento). Zatímco tedy k určení materiálových konstat je vlivem těžko snímatelných rozměrů a tvarů endplates relativně nepřesné (není však zcela jasné, že existuje nyní přesnější, viz řádové rozdíly uváděné v literatuře), je metoda schopna velmi citlivě ukázat charakter závislosti materiálových konstant na různých parametrech např. času (míněna postupná degradace vzorku řádu hodin), vlhkosti, amplitudě...

## Dodatek E

# Rešeršní přehled podobné tématiky ve světě

1. ACAROGLU, E.R., IATRIDIS, J.C., SETTON, L.A., FOSTER, R.J., MOW, V.C., WEIDENBAUM, M.: Degeneration and aging affect the tensile behavior of human lumbar annulus fibrosus. *Spine. Dec 15;20(24):2690-701.*, 1995.
2. IATRIDIS, J.C., KUMAR, S., FOSTER, R.J., WEIDENBAUM, M., MOW, V.C.: Shear mechanical properties of human lumbar annulus fibrosus. *Orthop Res. Sep;17(5):732-7*, 1999.
3. PÉRIÉ, D., KORDA, D., IATRIDIS, J.C.: Confined compression experiments on bovine nucleus pulposus and annulus fibrosus: sensitivity of the experiment in the determination of compressive modulus and hydraulic permeability. *J Biomech. Nov;38(11):2164-71*, 2005.
4. THOMPSON, ROSEMARY E., PEARCY, MARK J., DOWNING, KRISTIAN J. W., MANTHEY, BEVERLEY A., PARKINSON, IAN H.: Disc Lesions and the Mechanics of the Intervertebral Joint Complex. *Spine. Dec 1; 25(23):3026-3035*, 2000.
5. UMEHARA, S., TADANO, S., ABUMI, K., KATAGIRI, K., KANEDA, K., UKAI, T.: Effects of degeneration on the elastic modulus distribution in the lumbar intervertebral disc. *Spine. Apr 1; 21(7):811-9*, 1996.
6. KROEBER M, UNGLAUB F, GUEHRING T, NERLICH A, HADI T, LOTZ J, CARSTENS C.: Effects of controlled dynamic disc distraction on degenerated intervertebral discs: an in vivo study on the rabbit lumbar spine model. *Spine. 2005 Jan 15;30(2):181-7*, 2005
7. IATRIDIS JC, GWYNN I.: Mechanisms for mechanical damage in the intervertebral disc annulus fibrosus.

Autor	Typ deformace	Směry namáhání	Youngův modul	Rozsah pohybu	Druh ploténky a její stáří [roky]
5	tlak statický	axiální	NP $E = 5,8 \text{ kPa}$ AF anterior $E = 110.7 \text{ kPa}$ AF posterior $E = 75.8 \text{ kPa}$	?	human L3, L4 ?
4	tah statický	torze ohyb	?	?	Th12, L2, L4 medián 68
1	tah statický	?	?	?	AF L3, L4 ?
2	tah dynamický $f = 5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$	torze	$G = 100 - 400 \text{ kPa}$	0,05 rad	human ?
3	tah dynamický	axiální	?	?	bovine L

Tabulka E.1: Porovnání řešení podobné tematiky ve světě. ?=autoři neuvádějí; NP=*nucleus pulposus*; AF=*annulus fibrosus*.

# Dodatek F

## Teorie měření

Dosud nepublikovaná práce Prof. Ing. Františka Maršíka, DrSc.:

[www.biomech.ftvs.cuni.cz/pzemanova/DIZ/teorie\\_mereni.pdf](http://www.biomech.ftvs.cuni.cz/pzemanova/DIZ/teorie_mereni.pdf)