Posudek na dizertační práci Mgr. Petra Pajase
Structure of submodels. Diagonal indiscernibility in models of arithmetic.

Práce se zabývá třemi tématy, týkajícími se problematiky oboru podstruktur daného spočetného nestandardního modelu M aritmetiky rozšiřující $\mathrm{I}\Sigma_0$, které jsou v něm řezem: diagonální nerozlišitelností, rodinami řezů a Stoneovým prostorem $\mathcal{S}(M, M)$ algebry $\mathcal{D}(M, M)$ z parametrů definovatelných množin. Obsahově to odpovídá kapitolám 2 – 3.

V kapitole 2 se studují diagonální rozklady (diagonal partitions) a diagonálně homogenní množiny pro ně a dále jisté posloupnosti diagonálně nerozlišitelných množin (diagonal indiscernibles), nazvané překrytí (overlay). Pro $a \geq 1$ je diagonální rozklad D na třídě $\langle X\rangle^a$ uspořádaných a-tic prvků z X relace D taková, že extenze D_t pro $t \in X$ je ekvivalence na $(x - [0, t])^a$ s omezeným počtem $\|D_t\|$ tříd ekvivalence D_t. $H \subseteq X$ je diagonálně homogenní pro D, stručně D-homogenní, když množina $H - [0, t]$ je homogenní pro D_t pro každé $t \in X$. Teorém 2.1.2 o nekonečném diagonálním rozkladu říká, že pro $n \geq 1$ Peanova aritmetika dokazuje: pro neomezené X a diagonální rozklad D na $\langle X\rangle^n$ existuje neomezená $H \subseteq X$ homogenní pro D (definovaná z týchž parametrů jako D, X). Pro třídy množin Γ_1, Γ_2 v teorii $T \supseteq \mathrm{I}\Sigma_1$, která dovoluje kvantifikování přes Γ_1 a Γ_2, značí symbol $\Gamma_1 \rightrightarrows (\Gamma_2)^a$, že pro každou neomezenou třídu X z Γ_1 a diagonální rozklad D z Γ_1 na $\langle X\rangle^a$ existuje neomezená $Y \subseteq X$ z Γ_2 homogenní pro D. $\Gamma_1 \rightrightarrows (\Gamma_2)^a_{\Gamma_1}$ značí navíc, že D je Γ_1-odhadnutá, tj. pro nějakou funkci G z Γ_1 s $\mathrm{dom}(G) \subset X$ je $\|D_t\| \leq G(t)$ jakmile $t \in X$. Konečně $\Gamma_1 \rightrightarrows (c)^a$, že pro X, D jako výše existuje kódovaná množina $u \subseteq X$ diagonálně homogenní pro D s $|u| = c$.

Hlavní výsledek, formulovaný ve větě 2.1.5 a 2.1.6, zní: Pro $m, n, k \geq 1$ platí

a) $\mathrm{B}\Sigma_{n+m+1} \vdash low\Delta_{m+1} \rightrightarrows (low\Delta_{m+n+1})^n$.

b) $\mathrm{I}\Sigma_{n+m} \vdash LL_m \rightrightarrows (LL_{m+n})^n_{LL_m}$, speciálně $\mathrm{I}\Sigma_{n+m} \vdash \Delta_m \rightrightarrows (\Delta_{m+n+1})^n_{\Delta_m}$.

a') $\mathrm{B}\Sigma_{m+n} \vdash low\Delta_{m+1} \rightrightarrows (k)^n$. b') $\mathrm{I}\Sigma_{m+n+1} \vdash \Delta_m \rightrightarrows (k)^n_{\Delta_m}$.

Symbol $low\Delta_j$ přitom značí třídu všech $low\Delta_j$ množin, $LL_j = low\Sigma_0^*(\Sigma_j)$. Věta o nekonečném diagonálním rozkladu je důsledkem, neboť každá třída v PA je $low\Delta_{m+1}$ pro nějaké m. Tuto větu lze chápat jako nekonečnou verzi Kanamori-McAllonova principu zobecněného navíc na h-regresivní funkce. Pomocí ní lze dále sestrojit v modelu N Peanovy aritmetiky posloupnost $\mathcal{O} = \{X_i : i < \omega\}$ tak, že X_i je neprázdná bez posledního prvku, $\mathrm{Sup}X_i = \mathrm{Sup}X_j$ a $i < j \Rightarrow X_j \subseteq X_i$ pak se říká, že $\mathcal{O}$ je překrytí v N – a dále navíc lze zajistit, že pro každou formuli $\varphi(\overline{y}; \overline{x})$ z dané množiny Γ formulí některé X_i je $\varphi(\overline{y}; \overline{x})$-diagonálně nerozlišitelné, tj. $N \models (\forall \overline{y} < e)(\varphi(\overline{y}, \overline{a}) \leftrightarrow \varphi(\overline{y}; \overline{b}))$ jakmile $e \in X$ a $\overline{a}, \overline{b}$ jsou neklesající a z $X_i - [0, e]$; pak je $\mathcal{O}$ překrytí Γ-diagonálně nerozlišitelné. Ještě navíc lze každé X_i vzít $\emptyset$-definovatelné a neomezené v N. Speciálně pokud N je peanovský řez v $M \models \mathrm{I}\Sigma_0$, je tvaru $\mathrm{Sup}X_0$ pro nějaké Δ_0-diagonálně nerozlišitelné překrytí $\{X_i : i < \omega\}$. Platí i opačná implikace, čímž je dána úplná charakterizace peanovských řezu v daném modelu $M \models \mathrm{I}\Sigma_0$. To je jedna z položek věty 2.3.2, která obsahuje daleko podrobnější analýzu podmodelů M. Věta 2.3.3 pak říká, že pro $M \models \mathrm{I}\Sigma_{n+2}$ s $n \geq 0$ existuje neomezené $\Sigma_n(1;1)$-diagonální nerozlišitelné překrytí $\{X_i; i < \omega\}$ v M tvořené Δ_{n+2}-definovatelnými podmnožinami v M tak, že pro každý řez I v M je $I \prec_{n+1} M$, právě když každé $X_i \cap I$ je neomezené v I.

V kapitole 3 se studují rodiny řezů v M, tj. neprázdné množiny $\mathcal{R}$ řezů ve spočetných nestandardních modelech $M \models \mathrm{I}\Sigma_1$, a to zejména s ohledem na typ lineárního uspořádání $\langle\mathcal{R}, \subseteq\rangle$ a uzávěr $\overline{\mathcal{R}}$ v topologii prostoru všech řezů v M indukované uspořádáním $\subseteq$. Problematika zahrnuje např. symbiotičnost: rodiny řezů $\mathcal{R}, \mathcal{R}_0$ v M jsou symbiotické (tj. je-li mezi $a < b$ z M řez z $\mathcal{R}$, je tam i řez z $\mathcal{R}_0$ a naopak), právě když $\overline{\mathcal{R}} = \overline{\mathcal{R}_I}$. Speciálně se studují rodiny $\mathcal{E}_n, \mathcal{I}_n, \mathcal{D}_n$, tvořené po řadě n-elementárními resp. navíc isomorfními s M resp. Σ_n-definovatelnými elementy určenými řezy a dále rodiny $\mathcal{R}_T$ řezů, které jsou modelem nějaké teorie T v jazyce aritmetiky.

Je dokázána obecná původní veta 3.2.1 o vlastnostostech rodiny $\mathcal{R}$ v $M \models \mathrm{I}\Sigma_{n+1}$, pokud $\mathcal{R}$ má Σ_{n+1}-indikátor. Z ní vyplývá např., že $\langle\overline{\mathcal{R}}, \subseteq\rangle$ je izomorfní Cantorově množině a navíc, že za určitého přirozeného předpokladu je $\mathcal{R}$ hubená v $\overline{\mathcal{R}}$. Další komplikovnější důsledky jsou formulovány ve větě 3.2.4, mj. pak i zobecnění Kotlarského výsledku z [Kot84b, Theorem 4], totiž tvrzení, že pokud $\mathcal{R}$ má Δ_{n+1}-indikátor v M, existuje spočetná množina $S \subseteq M$ tak, že modely $I^{\downarrow}_{a,\mathcal{R}} = \bigcap\{J \subseteq^e M; a \in J \in \mathcal{R}\}$ pro $a \in S$ jsou po dvou neizomorfní. Dále při označení

$\mathcal{P}_n = \mathcal{E}_n \cap \mathcal{R}_{\mathrm{PA}}$ platí

$$\overline{\mathcal{P}_n} \supsetneq \overline{\mathcal{I}_n} \supseteq \overline{\mathcal{D}_{n+1}} \supseteq \mathcal{E}_n \supsetneq \overline{\mathcal{P}_{n+1}}$$

a navíc např., že prvky $\mathcal{D}_n$ jsou právě tvaru $\bigcap \mathcal{I}_n^a$ pro $n \geq 0$, $a \in M$, kde $\mathcal{I}_n^a$ je lokalizovaná verze $\mathcal{I}_n$, tvořená řezy I takovými, že $\langle I, a\rangle \cong_n \langle M, a\rangle$. Odtud plyne důsledek 3.5.10: a) $\mathbb{N} \neq I \prec_{n+1} M \Leftrightarrow (\forall a \in M)(\exists J \subsetneq^e M)(\langle J, a\rangle \cong_n \langle M, a\rangle)$. b) $\mathbb{N} \prec_{n+1} M \Leftrightarrow \mathbb{N} \swarrow \mathcal{I}_n$, kde $I \swarrow \mathcal{R}$ $\Leftrightarrow I = \bigcap\{J \subseteq^e M;\ I \subsetneq^e J \in \mathcal{R}\}$. Rodina $\mathcal{R}$ zúžena na interval (a, b) s $a < b$ z M je množina $(a, b)^{\mathcal{R}} = \{I \in \mathcal{R};\ a \in< b\}$. Aplikací výsledků o překrytí se získá věta 3.4.1, tvrdící, že pro rodinu $\mathcal{E}_n \cap \mathcal{R}_{\mathrm{I}\Sigma_{n+k}}$ nebo $\mathcal{R} = \mathcal{P}_n$ v $M \models \mathrm{I}\Sigma_{n+1}$ s $n \geq 0$, $k \geq 1$ je $(a, b)^{\mathcal{R}} \neq \emptyset \Leftrightarrow (a, b)^{\mathcal{R}}$ obsahuje uzavřenou podmnožinu $\mathcal{R}'$ izomorfní s Cantorovou množinou a navíc pro $I \subseteq^e J$ z $\mathcal{R}'$ je $I \prec_{n+k} J$ (a $I \prec J$ s $\mathcal{R} = \mathcal{P}_n$). Tvrzení 3.6.1 říká, že pro $n \geq 0$ rodina $\mathcal{D}_{n+1}$ má Δ_{n+2}-indikátor v modelech teorie $\mathrm{I}\Sigma_{n+1}$. Podle Poznámky 3.6.2 není ani Σ_{n+1}- ani Π_{n+1}-indikátor pro $\mathcal{D}_{n+1}$ v modelech PA.

Některé speciální případy tvrzení zde uvedených lze najít v literatuře, $\overline{\mathcal{I}_n} \subseteq \overline{\mathcal{P}_{n+1}}$ dokázal Ignatjevic v [Ign86].

V kapitole 4 se studuje Stoneův prostor $\mathcal{S}(M, M)$ algebry $\mathcal{D}(M, M)$ definovatelných množin nestandardního spočetného modelu M Peanovy aritmetiky v rozšířeném prostředí, tj. pomocí $\aleph_1$-saturovaného elementárního rozšíření C modelu M; C má rysy "velkého (big) modelu", užívaného v moderní teorii modelů. Pak je $\mathcal{D}(M, M) \cong \mathcal{D}(C, M)$ a $\mathcal{S}(M, M) \cong \mathcal{S}(C, M)$. Na C se definuje ekvivalence $\sim$ vztahem $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow (\forall Y \in \mathcal{D}(C, M))(\alpha \in Y \leftrightarrow \beta \in Y)$ a podobně ekvivalence $\approx$, kde místo $\mathcal{D}(C, M)$ se bere podalgebra algebry $\mathcal{D}(C, M)$, generovaná intervaly $[a, \rightarrow)$, $a \in M$. Faktory ekvivalencí $\sim$, $\approx$ jsou buď singltony nebo jsou nekonečné čili netriviální; tyto se nazývají netriviální monády v případě $\sim$ a skoky (gep) v případě $\approx$. Netriviální ultrafiltr p algebry $\mathcal{D}(C, M)$ je jednoznačně identifikován s $\bigcap p$, což je právě nějaká netriviální monáda. Netriviální monáda $\mathfrak{m}$ určuje řez $I_{\mathfrak{m}}$ v M tvaru $\{a \in M;\ a < \mathfrak{m}\}$. Řezem I je určen jednoznačně skok $\bigcap\{(a, b);\ a \in I,\ b \in M - I\}$, označený $\mathfrak{g}_I$. Pro monádu $\mathfrak{m}$ je tedy $I_{\mathfrak{m}} \subseteq \mathfrak{g}_{I_{\mathfrak{m}}}$.

Vlastnosti řezu I souvisí s typičností monád $\mathfrak{m}$ (a korelativně příslušných ultrafiltrů) určujících I, tj. splňujících $I = I_{\mathfrak{m}}$. Ke studiu vlastností monád (co do typičnosti) se zda užívá zejména Stoneovy topologie a Rudin-Keislerova uspořádání (RK). Klasickými typy monád jsou selektivní, (semi)regulární a ramseyovské. V kapitole se zkoumají další typy. V souvislosti s kapitolou 2 jde "diagonálně nerozlišitelné" monády, tj. splňující $\mathfrak{m} \rightrightarrows (\mathfrak{m})_h^a$; reprezentativní výsledky o nich jsou uvedeny v 4.4.6. 4.4.11 a 4.4.16. Jistou analogií k p- a q-bodů v $\beta\mathbb{N}$ jsou dále tzv. p- a q- monády. Ukazuje se, že pro silný řez I je množina regulárních monád, které nejsou p-monádami, hustá v $\mathfrak{g}_I$ (4.4.26) a dále je-li I regulární, tak každá p-monády v $\mathfrak{g}_I$ je regulární (4.4.27) a RK-neminimálná p-monády tvoří hustou podmnožinu $\mathfrak{g}_I$ (věta 4.4.29). Je-li dále I silný řez a $\alpha \in \mathfrak{g}_I$, tak monáda $\mathfrak{m}$, obsahující α, je p-monáda, právě když $I[\alpha] := \{F(\alpha);\ F$ je I-funkce a $\alpha \in \mathrm{dom}(F)\}$ je minimální elementární koncové rozšíření I. Přitom F je I-funkce, je-li definovatelná, $\mathrm{dom}(F) \cap \mathfrak{g}_I \neq \emptyset$ a $F[I] \subseteq I$.

Z uvedeného je patrné, že v práci je formulována a rozvinuta originální metodika, poskytující řadu původních komplexních výsledků o struktuře podmodelů, o rodinách řezů a o typologii bodů (monád) Stoneova prostoru a korelativně řezů pro daný spočetný nestandardní model aritmetiky. Je použita řada rozmanitých analytických a důkazových technik, jakými jsou věta o nízké bázi, ramseyovská kombinatorika, indikátory, Stoneova topologie a Rudin-Keislerovo uspořádání. Spolu s úvodní kapitolou, obsahující přehled důležitých pojmů a poznatků ke studovanému tématu, a dále s dodatky (s důkazem McDowell-Specker-Gaifmanovy věty o existenci vlastního konzervativního elementárního rozšíření N daného modelu $M \models$ PA s $|N| = |M|$ provedeném pomocí věty o nekonečném diagonálním rozkladu) poskytuje navíc ucelený, komplexní a výstižný výklad problematiky. Nalezené nepřesnosti mají charakter překlepů.

Doporučuji, aby práce byla uznána jako dizertační.

V Praze 7. 7. 2007