Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta
Katedra numerické matematiky

Qualokace a wavelety

disertační práce

RNDr. Jana Šimsová

studijní obor M6: Vědecko-technické výpočty

vedoucí práce: Doc. RNDr. Karel Najzar, CSc.

Poděkování

Ráda bych poděkovala Doc. RNDr. Karlu Najzarovi, CSc., vedoucímu mojí disertační práce, za trpělivost, odborné vedení a stálou podporu během mého dlouhého studia.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou disertační práci vypracovala samostatně a použila pouze citované zdroje.

V Ústí nad Labem *Jana Šimsová*

Obsah

Úvod **4**

1 Hraniční integrální rovnice **6**
- 1.1 Integrální operátory 6
- 1.2 Sobolevovy prostory H^s 8
- 1.3 Hraniční integrální rovnice 10

2 Biortogonální wavelety **14**
- 2.1 Ortogonální wavelety 14
- 2.2 Biortogonální wavelety 16
- 2.3 Biortogonální splinové wavelety 21

3 Vlastnosti Fourierových koeficientů **28**
- 3.1 Vlastnosti Fourierových koeficientů splinů 28
- 3.2 Vlastnosti Fourierových koeficientů splinových waveletů 31

4 Qualokační metoda **35**
- 4.1 Qualokační metoda pro B-spline lichého stupně 35
- 4.2 Qualokační metoda pro B-spline sudého stupně 45
- 4.3 Spline qualokační metoda 49
- 4.4 Další vývoj qualokační metody 58
- 4.5 Numerický příklad 64

5 Qualokační metoda a wavelety **68**
- 5.1 Vztahy prostorů B-splinů a splinových waveletů 68
- 5.2 Galerkinova metoda a biortogonální wavelety 69
- 5.3 Qualokace a biortogonální wavelety 72

Literatura **77**

Úvod

Klasická teorie hraničních integrálních rovnic je známá a propracovaná teorie. Již v 19. století bylo známo, že problémy řešení diferenciálních rovnic s jistou podmínkou na hranici otevřené oblasti lze převést na řešení integrálních rovnic, ve kterých integrujeme přes tuto hranici (hraniční integrální rovnice - boundary integral equations). V počátcích byl motivován rozvoj této teorie (Carl Neumann, Ivar Fredholm) spíše přáním dokázat existenci řešení Laplaceovy rovnice. Avšak zřídka byla tato metoda používána v praxi. Převedeme-li problém nalezení řešení diferenciální rovnice na oblasti jisté dimenze na problém nalezení řešení integrální rovnice přes povrch této oblasti, snížíme sice prostorovou dimenzi o jednu, ale zase diskretizace integrálních operátorů vede na soustavy s plnými maticemi. Teprve koncem 20. století s rozvojem počítačů a nových rychlých algoritmů, byla tato teorie studována hlouběji a zaznamenala rozvoj.

Nejznámější a nejpoužívanější metody pro řešení integrálních rovnic jsou metoda kvadraturních vzorců, kolokační metoda a Galerkinova metoda. Metoda kvadraturních vzorců je ve svém principu nejjednodušší metodou. Spočívá v tom, že integrál v příslušné integrální rovnici $Lu = f$, kde L je integrální operátor, nahradíme vhodným kvadraturním vzorcem s určitými váhami a uzly. Pokud v příslušné integrální rovnici navíc za proměnnou postupně dosadíme kvadraturní uzly, dostaneme soustavu lineárních rovnic. V kolokační metodě hledáme přibližné řešení v konečnědimenzionálním podprostoru prostoru, ve kterém leží přesné řešení příslušné integrální rovnice. Přibližné řešení hledáme ve tvaru lineární kombinace bázových funkcí příslušných konečnědimenzionálních podprostorů. Požadujeme, aby přibližné řešení u_n splňovalo podmínku, že reziduum $Lu_n - f$ je rovno nule v určitých pevně zvolených bodech, které se nazývají kolokační body. Tento postup zase vede na soustavu lineárních rovnic. Tato metoda má výhodu v jednoduché aplikaci, ale má některé horší vlastnosti jako je problém stability a rychlosti konvergence. Z hlediska stability a rychlosti konvergence má nejlepší vlastnosti Galerkinova metoda (případně její modifikace Petrovova-Galerkinova metoda). Její idea je podobná jako u kolokační metody. Přibližné řešení u_n hledáme znovu ve tvaru lineární kombinaci bázových funkcí konečnědimenzionálních podprostorů prostoru, ve kterém existuje přesné řešení. Koeficienty této lineární kombinace určíme z podmínky, že reziduum $Lu_n - f$ je kolmé k daným bázovým funkcím ve smyslu skalárního součinu v L^2. Nevýhodou Galerkinovy metody je, že její aplikace vyžaduje další diskretizaci, protože příslušné integrály je v naprosté většině případů nutno řešit numericky.

Tato práce studuje metodu pro nalezení řešení hraničních integrálních rovnic, která byla odvozena až na konci osmdesátých let dvacátého století. Jedná se vlastně o semidiskrétní Galerkinovu metodu v tom smyslu, že vnější integrál je nahrazen jednoduchým kvadraturním pravidlem, aniž by došlo ke snížení řádu konvergence. Tedy přibližné řešení u_n hledáme znovu jako lineární kombinaci bázových funkcí konečnědimenzionálních podprostorů prostoru, ve kterém hledáme přesné řešení. Koeficienty této lineární kombinace určíme z podmínky, že reziduum $Lu_n - f$ je kolmé k daným bázovým funkcím ve smyslu jistého „diskrétního" skalárního součinu. Tato metoda dostala jméno qualokace (název znamená „kvadratura modifikované kolokační metody"). Jejím speciálním případem je totiž kolokační metoda. Metoda byla odvozena pro případ, kdy přibližné řešení hledáme v prostoru S_h^d, tedy B-splinů řádu $d+1$ (po částech polynomy stupně d). Tato práce se pokouší najít řešení hraničních integrálních rovnic metodou qualokace s použitím splinových waveletů a tím spojit a využít přednosti jak qualokační metody, tak splinových waveletů.

Práce je rozdělena do pěti kapitol. V první kapitole jsou jen stručně připomenuty vlastnosti integrálních operátorů, zavedení Sobolevových prostorů H^s a odvození hraničních integrálních rovnic, na které je převedena Laplaceova rovnice.

Druhá kapitola je věnována waveletové teorii a speciálně biortogonálním waveletům s kompaktním nosičem, které byly odvozeny autory Cohen, A., Daubeschies, I., Feauveau, J.C. v práci [CDF92]. Tato teorie biortogonálních waveletů je dále aplikována pro případ, kdy škálová funkce je B-spline. V závěru kapitoly jsou pro nejjednodušší biortogonální wavelety uvedeny jak konkrétní hodnoty škálových koeficientů a jejich duálních ekvivalentů, tak i grafy škálových a waveletových funkcí.

Ve třetí kapitole je uveden důkaz vlastnosti Fourierových koeficientů B-splinů uvedené např. v [A83]. Této vlastnosti B-splinů je totiž využito při důkazu konvergence qualokační metody. V této práci je podobná vlastnost dokázána i pro Fourierovy koeficienty splinových waveletů.

Obsahem nejrozsáhlejší je třetí kapitola, která je věnována qualokační metodě. V této kapitole je zmíněná metoda uvedena postupně, jak byla odvozována postupem let. Tedy nejprve pro B-spliny lichého stupně a následně pro B-spliny sudého stupně. V obou těchto případech byl prostorem, ve kterém hledáme řešení, prostor příslušných B-splinů a prostorem testovacích funkcí, ve kterém má být splněna podmínka pro „diskrétní" skalární součin, prostor trigonometrických polynomů. Následuje pak nastínění spline qualokační metody a uvedení již složitějších qualokačních kvadraturních pravidel. V závěru této kapitoly je nastíněn nejnovější vývoj této metody a dále je uveden numerický příklad, který ilustruje rychlost konvergence qualokační metody v porovnání s kolokační metodou.

V poslední kapitole je nejdříve popsána Galerkinova metoda pro řešení hraničních integrálních rovnic a její vlastnosti při použití biortogonálních splinových waveletů popsaných ve druhé kapitole. Galerkinova metoda při použití těchto bázových funkcí vede na soustavu lineárních rovnic s řídkou maticí. Ve druhé podkapitole je pak uvedeno použití qualokační metody pro řešení hraničních integrálních rovnic s použitím waveletové báze. Tato volba umožňuje spojení výhod řídké matice soustavy a zachování stejného řádu konvergence jako u Galerkinovy metody, ale s vnějším integrálem nahrazeným kvadraturním pravidlem.

Kapitola 1

Hraniční integrální rovnice

1.1 Integrální operátory

V tomto odstavci uvedeme některé základní pojmy a vlastnosti integrálních operátorů (viz [Kr89], [A97]) a z nich se soustředíme především na vlastnost kompaktnosti integrálních operátorů, protože ta hraje důležitou roli při řešitelnosti integrálních rovnic.

Definice 1.1.1. *Množinu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nazveme Jordanovsky měřitelnou, jestliže charakteristická funkce χ_Ω je Riemannovsky integrovatelná.*

Připomeňme, že charakteristická funkce χ_Ω je definována následovně

$$\chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Omega, \\ 0 & x \notin \Omega. \end{cases}$$

Jordanova míra $|\Omega|$ je integrál z χ_Ω. Pro každou Jordanovsky měřitelnou množinu Ω platí, že její uzávěr $\overline{\Omega}$ i její hranice $\partial\Omega$ jsou Jordanovsky měřitelné a platí rovnosti $|\overline{\Omega}| = |\Omega|$ a $|\partial\Omega| = 0$. Jestliže množina Ω je kompaktní a Jordanovsky měřitelná, pak dále platí, že každá funkce z $C(\Omega)$ je Riemannovsky integrovatelná. Pokud dále budeme předpokládat, že $\Omega = \overline{\Omega}$, pak pro $f \in C(\Omega)$, z předpokladu, že $f(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \Omega$ a $\int\limits_\Omega f(x)dx = 0$, plyne, že $f(x) = 0$ pro všechna $x \in \Omega$.

Věta 1.1.1. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná a Jordanovsky měřitelná množina, pro kterou platí rovnost $|\overline{\Omega}| = |\Omega|$ a nechť $K\colon \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce. Potom lineární integrální operátor $A : C(\Omega) \to C(\Omega)$ se spojitým jádrem K, který je definován předpisem*

$$(A\varphi)(x) = \int\limits_\Omega K(x,y)\varphi(y)dy, \qquad x \in \Omega, \tag{1.1}$$

je omezený operátor s normou

$$\|A\|_\infty = \max_{x\in\Omega} \int\limits_\Omega |K(x,y)|dy. \tag{1.2}$$

Důkaz. Důkaz je uveden v [Kr89]. □

V následující větě uvedeme důležitou vlastnost integrálních operátorů se spojitým jádrem.

Věta 1.1.2. *Integrální operátor* $A\colon C(\Omega) \to C(\Omega)$ *se spojitým jádrem je kompaktní operátor na* $C(\Omega)$.

Důkaz. Důkaz je uveden v [Kr89]. □

Tato vlastnost může být rozšířena na integrální operátory se slabě singulárním jádrem. Uveďme nejprve definici slabě singulárního jádra.

Definice 1.1.2. *Funkci* $K\colon \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$, *která je spojitá pro všechna* $x, y \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $x \neq y$, *nazveme slabě singulárním jádrem integrálního operátoru (1.1), jestliže existují kladné konstanty* M *a* $\alpha \in (0, n\rangle$, *takové, že pro všechna* $x, y \in \Omega$, $x \neq y$, *platí*

$$|K(x, y)| \leq M|x - y|^{\alpha - n}.$$

Nyní můžeme uvést následující vlastnost.

Věta 1.1.3. *Integrální operátor* $A\colon C(\Omega) \to C(\Omega)$ *se slabě singulárním jádrem je kompaktní operátor na* $C(\Omega)$.

Důkaz. Důkaz je uveden v [Kr89]. □

Protože dále budeme studovat hraniční integrální operátory, které jsou definovány na povrchu nějaké oblasti v $\mathbb{R}^n$, $n \neq 1$, uvažujme omezenou otevřenou oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ s hranicí $\Gamma = \partial\Omega$. Předpokládejme, že hranice $\Gamma = \cup_{i=1}^{k} \Gamma_i$, přičemž každou z částí Γ_i hranice Γ můžeme parametrizovat. Tzn., že existují zobrazení $\gamma_i : U_i \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \Gamma_i$, $i = 1, \ldots, k$, pro která platí, že vektory $\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_{ij}}$ pro $j = 1, \ldots, n-1$ jsou lineárně nezávislé v každém bodě $\gamma_i(u_i)$ hranice Γ. Nyní uvažujme integrální operátor $A : C(\Gamma) \to C(\Gamma)$ definovaný předpisem

$$(A\varphi)(x) = \int_{\Gamma} K(x, y)\varphi(y)ds(y), \qquad x \in \Gamma, \tag{1.3}$$

kde K je spojité nebo slabě singulární jádro. Analogicky jako v definici 1.1.2, řekneme, že K je slabě singulární, jestliže existují kladné konstanty M a $\alpha \in (0, n-1\rangle$, takové, že pro všechna $x, y \in \Gamma$, $x \neq y$, platí

$$|K(x, y)| \leq M|x - y|^{\alpha - n + 1}.$$

Pro takto definovaný integrální operátor potom platí následující vlastnost.

Věta 1.1.4. *Integrální operátor* A, *definovaný v (1.3) se spojitým nebo slabě singulárním jádrem je kompaktní operátor na* $C(\Gamma)$.

Důkaz. Důkaz je uveden v [Kr89]. □

1.2 Sobolevovy prostory H^s

Sobolevovy prostory H^s hrají významnou roli při studiu hraničních integrálních rovnic (boundary integral equations) a integrálních operátorů. V této práci krátce připomeneme jejich zavedení a některé vlastnosti. Budeme vyšetřovat dvoudimensionální problémy, tedy budeme studovat integrální rovnice, ve kterých integrujeme přes hladkou křivku Γ, která je hranicí omezené oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Tuto křivku lze parametrizovat pomocí zobrazení ν, $\nu : \langle 0,1\rangle \to \Gamma$, pro které platí, že $\nu \in C^1$, $|\nu'| \neq 0$. Každou funkci, integrovatelnou na Γ, můžeme tedy převést na jedno-periodickou funkci. Z tohoto důvodu budeme dále definovat příslušné prostory pro jedno-periodické funkce. Prostor jedno-periodických funkcí s k spojitými derivacemi označíme $C^k(1)$. Tedy

$$C^k(1) = \{f \in C^k(\mathbb{R}), f(x) = f(x+1), x \in \mathbb{R}\}.$$

Prostor $C^\infty(1)$ je definován následovně $C^\infty(1) = \cap_k C^k(1)$. Každou funkci f z prostoru $C^\infty(1)$ můžeme rozvinout ve Fourierovu řadu ve tvaru

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} kx},$$

kde

$$\widehat{f}(k) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} kx} f(x)dx, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Z Parsevalovy rovnosti plyne

$$\sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2} = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx} \equiv \|f\|_{L^2}.$$

Pro r-tou derivaci funkce f platí

$$f^{(r)}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}, k\neq 0} (2\pi \mathrm{i} k)^r \widehat{f}(k)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} kx}.$$

Tedy $(2\pi \mathrm{i} k)^r \widehat{f}(k)$ je k-tý Fourierův koeficient r-té derivace $f^{(r)}(x)$. Odtud z Parsevalovy rovnosti plyne

$$(2\pi)^r \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^{2r} |\widehat{f}(k)|^2} = \sqrt{\int_0^1 |f^{(r)}(x)|^2 dx} \equiv \|f^{(r)}\|_{L^2}.$$

Definujme pro reálné s normu

$$\|f\|_s \equiv \sqrt{|\widehat{f}(0)|^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^{2s} |\widehat{f}(k)|^2}.$$

(Člen $|\widehat{f}(0)|^2$ zaručuje, že se jedná o normu a ne seminormu.) Sobolevův prostor H^s je definován jako uzávěr množiny funkcí z $C^{(\infty)}(1)$, pro které platí, že norma $\|f\|_s$ je konečná. Jestliže $s \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, pak H^s je množina všech jedno-periodických funkcí f, pro které je $f^{(s)} \in L^2$. Pro s, které není celočíselné, můžeme psát $s = r + \alpha$, kde $0 < \alpha < 1$. Potom prostor H^s je množina všech jedno-periodických funkcí f z prostoru H^r, pro jejichž $r-$tou derivaci je splněn jistý typ Hölderovské podmínky s koeficientem α a to

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{|f^{(r)}(t) - f^{(r)}(q)|^2}{|\sin \pi(t-q)|^{2\alpha+1}} dt dq < \infty.$$

Pro $s > 0$, definujeme prostor H^{-s} jako prostor omezených lineárních funkcionálů na H^s, tedy duál k prostoru H^s. Neboli každé $v \in H^{-s}$ lze rozložit na konečný počet distribučních derivací funkcí z L^2,

$$v = \sum_{|\alpha| \le s} D^\alpha v_\alpha, \qquad v_\alpha \in L^2.$$

Takto zavedený Sobolevův prostor H^s je Hilbertův prostor vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(f, g)_s = \widehat{f}(0)\overline{\widehat{g}(0)} + \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} |k|^{2s} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)}.$$

Rozepíšeme-li tento vztah pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ následovně

$$(f, g)_s = \widehat{f}(0)\overline{\widehat{g}(0)} + \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} |k|^{s-a} \widehat{f}(k) |k|^{s+a} \overline{\widehat{g}(k)}$$

a použijeme-li Cauchyovu-Schwarzovu nerovnost, dostaneme

$$|(f, g)_s| \le \|f\|_{s-a} \|g\|_{s+a}, \qquad f \in H^{s-a}, \quad g \in H^{s+a}. \tag{1.4}$$

Navíc platí, že prostor H^{s-a} je duál k prostoru H^{s+a} a

$$\|f\|_{s-a} = \sup_{g \in H^{s+a}} \frac{|(f, g)_s|}{\|g\|_{s+a}}, \quad f \in H^{s-a}.$$

Podrobnější vlastnosti i s důkazy lze nalézt např. v [Kr89], [A97], [YSlo88], [Slo91]. Nyní uvažujme integrální operátor L na prostoru H^s, pro který platí

$$(Lf)(x) = b\hat{f}(0) + \sum_{k \neq 0} |k|^\beta \hat{f}(k) \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k x},$$

kde β je reálný parametr a $b > 0$. Pak je zřejmé, že operátor L je lineární a spojitý a platí

$$L : H^s \to H^{s-\beta}.$$

1.3 Hraniční integrální rovnice

V tomto odstavci se zaměříme na problém nalezení řešení Laplaceovy rovnice na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ převedením na problém nalezení řešení příslušných integrálních rovnic. Budeme předpokládat, že oblast Ω je omezená, otevřená a Jordanovsky měřitelná množina, jejíž hranice $\Gamma \equiv \partial\Omega$ je uzavřená křivka s parametrizací

$$\nu(t) = (\xi(t), \eta(t)), \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{1.5}$$

s $\nu \in C^2_{\langle 0,T\rangle}$ a $|\nu'(t)| \neq 0$ pro $0 \leq t \leq T$. Vnitřní jednotková normála $\mathbf{n}(t)$, která je kolmá k hranici Γ v $\nu(t)$ je dána vztahem

$$\mathbf{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{\xi'(t)^2 + \eta'(t)^2}}(-\eta'(t), \xi'(t)).$$

Označme ještě $\Omega_e \equiv \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ a pro odlišení $\Omega_i \equiv \Omega$. Existují dva základní hraniční problémy pro Laplaceovu rovnici $\Delta u = 0$: Dirichletův problém a Neumannův problém.

Dirichletův (vnitřní) problém: Najít $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, pro které platí

$$\begin{aligned} \Delta u(P) &= 0, & P &\in \Omega, \\ u(P) &= f(P), & P &\in \Gamma \equiv \partial\Omega, \end{aligned}$$

kde $f \in C(\Gamma)$ je daná funkce.

Neumannův (vnitřní) problém: Najít $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, pro které platí

$$\begin{aligned} \Delta u(P) &= 0, & P &\in \Omega, \\ \frac{\partial u(P)}{\partial \mathbf{n}_P} &= f(P), & P &\in \Gamma \equiv \partial\Omega, \end{aligned}$$

kde $f \in C(\Gamma)$ je daná funkce.

Poznamenejme, že za uvedených předpokladů má Dirichletův problém jednoznačné řešení a Neumannův problém má jednoznačné řešení až na aditivní konstantu za předpokladu, že

$$\int_\Gamma f(Q)d\Gamma = 0.$$

Užitím druhé Greenovy identity

$$\int_D [u\Delta w - w\Delta u]\, dD = \int_{\partial D} \left[w\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} \right] d\partial D$$

a jistou volbou funkce w, oblasti D a vhodnými limitními přechody (viz [A97]), dostaneme Greenovu representaci řešení Laplaceovy rovnice $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$

$$u(A) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{\partial u(Q)}{\partial \mathbf{n}_Q} \log|A - Q| dl_Q - \int_\Gamma u(Q) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_Q} [\log|A - Q|]\, dl_Q, \quad A \in \Omega.$$

Z této reprezentace limitním přechodem $A \to P$ pro $P \in \Gamma$ (viz [A97]) dostaneme

$$\begin{aligned}
\lim_{A\to P} \int\limits_\Gamma \frac{\partial u(Q)}{\partial \mathbf{n}_Q} \log|A-Q| dl_Q &= \int\limits_\Gamma \frac{\partial u(Q)}{\partial \mathbf{n}_Q} \log|P-Q| dl_Q, \\
\lim_{A\to P} \int\limits_\Gamma u(Q) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_Q} \left[\log|A-Q|\right] dl_Q &= -\pi u(P) + \int\limits_\Gamma u(Q) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_Q} \left[\log|P-Q|\right] dl_Q.
\end{aligned}$$

Pro $A \in \Omega_e$ znovu užitím druhé Greenovy identity obdržíme

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_\Gamma \frac{\partial u(Q)}{\partial \mathbf{n}_Q} \log|A-Q| dl_Q - \int\limits_\Gamma u(Q) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_Q} \left[\log|A-Q|\right] dl_Q, \quad A \in \Omega_e.$$

Můžeme tedy souhrnně psát

$$\int\limits_\Gamma \frac{\partial u(Q)}{\partial \mathbf{n}_Q} \log|P-Q| dl_Q - \int\limits_\Gamma u(Q) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_Q} \left[\log|P-Q|\right] dl_Q = \begin{cases} 2\pi u(P), & P \in \Omega, \\ \pi u(P), & P \in \Gamma, \\ 0, & P \in \Omega_e. \end{cases} \tag{1.6}$$

Hledáme-li harmonickou funkci na neomezené oblasti, hraniční problém můžeme podle požadavku na hranici zformulovat následovně.

Dirichletův (vnější) problém: Najít $u \in C^1(\overline{\Omega}_e) \cap C^2(\Omega_e)$, pro které platí

$$\begin{aligned}
\Delta u(P) &= 0, & P &\in \Omega_e, \\
u(P) &= f(P), & P &\in \Gamma \equiv \partial\Omega, \\
\lim_{r\to\infty} \sup_{|P|\geq r} |u(P)| &< \infty,
\end{aligned}$$

kde $f \in C(\Gamma)$ je daná funkce.

Neumannův (vnější) problém: Najít $u \in C^1(\overline{\Omega}_e) \cap C^2(\Omega_e)$, pro které platí

$$\begin{aligned}
\Delta u(P) &= 0, & & P \in \Omega_e, \\
\frac{\partial u(P)}{\partial \mathbf{n}_P} &= f(P), & & P \in \Gamma \equiv \partial\Omega, \\
u(P) &= O(|P|^{-1}), \\
|\nabla u(P)| &= O(|P|^{-2}) & & \text{pro} \quad |P| \to \infty,
\end{aligned}$$

kde $f \in C(\Gamma)$ je daná funkce, která splňuje

$$\int\limits_\Gamma f(Q) d\Gamma = 0.$$

Pomocí tzv. Kelvinovy transformace ([A97]), která převádí problém nalezení řešení Laplaceovy rovnice na neomezené oblasti na problém nalezení řešení Laplaceovy rovnice na omezené oblasti, převedeme úlohu na řešení vnitřního problému. Stejně jako v předchozí úvaze, pomocí druhé Greenovy identity a předpokladu, že $u \in C(\overline{\Omega}_e) \cap C^2(\Omega_e)$ je řešení Laplaceovy rovnice s $u(P) = O(|P|^{-1})$ a $|\nabla u(P)| = O(|P|^{-2})$ pro $|P| \to \infty$, můžeme psát

$$\int_\Gamma \frac{\partial u(Q)}{\partial \mathbf{n}_Q} \log|P-Q| dl_Q - \int_\Gamma u(Q) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_Q} [\log|P-Q|]\, dl_Q = \begin{cases} 0, & P \in \Omega, \\ -\pi u(P), & P \in \Gamma, \\ -2\pi u(P), & P \in \Omega_e. \end{cases} \tag{1.7}$$

Použitím Dirichletových nebo Neumannových hraničních podmínek v rovnicích (1.6) a (1.7), dostaneme integrální rovnice tak zvaného přímého typu. Tedy v případě vnitřního Dirichletova problému s podmínkou $u(P) = f(P)$ na Γ může být rovnice (1.6) přepsána na integrální rovnici prvního druhu pro neznámou ρ

$$\frac{1}{\pi} \int_\Gamma \rho(Q) \log|P-Q| dl_Q = g(P), \qquad P \in \Gamma, \tag{1.8}$$

kde $\rho(Q) \equiv \frac{\partial u(Q)}{\partial \mathbf{n}_Q}$ a

$$g(P) \equiv f(P) + \frac{1}{\pi} \int_\Gamma f(Q) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_Q} [\log|P-Q|] dl_Q.$$

V případě vnitřního Neumannova problému s hraniční podmínkou $\frac{\partial u(P)}{\partial \mathbf{n}_P} = f(P)$, lze rovnici (1.6) přepsat jako integrální rovnici druhého druhu

$$u(P) + \frac{1}{\pi} \int_\Gamma u(Q) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_Q} [\log|P-Q|] dl_Q = \frac{1}{\pi} \int_\Gamma f(Q) \log|P-Q|] dl_Q, \qquad P \in \Gamma. \tag{1.9}$$

Metody řešení úloh (1.8) a (1.9) se nazývají metody přímé. V nich hledáme přímo buď u, nebo $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ na Γ, kde u je řešení Laplaceovy rovnice.

Oproti tomu u nepřímých metod hraničních integrálních rovnic nalezení řešení příslušné integrální rovnice je jen mezikrokem v hledání harmonické funkce. Řešení Dirichletova nebo Neumannova problému Laplaceovy rovnice u těchto metod není získáno přímo jako řešení příslušné integrální rovnice, ale je nutno ho pomocí řešení příslušné integrální rovnice ještě dopočítat. Tyto nepřímé metody jsou založeny na následujících úvahách.

Nyní nechť u_i označuje harmonickou funkci v Ω_i a u_e označuje harmonickou funkci v Ω_e, kde u_e splňuje podmínky

$$u_e(P) = O(|P|^{-1}), \qquad |\nabla u_e(P)| = O(|P|^{-2}) \qquad \text{pro} \quad |P| \to \infty,$$

a nechť $u_i \in C^1(\overline{\Omega}_i) \cap C^2(\Omega_i)$ a $u_e \in C^1(\overline{\Omega}_e) \cap C^2(\Omega_e)$ a nechť u_i splňuje (1.6) a nechť u_e splňuje (1.7). Definujme dále

$$\begin{aligned} [u(Q)] &= u_i(Q) - u_e(Q), \qquad Q \in \Gamma, \\ \left[\frac{\partial u(Q)}{\partial \mathbf{n}_Q}\right] &= \frac{\partial u_i(Q)}{\partial \mathbf{n}_Q} - \frac{\partial u_e(Q)}{\partial \mathbf{n}_Q}, \qquad Q \in \Gamma. \end{aligned}$$

Sečtením rovnic (1.6) a (1.7) dostaneme

$$\int\limits_{\Gamma} \left[\frac{\partial u(Q)}{\partial \mathbf{n}_Q}\right] \log |P-Q| dl_Q - \int\limits_{\Gamma} [u(Q)] \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_Q} [\log |P-Q|]\, dl_Q$$

$$= \begin{cases} 2\pi u_i(P), & P \in \Omega_i, \\ \pi(u_i(P)+u_e(P)), & P \in \Gamma, \\ -2\pi u_e(P), & P \in \Omega_e. \end{cases} \tag{1.10}$$

Řešíme-li tedy Neumannův problém s podmínkou

$$\frac{\partial u_i(Q)}{\partial \mathbf{n}_Q} = \frac{\partial u_e(Q)}{\partial \mathbf{n}_Q}, \qquad Q \in \Gamma,$$

dostaneme z (1.10)

$$2\pi u_i(A) = -\int\limits_{\Gamma} [u(Q)] \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_Q} [\log |A-Q|]\, dl_Q, \qquad A \in \Omega_i,$$

kterou po dosazení $\rho(Q) \equiv -\frac{1}{2\pi}[u(Q)]$, můžeme přepsat do tvaru

$$u_i(A) = \int\limits_{\Gamma} \rho(Q) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_Q} [\log |A-Q|]\, dl_Q, \qquad A \in \Omega_i. \tag{1.11}$$

Tento integrál se nazývá potenciál dvojvrstvy a funkce ρ hustota dvojvrstvy.

Je-li funkce u_i řešením Dirichletova vnitřního problému, pak pro $A \to P$, můžeme formuli (1.11) přepsat do tvaru

$$-\pi\rho(P) + \int\limits_{\Gamma} \rho(Q) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_Q} [\log |P-Q|]\, dl_Q = f(P), \quad P \in \Gamma, \tag{1.12}$$

což je integrální rovnice druhého druhu.

Řešíme-li Dirichletův problém, z rovnice (1.10) dostaneme vztah

$$u_i(A) = \int\limits_{\Gamma} \left[\frac{\partial u(Q)}{\partial \mathbf{n}_Q}\right] \log |P-Q| dl_Q,$$

který po dosazení $\rho(Q) \equiv -\frac{1}{2\pi}[u(Q)]$, můžeme přepsat do tvaru

$$u_i(A) = \int\limits_{\Gamma} \rho(Q) \log |A-Q| dl_Q. \tag{1.13}$$

Tento integrál se nazývá potenciál jednovrstvy a funkce ρ hustota jednovrstvy. Nyní pro $A \to P$, můžeme (1.13) přepsat do tvaru

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma} \rho(Q) \log |P-Q| dl_Q = f(P), \tag{1.14}$$

což je integrální rovnice prvního druhu.

Podrobnější studium těchto problémů nalezneme např. v [A97], [Kr89], [Gl90].

Kapitola 2

Biortogonální wavelety

2.1 Ortogonální wavelety

V této kapitole nejprve připomeneme základní pojmy z teorie waveletů a některé jejich vlastnosti. Podrobnější vlastnosti waveletů i s příslušnými důkazy je možno nalézt například v [Chui92b], [Chui92a], [Naj04], [Da92], [CDF92], [Sat98], [LMR97].
Wavelet lze konstruovat pomocí multirezoluční analýzy.

Definice 2.1.1. *Posloupnost uzavřených podprostorů* $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *prostoru* $L^2(\mathbb{R})$*, tvoří multirozklad prostoru* $L^2(\mathbb{R})$*, jestliže platí následující podmínky*

i) $\cdots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \cdots$,

ii) $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$,

iii) $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$,

iv) $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}, \quad j \in \mathbb{Z}$,

v) existuje funkce $\phi(x) \in V_0$ *s nenulovým integrálem taková, že systém funkcí* $\{\phi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *je ortonormální báze prostoru* V_0.

Pokud podmínka *v)* není splněna a systém funkcí $\{\phi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ je pouze Rieszovou bází prostoru V_0 a všechny ostatní body předešlé definice jsou splněny, řekneme, že posloupnost uzavřených podprostorů $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ prostoru $L^2(\mathbb{R})$, tvoří zobecněný multirozklad prostoru $L^2(\mathbb{R})$. Připomeňme definici Rieszovy báze.

Definice 2.1.2. *Systém funkcí* $\{\phi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *je Rieszovou bází prostoru* V_0*, jestliže existují kladné konstanty* A, B *takové, že platí*

$$A\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 \le \left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\phi(x-k) \right\|^2 \le B\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 \qquad \text{pro všechna} \quad \{c_k\} \in l^2(\mathbb{Z}). \quad (2.1)$$

Funkce ϕ z definice 2.1.1 se nazývá *škálová funkce*. Tato škálová funkce je prvkem také prostoru V_1, a tím splňuje tzv. dilatační rovnici

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(2x - k), \quad \{h_k\} \in l_2. \tag{2.2}$$

Koeficienty h_k se nazývají *škálové koeficienty* a platí pro ně vztah

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k = \sqrt{2}, \tag{2.3}$$

který dostaneme integrací dilatační rovnice a z podmínky nenulového integrálu škálové funkce. Z ortogonality systému funkcí $\{\phi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ plyne následující vztah mezi škálovými koeficienty

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k h_{k-2l} = \delta_{l,0}, \quad l \in \mathbb{Z}. \tag{2.4}$$

Pokud má škálová funkce kompaktní nosič, je z dilatační rovnice zřejmé, že škálových koeficientů je konečně mnoho nenulových.

Z dilatační rovnice plyne pro Fourierovu transformaci škálové funkce, že

$$\widehat{\phi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right), \tag{2.5}$$

kde $\widehat{\phi}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} \phi(x) e^{-2\pi i \xi x} dx$ a funkce $m_0(\xi)$ je jedno-periodická funkce tvaru

$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} \xi k}.$$

Tato funkce se nazývá *škálový filtr*. Z ortogonality škálové funkce plyne

$$\sum_{k \in Z} |\widehat{\phi}(\xi + k)|^2 = 1 \quad \text{s.v.} \tag{2.6}$$

Z této vlastnosti Fourierovy transformace škálové funkce a v důsledku toho, že škálová funkce je prvkem také prostoru V_1, platí tzv. škálová identita

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \frac{1}{2})| = 1 \quad \text{s.v.} \tag{2.7}$$

Sestrojíme-li ze škálové funkce ϕ funkce $\phi_{j,k}$ podle předpisu $\phi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j x - k)$, tvoří tyto funkce $\{\phi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ortonormální bázi prostorů V_j.
Definujeme prostory W_j (nazývané *prostory detailů*) jako ortogonální doplňky prostorů V_j ve V_{j+1}. Tedy

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j,$$

kde $\oplus$ značí direktní součet. Z tohoto plyne, že

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j.$$

Definice 2.1.3. *Funkce ψ je wavelet, jestliže funkce $\{\psi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ tvoří ortonormální bázi prostoru W_0.*

Funkce $\psi_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k)$, $j,k \in \mathbb{Z}$, tvoří pak ortonormální bázi prostoru $L^2(\mathbb{R})$. Libovolnou funkci f z prostoru $L^2(\mathbb{R})$ můžeme tedy psát ve tvaru

$$f = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k}\rangle \psi_{j,k}, \tag{2.8}$$

kde $\langle f, \psi_{j,k}\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\psi_{j,k}(x)}dx$. Protože wavelet ψ je prvkem prostoru V_1, platí vztah

$$\psi(x) = \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k \phi(2x-k), \tag{2.9}$$

kde koeficienty g_k se nazývají *waveletové koeficienty*. Volbou $g_k = (-1)^k \overline{h}_{1-k}$, vztah (2.9) pak definuje wavelet příslušný multirezoluční analýze se škálovou funkcí ϕ. Ke konstrukci takového waveletu stačí znát hodnoty škálových koeficientů. Fourierovu transformaci takto definovaného waveletu můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\widehat{\psi}(\xi) = \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i}(\xi+1)}\overline{m_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)}\widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right). \tag{2.10}$$

V aplikacích je někdy nutno pracovat s funkcemi definovanými ne na celé reálné ose, ale na omezeném intervalu. Jednou z cest, jak získat multirezoluční analýzu na intervalu $\langle 0,1\rangle$ je periodizace škálové funkce a waveletů. Interval $\langle 0,1\rangle$, zde symbolizuje jakýkoli omezený interval, protože interval $\langle 0,1\rangle$ lze pomocí lineární transformace převést na jakýkoli omezený interval. Periodizace škálové funkce ϕ a waveletu ψ je definována vztahy

$$\phi_{j,k}^{\langle 0,1\rangle} = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \phi_{j,k}(x+l) \tag{2.11}$$

a

$$\psi_{j,k}^{\langle 0,1\rangle} = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \psi_{j,k}(x+l). \tag{2.12}$$

Oba systémy funkcí $\{\phi_{j,k}^{\langle 0,1\rangle}; 0 \le k \le 2^j - 1\}$ a $\{\psi_{j,k}^{\langle 0,1\rangle}; 0 \le k \le 2^j - 1\}$ jsou ortonormální pro $j \ge 0$ a jejich lineární uzávěry označíme $V_j^{\langle 0,1\rangle}$ a $W_j^{\langle 0,1\rangle}$. Potom $\{V_j^{\langle 0,1\rangle}\}_{j\ge 0}$ tvoří multirezoluční analýzu prostoru $L^2(0,1)$ a platí $V_j^{\langle 0,1\rangle} \perp W_j^{\langle 0,1\rangle}$ a $V_{j+1}^{\langle 0,1\rangle} = V_j^{\langle 0,1\rangle} \oplus W_j^{\langle 0,1\rangle}$ pro $j \ge 0$. Dimenze prostoru V_j je 2^j.

2.2 Biortogonální wavelety

Biortogonální wavelety byly studovány například v [CDF92], [Chui92b], [B05a], [B05b], [ChuWa92a], [ChuWa92b]. Protože kompaktní nosič je při výpočtech důležitou vlastností, ve zmíněné literatuře byly konstruovány především biortogonální wavelety s kompaktním nosičem. Přednost biortogonálních waveletů s kompaktním nosičem zkonstruovaných Cohenem, Daubechies a Feauveau v [CDF92] je v tom, že i duální wavelety mají kompaktní nosič. V případě splinových biortogonálních waveletů duály již ale nejsou spliny; duální wavelety se nedají vyjádřit v explicitním tvaru. Výhoda splinových biortogonálních waveletů zkonstruovaných Chui a Wangem v [ChuWa92a], [ChuWa92b] je v tom, že i duální wavelety jsou po částech polynomy a mají tedy explicitní vyjádření. Nevýhodou zase naopak je, že duály obecně nemají kompaktní nosič. V práci [B05a] je popsána širší třída splinových biortogonálních waveletů s kompaktním nosičem, která obsahuje splinové wavelety zkonstruované Cohenem, Daubechies a Feauveau jako speciální případ. V této práci budeme uvažovat biortogonální wavelety s kompaktním nosičem, škálových koeficientů bude tedy konečně mnoho nenulových.

Při zavedení biortogonálních waveletů vyjdeme ze dvou multirozkladů prostoru $L^2(\mathbb{R})$. Mějme tedy dány dva zobecněné multirozklady $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ a $\{\widetilde{V}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ a příslušné škálové funkce ϕ a $\widetilde{\phi}$. Tyto škálové funkce splňují dilatační rovnice

$$\phi(x) = \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k \phi(2x-k), \qquad \widetilde{\phi}(x) = \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widetilde{h}_k \widetilde{\phi}(2x-k). \tag{2.13}$$

Pro Fourierovy transformace těchto škálových funkcí platí vztahy

$$\widehat{\phi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

a

$$\widehat{\widetilde{\phi}}(\xi) = \widetilde{m}_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\widehat{\widetilde{\phi}}\left(\frac{\xi}{2}\right),$$

kde $m_0(\xi)$ je jedno-periodická funkce tvaru

$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}\xi k} \tag{2.14}$$

a $\widetilde{m}_0(\xi)$ je jedno-periodická funkce tvaru

$$\widetilde{m}_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widetilde{h}_k \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}\xi k} \tag{2.15}$$

Definice 2.2.1. *Dvě škálové funkce ϕ a $\widetilde{\phi}$ příslušné dvěma zobecněným multirozkladům $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ a $\{\widetilde{V}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ se nazývají duální, jestliže platí*

$$\langle \phi(x-k), \widetilde{\phi}(x-l)\rangle = \int_{\mathbb{R}} \phi(x-k)\overline{\widetilde{\phi}(x-l)}dx = \delta_{k,l}, \qquad k,l\in\mathbb{Z}. \tag{2.16}$$

Pro Fourierovy transformace duálních škálových funkcí příslušných zobecněným multirozkladům $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ a $\{\widetilde{V}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ platí rovnost

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\phi}(\xi+k)\overline{\widehat{\widetilde{\phi}}(\xi+k)} = 1.$$

Tedy škálové filtry duálních škálových funkcí splňují vztah

$$m_0(\xi)\overline{\widetilde{m_0}(\xi)} + m_0(\xi + \frac{1}{2})\overline{\widetilde{m_0}(\xi + \frac{1}{2})} = 1 \quad \text{s.v.} \tag{2.17}$$

a pro škálové koeficienty duálních škálových funkcí platí

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \widetilde{h}_{k-2l} = \delta_{0,l}, \qquad l \in \mathbb{Z}$$

a

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widetilde{h}_k = \sqrt{2}.$$

Důkaz těchto vlastností lze nalést například v [Chui92b].

Poznamenejme, že při konstrukci biortogonálních waveletů nemusíme vždy vycházet ze dvou různých zobecněných multirozkladů, ale můžeme vyjít ze dvou posloupností škálových koeficientů $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ a $\{\widetilde{h}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ (jako např. v [CDF92]) a škálové funkce konstruovat pomocí škálových filtrů uvedených v (2.14) a v (2.15). Fourierovy transformace škálových funkcí jsou pak definovány vztahy

$$\widehat{\phi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi), \tag{2.18}$$

$$\widehat{\widetilde{\phi}}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} \widetilde{m}_0(2^{-j}\xi). \tag{2.19}$$

Prostory detailů W_j resp. $\widetilde{W_j}$ jsou konstruovány jako direktní doplňky prostorů V_j ve V_{j+1}, resp. direktní doplňky prostorů $\widetilde{V_j}$ ve $\widetilde{V}_{j+1}$, teď již ne obecně ortogonální doplňky. Budeme požadovat, aby platilo $\widetilde{W_j} \perp V_j$, $W_j \perp \widetilde{V_j}$ a

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \widetilde{W_j}.$$

Položíme $g_k = (-1)^k \widetilde{h}_{1-k}$ a $\widetilde{g}_k = (-1)^k h_{1-k}$ a vytvoříme dvojici vaweletů ψ a $\widetilde{\psi}$ podle předpisu

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \phi(2x - k) \tag{2.20}$$

a

$$\widetilde{\psi}(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widetilde{g}_k \widetilde{\phi}(2x - k) \tag{2.21}$$

nebo ekvivalentně

$$\widehat{\psi}(\xi) = \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i}(\xi+1)} \overline{\widetilde{m}_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)} \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right), \tag{2.22}$$

$$\widehat{\widetilde{\psi}}(\xi) = \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i}(\xi+1)} \overline{m_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)} \widehat{\widetilde{\phi}}\left(\frac{\xi}{2}\right). \tag{2.23}$$

Za předpokladu, že škálových koeficientů $\{h_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ a $\{\widetilde{h}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ je konečně mnoho nenulových, je zřejmé, že takto definované wavelety mají kompaktní nosič. Jestliže definujeme funkce $\psi_{j,k}$ a $\widetilde{\psi}_{j,k}$ předpisem $\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k)$ a $\widetilde{\psi}_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\widetilde{\psi}(2^j x - k)$, prostory doplňků W_j, resp. $\widetilde{W}_j$ jsou potom definovány jako uzávěry lineárních obalů těchto funkcí. Tedy

$$W_j = \overline{\mathcal{L}\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}}, \qquad \widetilde{W}_j = \overline{\mathcal{L}\{\widetilde{\psi}_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}}.$$

Jestliže duální škálové funkce ještě navíc splňují

$$|\widehat{\phi}(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}$$

a

$$|\widehat{\widetilde{\phi}}(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon},$$

pak s takto definovanými funkcemi $\psi_{j,k}$ a $\widetilde{\psi}_{j,k}$ platí pro každou funkci $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$f = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} \langle f, \widetilde{\psi}_{j,k}\rangle \psi_{j,k} = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k}\rangle \widetilde{\psi}_{j,k},$$

kde $\langle f, \psi_{j,k}\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\psi_{j,k}(x)}dx$. Navíc pro takto vytvořené wavelety platí rovnost

$$\langle \psi_{j,k}, \widetilde{\psi}_{j',k'}\rangle = \delta_{j,j'}\delta_{k,k'}. \tag{2.24}$$

Důkaz těchto vlastností je uveden například v [CDF92].

Protože předpokládáme, že škálových koeficientů $\{h_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ a $\{\widetilde{h}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ je konečně mnoho nenulových, můžeme psát

$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=N_1}^{N_2} h_k \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\xi k}, \qquad \widetilde{m}_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=\widetilde{N}_1}^{\widetilde{N}_2} \widetilde{h}_k \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\xi k},$$

kde

$$h_{N_1} \neq 0 \neq h_{N_2}, \qquad \widetilde{h}_{\widetilde{N}_1} \neq 0 \neq \widetilde{h}_{\widetilde{N}_2}.$$

Potom nosič škálové funkce ϕ je interval $\langle N_1, N_2\rangle$ a nosič škálové funkce $\widetilde{\phi}$ je interval $\langle \widetilde{N}_1, \widetilde{N}_2\rangle$. Ze vztahů (2.20) a (2.21) platí, že nosič funkce ψ je interval

$$\langle \frac{N_1 - \widetilde{N}_2 - 1}{2}, \frac{N_2 - \widetilde{N}_1 - 1}{2}\rangle$$

a že nosič funkce $\widetilde{\psi}$ je interval

$$\langle \frac{\widetilde{N}_1 - N_2 - 1}{2}, \frac{\widetilde{N}_2 - N_1 - 1}{2}\rangle.$$

Tedy nosiče funkcí ψ a $\widetilde{\psi}$ mají stejnou délku rovnou hodnotě $\frac{1}{2}(N_2 + \widetilde{N}_2 - N_1 - \widetilde{N}_1)$. Ze vztahu (2.24) a za předpokladu $\psi \in C^L$ a $\widetilde{\psi} \in C^{\widetilde{L}}$ pro škálové filtry m_0 a $\widetilde{m}_0$ platí, že

$m_0(\xi)$ je dělitelný výrazem $(1+\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\xi})^{L+1}$ a $\widetilde{m}_0(\xi)$ je dělitelný výrazem $(1+\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\xi})^{\widetilde{L}+1}$. Důkaz této vlastnosti je uveden v [CDF92]. Z tohoto plyne, že $N_2 - N_1 \geq L + 1$ a $\widetilde{N}_2 - \widetilde{N}_1 \geq \widetilde{L} + 1$ tedy že délka nosiče funkce ψ i délka nosiče funkce $\widetilde{\psi}$ je větší nebo rovna hodnotě $\frac{L+\widetilde{L}}{2} + 1$.
Budeme dále požadovat, aby škálová funkce byla symetrická a reálná funkce. Tedy škálové koeficienty h_k jsou reálná čísla. Požadujeme-li symetrii škálové funkce okolo $x = 0$, pak pro všechna x platí

$$\phi(x) = \phi(-x). \tag{2.25}$$

Z toho vyplývá, že platí $\widehat{\phi}(\xi) = \widehat{\phi}(-\xi)$ a to implikuje, že stejnou vlastnost má i škálový filtr, tedy

$$m_0(\xi) = m_0(-\xi). \tag{2.26}$$

To znamená, že $m_0(\xi)$ je trigonometrický polynom v $\cos 2\pi\xi$. Požadujeme-li symetrii škálové funkce okolo $x = \frac{1}{2}$, musí platit

$$\phi(1-x) = \phi(x). \tag{2.27}$$

Škálový filtr musí mít tedy vlastnost

$$m_0(-\xi) = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\xi} m_0(\xi) \tag{2.28}$$

Odtud plyne, že $\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}\xi} m_0(\xi)$ je sudá funkce. Navíc tato funkce má periodu 2, tedy je to polynom v $\cos\pi\xi$. Vynásobíme-li polynom $\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}\xi} m_0(\xi)$ výrazem $\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}\xi}$, dostaneme trigonometrický polynom v proměnné $2\pi\xi$. Z toho plyne, že $\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}\xi} m_0(\xi)$ je polynom v $\cos\pi\xi$ s pouze lichými mocninami. Tedy (2.28) je ekvivalentní s vlastností

$$m_0(\xi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\xi}\cos(\pi\xi)\cdot(\text{polynom} \quad \text{v} \quad \cos(2\pi\xi)). \tag{2.29}$$

Připomeňme, že pro škálové filtry duálních škálových funkcí platí vlastnost (2.17), kterou je pro daný škálový filtr m_0 určen škálový filtr $\widetilde{m}_0$.

Vlastnosti škálových filtrů duálních škálových funkcí, které jsou symetrické okolo $x = 0$ nebo $x = \frac{1}{2}$, jsou zformulovány v následující větě.

Věta 2.2.1. *Nechť m_0 je trigonometrický polynom s reálnými koeficienty. Jestliže tento polynom splňuje (2.25), potom může být přepsán do tvaru*

$$m_0(\xi) = (\cos\pi\xi)^{2l} p_0(\cos 2\pi\xi), \tag{2.30}$$

kde p_0 je polynom, který splňuje $p_0(-1) \neq 0$ a $l \in \mathbb{N}$. Jestliže tento polynom splňuje (2.28), potom může být přepsán do tvaru

$$m_0(\xi) = \mathrm{e}^{-\pi\xi}(\cos\pi\xi)^{2l+1} p_0(\cos 2\pi\xi), \tag{2.31}$$

kde p_0 je polynom, který splňuje $p_0(-1) \neq 0$ a $l \in \mathbb{N}$.
Jestliže existuje řešení $\widetilde{m}_0(\xi)$ (2.17), potom toto řešení $\widetilde{m}_0(\xi)$ má stejný tvar jako $m_0(\xi)$, tedy

$$\widetilde{m}_0(\xi) = (\cos\pi\xi)^{2\widetilde{l}}\widetilde{p}_0(\cos 2\pi\xi), \tag{2.32}$$

v případě (2.30), nebo

$$\widetilde{m}_0(\xi) = \mathrm{e}^{-\pi\xi}(\cos \pi\xi)^{2\widetilde{l}+1}\widetilde{p}_0(\cos 2\pi\xi), \tag{2.33}$$

v případě (2.31), kde $\widetilde{p}_0$ *je polynom, který splňuje* $\widetilde{p}_0(-1) \neq 0$ *a* $\widetilde{l} \in \mathbb{N}$.
Navíc, pro polynomy p_0 *a* $\widetilde{p}_0$ *platí*

$$p_0(\cos 2\pi\xi)\widetilde{p}_0(\cos 2\pi\xi) = \sum_{n=0}^{k-1} \binom{k-1+n}{n} \left(\sin^2 \pi\xi\right)^n + \left(\sin^2 \pi\xi\right)^k R(\cos 2\pi\xi), \tag{2.34}$$

kde $k = l + \widetilde{l}$ *v případě (2.30),* $k = l + \widetilde{l} + 1$ *v případě (2.31) a kde* R *je lichý polynom.*

Důkaz. důkaz této věty je uveden v [CDF92]. □

V další kapitole se budeme věnovat biortogonálním waveletům, pro které škálové filtry splňují některou z vlastností z předešlé věty a škálová funkce ϕ je B-spline.

2.3 Biortogonální splinové wavelety

Nejprve uvedeme definici B-spline určitého řádu a nejdůležitější vlastnosti B-splinů.

Definice 2.3.1. *Funkci* $N_1(x)$ *nazveme B-spline prvního řádu, jestliže*

$$N_1(x) = \begin{cases} 1 & \textit{pro} \quad 0 \leq x < 1, \\ 0 & \textit{jinak}. \end{cases} \tag{2.35}$$

Funkci $N_r(x)$ *nazveme B-spline r-tého řádu, jestliže*

$$N_r(x) = \int_0^1 N_{r-1}(x-t)dt. \tag{2.36}$$

Věta 2.3.1. *B-spliny r-tého řádu* N_r *mají následující vlastnosti.*

1. *Pro každou funkci* $f \in \mathbb{C}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)N_r(x)dx = \int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1 + \dots + x_r)dx_1 \dots dx_r$$

2. *Pro každou funkci* $g \in \mathbb{C}_r$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^{(r)}(x)N_r(x)dx = \sum_{k=0}^{r}(-1)^{r-k}\binom{r}{k}g(k).$$

3. $N_r(x) = \frac{1}{(r-1)!}\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{r}{k}(x-k)_+^{r-1}$ *pro všechna x.*

4. $\mathrm{supp} N_r = \langle 0, r\rangle$.

5. $N_r(x) > 0$, *když* $0 < x < r$.

6. $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} N_r(x-k) = 1$, *pro všechna x.*

7. *Pro B-spliny $N_r(x)$ a $N_{r-1}(x)$ platí následující vztah*
$$N_r(x) = \frac{x}{r-1}N_{r-1}(x) + \frac{r-x}{r-1}N_{r-1}(x-1).$$

8. $N_r'(x) = N_{r-1}(x) - N_{r-1}(x-1)$.

9. *N_r je symetrická podle osy svého nosiče, tedy*
$$N_r(\frac{r}{2}+x) = N_r(\frac{r}{2}-x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Důkaz. Důkaz těchto vlastností je uveden například v [Chui92b]. □

Poznamenejme, že v této práci budeme pracovat s B-spliny r-tého řádu, jejichž nosič je interval $\langle\lfloor -\frac{r}{2}\rfloor, \lceil\frac{r}{2}\rceil\rangle$. Tedy jedná se o B-spliny $N_r(x - \lfloor\frac{r}{2}\rfloor)$.

Označme ${}_r\phi(x) = N_r(x)$. Protože platí, že systém funkcí $\{N_r(x-k)\}k \in \mathbb{Z}$ tvoří Rieszovu bázi prostoru V_0, je tato funkce škálovou funkcí waveletů, konstruovaných v předchozí podkapitole. Pro Fourierovu transformaci této škálové funkce platí rovnost

$$\widehat{{}_r\phi}(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\kappa\xi\pi}\left(\frac{\sin\pi\xi}{\pi\xi}\right)^r \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\xi\lfloor\frac{r}{2}\rfloor}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\xi}}{\mathrm{i}2\pi\xi}\right)^r,$$

kde $\kappa = 0$, jestliže r je sudé, nebo $\kappa = 1$, jestliže r je liché. Tento vztah je dokázán v následující kapitole. Lze jednoduše ověřit, že pro sudá r platí vztah (2.25) pro lichá r platí vztah (2.27). Ze vztahu (2.5) pro škálový filtr totiž plyne, že

$${}_rm_0(\xi) = \left(\frac{1+\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\xi}}{2}\right)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\xi\lfloor\frac{r}{2}\rfloor} = \mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}\xi\kappa}\left(\cos\frac{\xi}{2}\right)^r, \tag{2.37}$$

kde $\kappa = 0$, jestliže r je sudé, nebo $\kappa = 1$, jestliže r je liché. Ale také

$${}_rm_0(\xi) = \left(\frac{1+\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\xi}}{2}\right)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\xi\lfloor\frac{r}{2}\rfloor} = \sum_{k=-\lfloor\frac{r}{2}\rfloor}^{r-\lfloor\frac{r}{2}\rfloor} 2^{-r}\binom{r}{k+\lfloor\frac{r}{2}\rfloor}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}k\xi}. \tag{2.38}$$

Z (2.37) je okamžitě vidět, že pro sudá r platí vztah (2.26), pro lichá r platí vztah (2.28). Ze vztahů (2.30) a (2.31) ve větě 2.2.1, dostáváme, že polynom $p_0 \equiv 1$. Ze stejné věty ze vztahu (2.34) potom dostáváme tvar škálového filtru ${}_{r,\tilde{r}}\widetilde{m}_0(\xi)$ duální funkce

$$ {}_{r,\widetilde{r}}\widetilde{m}_0(\xi) = $$

$$ \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i}\xi\kappa}(\cos\frac{\xi}{2})^{\widetilde{r}}\left[\sum_{k=0}^{\frac{r+\widetilde{r}}{2}-1}\binom{\frac{r+\widetilde{r}}{2}-1+k}{k}\left(\sin^2\pi\xi\right)^k+\left(\sin^2 2\pi\xi\right)^{r+\widetilde{r}}R(\cos 2\pi\xi)\right], \quad (2.39) $$

kde R je lichý polynom a $\kappa = 0$, jestliže r je sudé, nebo $\kappa = 1$, jestliže r je liché. V dalším zvolíme $R \equiv 0$. Jako v (2.38) můžeme tedy psát

$$ {}_{r,\widetilde{r}}\widetilde{m}_0(\xi) = \sum_{k=-\lfloor\frac{\widetilde{r}}{2}\rfloor}^{\widetilde{r}-\lfloor\frac{\widetilde{r}}{2}\rfloor} 2^{-\widetilde{r}}\binom{\widetilde{r}}{k+\lfloor\frac{\widetilde{r}}{2}\rfloor}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}k\xi}\left[\sum_{k=0}^{\frac{r+\widetilde{r}}{2}-1}\binom{\frac{r+\widetilde{r}}{2}-1+k}{k}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\xi}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\xi}}{2i}\right)^{2k}\right]. \quad (2.40) $$

Výraz v hranaté závorce můžeme dále upravit následujícím způsobem

$$ \sum_{k=0}^{\frac{r+\widetilde{r}}{2}-1}\binom{\frac{r+\widetilde{r}}{2}-1+k}{k}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\xi}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\xi}}{2i}\right)^{2k} = $$

$$ \sum_{k=0}^{\frac{r+\widetilde{r}}{2}-1}\binom{\frac{r+\widetilde{r}}{2}-1+k}{k}\sum_{l=0}^{2k}\frac{1}{(2i)^{2k}}(-1)^l\binom{2k}{l}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\xi l}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\xi(2k-l)} = $$

$$ \sum_{k=0}^{\frac{r+\widetilde{r}}{2}-1}\binom{\frac{r+\widetilde{r}}{2}-1+k}{k}\frac{1}{2^{2k}}\sum_{l=0}^{2k}(-1)^{l-k}\binom{2k}{l}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\xi(2l-2k)} = $$

$$ \sum_{k=0}^{\frac{r+\widetilde{r}}{2}-1}\binom{\frac{r+\widetilde{r}}{2}-1+k}{k}\frac{1}{2^{2k}}\sum_{l=0}^{2k}\binom{2k}{l}\cdot(-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\xi(l-k)}). \quad (2.41) $$

Ze vztahu (2.38) je okamžitě vidět, že škálové koeficienty h_n funkce ${}_r\phi(x)$ mají tvar

$$ h_k = \sqrt{2}\cdot 2^{-r}\binom{r}{k+\lfloor\frac{r}{2}\rfloor}, \qquad k = -\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor, \ldots, r-\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor. \quad (2.42) $$

Škálové koeficienty $\widetilde{h}_k$ funkce ${}_{r,\widetilde{r}}\widetilde{\phi}(x)$ určíme jako koeficienty polynomu, který vznikne součinem polynomů $p(z)$ a $q(z)$, kde

$$ p(z) = \sqrt{2}\sum_{k=-\lfloor\frac{\widetilde{r}}{2}\rfloor}^{\widetilde{r}-\lfloor\frac{\widetilde{r}}{2}\rfloor} 2^{-\widetilde{r}}\binom{\widetilde{r}}{k+\lfloor\frac{\widetilde{r}}{2}\rfloor}z^{-k} \quad (2.43) $$

a

$$ q(z) = \sum_{k=0}^{\frac{r+\widetilde{r}}{2}-1}\binom{\frac{r+\widetilde{r}}{2}-1+k}{k}\frac{1}{2^{2k}}\sum_{l=0}^{2k}\binom{2k}{l}(-z)^{l-k}. \quad (2.44) $$

Polynom $p(z)$ je část výrazu (2.40) (část stojící před hranatou závorkou), kde jsme položili $z = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\xi}$. Polynom $q(z)$ je výraz (2.41), kde jsme použili stejnou substituci

$z = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \xi}$.
Škálové koeficienty pro nízké hodnoty r a $\widetilde{r}$ jsou uvedeny v následující tabulce.

r	h_n	$\widetilde{r}$	$\widetilde{h_n}$
1	$\{\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\}$	1	$\{\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\}$
		3	$\{-\frac{\sqrt{2}}{16}, \frac{\sqrt{2}}{16}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{16}, -\frac{\sqrt{2}}{16}\}$
		5	$\{-\frac{3\sqrt{2}}{256}, -\frac{3\sqrt{2}}{256}, -\frac{11\sqrt{2}}{128}, \frac{11\sqrt{2}}{128}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{11\sqrt{2}}{128}, -\frac{11\sqrt{2}}{128}, -\frac{3\sqrt{2}}{256}, \frac{3\sqrt{2}}{256}\}$
2	$\{\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\}$	2	$\{-\frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{8}\}$
		4	$\{\frac{3\sqrt{2}}{128}, -\frac{3\sqrt{2}}{64}, -\frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{19\sqrt{2}}{64}, \frac{45\sqrt{2}}{64}, \frac{45\sqrt{2}}{64}, \frac{19\sqrt{2}}{64}, -\frac{\sqrt{2}}{8}, -\frac{3\sqrt{2}}{64}, \frac{3\sqrt{2}}{128}\}$

Tabulka 2.1: Škálové koeficienty funkcí ${}_r\phi$ a ${}_{r,\widetilde{r}}\widetilde{\phi}$ pro různá r a $\widetilde{r}$

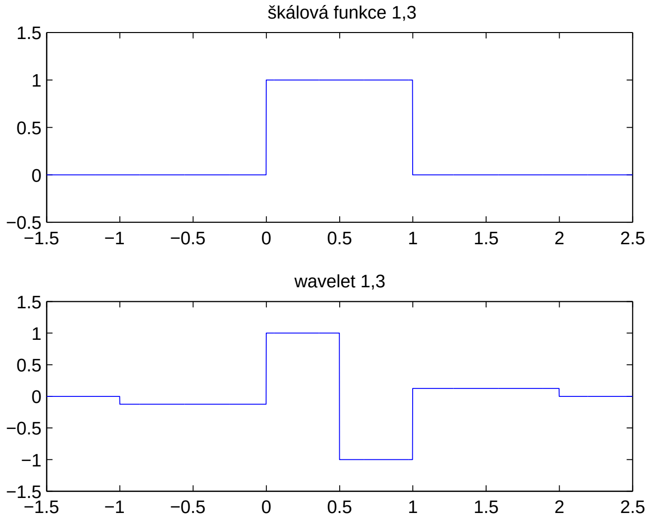
Nosič škálové funkce ${}_r\phi$ je interval $\langle -\lfloor \frac{r}{2} \rfloor, \lceil \frac{r}{2} \rceil \rangle$. Nosič škálové funkce ${}_{r,\widetilde{r}}\widetilde{\phi}$ je interval $\langle -\lfloor \frac{r}{2} \rfloor - \widetilde{r} + 1, \lceil \frac{r}{2} \rceil + \widetilde{r} - 1 \rangle$.

Grafy škálových biortogonálních funkcí a biortogonálních waveletů pro hodnoty $r = 1$, $\widetilde{r} = 3$, $r = 1$, $\widetilde{r} = 5$ a $r = 2$, $\widetilde{r} = 2$ jsou uvedeny na obrázcích (2.1), (2.2), (2.4). Grafy funkcí ${}_1\phi$ a ${}_{1,1}\psi$ a ${}_{1,1}\widetilde{\phi}$ a ${}_{1,1}\widetilde{\psi}$ uvedeny nejsou, jelikož se v obou případech jedná o Haarovu bázi, totiž ${}_1\phi =_{1,1} \widetilde{\phi}$ a ${}_{1,1}\psi =_{1,1} \widetilde{\psi}$ a

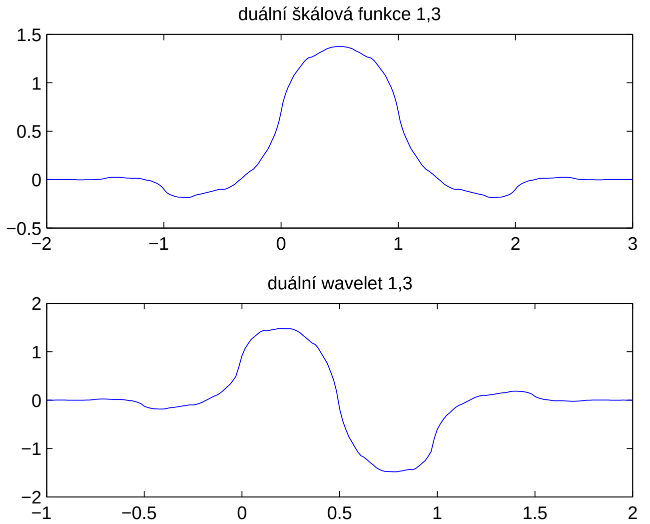
$$ {}_1\phi = \begin{cases} 1, & x \in \langle 0, 1), \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} $$

a

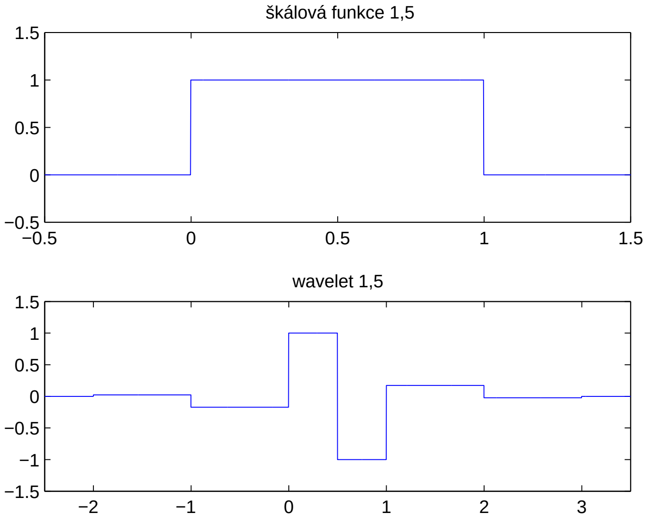
$$ {}_{1,1}\psi = \begin{cases} 1, & x \in \langle 0, 1/2), \\ -1, & x \in \langle 1/2, 1) \end{cases} $$



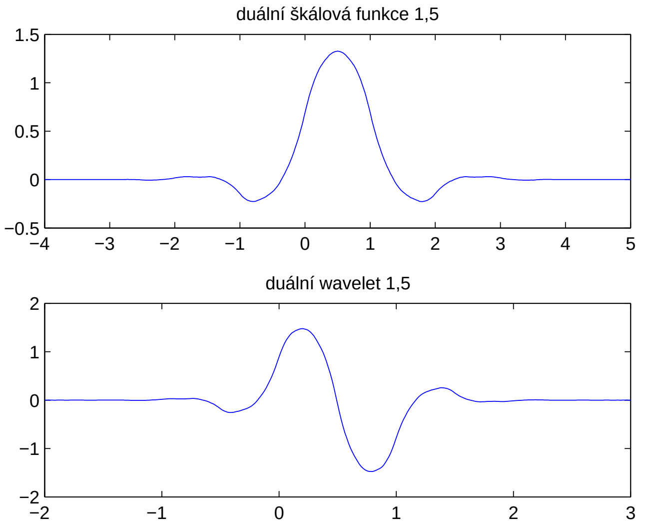
Obrázek 2.1: Graf biortogonální škálové funkce ${}_1\phi$ a waveletu ${}_{1,3}\psi$



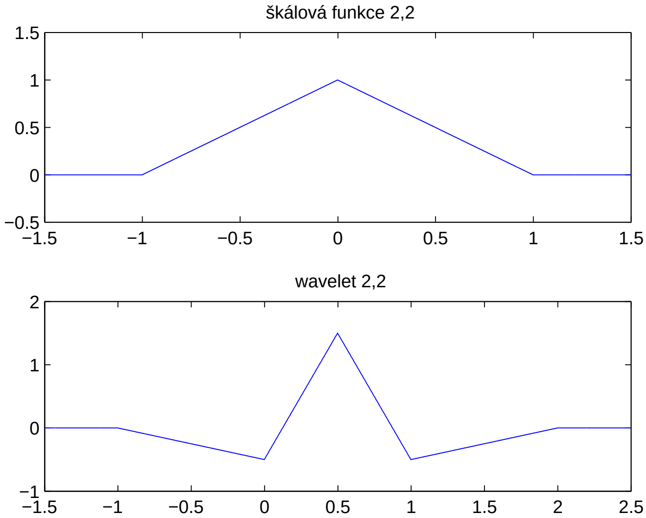
Obrázek 2.2: Graf biortogonální duální škálové funkce ${}_{1,3}\widetilde{\phi}$ a waveletu ${}_{1,3}\widetilde{\psi}$



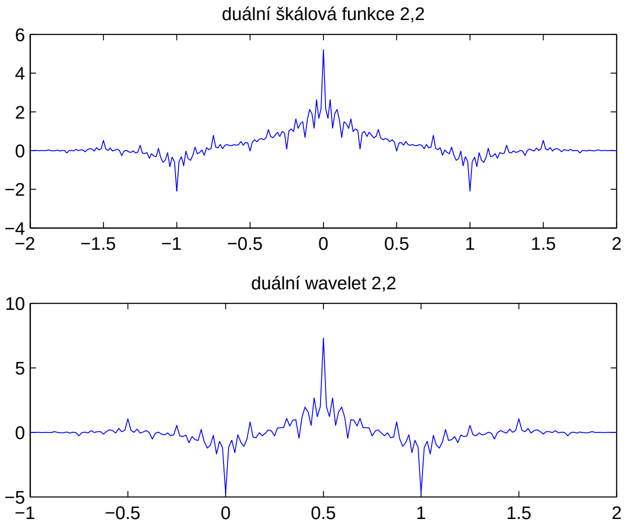
Obrázek 2.3: Graf biortogonální škálové funkce ${}_1\phi$ a waveletu ${}_{1,5}\psi$



Obrázek 2.4: Graf duální biortogonální škálové funkce ${}_{1,5}\widetilde{\phi}$ a waveletu ${}_{1,5}\widetilde{\psi}$



Obrázek 2.5: Graf biortogonální škálové funkce ${}_2\phi$ a waveletu ${}_{2,2}\psi$



Obrázek 2.6: Graf duální biortogonální škálové funkce ${}_{2,2}\widetilde{\phi}$ a waveletu ${}_{2,2}\widetilde{\psi}$

Kapitola 3

Vlastnosti Fourierových koeficientů splinů a splinových waveletů

3.1 Vlastnosti Fourierových koeficientů splinů

Důkaz stability a konvergence qualokační metody využívá následující vlastnosti Fourierových koeficientů splinů jedno-periodických B-splinů řádu $d+1$, která je uvedena v následující větě.

Věta 3.1.1. *Nechť S_n^d označuje prostor jedno-periodických B-splinů řádu $d+1$ (po částech polynomy stupně d) s uzly v bodech $x_k = \frac{k}{n}$, kde n je libovolné přirozené číslo a $j = 0, \ldots, n-1$. Dále definujme množinu $\Lambda_n = \{p \in \mathbb{Z}; -\frac{n}{2} < p \leq \frac{n}{2}\}$. Pak pro Fourierovy koeficienty jedno-periodického B-splinu $\widehat{\phi}$ platí rovnost*

$$(-1)^{l(d+1)}\widehat{\phi}(p+ln)(p+ln)^{d+1} = \widehat{\phi}(p)p^{d+1}, \qquad l \in \mathbb{Z}, \quad \phi \in S_n^d, \quad p \in \Lambda_n. \tag{3.1}$$

Naším cílem bude nejprve uvést důkaz vztahu (3.1), který je v trochu jednodušší podobě dokázán v [A83] a pokusit se dokázat vztah, který platí pro Fourierovy koeficienty splinových waveletů.

Důkaz. Zadefinujme si tedy nejprve některé pojmy a značení. Nechť χ_n^1 je n-násobek charakteristické funkce na množině $\bigcup\{\langle m - \frac{1}{2n}, m + \frac{1}{2n}\rangle, m \in \mathbb{Z}\}$. Pro $d > 0$ definujeme funkci χ_n^{d+1} jako konvolutorní integrál

$$\chi_n^{d+1}(x) = \int_0^1 \chi_n^d(x-y)\chi_n^1(y)dy.$$

B-spliny $\chi_n^{d+1}(x - \frac{j}{n})$ pro $j \in \Lambda_n$ tvoří bázi prostoru S_n^d. Označíme-li funkci χ_n^{d+1} jako $\phi(x) = \chi_n^{d+1}(x - \frac{j}{n})$, pak příslušný Fourierův koeficient je definován následovně $\widehat{\phi}(p) = \int_0^1 \phi(x)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} px}dx$. Dokažme nyní vztah (3.1). Rozepsáním pravé strany vztahu (3.1), dostáváme

$$\widehat{\phi}(p)p^{d+1} = p^{d+1}\int_0^1 \phi(x)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}px}dx = p^{d+1}\int_0^1 \chi_n^{d+1}(x-\frac{j}{n})\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}px}dx$$

$$= p^{d+1}\int_{-\frac{j}{n}}^{1-\frac{j}{n}} \chi_n^{d+1}(y)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}p(y+\frac{j}{n})}dy$$

$$= p^{d+1}\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}p\frac{j}{n}}\int_{-\frac{j}{n}}^{1-\frac{j}{n}} \chi_n^{d+1}(y)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}py}dy = p^{d+1}\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}p\frac{j}{n}}\int_0^1 \chi_n^{d+1}(y)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}py}dy$$

$$= p^{d+1}\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}p\frac{j}{n}}\int_0^1\int_0^1 \chi_n^{d}(y-x_1)\chi_n^1(x_1)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}py}dx_1dy = \cdots =$$

$$= p^{d+1}\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}p\frac{j}{n}}\int_0^1 \dots \int_0^1 \chi_n^1(y-x_1-\cdots-x_d)\chi_n^1(x_d)\dots\chi_n^1(x_1)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}py}dx_d\dots dx_1dy$$

$$= p^{d+1}\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}p\frac{j}{n}}\cdot$$

$$\cdot \int_0^1 \int_{-x_1-\cdots-x_d}^{1-x_1-\cdots-x_d} \dots \int_{-x_1-\cdots-x_d}^{1-x_1-\cdots-x_d} \chi_n^1(z)\chi_n^1(x_d)\dots\chi_n^1(x_1)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}p(z+x_1+\cdots+x_d)}dx_d\dots dx_1dz$$

$$= p^{d+1}\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}p\frac{j}{n}}\int_0^1\int_0^1 \dots \int_0^1 \chi_n^1(z)\chi_n^1(x_d)\dots\chi_n^1(x_1)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}p(z+x_1+\cdots+x_d)}dx_d\dots dx_1dz$$

$$= p^{d+1}\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}p\frac{j}{n}}\left[\widehat{\chi_n^1}(p)\right]^{d+1} = \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}p\frac{j}{n}}\left[p\widehat{\chi_n^1}(p)\right]^{d+1}$$

$$= \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}p\frac{j}{n}}\left[p\int_0^1 \chi_n^1(x)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}px}dx\right]^{d+1}$$

$$= \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}p\frac{j}{n}}\left[pn\left(\int_0^{\frac{1}{2n}} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}px}dx + \int_{1-\frac{1}{2n}}^1 \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}px}dx\right)\right]^{d+1}$$

$$= \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}p\frac{j}{n}}\left[pn\left(\int_0^{\frac{1}{2n}} \cos 2\pi px + \mathrm{i}\sin 2\pi px dx + \int_{1-\frac{1}{2n}}^1 \cos 2\pi px + \mathrm{i}\sin 2\pi px dx\right)\right]^{d+1}$$

$$= \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}p\frac{j}{n}}\left[pn\left(\left[\frac{\sin 2\pi px}{2\pi p} - \mathrm{i}\frac{\cos 2\pi px}{2\pi p}\right]_0^{\frac{1}{2n}} + \left[\frac{\sin 2\pi px}{2\pi p} - \mathrm{i}\frac{\cos 2\pi px}{2\pi p}\right]_{1-\frac{1}{2n}}^1\right)\right]^{d+1}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} p \frac{j}{n}} \left[n \left(\frac{\sin \frac{\pi p}{n}}{2\pi} - \mathrm{i} \frac{\cos \frac{\pi p}{n}}{2\pi} - 0 + \mathrm{i} \frac{1}{2\pi} + \right.\right. \\
&+ \left.\left. 0 - \mathrm{i} \frac{1}{2\pi} - \frac{\sin 2\pi p (1 - \frac{1}{2n})}{2\pi} - \mathrm{i} \frac{\cos 2\pi p (1 - \frac{1}{2n})}{2\pi} \right) \right]^{d+1} \\
&= \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} p \frac{j}{n}} \left[n \frac{\sin \frac{\pi p}{n}}{\pi} \right]^{d+1} .
\end{aligned}
$$

Zde jsme využili toho, že funkce $\chi_n^{d+1}(x)$ jsou jedno-periodické.

Ke stejnému výsledku dojdeme i rozepsáním levé strany rovnosti (3.1). Postupně dostáváme

$$
\begin{aligned}
& (-1)^{l(d+1)} \widehat{\phi}(p+ln)(p+ln)^{d+1} \\
= \;& (-1)^{l(d+1)} (p+ln)^{d+1} \int_0^1 \phi(x) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}(p+ln)x} dx \\
= \;& (-1)^{l(d+1)} (p+ln)^{d+1} \int_0^1 \chi_n^{d+1}(x - \frac{j}{n}) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}(p+ln)x} dx \\
= \;& (-1)^{l(d+1)} (p+ln)^{d+1} \int_{-\frac{j}{n}}^{1-\frac{j}{n}} \chi_n^{d+1}(y) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}(p+ln)(y+\frac{j}{n})} dy \\
= \;& (-1)^{l(d+1)} (p+ln)^{d+1} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} p \frac{j}{n}} \int_{-\frac{j}{n}}^{1-\frac{j}{n}} \chi_n^{d+1}(y) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}(p+ln)(y)} dy \\
= \;& \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} p \frac{j}{n}} \left[\widehat{\chi_n^1} (-1)^l (p+ln) \right]^{d+1} \\
= \;& \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} p \frac{j}{n}} \left[(-1)^l (p+ln) n \left(\int_0^{\frac{1}{2n}} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}(p+ln)x} dx + \int_{1-\frac{1}{2n}}^1 \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}(p+ln)x} dx \right) \right]^{d+1} \\
= \;& \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} p \frac{j}{n}} \left[(-1)^l (p+ln) n \left(\int_0^{\frac{1}{2n}} \cos 2\pi(p+ln)x + \mathrm{i} \sin 2\pi(p+ln)x dx + \right.\right. \\
+ \;& \left.\left. \int_{1-\frac{1}{2n}}^1 \cos 2\pi(p+ln)x + \mathrm{i} \sin 2\pi(p+ln)x dx \right) \right]^{d+1}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} p \frac{j}{n}} \left[(-1)^l n \left(\left[\frac{\sin 2\pi(p+ln)x}{2\pi(p+ln)} - \mathrm{i}\frac{\cos 2\pi(p+ln)x}{2\pi(p+ln)} \right]_0^{\frac{1}{2n}} + \right.\right. \\
&+ \left.\left. \left[\frac{\sin 2\pi(p+ln)x}{2\pi(p+ln)} - \mathrm{i}\frac{\cos 2\pi px}{2\pi(p+ln)} \right]_{1-\frac{1}{2n}}^{1} \right) \right]^{d+1} \\
&= \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} p \frac{j}{n}} \left[(-1)^l n \left(\left[\frac{\sin \frac{\pi(p+ln)}{n}}{2\pi} - \mathrm{i}\frac{\cos \frac{\pi(p+ln)}{n}}{2\pi} - 0 + \mathrm{i}\frac{1}{2\pi} \right] \right.\right. \\
&+ \left.\left. \left[0 - \mathrm{i}\frac{1}{2\pi} - \frac{\sin 2\pi(p+ln)(1-\frac{1}{2n})}{2\pi} - \mathrm{i}\frac{\cos 2\pi(p+ln)(1-\frac{1}{2n})}{2\pi} \right] \right) \right]^{d+1} \\
&= \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} p \frac{j}{n}} \left[(-1)^l n \frac{\sin \frac{\pi(p+ln)}{n}}{\pi} \right]^{d+1} = \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} p \frac{j}{n}} \left[n \frac{\sin \frac{\pi p}{n}}{\pi} \right]^{d+1}.
\end{aligned}$$

Úpravou obou stran dostáváme stejný výraz a vztah (3.1) tedy platí. □

3.2 Vlastnosti Fourierových koeficientů splinových waveletů

K důkazu obdobného vztahu pro periodické splinové wavelety uvedeného v [S07] nejprve ukážeme vztahy mezi Fourierovými koeficienty škálových funkcí na dvou sousedních úrovních a pak odvodíme vztahy mezi Fourierovými koeficienty waveletů a škálové funkce.

Mějme škálovou funkci ϕ a wavelet ψ definované na $\mathbb{R}$. Jedno-periodické funkce jsou definované následovně

$$\phi_j^{\langle 0,1\rangle}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi(2^j(x-n)), \tag{3.2}$$

$$\psi_j^{\langle 0,1\rangle}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi(2^j(x-n)). \tag{3.3}$$

(3.4)

Funkce $\phi_j^{\langle 0,1\rangle}(x-k2^{-j})$ a $\psi_j^{\langle 0,1\rangle}(x-k2^{-j})$ pro $k=0,1,\ldots,2^j-1$ jsou lineárně nezávislé a tvoří báze prostorů $V_j^{\langle 0,1\rangle}$, resp. $W_j^{\langle 0,1\rangle}$ definovaných v předešlé kapitole. Pro funkci $\phi_j^{\langle 0,1\rangle}$ platí dilatační rovnice

$$\phi_j^{\langle 0,1\rangle}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k \phi_{j+1}^{\langle 0,1\rangle}(x-k2^{-j-1}), \tag{3.5}$$

a pro funkci $\psi_j^{\langle 0,1\rangle}$ platí vztah

$$\psi_j^{\langle 0,1\rangle}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k \phi_{j+1}^{\langle 0,1\rangle}(x-k2^{-j-1}), \tag{3.6}$$

kde mezi koeficienty platí vztah $g_k = (-1)^k h_{1-k}$.

Fourierova řada jedno-periodické $\phi_j^{\langle 0,1\rangle}$ má tvar

$$\phi_j^{\langle 0,1\rangle}(x) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \widehat{\phi}_j^{\langle 0,1\rangle}(p)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} px},$$

kde $\widehat{\phi}_j^{\langle 0,1\rangle}(p)$ jsou Fourierovy koeficienty definované předpisem

$$\widehat{\phi}_j^{\langle 0,1\rangle}(p) = \int_0^1 \phi_j^{\langle 0,1\rangle}(x)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} px}dx. \tag{3.7}$$

Vztah mezi Fourierovými koeficienty funkcí $\phi_j^{\langle 0,1\rangle}$ a $\phi_{j+1}^{\langle 0,1\rangle}$ odvodíme z dilatační rovnice (3.5).

$$\begin{aligned}
\sum_{p\in\mathbb{Z}} \widehat{\phi}_j^{\langle 0,1\rangle}(p)\mathrm{e}^{2\pi ipx} &= \phi_j^{\langle 0,1\rangle}(x) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k \phi_{j+1}^{\langle 0,1\rangle}(x - k2^{-j-1}) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k \left(\sum_{p\in\mathbb{Z}} \widehat{\phi}_{j+1}^{\langle 0,1\rangle}(p)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} p(x-k2^{-j-1})} \right) \\
&= \sum_{p\in\mathbb{Z}} \widehat{\phi}_{j+1}^{\langle 0,1\rangle}(p) \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} pk2^{-j-1}} \right) \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} px}.
\end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů dostaneme

$$\widehat{\phi}_j^{\langle 0,1\rangle}(p) = \widehat{\phi}_{j+1}^{\langle 0,1\rangle}(p) m_{j+1}(p), \tag{3.8}$$

kde $m_{j+1}(p) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} pk2^{-j-1}}$, což je funkce s periodou 2^{j+1}. Pro takto definovanou funkci platí, že

$$m_{j+1}(2p) = m_j(p) \tag{3.9}$$

a

$$m_{j+1}(2^j) = 0. \tag{3.10}$$

S využitím tohoto vztahu můžeme zformulovat a dokázat následující větu.

Věta 3.2.1. *Nechť $\phi_j^{\langle 0,1\rangle}$ označuje jistý prvek prostoru $V_j^{\langle 0,1\rangle} \equiv S_{n_j}^d$ jedno-periodických B-splinů řádu $d+1$, kde $n_j = 2^j$ a $\psi_j^{\langle 0,1\rangle}$je odpovídající splinový wavelet z prostoru $W_j^{\langle 0,1\rangle}$. Dále definujme množinu $\Lambda_{n_j} = \{p \in \mathbb{Z}; -\frac{n_j}{2} < p \leq \frac{n_j}{2}\}$. Pak pro Fourierovy koeficienty splinového waveletu $\psi_j^{\langle 0,1\rangle}$ z prostoru $W_j^{\langle 0,1\rangle}$ platí rovnost*

$$(-1)^{l(d+1)}\widehat{\psi}(p+ln)(p+ln)^{d+1} = \widehat{\psi}(p)p^{d+1}, \qquad l \in 2\cdot\mathbb{Z}, \quad \psi \in W_j, \quad p \in \Lambda_{n_j}, \tag{3.11}$$

kde množinou $2\cdot\mathbb{Z}$ rozumíme celá sudá čísla.

Důkaz. Stejně jako v případě škálových funkcí můžeme pro wavelet psát

$$\psi_j^{\langle 0,1\rangle}(x) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}_j^{\langle 0,1\rangle}(p)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}px},$$

kde $\widehat{\psi}_j^{\langle 0,1\rangle}(p)$ jsou Fourierovy koeficienty definované předpisem

$$\widehat{\psi}_j^{\langle 0,1\rangle}(p) = \int_0^1 \psi_j^{\langle 0,1\rangle}(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}px}dx.$$

Zároveň pro wavelet platí vztah (3.6). Z toho můžeme psát

$$\begin{aligned}
\sum_{p\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}_j^{\langle 0,1\rangle}(p)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}px} &= \psi_j^{\langle 0,1\rangle}(x) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k \phi_{j+1}^{\langle 0,1\rangle}(x - k2^{-j-1}) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k \sum_{p\in\mathbb{Z}} \widehat{\phi}_{j+1}^{\langle 0,1\rangle}(p)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}p(x-k2^{-j-1})} \\
&= \sum_{p\in\mathbb{Z}} \widehat{\phi}_{j+1}^{\langle 0,1\rangle}(p)\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}pk2^{-j-1}}\right)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}px}.
\end{aligned}$$

Porovnáním Fourierových koeficientů dostaneme

$$\begin{aligned}
\widehat{\psi}_j^{\langle 0,1\rangle}(p) &= \widehat{\phi}_{j+1}^{\langle 0,1\rangle}(p)\sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}pk2^{-j-1}} \\
&= \widehat{\phi}_{j+1}^{\langle 0,1\rangle}(p)\sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k h_{1-k} \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}pk2^{-j-1}} \\
&= \widehat{\phi}_{j+1}^{\langle 0,1\rangle}(p)\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{k\pi\mathrm{i}} h_{1-k} \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}pk2^{-j-1}} \\
&= \widehat{\phi}_{j+1}^{\langle 0,1\rangle}(p)\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}p(1-k)2^{-j-1}} \mathrm{e}^{(1-k)\pi\mathrm{i}} \\
&= \widehat{\phi}_{j+1}^{\langle 0,1\rangle}(p)\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}(1-p2^{-j})}\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}pk2^{-j-1}} \mathrm{e}^{-k\pi\mathrm{i}} \\
&= -\widehat{\phi}_{j+1}^{\langle 0,1\rangle}(p)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}p2^{-j-1}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}k(\frac{1}{2}-p2^{-j-1})} \\
&= -\widehat{\phi}_{j+1}^{\langle 0,1\rangle}(p)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}p2^{-j-1}}\overline{m_{j+1}(p-2^j)}.
\end{aligned}$$

Tedy pro $m_{j+1}(p) \neq 0$ můžeme psát

$$\widehat{\psi}_j^{\langle 0,1\rangle}(p) = \widehat{\phi}_j^{\langle 0,1\rangle}(p)m_{j+1}^{-1}(p)\left[-\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}p2^{-j-1}}\overline{m_{j+1}(p-2^j)}\right]. \tag{3.12}$$

Položme nyní $n = 2^j$ a $\Lambda_n = \{p \in \mathbb{Z}; -\frac{n}{2} < p \leq \frac{n}{2}\}$ jako ve vztahu (3.1) a označme $\widehat{\phi}_j^{\langle 0,1\rangle}(p) \equiv \widehat{\phi}(p)$. Pro $\Lambda_n = \{p \in \mathbb{Z}; -2^{j-1} < p \leq 2^{j-1}\}$ plyne, že $m_{j+1}(p) \neq 0$. Dále s využitím vztahu (3.1) můžeme psát

$$\begin{aligned} & (-1)^{l(d+1)}\widehat{\psi}_j^{\langle 0,1\rangle}(p+ln)(p+ln)^{d+1} = \\ = \;& (-1)^{l(d+1)}\widehat{\phi}_j^{\langle 0,1\rangle}(p+ln)(p+ln)^{d+1}m_{j+1}^{-1}(p+ln)\left[-\mathrm{e}^{\frac{-2\pi\mathrm{i}(p+ln)}{2^{j+1}}}\overline{m_{j+1}(p+ln-2^j)}\right]. \end{aligned}$$

Protože platí

$$\begin{aligned} m_{j+1}(p+ln) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(p+ln)k2^{-j-1}} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k \mathrm{e}^{-2\pi i(p)k2^{-j-1}}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(ln)k2^{-j-1}}, \end{aligned}$$

pro $n = 2^j$ dostaneme

$$m_{j+1}(p+ln) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(p)k2^{-j-1}}(-1)^{lk}.$$

Rozepíšeme-li stejně

$$\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(ln)k2^{-j-1}} = \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}lk},$$

dostáváme pro sudé l

$$\begin{aligned} (-1)^{l(d+1)}\widehat{\psi}_j^{\langle 0,1\rangle}(p+ln)(p+ln)^{d+1} &= \widehat{\phi}_j^{\langle 0,1\rangle}(p)p^{d+1}m_{j+1}^{-1}(p)\left[-\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}p2^{-j-1}}\overline{m_{j+1}(p-2^j)}\right] \\ &= \widehat{\psi}_j^{\langle 0,1\rangle}(p)p^{d+1}. \end{aligned}$$

Odtud již plyne, že požadovaná vlastnost (3.11) platí pro splinové wavelety. □

Kapitola 4

Qualokační metoda

4.1 Qualokační metoda pro B-spline lichého stupně

Qualokační metoda je metoda pro řešení hraničních integrálních rovnic na uzavřených hladkých křivkách. Tato metoda byla prvně odvozena ve druhé polovině osmdesátých let minulého století a je rozvíjena do současnosti. Zformulujeme nejprve řešený problém a pro lepší pochopení uvedeme ve stručnosti postupný rozvoj této teorie. Budeme pracovat s integrální rovnicí, kterou lze zapsat ve tvaru

$$\widetilde{L}z = \widetilde{f}, \tag{4.1}$$

kde $\widetilde{L}$ je integrální operátor na hladké křivce $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ a budeme předpokládat, že hledané řešení je ze Sobolelova prostoru H^t s normou

$$\|u\|_t^2 = |\widehat{u}(0)|^2 + \sum_{k \neq 0} |\widehat{u}(k)|^2 |k|^{2t}.$$

Známými metodami pro řešení tohoto typu rovnic jsou například kolokační metoda nebo Petrovova-Galerkinova metoda. Výhodou kolokační metody je její poměrně jednoduché použití. U této metody jsou však složitější problémy se stabilitou a superkonvergenční vlastnosti vykazuje jen ve speciálních případech. Oproti tomu v Petrovově-Galerkinově metodě je problematika stability jednodušší a také je podrobněji prozkoumána. Aplikace této metody však často vyžaduje další aproximaci. Qualokační metoda je metoda, která se snaží spojit výhody obou zmíněných metod. Jedná se vlastně o Petrovovu-Galerkinovu metodu, ve které je vnější integrál nahrazen speciálním, ale jednoduchým, kvadraturním pravidlem, aniž by došlo ke zhoršení konvergenčních vlastností oproti Petrovově-Galerkinově metodě. Speciálním případem qualokační metody je kolokační metoda.

V kolokační metodě hledáme $u_h^C \in S_h$ tak, že

$$Lu_h^C(x_j) = f(x_j), \qquad j = 0, 1, \ldots, n-1$$

kde x_j jsou dané kolokační body a prostory $S_h \subset H^s$ jsou aproximační prostory konečné dimenze, na kterých hledáme přibližné řešení.

V Petrovově-Galerkinově metodě hledáme takové $u_h^G \in S_h$, pro které platí

$$(Lu_h^G, \chi_h) = (f, \chi_h) \quad \text{pro} \quad \text{všechna} \quad \chi_h \in S_h',$$

kde $(\cdot,\cdot)$ označuje $L^2_{\langle 0,1\rangle}$ skalární součin $(f,g) = \int\limits_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$ a funkce χ_h jsou funkce z testového prostoru S_h'.

V qualokační metodě hledáme takové $u_h^Q \in S_h$,

$$\langle Lu_h^Q, \chi_h\rangle = \langle f, \chi_h\rangle, \qquad \forall \chi_h \in S_h', \tag{4.2}$$

kde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ označuje kvadraturní qualokační pravidlo dané obecně vztahem

$$\langle f, g\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} h_k \sum_{j=1}^{J} w_j (f\bar{g})(x_k + \xi_j h_k) \tag{4.3}$$

s parametry ξ_j a w_j pro $j = 1,2,\dots,J$ splňujícími $0 \le \xi_1 < \xi_2,\dots,\xi_J < 1$, $w_j > 0$, $\sum_j w_j = 1$ pro $j = 1,2,\dots,J$ a funkce χ_h jsou funkce z testujícího prostoru S_h'.

V našem případě budeme uvažovat hraniční integrální rovnice, ve kterých integrujeme přes hladkou křivku Γ, která je hranicí omezené oblasti $\Omega \subset R^2$. Zavedeme-li jedno-periodickou parametrizaci $\nu \in C^\infty$ křivky Γ, kde $\nu : \langle 0,1\rangle \to \Gamma$ s $|\nu'(x)| \neq 0$, převedeme uvažovanou integrální rovnici (4.1) na rovnici tvaru

$$(Lu)(x) = f(x), \qquad x \in \langle 0,1\rangle, \tag{4.4}$$

kde $u(x) = z(\nu(x))|\nu'(x)|$ je hledaná jedno-periodická funkce a $f = \widetilde{f}(\nu(x))$ je daná jedno-periodická funkce. Dále předpokládejme, že operátor L lze zapsat ve tvaru Fourierovy řady

$$(Lu)(x) = b\hat{u}(0) + \sum_{k\neq 0} |k|^\beta \hat{u}(k) \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}kx}, \tag{4.5}$$

kde β je reálný parametr, $b > 0$ a $\hat{u}(k)$ jsou Fourierovy koeficienty $\hat{u}(k) = \int\limits_0^1 u(x)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}kx}$. První qualokační kvadraturní pravidlo (viz [Slo88]) bylo odvozeno pro aproximační prostory S_h^d- prostory jedno-periodických B-splinů lichého stupně $d \ge 0$, $S_h^d \subset \mathbb{C}^{d-1}$, s uzly v bodech $x_j = jh$, $j = 0,1,\dots,n-1$, kde $n = \frac{1}{h}$ je kladné celé číslo. V tomto případě byl za prostor testových funkcí S_h' zvolen prostor trigonometrických polynomů $T_h = \mathrm{span}\{\mathrm{e}^{2\pi i p x} : -\frac{n}{2} < p \le \frac{n}{2}, p \in \mathbb{Z}\}$. Toto nejjednodušší quoalokační kvadraturní pravidlo, ve kterém jsou uvažovány pouze dva kvadraturní body - v počátku a středu každého intervalu $\langle x_j, x_{j+1})$ má tvar

$$Q_h u = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left[w_1 u(\frac{i}{n}) + w_2 u(\frac{i+1/2}{n})\right]. \tag{4.6}$$

Protože kvadraturní body jsou vybrány pevně, bude to volba váhových funkcí, která bude v tomto případě určovat qualokační kvadraturní pravidlo a zajišťovat dobré konvergenční vlastnosti této metody. Pokud zvolíme $w_1 = 1/3, w_2 = 2/3$, dostáváme klasické lichoběžníkové pravidlo. S volbou $w_1 = 0, w_2 = 1$ dostaneme kolokační metodu s kolokačními body ve středech intervalů (x_j, x_{j+1}); s volbou $w_1 = 1, w_2 = 0$ dostáváme kolokaci s kolokačními body v uzlech x_j.

Následující konvergenční věta (uvedená v [Slo88]) zaručuje existenci přibližného řešení na prostoru B-splinů lichého stupně a odhad chyby tohoto přibližného řešení v normě prostoru H^s. Konvergenční věta této nejjednodušší qualokační věty je zde uvedena i s důkazem (uvedeným též v [Slo88]), aby bylo zřetelněji vidět, které vlastnosti bázových funkcí aproximačních prostorů jsou pro stabilitu a konvergenci qualokační metody důležité.

Věta 4.1.1. *Nechť β je reálné číslo, nechť L je operátor definovaný jako v (4.5), nechť $d > \beta$ je libovolné, kladné, liché číslo. Nechť S_h^d je prostor B-splinů stupně d, $S_h' = T_h$ a nejjednodušší qualokační pravidlo je definované v (4.6) s váhami danými vzorci*

$$w_1 = \frac{2^{d-\beta} - 1}{2^{d+1-\beta} - 1} \tag{4.7}$$

a

$$w_2 = 1 - w_1.$$

Potom qualokační rovnice (4.2) se spojitou funkcí f je jednoznačně řešitelná pro nějaké $u_h \in S_h^d$. Navíc pro nějaká reálná čísla s, t splňující $s \leq t$, $s < d + 1/2$, $\beta + 1/2 < t$ a za předpokladu, že přesné řešení rovnice (4.4) leží v H^t, platí odhad

$$\|u - u_h\|_s \leq Ch^{\min(t-s, t-\beta, d+1-s, d+3-\beta)} \|u\|_t. \tag{4.8}$$

Pro $s = \beta - 2$ a pro $t = d + 3$ je tedy získán řád konvergence $O(h^{d+3-\beta})$. Pro po částech lineární spline $d = 1$ a pro integrální operátor s parametrem $\beta = -1$ dostáváme váhy tvaru $w_1 = 3/7, w_2 = 4/7$ a konvergenci řádu $O(h^5)$. Tedy stejný řád konvergence jako pro Galerkinovu aproximaci. (I když za cenu větších požadavků na hladkost přesného řešení.)

Důkaz. V důkazu se nejprve soustředíme na důkaz existence přibližného řešení. Z důkazu také vyplyne tvar vah w_1, w_2, uvedený v (4.7). Teprve poté se soustředíme na důkaz nerovnosti (4.8).
Označme indexovou množinu $\Lambda_n = \{p \in \mathbb{Z} : -\frac{n}{2} < p \leq \frac{n}{2}\}$ a prostor trigonometrických polynomů

$$T_h = \operatorname{span}\{\phi_p(x) = e^{2\pi i p x}, \quad p \in \Lambda_n\}.$$

V qualokační metodě tedy hledáme $u_h \in S_h^d$ tak, aby platilo

$$Q_h(\overline{\phi}_p L u_h) = Q_h(\overline{\phi}_p f), \quad p \in \Lambda_n, \tag{4.9}$$

kde Q_h označuje dvoubodové qualokační kvadraturní pravidlo definované v (4.6). Tento vztah můžeme přepsat za předpokladu, že přesné řešení u rovnice (4.4) je v prostoru H^t, do tvaru

$$Q_h(\overline{\phi}_p Lu_h) = Q_h(\overline{\phi}_p Lu), \quad p \in \Lambda_n. \tag{4.10}$$

Dosadíme-li vztah (4.5) do pravé strany této rovnice, dostáváme

$$Q_h(\overline{\phi}_p Lu) = \widehat{u}(0) Q_h(\overline{\phi}_p) + \sum_{k \neq 0} |k|^\beta \widehat{u}(k) Q_h(\overline{\phi}_p \phi_k). \tag{4.11}$$

(Suma přes k ve vztahu (4.5) konverguje absolutně. Totiž podle Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti můžeme psát

$$(\sum_{k\neq 0} |k|^\beta |\widehat{u}(k)|)^2 = (\sum_{k\neq 0} |k|^{\beta - t} |k|^t |\widehat{u}(k)|)^2 = \sum_{k \neq 0} |k|^{2(\beta - t)} \sum_{j \neq 0} |j|^{2t} |\widehat{u}(j)|^2 \le C \|u\|_t^2.$$

Poslední suma přes k konverguje, protože $t > \beta + 1/2$ a tedy platí poslední nerovnost).

Výraz $Q_h(\overline{\phi}_p \phi_k)$ na pravé straně (4.11) je roven nule pro k, které není rovno p modulo n. Platí totiž

$$\begin{aligned} Q_h(\overline{\phi}_p \phi_k) &= \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} w_1 \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i} t (k-p)}{n}} + w_2 \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}(t+1/2)(k-p)}{n}} \\ &= \left[\frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i} t (k-p)}{n}} \right] \left(w_1 + (1 - w_1) \mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}(k-p)}{n}} \right) \end{aligned} \tag{4.12}$$

Poslední suma tohoto výrazu je součet konečné geometrické řady s kvocientem $\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}(k-p)}{n}}$ a tento součet je roven 0, pokud $k - p \neq ln$, kde $l \in \mathbb{Z}$. Pro $k - p = ln$ je každý ze sčítanců roven jedné. Z tohoto vyplývá, že

$$Q_h(\overline{\phi}_p \phi_{p+ln}) = w_1 + (1 - w_1)(-1)^l, \qquad l \in \mathbb{Z}.$$

Označme pro jednoduchost $w \equiv w_1$ a $e_l(w) \equiv Q_h(\overline{\phi}_p \phi_{p+ln})$. Tedy

$$e_l(w) = w + (1 - w)(-1)^l, \qquad l \in \mathbb{Z}. \tag{4.13}$$

Je okamžitě vidět, že toto e_l je reálné a platí, že $|e_l| \le 1$ pokud $w \in \langle 0, 1 \rangle$.

Pravou stranu rovnice (4.10) můžeme tedy přepsat ve tvaru

$$Q_h(\overline{\phi}_p Lu) = \begin{cases} \widehat{u}(0) + \sum\limits_{l \in \mathbb{Z}, l \neq 0} |ln|^\beta \widehat{u}(ln) e_l, & p = 0, \\ \\ \sum\limits_{l \in \mathbb{Z}} |p + ln|^\beta \widehat{u}(p + ln) e_l, & p \in \Lambda_n, \quad p \neq 0. \end{cases} \tag{4.14}$$

Nyní zaměříme pozornost na levou stranu rovnice (4.10). Uvažme nejdříve, zda Lu_h existuje pro všechna x a tedy zda levá strana zmíněné rovnice je dobře definována. Užitím vztahu (4.5) dostaneme

$$Lu_h(x) = \widehat{u}_h(0) + \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} |k|^\beta \widehat{u}_h(k) \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k x}. \tag{4.15}$$

Nyní užijeme vztah pro Fourierovy koeficienty B-splinů, který je uveden a dokázán v předchozí kapitole. Pro Fourierovy koeficienty B-splinů lichého stupně platí

$$(p+ln)^{d+1}\widehat{u}_h(p+ln) = p^{d+1}\widehat{u}_h(p) \qquad p,l \in \mathbb{Z}. \tag{4.16}$$

Tedy

$$\widehat{u}_h(p+nl) = \begin{cases} 0, & p=0, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad l \neq 0, \\ \\ \frac{p^{d+1}}{(p+ln)^{d+1}}\widehat{u}_h(p) & p \in \Lambda_n, \quad p \neq 0, \quad l \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{4.17}$$

Dosadíme-li tento vztah do (4.15) a rozepíšeme-li v tomto vztahu sumu přes k, kde $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$, jako dvě sumy přes p a přes l, kde $p \in \Lambda_n$, $p \neq 0$ a $l \in \mathbb{Z}$, dostaneme

$$Lu_h = \widehat{u}_h(0) + \sum_{p\in\Lambda_n, p\neq 0} p^{d+1}\widehat{u}_h(p) \sum_{l\in\mathbb{Z}} |p+ln|^{\beta-d-1} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}(p+ln)x}. \tag{4.18}$$

V tomto vztahu suma přes l konverguje absolutně, protože předpokládáme, že $\beta < d$. Tedy Lu_h existuje pro všechna x a levá strana rovnice (4.10) je dobře definována. Levou stranu rovnice (4.10) můžeme přepsat s využitím (4.12), s využitím označení $e_l(w) \equiv Q_h(\overline{\phi}_p \phi_{p+ln})$ a (4.17), do tvaru

$$Q_h(\overline{\phi}_p Lu_h) = \begin{cases} \widehat{u}_h(0), & p=0, \\ \\ p^{d+1}\widehat{u}_h(p) \sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} |p+ln|^{\beta-d-1} e_l, & p \in \Lambda_n, \quad p \neq 0. \end{cases} \tag{4.19}$$

Nyní definujme funkci

$$D_w(y) = |y|^{\alpha} \sum_{l\in Z} |y+2l|^{-\alpha} e_l(w), \qquad |y| \leq 1. \tag{4.20}$$

Jestliže položíme $y = \frac{2p}{n}$ a $\alpha = d+1-\beta > 1$, můžeme (4.19) přepsat do tvaru

$$Q_h(\overline{\phi}_p Lu_h) = \begin{cases} \widehat{u}_h(0), & p=0, \\ \\ |p|^{\beta} D_w(\frac{2p}{n})\widehat{u}_h(p), & p \in \Lambda_n, \quad p \neq 0. \end{cases} \tag{4.21}$$

Vlastnosti této funkce $D_w(y)$ budou důležité pro stabilitu a konvergenci qualokační metody. Vyšetřeme nyní vlastnosti této funkce $D_w(y)$. S využitím vztahu (4.13) můžeme psát

$$D_w(y) = X(y)w + Y(y)(1-w), \tag{4.22}$$

kde

$$X(y) = |y|^{\alpha} \sum_{l\in\mathbb{Z}} |y+2l|^{-\alpha}, \qquad |y| \leq 1, \tag{4.23}$$

a

$$Y(y) = |y|^{\alpha} \sum_{l\in\mathbb{Z}} |y+2l|^{-\alpha}(-1)^l. \tag{4.24}$$

Vlastnosti $Y(y)$ jsou zformulovány v následujícím lemmatu.

Lemma 4.1.1. *Pro $\alpha > 1$ je funkce $Y : \langle -1, 1\rangle \to \mathbb{R}$ definována v (4.24) sudá, spojitá, nezáporná a je na intervalu $(-1, 1)$ kladná, klesající na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ a platí $Y(0) = 1$ a $Y(1) = 0$.*

Důkaz. Nejprve dokážeme sudost funkce Y:

$$Y(-y) = |-y|^{\alpha} \sum_{l \in Z} |-y + 2l|^{-\alpha}(-1)^l = |y|^{\alpha} \sum_{l \in Z} |y - 2l|^{-\alpha}(-1)^l$$

$$Y(-y) = |y|^{\alpha} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |y + 2k|^{-\alpha}(-1)^k = Y(y).$$

Protože řada v předpisu funkce $Y(y)$ konverguje stejnoměrně, můžeme jí derivovat člen po členu. Spojitost funkce $Y(y)$ vyplývá z toho, že existuje konečná klasická derivace této funkce v každém bodě. Tato funkce je řádu $O(|y|^{\alpha})$. Derivací této funkce pro $y \in \langle 0, 1\rangle$, dostáváme

$$Y'(y) = \alpha y^{\alpha-1} \left[\sum_{l=1}^{\infty} (y + 2l)^{-\alpha}(-1)^l + \sum_{l=1}^{\infty} (-y + 2l)^{-\alpha}(-1)^l \right]$$

$$\begin{aligned}
&+ \quad y^{\alpha}(-\alpha) \left[\sum_{l=1}^{\infty} (y + 2l)^{-\alpha-1}(-1)^l - \sum_{l=1}^{\infty} (-y + 2l)^{-\alpha-1}(-1)^l \right] \\
&= \quad \alpha y^{\alpha-1} \left[\sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \left(\frac{y + 2l - y}{(y + 2l)^{\alpha+1}} + \frac{-y + 2l + y}{(-y + 2l)^{\alpha+1}} \right) \right] \\
&= \quad 2\alpha y^{\alpha-1} \left[\sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l l \left(\frac{1}{(y + 2l)^{\alpha+1}} + \frac{1}{(-y + 2l)^{\alpha+1}} \right) \right] \\
&\leq \quad 2\alpha y^{\alpha-1} \left[\sum_{l=1}^{2} (-1)^l l \left(\frac{1}{(y + 2l)^{\alpha+1}} + \frac{1}{(-y + 2l)^{\alpha+1}} \right) \right] < 0.
\end{aligned}$$

Protože je derivace této funkce záporná pro každé $y \in \langle 0, 1\rangle$, funkce je na tomto intervalu klesající. Můžeme ji rozepsat takto

$$Y(y) = \sum_{l \in Z} \frac{|y|^{\alpha}}{|y + 2l|^{\alpha}}(-1)^l = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{|y + 2l - 2l|}{|y + 2l|} \right)^{\alpha} (-1)^l + \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{|y - 2l + 2l|}{|y - 2l|} \right)^{\alpha} (-1)^l$$

$$= 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \left(|1 + \frac{-2l}{y + 2l}| \right)^{\alpha} (-1)^l + \sum_{l=1}^{\infty} \left(|1 + \frac{2l}{y - 2l}| \right)^{\alpha} (-1)^l$$

Když do tohoto vztahu dosadíme $y = 0$, dostáváme

$$Y(0) = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} (|1 - 1|)^{\alpha} (-1)^l + \sum_{l=1}^{\infty} (|1 - 1)^{\alpha} (-1)^l = 1.$$

Pro $y = 1$ můžeme psát

$$Y(1) = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|1+2l|} \right)^{\alpha} (-1)^l + \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|1-2l|} \right)^{\alpha} (-1)^l$$
$$= 1 + \left[\frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{|-1|^\alpha} \right] (-1) + \left[\frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{|-3|^\alpha} \right] - \left[\frac{1}{7^\alpha} + \frac{1}{|-5|^\alpha} \right] + ... = 0$$

□

Dále si stačí uvědomit, že

$$X(y) = 1 + |y|^\alpha \sum_{l \in \mathbb{Z}, l \neq 0} |y + 2l|^{-\alpha} \geq 1, \qquad |y| \leq 1.$$

Nyní už můžeme formulovat větu o stabilitě qualokační metody, která je uvedena v [Slo88] a je přímým důsledkem tohoto lemmatu.

Věta 4.1.2. *Nechť $\beta < d$. Pro jakékoli $w \in \langle 0, 1 \rangle$ funkce $D_w(y)$ definovaná ve vzorci (4.20) splňuje*

$$D_w(y) \geq w, \qquad |y| \leq 1. \tag{4.25}$$

A jestliže $w = 0$, platí $D_0(1) = 0$.

Rozepsáním funkce $D_w(y)$ do tvaru

$$D_w(y) = 1 + |y|^\alpha \sum_{l=1}^{\infty} \left[(2l - y)^{-\alpha} + (2l + y)^{-\alpha} \right] e_l(w), \qquad |y| \leq 1, \tag{4.26}$$

a jelikož suma v tomto vztahu konverguje stejnoměrně, máme reálnou, spojitou, sudou funkci na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$, pro kterou platí $D_w(0) = 1$. Podívejme se blíže na chování této funkce v okolí 0. Rozvinutím funkce $(2l - y)^{-\alpha} + (2l + y)^{-\alpha}$ do Taylorovy řady v nule, kde bereme v úvahu pouze první tři členy, dostaneme

$$\begin{aligned} (2l - y)^{-\alpha} + (2l + y)^{-\alpha} &= (2l)^{-\alpha} + (2l)^{-\alpha} + \left[(-\alpha)(2l)^{-\alpha-1}(-1) + (-\alpha)(2l)^{-\alpha-1} \right] y \\ &+ \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} \left[(2l - \theta y)^{-\alpha-2} + (2l + \theta y) \right] y^2 \\ &= 2^{1-\alpha} l^{-\alpha} + + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} \left[(2l - \theta y)^{-\alpha-2} + (2l + \theta y) \right] y^2, \end{aligned}$$

kde $0 < \theta(y) < 1$. Funkci $D_w(y)$ můžeme zapsat ve tvaru

$$D_w(y) = 1 + 2^{1-\alpha} b_w(\alpha) |y|^\alpha + O(|y|^{\alpha+2}), \tag{4.27}$$

kde

$$b_w(\alpha) = \sum_{l=1}^{\infty} l^{-\alpha} e_l(w) = \sum_{l=1}^{\infty} l^{-\alpha} \left[w + (1 - w)(-1)^l \right] = \left[\zeta(\alpha) + \psi(\alpha) \right] w - \psi(\alpha). \tag{4.28}$$

Zde ζ značí Riemannovu zeta funkci $\zeta(\alpha) = \sum\limits_{l=1}^{\infty} l^{-\alpha}$ a ψ je definováno jako

$$\psi(\alpha) = \sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l=1}l^{-\alpha} = 1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \cdots = (1-2^{1-\alpha})\zeta(\alpha).$$

Dosazením tohoto vztahu do (4.28), dostáváme

$$b_w(\alpha) = \left[(2-2^{1-\alpha})w - (1-2^{1-\alpha})\right]\zeta(\alpha). \tag{4.29}$$

Pokud nyní vezmeme w tak, aby se $b_w(\alpha) = 0$, funkce $D_w(y) - 1$ bude řádu $O(|y|^{\alpha+2})$. Tento předpoklad splňují váhy tvaru

$$w = \frac{1-2^{1-\alpha}}{2-2^{1-\alpha}}.$$

A připomeneme-li, že $\alpha = d + 1 - \beta > 1$, dostáváme právě vyjádření váhy w, které je uvedeno v (4.7), totiž

$$w = \frac{2^{d-\beta}-1}{2^{d+1-\beta}-1}. \tag{4.30}$$

S touto volbou váhy w, je funkce $D_w(y) - 1$ řádu $O(|y|^{d+3-\beta})$(pro malá y). S každou jinou volbou váhy w, je funkce $D_w(y) - 1$ řádu $O(|y|^{d+1-\beta})$. Pro tuto volbu vah můžeme dokonce získat silnější odhad zezdola funkce $D_w(y)$, který je zformulován do další věty o stabilitě qualokační metody

Věta 4.1.3. *Nechť $\beta < d$ a váha w je dána předpisem (4.30). Potom funkce $D_w(y)$, daná vztahem (4.20), kde $\alpha = d + 1 - \beta$ a $e_l(w) = w + (1-w)(-1)^l$, splňuje*

$$D_w(y) \geq 1 - 2^{\beta-d-1} > \frac{1}{2}, \qquad |y| \leq 1. \tag{4.31}$$

Důkaz. Důkaz této věty je uveden v [Slo88]. □

Nyní se vraťme k důkazu konvergenční věty (4.1.1). Dosazením vztahů (4.21) a (4.14) do obou stran rovnice (4.10), dostaneme

$$\widehat{u}_h(0) = \widehat{u}(0) + \sum_{l\in\mathbb{Z}, l\neq 0} |ln|^\beta \widehat{u}(ln)e_l, \qquad p = 0, \tag{4.32}$$

a

$$|p|^\beta D(\frac{2p}{n})\widehat{u}_h(p) = |p|^\beta \widehat{u}(p) + \sum_{l\in\mathbb{Z}, l\neq 0} |p+ln|^\beta \widehat{u}(p+ln)e_l, \quad p \neq 0, \quad p \in \Lambda_n, \tag{4.33}$$

kde $|e_l| \leq 1$. Poněvadž $D(\frac{2p}{n}) \neq 0$ pro $p \neq 0, p \in \Lambda_n$, tyto rovnice s neznámou $\widehat{u}_h(p)$ pro všechna $p \in \Lambda_n$ jsou jednoznačně řešitelné. Ze vztahu (4.16) můžeme jednoznačně dopočítat $\widehat{u}_h(p+ln)$ pro $p \in \Lambda_n$, $l \in \mathbb{Z}$. Tyto Fourierovy koeficienty určují jednoznačně přibližné řešení u_h pro každou spojitou funkci f na pravé straně. Nyní přejděme k ověření vztahu (4.8). Uvažujme $s < d + \frac{1}{2}$ a odhadněme rozdíl $u_h - u$ v normě prostoru H^s,

$$\begin{aligned} \|u_h - u\|_s^2 = |\widehat{u}_h(0) - \widehat{u}(0)|^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z},k\neq 0} |k|^{2s}|\widehat{u}_h(k) - \widehat{u}(k)|^2 \leq \\ |\widehat{u}_h(0) - \widehat{u}(0)|^2 + 2\sum_{k\notin\Lambda_n} |k|^{2s}|\widehat{u}(k)|^2 + \\ 2\sum_{k\notin\Lambda_n} |k|^{2s}|\widehat{u}_h(k)|^2 + \sum_{p\in\Lambda_n,p\neq 0} |p|^{2s}|\widehat{u}_h(p) - \widehat{u}(p)|^2. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Tyto čtyři výrazy postupně odhadneme.

$$|\widehat{u}_h(0) - \widehat{u}(0)|^2 = |\sum_{l\in\mathbb{Z},l\neq 0} |ln|^\beta \widehat{u}(ln)e_l|^2 \leq n^{2(\beta-t)} \left(\sum_{l\in\mathbb{Z},l\neq 0} |l|^{\beta-t}|ln|^t\widehat{u}(ln) \right)^2$$

$$\leq n^{2(\beta-t)} \sum_{l\in\mathbb{Z},l\neq 0} |l|^{2(\beta-t)} \sum_{m\in\mathbb{Z},m\neq 0} |mn|^{2t}|\widehat{u}(mn)|^2.$$

Poslední nerovnost platí na základě Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti. Protože podle předpokladu $\beta + \frac{1}{2} < t$, první suma přes l konverguje, a tedy pro první člen (4.34) dostáváme odhad

$$|\widehat{u}_h(0) - \widehat{u}(0)|^2 \leq Cn^{2(\beta-t)} \parallel u \parallel_t^2 = Ch^{2(t-\beta)} \parallel u \parallel_t^2 . \tag{4.35}$$

Uvědomíme-li si, že $s \leq t$ a že $|k|$ není nikdy menší než $\frac{n}{2}$ pro druhý člen (4.34), dostaneme odhad

$$2\sum_{k\notin\Lambda_n} |k|^{2s}|\widehat{u}(k)|^2 = 2\sum_{k\notin\Lambda_n} |k|^{2(s-t)}|k|^{2t}|\widehat{u}(k)|^2 \leq Cn^{2(s-t)}\|u\|_t^2. \tag{4.36}$$

S využitím vztahu (4.16) můžeme třetí člen v (4.34) rozepsat následovně

$$\begin{aligned} 2\sum_{k\notin\Lambda_n} |k|^{2s}|\widehat{u}_h(k)|^2 = 2\sum_{p\ \in\Lambda_n} \sum_{l\in\mathbb{Z},l\neq 0} |\ p + ln\ |^2|\ \widehat{u}_h(p+ln)\ |^2 = \\ = 2\sum_{p\in\Lambda_n,p\neq 0} p^{2(d+1)}\ |\ \widehat{u}_h(p)\ |^2 \sum_{l\in\mathbb{Z},l\neq 0} |\ p + ln\ |^{2(s-d-1)} . \end{aligned} \tag{4.37}$$

Protože podle předpokladu věty (4.1.1) $s < d + \frac{1}{2}$, poslední suma v (4.37) konverguje. V dalším užijeme následující odhad. Pro $\theta \in \langle -1, 1\rangle$ a $r < -1$ platí

$$\begin{aligned} \sum_{l\in\mathbb{Z},l\neq 0} |\theta + 2l|^r = \sum_{l=1}^{\infty} |\theta + 2l|^r + \sum_{l=1}^{\infty} |\theta - 2l|^r \leq \sum_{l=1}^{\infty} |1 + 2l|^r + \sum_{l=1}^{\infty} |-1-2l|^r \leq \\ \leq \sum_{l=1}^{\infty} 2\frac{1}{|1+2l|^{-r}} \leq C(r). \end{aligned} \tag{4.38}$$

S využitím tohoto odhadu a vztahu (4.16) můžeme psát,

$$\sum_{l\in\mathbb{Z},l\neq 0} |p + ln|^{2(s-d-1)} = \left(\frac{n}{2}\right)^{2(s-d-1)} \sum_{l\in\mathbb{Z},l\neq 0} \left|\frac{2p}{n} + 2l\right|^{2(s-d-1)} \leq Cn^{2(s-d-1)}.$$

Třetí člen v (4.34), který byl rozepsán v (4.37), můžeme s užitím předchozího odhadu, dále vztahu (4.33) a Věty (4.1.3) odhadnout následovně

$$2\sum_{k\notin\Lambda_n}|k|^{2s}|\widehat{u}_h(k)|^2 \le Cn^{2(s-d-1)}\sum_{p\notin\Lambda_n,p\neq 0}p^{2(d+1)}\mid\widehat{u}_h(p)\mid^2$$

$$\le Cn^{2(s-d-1)}\sum_{p\notin\Lambda_n,p\neq 0}\Big[\mid\widehat{u}_h(p)\mid^2 \tag{4.39}$$

$$+\mid p\mid^{-2\beta}\big(\sum_{l\in\mathbb{Z},l\neq 0}\mid p+ln\mid^{\beta}\mid\widehat{u}(p+ln)\mid)^2\Big]. \tag{4.40}$$

Nyní pro $p\notin\Lambda_n, p\neq 0$ dostáváme

$$p^{2(d+1)}|\widehat{u}(p)|^2 = |p|^{2(d+1-t)}|p|^{2t}|\widehat{u}(p)|^2 \le Cn^{2(d+1-\tau)}|p|^{2t}|\widehat{u}(p)|^2, \tag{4.41}$$

kde $\tau-\min(d+1,t)$. Dále za předpokladu $\beta+\frac{1}{2}<t$ a užitím Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti a (4.38), můžeme psát

$$\sum_{l\in\mathbb{Z},l\neq 0}|p+ln|^{\beta}|\widehat{u}(p+ln)|)^2 \le \sum_{\in\mathbb{Z},m\neq 0}|p+mn|^{2(\beta-t)}\sum_{l\in\mathbb{Z},l\neq 0}|p+ln|^{2t}|\widehat{u}(p+ln)|^2 \le$$

$$\le Cn^{2(\beta-t)}|p+ln|^{2t}|\widehat{u}(p+ln)|^2. \tag{4.42}$$

Užitím vztahů (4.41), (4.42) a (4.39), dostáváme odhad pro třetí člen (4.34)

$$2\sum_{k\notin\Lambda_n}|k|^{2s}|\widehat{u}_h(k)|^2 \le Cn^{2(s-\tau)}\|u\|_t^2 + Cn^{2(s-\tau)}\|u\|_t^2 \le Cn^{2(s-\tau)}\|u\|_t^2. \tag{4.43}$$

Poslední čtvrtý člen v (4.34) hraje podstatnou roli při odhadu konvergence. Užitím vztahu (4.33), můžeme psát

$$\widehat{u}_h(p)-\widehat{u}(p) = D\left(\frac{2p}{n}\right)^{-1}[(1-D(\frac{2p}{n}))\widehat{u}(p)+|p|^{-\beta}\sum_{l\in\mathbb{Z},l\neq 0}|p+ln|^{\beta}\widehat{u}(p+ln)e_l]. \tag{4.44}$$

Vzhledem ke speciální volbě vah, odhadu funkce $D_w(y)$ a vztahu (4.42), platí

$$|\widehat{u}_h(p)-\widehat{u}(p)|^2 \le C\left|\frac{p}{n}\right|^{2(d+3-\beta)}|\widehat{u}(p)|^2 + C|p|^{-2\beta}n^{2(\beta-t)}\sum_{l\in\mathbb{Z},l\neq 0}|p+ln|^{2t}|\widehat{u}(p+ln)|^2. \tag{4.45}$$

A tudíž

$$\sum_{p\notin\Lambda_n,p\neq 0}p^{2s}\mid\widehat{u}_h(p)-\widehat{u}(p)\mid^2 = Cn^{2(\beta-d-3)}\sum_{p\notin\Lambda_n,p\neq 0}|p|^{2(s-t+d+3-\beta}|p|^{2t}|\widehat{u}(p)|^2 +$$

$$Cn^{2(\beta-t)}\sum_{p\notin\Lambda_n,p\neq 0}|p|^{2(s-\beta}\sum_{l\in\mathbb{Z},l\neq 0}|p+ln|^{2t}|\widehat{u}(p+ln)|^2.$$

A protože $|p|$ je omezeno $\frac{n}{2}$, dostáváme odhad čtvrtého členu (4.34)

$$\sum_{p\notin\Lambda_n,p\neq 0}p^{2s}\mid\widehat{u}_h(p)-\widehat{u}(p)\mid^2 \le Cn^{-2\gamma}\|u\|_t^2 + Cn^{-2\delta}\|u\|_t^2 \le Cn^{-2\alpha}\|u\|_t^2, \tag{4.46}$$

kde

$$\begin{aligned}\gamma &= \min(t-s, d+3-\beta),\\ \delta &= \min(t-s, t-\beta),\\ \alpha &= \min(t-s, t-\beta, d+3-\beta).\end{aligned}$$

Odhad (4.8) ve větě (4.1.1) je přímým důsledkem odhadů všech čtyř členů ve vztahu (4.34). A tím je důkaz věty (4.1.1) ukončen. □

4.2 Qualokační metoda pro B-spline sudého stupně

Qualokační metoda pro stejnou třídu hraničních integrálních rovnic byla poté odvozena i pro aproximační prostory, za které byly vzaty prostory B-splinů sudého stupně [SloWen89]. Prostor testových funkcí byl zvolen jako v předchozím případě prostor trigonometrických polynomů $T_h = \mathrm{span}\{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}px} : -\frac{n}{2} < p \le \frac{n}{2}, p \in \mathbb{Z}\}$. I zde bylo uvažováno dvoubodové qualokační pravidlo. Toto qualokační pravidlo lze obecně vyjádřit ve tvaru

$$Q_h u = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left[w_1 u(\frac{i+\xi_1}{n}) + w_2 u(\frac{i+\xi_2}{n})\right], \tag{4.47}$$

kde $0 \le \xi_1 < \xi_2 < 1$ a $w_1 + w_2 = 1$. Pokud zvolíme $\xi_1 = 0$ a $\xi_2 = \frac{1}{2}$, dostáváme qualokační pravidlo (4.6). Uveďme konvergenční větu qualokační metody pro spliny sudého stupně.

Věta 4.2.1. *Nechť β je reálné číslo a nechť L je operátor definovaný (4.5). Nechť $d > \beta - \frac{1}{2}$ je nezáporné sudé číslo a nechť S_h^d je prostor B-splinů stupně d s uzly v bodech $x_j = jh$. Nechť $T_h = \mathrm{span}\{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}px} : -\frac{n}{2} < p \le \frac{n}{2}, \quad p \in \mathbb{Z}\}$ je prostor trigonometrických funkcí a Q_h je kvadraturní pravidlo dané v (4.47) s parametry splňujícími $0 < w_2 \le 1$, $w_1 = 1 - w_2$, $0 < \xi_2 < 1$ a $0 \le \xi_1 < 1$. Potom qualokační rovnice (4.2), kde f je libovolná spojitá funkce, je jednoznačně řešitelná pro $u_h \in S_h^d$.*

Dále předpokládejme, že pro reálná čísla s a t platí $s \le t$, $s < d + \frac{1}{2}$, $\beta + \frac{1}{2} < t$ a že řešení u rovnice (4.4) je z prostoru H^t.

a) Pro $\beta \le s$ a $t \le d+1$ platí odhad

$$\|u_h - u\|_s \le C h^{t-s}\|u\|_t. \tag{4.48}$$

b) Jestliže v kvadraturním pravidle platí $w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$ a $\xi_2 = 1 - \xi_1$, potom platí odhad

$$\|u_h - u\|_s \le C h^{\min(t-s, t-\beta, d+1-s, d+2-\beta)}\|u\|_t. \tag{4.49}$$

c) *Jestliže v kvadraturním pravidle platí* $w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$ *a* $\xi_2 = 1 - \xi_1$ *a jestliže* ξ_1 *je nejmenší kladný nulový bod funkce* $G_{d+2-\beta}$*, kde*

$$G_\gamma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} \cos 2\pi nx, \tag{4.50}$$

potom platí odhad

$$\|u_h - u\|_s \leq Ch^{\min(t-s,t-\beta,d+1-s,d+4-\beta)}\|u\|_t. \tag{4.51}$$

Část a) v této větě nám pro $s = \beta$ a pro $t = d+1$ dává stejný odhad jako kolokační metoda pro stejný typ hraničních integrálních rovnic. Totiž

$$\|u_h - u\|_\beta \leq Ch^{d+1-\beta}\|u\|_{d+1}. \tag{4.52}$$

Za předpokladů symetrie kvadraturního pravidla vyjádřených ve druhé části věty za [b)], můžeme dostat vyšší řád konvergence (o jednu mocninu h) ve vhodné negativní normě a za předpokladů vyšší hladkosti řešení u. Tedy

$$\|u_h - u\|_{\beta-1} \leq Ch^{d+2-\beta}\|u\|_{d+2}. \tag{4.53}$$

Třetí část věty nám za předpokladu speciální volby parametru ξ_1 dává nejvyšší řád konvergence. Samozřejmě za cenu vyšší hladkosti přesného řešení u. V tomto případě dostáváme odhad

$$\|u_h - u\|_{\beta-3} \leq Ch^{d+4-\beta}\|u\|_{d+4}. \tag{4.54}$$

Tedy pro po částech konstantní spliny (d=0) a pro integrální operátor s $\beta = -1$, dostáváme konvergenci $O(h^5)$. To je o dvě mocniny h vyšší konvergenci než ve stejném případě dává Galerkinova metoda. I když za cenu větších požadavků na přesné řešení.

Důkaz. Důkaz této věty pro značnou rozsáhlost, ale i podobnost jako v předchozím případě splinů lichého stupně nebudeme uvádět. Soustředíme se jen na hlavní myšlenky důkazu. Přesný důkaz je uveden v [SloWen89]. Stejně jako v důkaze konvergenční věty (4.1.1) qualokační metody pro spliny lichého stupně se porovnáním obou stran rovnice (4.9) s využitím vlastnosti (4.16) Fourierových koeficientů B-splinů dokáže, že obě strany rovnice (4.9) jsou dobře definovány a levou stranu této rovnice je možno rozepsat do tvaru

$$Q_h(\overline{\varphi}_p L u_h) = \begin{cases} \widehat{u}_h(0), & p = 0, \\ \\ p^\beta \widehat{u}_h(p) D(\frac{2p}{n}), & p \in \Lambda_n, p \neq 0, \end{cases} \tag{4.55}$$

kde

$$D(y) = 1 + \mathrm{sign}(y)|y|^\alpha E(y), \qquad y \in \langle -1, 1\rangle, \tag{4.56}$$

a

$$E(y) = \sum_{l=1}^{\infty} [(2l+y)^{-\alpha} e_l - (2l-y)^{-\alpha} e_{-l}], \qquad y \in \langle -1, 1\rangle, \tag{4.57}$$

a kde $\alpha = d + 1 - \beta > \frac{1}{2}$ a $e_l = w_1 \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} l \xi_1} + w_2 \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} l \xi_2}$.
Vlastnosti funkce $D(y)$ jsou podstatné pro stabilitu a řád konvergence této metody. V [SloWen89] je postupně dokázáno, že

1) Pro $w_1, w_2 \geq 0$ a libovolné $\xi_1, \xi_2 \in \langle 0, 1\rangle$ funkce $D(y)$ definovaná v (4.56), platí

$$\begin{aligned} ReD(y) &\geq (1 - 3^{-\alpha})\,[w_1(1 - \max(\cos 2\pi\xi_1, 0)) \\ &+ w_2(1 - \max(\cos 2\pi\xi_2, 0))] \quad y \in \langle -1, 1\rangle. \end{aligned}$$

2) Jestliže v kvadraturním pravidle platí $w_1 = 1, w_2 = 0$ a $\xi_1 = 0$, potom $D(\pm 1) = 0$

Dále je zde pro funkci $E(y)$ za předpokladu $w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$ a $\xi_2 = 1 - \xi_1$ dokázáno, že platí

$$E(y) = -\alpha 2^{-\alpha} y \sum_{l=1}^{\infty} l^{-1-\alpha} \cos 2\pi\xi_1 l$$

$$-\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{6} y^3 \sum_{l=1}^{\infty} [(2l + \theta y)^{-\alpha-3} + (2l - \theta y)^{-\alpha-3}] \cos 2\pi\xi_1 l.$$

Z tohoto už je dobře vidět, že navíc za předpokladu, že ξ_1 je nejmenší kladný nulový bod funkce $G_{\alpha+1}$, kde funkce G_γ je definována v (4.50) dostáváme odhad

$$|D(y) - 1| \leq C|y|^{\alpha+3},$$

kde konstanta C závisí na α, ale nezávisí na y. □

Uveďme ještě některé důležité vlastnosti funkce G_γ pro $x \in \mathbb{R}$ a $\gamma > 1$.
Z toho, že $\gamma > 1$ vyplývá, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} \cos 2\pi n x$ je stejnoměrně konvergentní a tedy funkce G_γ je spojitá, sudá, a jedno-periodická na $\mathbb{R}$. Dále platí, že

$$G_\gamma(0) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} = \zeta(\gamma) > 0,$$

kde funkce $\zeta(\gamma)$ je Riemannova zeta funkce, a

$$G_\gamma(\frac{1}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\gamma} = -(1 - 2^{1-\gamma})\zeta(\gamma) < 0.$$

A tedy, protože spojitá funkce na intervalu $(0, \frac{1}{2})$ mění své znaménko, má v tomto intervalu alespoň jeden nulový bod.
Pokud γ je sudé, platí vztah

$$G_\gamma(x) = (-1)^{1+\frac{\gamma}{2}} \frac{2^{\gamma-1}\pi^\gamma}{\gamma!} B\gamma(x), \qquad x \in \langle 0, 1\rangle,$$

kde $B_\gamma(x)$ jsou Bernoulliho polynomy definované

$$B_\gamma(x) = \sum_{k=0}^{\gamma} \binom{\gamma}{k} B_k x^{\gamma-k},$$

kde B_k jsou Bernoulliho čísla, která jsou definována jako koeficienty v rozvoji funkce $\frac{t}{e^t-1}$, tedy

$$\frac{t}{e^t-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}.$$

Definice a vlastnosti Bernoulliho polynomů a Bernoulliho čísel jsou uvedeny v [GraRy71]. Jednoznačnost nulového bodu vyplývá z následující věty (uvedené v [SloWen89]).

Věta 4.2.2. *Pro $\gamma \geq 1$ je funkce G_γ definovaná v (4.50), klesající na $(0, \frac{1}{2})$ a má jednoznačně určený nulový bod $x_0(\gamma) \in (0, \frac{1}{2})$, pro který platí*

$$\lim_{\gamma\to\infty} x_0(\gamma) = \frac{1}{4}.$$

Uveďme dále tabulku několika hodnot $x_0(\gamma)$ pro různé hodnoty γ:

γ	$x_0(\gamma)$
2	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0,2113248654$
3	0,2308296503
4	$\frac{1}{2} - (\frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{3}})^{\frac{1}{2}} = 0,2403351888$
5	0,2451188417
∞	0,25

Tabulka 4.1: Nulové body funkce G_γ

Podle [SloWen89] platí konvergenční věta (4.2.1) i pro integrální operátory typu $L+K$, kde L je operátor definovaný v (4.5) a K je integrální operátor, který má větší „ zhlazující účinek“ než L. Uveďme tuto větu v plném znění.

Věta 4.2.3. *Nechť $\beta, L, d, S_h^d, T_h, Q_h$ jsou definovány stejně jako ve větě 1.2.1. Nechť $t > \beta + \frac{1}{2}$ a $\mu > 0$ jsou takové, že K je omezený operátor $H^{s-\mu} \to H^{s-\beta}$ a $L+K$ je bijekce $H^s \to H^{s-\beta}$ pro $s \in \langle \beta - a, \mu + d + \frac{1}{2})$. Dále předpokládejme, že $f \in H^{t-\beta}$, kde $\mu + \beta - a \leq t < \mu + d + \frac{1}{2}$. Nechť $u \in H^t$ je jednoznačné řešení rovnice*

$$(L+K)u = f. \tag{4.58}$$

Potom pro dostatečně malé h qualokační metoda $\{S_h^d, T_h, Q_h\}$ použitá k řešení rovnice (4.58) dává jednoznačné aproximativní řešení $u_h \in S_h^d$ a jestliže navíc s, t, a splňují následující podmínky

$$\beta - a \leq s \leq t, \quad s < d + \frac{1}{2} \quad \beta + \frac{1}{2} < t, \quad a = 0, 1, 3,$$

potom chyba vyjádřená normou $\|u_h - u\|_s$ splňuje postupně odhady a),b),c) ve větě 4.2.1 pro $a = 0, 1, 3$.

Dodejme, že stejné rozšíření platnosti konvergenční věty 4.1.1 na rovnici (4.58) platí i pro spliny lichého stupně a qualokační pravidlo (4.6).

Zde poznamenejme, že stabilita qualokační metody (pro integrální rovnici (4.4), kde je integrální operátor tvaru $L = aI + bS$ s $a, b \in \mathbb{C}$ a $Su = \widehat{u}(0) + \sum_{k \neq 0} \operatorname{sign}(k)\widehat{u}(k)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}kx}$ a S_h^d prostory splinů jak lichého, tak sudého stupně d) byla dokázána též v [HagSil88]. Ale metoda důkazu byla odlišná. Zde se stabilita qualokační metody dokazuje pomocí operátorové posloupnosti se speciální strukturou. Qualokační metoda definuje soustavu lineárních rovnic s maticemi koeficientů tvaru $M_h = \{m_{k,l}\}_{k,l=0}^{n-1}$, kde prvky matic M_h mají tvar $m_{k,l} = Q_h(\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}kx}(Ls_l^{h,d}))$. Zde $s_l^{h,d}$ označují bázové funkce prostoru S_h^d. Tyto matice M_h jsou prvky prostoru $\mathcal{L}(\ell^2(n))$, s obvyklou normou v prostoru $\ell^2(n)$. Qualokační metoda je stabilní, jestliže operátorová posloupnost M_h je stabilní. A to nastává, jestliže operátory M_h jsou invertibilní a platí $\sup_{h \geq h_0} \|M_h^{-1}\| < \infty$ což je v práci [HagSil88] dokázáno.

R. Hagen a B. Silbermann (viz [HagSil91]) dokázali i konvergenci qualokační metody pro stejnou třídu integrálních operátorů a pro aproximační prostory B-splinů S_h^d jak lichého, tak sudého stupně d.

4.3 Spline qualokační metoda

V práci [ChanSlo90] z roku 1990 je rozšířena qualokační metoda ve dvou směrech. Jednak aproximační prostor testových funkcí už není prostor trigonometrických polynomů, ale prostor jedno-periodických B-splinů jistého stupně d', dimenze n a se stejnými uzlovými body $x_j = jh$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, kde $h = \frac{1}{n}$, jako spliny z aproximačního prostoru S_h^d, ve kterém hledáme přibližné řešení. A jednak je qualokační metoda použita na integrální rovnici tvaru (4.4), kde L je operátor tvaru

$$L = L_0 + K.$$

Zde operátor L_0 je buď sudý operátor řádu $\beta \in \mathbb{R}$, tedy operátor tvaru

$$L_0 u = \widehat{u}(0) + \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} |k|^\beta \widehat{u}(k)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}kx}, \tag{4.59}$$

nebo lichý operátor řádu $\beta \in \mathbb{R}$, tedy operátor tvaru

$$L_0 u = \widehat{u}(0) + \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} \operatorname{sign}(k)|k|^\beta \widehat{u}(k)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}kx}, \tag{4.60}$$

a $L_0 : H^s \rightarrow H^{s-\beta}$, $s \in \mathbb{R}$. Pro jednodušší zápis budeme psát

$$L_0 u = \sum_{k \in \mathbb{Z},} [k]_\beta \widehat{u}(k) \mathrm{e}^{2\pi i k x},$$

kde

$$[k]_\beta = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ |k|^\beta, & k \neq 0, \end{cases} \qquad \text{pokud } L_0 \text{ bude sudý operátor}$$

a

$$[k]_\beta = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ \operatorname{sign}(k)|k|^\beta, & k \neq 0, \end{cases} \qquad \text{pokud } L_0 \text{ bude lichý operátor.}$$

Operátor K je operáror $K :\rightarrow H^s \rightarrow H^t$, $s, t \in \mathbb{R}$ s hladkým jádrem. Dále předpokládejme, že pokud je L_0 sudý operátor, pak řády $d+1$ a $d'+1$ B-splinů aproximačních prostorů S_h^d a $S_h^{d'}$ jsou oba buď sudá nebo lichá čísla a pokud je L_0 lichý operátor, pak řády $d+1$ a $d'+1$ B-splinů aproximačních prostorů S_h^d a $S_h^{d'}$ jsou jedno liché a jedno sudé číslo. Tento požadavek je stejný jako v Petrovově-Galerkinově metodě. V této metodě je přibližné řešení rovnice (4.4) určeno jednoznačně, jestliže L_0 je sudý operátor a řády $d+1$ a $d'+1$ B-splinů aproximačních prostorů S_h^d a $S_h^{d'}$ jsou oba buď sudá nebo lichá čísla. V případě, že L_0 lichý operátor, můžeme operátor L zapsat jako $L = LDD^{-1}$, kde D je diferenciální operátor. Pak můžeme pro $u_h \in S_h^d$ psát $Lu_h = LD(D^{-1}u_h) = (L_0 D + KD)(D^{-1}u_h)$. Operátor $L_0 D$ je nyní sudý operátor a $D^{-1}u_h \in S_h^{d+1}$. Testovací funkce jsou z prostoru $S_h^{d'}$.
Dále stejně jako v kolokační metodě předpokládejme, že buď $d > \beta$ nebo $d > \beta - \frac{1}{2}$, ale v tomto druhém případě uzlové body splinů nejsou qualokačními body. Pokud bude splněna tato podmínka, budeme říkat, že qualokační metoda je dobře definována. Požadujeme totiž, aby Lu_h bylo definováno ve všech bodech. To je splněno pro $d > \beta$. Jestliže $\beta - \frac{1}{2} < d \leq \beta$, bude Lu_h, kde $u_h \in S_h^d$, singulární v uzlových bodech splinů. Avšak, protože $u_h \in S_h^d \subset H^s$ pro všechna $s < d + \frac{1}{2}$, tedy i pro $s = \beta$, bude platit $Lu_h \in H^0 = L^2$. Navíc Lu_h bude v tomto případě spojitá ve všech bodech, kromě uzlových bodů. To vyplývá z lemmatu 3.2c v [AW85].

Abychom mohli definovat stabilitu qualokační metody pro tuto úlohu a mluvit o řádu konvergence qualokační metody, musíme zavést některá značení a definovat jisté funkce. Označme ψ_p bázové funkce prostoru S_h^d a ψ'_p bázové funkce prostoru $S_h^{d'}$, kde $p \in \Lambda_n = \{p \in \mathbb{Z} : -\frac{n}{2} < p \leq \frac{n}{2}\}$. Za tyto bázové funkce nevezmeme klasické B-spliny řádu $d+1$, případně $d'+1$. Jedno-periodický B-spline je definován pomocí konvolutorního integrálu charakteristické funkce. Tato funkce $\chi_n^1(x)$ na intervalu $\langle 0, h \rangle$ je definována následovně

$$\chi_n^1(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, h), \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \vee x = h, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Označíme-li $d+1$-krát konvoluci

$$\chi_n^{d+1}(x) = \int_0^1 \chi_n^d(x-y)\chi_n^1(y)dy,$$

pak jedno-periodické B-spliny jsou definovány jako $b_j(x) = n^d \chi_n^{d+1}(x - \frac{j}{n})$ pro $j \in \Lambda_n$. Bázové funkce ψ_p jsou v tomto případě vzaty jako lineární kombinace takto zavedených B-splinů

$$\psi_p = a_p \sum_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} p \frac{j}{n}} b_j(x),$$

kde konstanta a_p je zvolena tak, aby $\widehat{\psi}_p(p) = 1$. Fourierovy koeficienty takto zavedených funkcí mají tu vlastnost, že

$$\widehat{\psi}_p(m) = \begin{cases} 0, & m \neq p + ln \quad l \in \mathbb{Z}, \\ 1, & m = p = 0, \\ (\frac{p}{m})^{d+1}, & m = p + ln, \quad l \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

respektive

$$\widehat{\psi'}_p(m) = \begin{cases} 0, & m \neq p + ln \quad l \in \mathbb{Z}, \\ 1, & m = p = 0, \\ (\frac{p}{m})^{d'+1}, & m = p + ln, \quad l \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Můžeme tedy psát

$$\psi_p(x) = \begin{cases} 1, & p = 0 \\ \sum\limits_{m=p+ln, l\in\mathbb{Z}} (\frac{p}{m})^{d+1} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} m x} & p \in \Lambda_n, \quad p \neq 0. \end{cases}$$

Vlastnosti těchto bázových funkcí jsou uvedeny též v [SloWen99]. Protože $\widehat{\psi}_p(q) = \delta_{pq}$ pro $p, q \in \Lambda_n$, pro libovolnou funkci $v \in S_h^d$ platí $v = \sum\limits_{p\in\Lambda_n} \widehat{v}(p)\psi_p$ a z předchozího vyplývá, že pro Fourierovy koeficienty této funkce platí vztah

$$\widehat{v}(m) = (\frac{p}{m})^{d+1}\widehat{v}(p) \qquad m = p + ln, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad m \neq 0.$$

Důležitou roli při určování řádu konvergence qualokační metody a při definování stability mají následující jedno-periodické funkce v proměnné x

$$F_\alpha^+(x,y) = \sum_{l\neq 0} \frac{1}{|l+y|^\alpha} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} l x}, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad y \in \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \tag{4.61}$$

a

$$F_\alpha^-(x,y) = \sum_{l\neq 0} \frac{\mathrm{sign}(l)}{|l+y|^\alpha} \mathrm{e}^{2\pi i l x} \qquad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \tag{4.62}$$

kde $\alpha > \frac{1}{2}$. Dále definujme funkce

$$\Delta(\xi,y) = y^{d+1} F_{d+1}^\sigma(\xi,y), \qquad \sigma = \begin{cases} + & \text{pro} \quad d = 2k+1, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ - & \text{pro} \quad d = 2k, \qquad\quad k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

a

$$\Delta'(\xi,y) = y^{d'+1} F_{d'+1}^{\sigma'}(\xi,y), \qquad \sigma' = \begin{cases} + & \text{pro} \quad d' = 2k+1, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ - & \text{pro} \quad d' = 2k, \qquad\quad k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{4.63}$$

a funkce $\Omega(\xi,y)$, která je také jedno-periodická v první proměnné

$$\Omega(\xi,y) = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \\ \mathrm{sign}(y) \end{array} \right\} |y|^{d+1-\beta} F_{d+1-\beta}^\tau(\xi,y), \tag{4.64}$$

kde

$$\tau = \begin{cases} + \\ - \end{cases}$$

„+“ nastává v případě, že L_0 a d jsou jedno sudé a jedno liché a „−“ nastává v případě, že L_0 a d jsou obě buď sudá, nebo lichá. Z definice těchto funkcí je zřejmé, že platí

$$\Omega(-\xi,y) = \overline{\Omega(\xi,y)}, \qquad \Delta'(-\xi,y) = \overline{\Delta'(\xi,y)} \tag{4.65}$$

a

$$\Omega(\xi,-y) = \overline{\Omega(\xi,y)}, \qquad \Delta'(\xi,-y) = \overline{\Delta'(\xi,y)}. \tag{4.66}$$

Z vlastnosti jedno-periodičnosti v první proměnné funkce $F_\alpha^\pm$ plyne stejná vlastnost i pro funkce $\Delta(\xi,y)$, $\Delta'(\xi,y)$, $\Omega(\xi,y)$. Platí totiž

$$\Delta(\xi+1,y) = \Delta(\xi,y), \quad \Delta'(\xi+1,y) = \Delta'(\xi,y), \quad \Omega(\xi+1,y) = \Omega(\xi,y) \tag{4.67}$$

a

$$\Delta(1-\xi,y) = \overline{\Delta(\xi,y)}, \quad \Delta'(1-\xi,y) = \overline{\Delta'(\xi,y)}, \quad \Omega(1-\xi,y) = \overline{\Omega(\xi,y)}. \tag{4.68}$$

Pomocí těchto funkcí definujeme postupně funkce

$$D(y) = \sum_j w_j (1 + \Omega(\xi_j,y))(1 + \overline{\Delta'(\xi_j,y)}), \quad y \in \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \tag{4.69}$$

$$E(y) = \sum_j w_j(\Omega(\xi_j, y))(1 + \overline{\Delta'(\xi_j, y)}), \tag{4.70}$$

které hrají podstatnou roli při vyšetřování stability a řádu konvergence qualokační metody ve výše definované úloze. Z vlastnosti (4.66) plyne okamžitě pro funkce $D(y)$ a $E(y)$, že

$$D(-y) = \overline{D(y)}, \qquad E(-y) = \overline{E(y)}. \tag{4.71}$$

Tato vlastnost funkcí $D(y)$ a $E(y)$ nám umožňuje vyšetřovat jejich chování jen pro $y \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$. V případě, že přibližné řešení $u_h \in S_h^d$ vyjádříme jako lineární kombinaci bázových funkcí

$$u_h = \sum_{p \in \Lambda_n} \widehat{u}_h(p)\psi_p,$$

můžeme rozdíl $\widehat{u}_h(p) - \widehat{u}(p)$ (podle [ChanSlo90]) zapsat ve tvaru

$$\widehat{u}_h(p) - \widehat{u}(p) = -\frac{E(\frac{p}{n})}{D(\frac{p}{n})}\widehat{u}(p) + R_n(p), \quad p \in \Lambda_n, \quad p \neq 0, \tag{4.72}$$

kde funkce

$$R_n(p) = D(\frac{p}{n})^{-1} \sum_j w_j \sum_{k \neq p, k = p + ln, l \in \mathbb{Z}} \left[\frac{k}{p}\right]_\beta \widehat{u}(k) \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \frac{k-p}{n} x}(\xi_j) \left(1 + \overline{\Delta'(\xi_j), \frac{p}{n}}\right), \tag{4.73}$$

pro $p \in \Lambda_n, \quad p \neq 0$.

Z výrazu (4.72) je zřejmé, že qualokační metoda bude singulární nebo špatně podmíněná, jestliže funkce D bude nabývat nulové hodnoty pro $y \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$. Následující definice stability qualokační metody je tedy evidentní.

Definice 4.3.1. *Qualokační metoda je stabilní, jestliže*

$$inf\{|D(y)| : y \in \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle\} > 0. \tag{4.74}$$

Následující věta udává, ve kterých případech je qualokační metoda pro námi definovanou úlohu stabilní.

Věta 4.3.1. *Jestliže v úloze (4.4) platí, že d' stupeň B-splinů z prostoru $S_h^{d'}$ je liché číslo a zároveň d stupeň B-splinů z prostoru S_h^d a operátor L_0 jsou jeden sudý a jeden lichý, nebo jestliže d' stupeň B-splinů z prostoru $S_h^{d'}$ je sudé číslo a zároveň d stupeň B-splinů z prostoru S_h^d a operátor L_0 oba buď sudé, nebo liché (v použitém značení $\tau = \sigma'$), potom qualokační metoda je stabilní, jestliže nenastanou následující dva případy*

a) $J = 1, \quad \xi_1 = \frac{1}{2}, \quad \tau = \sigma' = +,$

b) $J = 1, \quad \tau = \sigma' = -.$

Důkaz. Důkaz je uveden v [ChanSlo90]. □

Než uvedeme konvergenční větu, zavedeme pojem řádu qualokační metody a pojem „dodatečný řád konvergence“.

Definice 4.3.2. *Qualokační metoda (4.2) je řádu $d+1-\beta+b$, jestliže*

$$E(y) = O(|y|^{d+1-\beta+b}), \qquad y \in \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle. \tag{4.75}$$

A číslo b budeme nazývat dodatečný řád konvergence.

Nyní už můžeme uvést konvergenční větu.

Věta 4.3.2. *Nechť rovnice (4.1) je řešena dobře definovanou qualokační metodou, která je stabilní a řádu $d+1-\beta+b$, $b \geq 0$. Potom pro h dostatečně malé je u_h jednoznačně definováno. A pro všechny s, t, pro které je*

$$s < d + \frac{1}{2}, \quad \beta + \frac{1}{2} < t, \quad \beta - b \leq s \leq t \leq d+1,$$

platí

$$\|u_h - u\|_s \leq c h^{t-s} |u|_{t+\max(\beta-s),0},$$

kde $|u|_t$ je seminorma definovaná jako

$$|u|_t = \sum_{n \neq 0} |\widehat{u}(n)|^2 |n|^{2t}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Důkaz. Důkaz je uveden v [ChanSlo90]. □

Pro $s = \beta$ a $t = d+1 > \beta + \frac{1}{2}$ z věty plyne odhad

$$\|u_h - u\|_\beta \leq c h^{t-\beta} |u|_{d+1}.$$

Pro $s = \beta - b$ a $t = d+1$ získáme odhad

$$\|u_h - u\|_{\beta-b} \leq c h^{d+1-\beta+b} |u|_{d+1+b}.$$

Uvažujme dále dva typy qualokačních pravidel pro $J = 2$. V prvním případě uzlové body splinů budou i kvadraturními body a druhý kvadraturní bod bude vždy uprostřed mezi uzlovými body. Tedy $(\xi_1, \xi_2) = (0, \frac{1}{2})$ a pro váhy v tomto případě bude platit $(w_1, w_2) = (w, 1-w)$. Již z první podkapitoly totiž víme, že volbou $w = \frac{1}{3}$ v takto definovaném kvadraturním pravidle, dostaneme klasické Simpsonovo pravidlo. Qualokační pravidla s těmito vlastnostmi budeme nazývat qualokační pravidla Simpsonova typu. V tomto případě budeme předpokládat, že stupeň d splinů z prostoru S_h^d bude splňovat podmínku $d > \beta$. Našim cílem bude nyní nalézt předpis, jak volit váhu w, abychom dosáhli vyššího řádu konvergence, než jen $d+1-\beta$, který nám zaručuje konvergenční věta, ale abychom nalezli takové w, pro které dodatečný řád konvergence b bude nenulový. Z definice řádu qualokační metody víme, že závisí na chování funkce $E = E(y)$. Z vlastností (4.67) a (4.66) plyne, že funkce E je sudá a reálná funkce pro $\xi_j = 0$ a $\xi_j = \frac{1}{2}$. Označíme-li reálnou část funkce $F_\alpha^\pm(x,y)$ jako $G_\alpha^\pm(x,y)$, pak můžeme psát

$$\Omega(x,y) = y^{d+1-\beta} G^\tau_{d+1-\beta}(x,y), \quad y > 0, \quad x = 0 \vee x = \frac{1}{2}, \tag{4.76}$$

$$\Delta'(x,y) = y^{d'+1} G^{\sigma'}_{d+1-\beta}(x,y), \quad y > 0, \quad x = 0 \vee x = \frac{1}{2}, \tag{4.77}$$

kde τ a σ' mají stejný význam jako v definicích funkcí $\Omega(x,y)$ a $\Delta'(x,y)$. S využitím tohoto značení můžeme funkci E přepsat takto

$$\begin{aligned} E(y) &= y^{d+1-\beta}\left(wG^\tau_{d+1-\beta}(0,y) + (1-w)G^\tau_{d+1-\beta}\left(\frac{1}{2},y\right)\right) \\ &+ \left(wG^\tau_{d+1-\beta}(0,y)G^{\sigma'}_{d'+1}(0,y) + (1-w)G^\tau_{d+1-\beta}\left(\frac{1}{2},y\right)G^{\sigma'}_{d'+1}\left(\frac{1}{2},y\right)\right). \end{aligned}$$

Z tohoto zápisu funkce $E(y)$ je vidět, že řád konvergence qualokační metody je s takovouto volbou kvadraturních bodů $d+1-\beta$. Nyní se podívejme, zda jistou volbou váhy w můžeme získat nenulový dodatečný řád konvergence b. Budeme ale rozlišovat dva případy kdy $\tau = \sigma' = +$ a $\tau = \sigma' = -$. Protože $d' \geq 1$, (d' musí být liché) a platí vztah z dodatku v [ChanSlo90]

$$G^+_\alpha(x,y) - G^+_\alpha(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\alpha)(-\alpha-1)\dots(-\alpha-2k+1)}{(2k)!} G^+_{\alpha+2k} y^{2k}, \tag{4.78}$$

můžeme (4.78) přepsat do tvaru

$$E(y) = y^{d+1-\beta}(wG^+_{d+1-\beta}(0,0) + (1-w)G^+_{d+1-\beta}(\frac{1}{2},0)) + O(y^{d-\beta+d'+3}). \tag{4.79}$$

Pokud tedy zvolíme w tak, aby výraz $wG^+_{d+1-\beta}(0,0) + (1-w)G^+_{d+1-\beta}(\frac{1}{2},0)$ byl roven nule, bude řád konvergence $d-\beta+d'+3$. Tedy

$$wG^+_{d+1-\beta}(0,0) + (1-w)G^+_{d+1-\beta}(\frac{1}{2},0) = 2w\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^{d+1-\beta}} + 2(1-w)\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^{d+1-\beta}}(-1)^l = 0.$$

Podle (4.28) tento vztah můžeme přepsat do tvaru

$$2w\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^{d+1-\beta}} + 2(1-w)\left(\frac{1}{l^{d-\beta}} - 1\right)\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^{d+1-\beta}}.$$

A tento výraz se nuluje pro

$$w = \frac{2^{d-\beta}-1}{2^{d+1-\beta}-1}.$$

Tedy s touto volbou váhy bude dodatečný řád konvergence $b = 2$.

Ve druhém případě, kdy $\tau = \sigma' = -$, s využitím vztahu

$$G^-_\alpha(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\alpha)(-\alpha-1)\dots(-\alpha-2k+2)}{(2k-1)!} G^-_{\alpha+2k-1} y^{2k-1}, \tag{4.80}$$

uvedeném v dodatku [ChanSlo90], dostáváme

$$E(y) = y^{d+2-\beta}\left(wG^+_{d+2-\beta}(0,0) + (1-w)G^+_{d+2-\beta}\left(\frac{1}{2},0\right)\right) + O(y^{d-\beta+d'+4}). \tag{4.81}$$

V tomto případě je řád metody vždy $d+2-\beta$, tedy dodatečný řád metody je vždy 1 pro libovolné w. Ale stejně jako v předchozím případě chceme najít w takové, aby b bylo ještě větší. To se podaří při volbě váhy takové, že $wG^+_{d+2-\beta}(0,0) + (1-w)G^+_{d+2-\beta}(\frac{1}{2},0)$ se bude nulovat. Nahrazením $d+2-\beta$ za $d+1-\beta$ ve stejné úvaze jako v předchozím případě, dostáváme

$$w = \frac{2^{d-\beta+1}-1}{2^{d+2-\beta}-1}.$$

A tedy v tomto případě je dodatečný řád konvergence $b = 3$.
Oba případy můžeme zformulovat do věty.

Věta 4.3.3. *Předpokládejme, že ve dvoubodovém qualokačním pravidle platí pro kvadraturní body* $(\xi_1, \xi_2) = (0, \frac{1}{2})$ *a váhy* $(w_1, w_2) = (w, 1-w)$ *a nechť* $d > \beta$. *Jestliže*
(a) buď L_0 *je sudé a* d *a* d' *jsou lichá čísla, nebo* L_0 *je liché a* d *a* d' *jsou sudá čísla, potom metoda je stabilní a řádu* $d - \beta + 3$, *pokud*

$$w = \frac{2^{d-\beta}-1}{2^{d+1-\beta}-1}.$$

(b) buď L_0 *je sudé a* d *a* d' *jsou sudá čísla, nebo* L_0 *je liché a* d *a* d' *jsou lichá čísla, potom metoda je stabilní a řádu* $d - \beta + 4$, *pokud*

$$w = \frac{2^{d-\beta+1}-1}{2^{d+2-\beta}-1}.$$

Dodejme, že v ([ChanSlo90]) je uvedeno, že závěr této věty platí i v případě, že místo testových funkcí z $S_h^{d'}$ jsou zvoleny trigonometrické polynomy jako v předchozích podkapitolách.

Druhý typ qualokačních pravidel, které budeme uvažovat, bude qualokační pravidlo s $J = 2$, s váhami pevně danými $(w_1, w_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ a kvadraturními body symetricky rozmístěnými uvnitř každého intervalu (x_{j-1}, x_j), $j = 1, \dots, n$, tedy $(\xi_1, \xi_2) = (\xi, 1-\xi)$, kde $\xi \in (0, \frac{1}{2})$. Qualokační pravidla s těmito vlastnostmi budeme nazývat qualokační pravidla Gaussova typu. Dále v tomto případě předpokládejme, že stupeň d splinů z prostoru S_h^d bude splňovat podmínku $d > \beta - \frac{1}{2}$. Náš cíl bude obdobný jako v předchozím případě. Chceme nalézt předpis, jak volit kvadraturní bod ξ, abychom dosáhli vyššího řádu konvergence než jen $d+1-\beta$, který nám zaručuje konvergenční věta, ale abychom nalezli takové ξ, pro které dodatečný řád konvergence b bude nenulový. Z definice řádu qualokační metody víme, že závisí na chování funkce $E(y)$. A z vlastnosti (4.68) plyne,

$$E(y) = Re\Omega(\xi, y)(1 + \overline{\Delta'(\xi, y)}).$$

Z vlastnosti (4.66) plyne, že funkce $E(y)$ je sudá a stačí její chování vyšetřovat pouze pro $y > 0$. Označíme-li reálnou část funkce $F^{\pm}_{\alpha}(x,y)$ jako $G^{\pm}_{\alpha}(x,y)$ a imaginární část funkce $F^{\pm}_{\alpha}(x,y)$ jako $H^{\pm}_{\alpha}(x,y)$, dostaneme

$$E(y) = y^{d+1-\beta} G^{\tau}_{d+1-\beta}(\xi, y) +$$

$$+ y^{d-\beta+2+d'}(G^{\tau}_{d+1-\beta}(\xi, y) G^{\sigma'}_{d'+1}(\xi, y) + H^{\tau}_{d+1-\beta}(\xi, y) H^{\sigma'}_{d'+1}(\xi, y)). \tag{4.82}$$

A znovu jako v předchozím budeme nyní rozlišovat případy, kdy $\tau = \sigma' = +$ a $\tau = \sigma' = -$, kde τ a σ' mají stejný význam jako v definicích funkcí $\Omega(x,y)$ a $\Delta'(x,y)$ (4.64) a (4.63). V prvním případě můžeme (4.82) s využitím vlastnosti (4.78) přepsat do tvaru

$$E(y) = y^{d+1-\beta} G^{+}_{d+1-\beta}(\xi, 0) + O(y^{d-\beta+3}). \tag{4.83}$$

Z tohoto zápisu funkce $E(y)$ je zřejmé, že pokud vybereme kvadraturní bod ξ jako kořen rovnice

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^{d+1-\beta}} \cos 2\pi l \xi = 0, \quad \xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \tag{4.84}$$

bude dodatečný řád metody roven dvěma.
Ve druhém případě, kdy $\tau = \sigma' = -$, můžeme s využitím vlastnosti (4.80) psát

$$E(y) = (\beta - d - 1) y^{d+2-\beta} G^{-}_{d+2-\beta}(\xi, 0) + y^{d+d'+2-\beta} H^{-}_{d+1-\beta}(\xi, 0) H^{-}_{d'+1}(\xi, 0) + O(y^{d-\beta+4}). \tag{4.85}$$

Tedy v tomto případě bez jakéhokoli požadavku na kvadraturní bod ξ, je dodatečný řád konvergence metody roven jedné. Pokud ale zvolíme ξ tak, aby $G^{-}_{d-\beta+2}(\xi, 0) = 0$, dostaneme

$$E(y) = O(y^{d+1-\beta+b}), \tag{4.86}$$

kde $b = \min(d'+1, 3)$. Tedy kromě volby $d' = 0$, pro kterou je dodatečný řád konvergence metody roven jedné, dostáváme $b = 3$. Nyní můžeme zjištěné vlastnosti metody zapsat do věty.

Věta 4.3.4. *Předpokládejme, že qualokační pravidlo splňuje $J = 2$, $(w_1, w_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\xi_1, \xi_2) = (\xi, 1-\xi)$, kde $\xi \in (0, \frac{1}{2})$ a $d > \beta - \frac{1}{2}$. Jestliže*
(a) buď L_0 je sudé a d a d' jsou obě lichá čísla, nebo pokud L_0 je liché a d je sudé a d' liché číslo, potom metoda je stabilní a řádu $d - \beta + 3$, pokud $\xi \in (0, \frac{1}{2})$ je nulový bod funkce $G_{d+1-\beta}$,
(b)buď L_0 je sudé a d a d' jsou obě sudá čísla, nebo pokud L_0 je liché a d je liché a d' je sudé číslo, potom metoda je stabilní a řádu $d - \beta + b$, kde $b = min(d'+1, 3)$, pokud $\xi \in (0, \frac{1}{2})$ je nulový bod funkce $G_{d+2-\beta}$.

Funkce G_α v této větě je definována v (4.50). A jako v předchozím dodejme, že v [ChanSlo90] je uvedeno, že závěr této věty platí i v případě, že místo testovacích funkcí z $S_h^{d'}$ jsou zvoleny trigonometrické polynomy jako v předchozích podkapitolách.

4.4 Další vývoj qualokační metody

Jednou z dalších cest, kterou byla qualokační metoda rozvíjena, byla cesta k odvození qualokačních kvadraturních pravidel, která jsou použitelná na více obecné integrální rovnice. V práci [SloWen98] je studována konvergence a stabilita qualokační metody pro třídu rovnic

$$Lu = f, \tag{4.87}$$

kde operátor L je tvaru $L = L_0 + K$. O operátoru K předpokládejme stejně jako v předchozí podkapitole, že $K :\to H^s \to H^t$, $s, t \in \mathbb{R}$, je operátor s hladkým jádrem a operátor $L_0 : H^s \to H^{s-\beta}$ lze vyjádřit ve tvaru $b_+L_+ + b_-L_-$, kde

$$L_+u = \widehat{u}(0) + \sum_{k\in\mathbb{Z},k\neq0} |k|^\beta \widehat{u}(k)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}kx}, \tag{4.88}$$

$$L_-u = \widehat{u}(0) + \sum_{k\in\mathbb{Z},k\neq0} \mathrm{sign}(k)|k|^\beta \widehat{u}(k)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}kx} \tag{4.89}$$

a b_+ a b_- jsou komlexní čísla. O operátoru L_0 budeme navíc předpokládat, že je buď silně eliptický (angl. *strongly elliptic*) operátor nebo liše eliptický (angl. *oddly elliptic*) operátor. Uveďme přesnou definici těchto vlastností.

Definice 4.4.1. *Operátor L_0 je silně eliptický(strongly elliptic), jestliže existuje $\theta \in \mathbb{C}$ takové, že*

$$\mathrm{Re}[\theta(b_+ + b_-)] > 0 \qquad a \qquad \mathrm{Re}[\theta(b_+ - b_-)] > 0. \tag{4.90}$$

Operátor L_0 je liše eliptický, jestliže existuje $\vartheta \in \mathbb{C}$ takové, že

$$\mathrm{Re}[\vartheta(b_- + b_+)] > 0 \qquad a \qquad \mathrm{Re}[\vartheta(b_- - b_+)] > 0. \tag{4.91}$$

Stabilita qualokační metody pro tuto třídu integrálních rovnic je definována stejně jako v definici 4.3.1. Jen funkce $D(y)$ je zavedena pomocí funkcí $D_+(y)$ a $D_-(y)$ následovně $D(y) = b_+D_+(y) + b_-\mathrm{sign}(y)D_-(y)$ pro $y \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$, kde

$$D_\pm(y) = \sum_{j=1}^{J} w_j[1 + \Omega_\pm(\xi_j, y)][1 + \overline{\Delta'(\xi_j, y)}] \tag{4.92}$$

a $\Delta'(\xi_j, y)$ je uvedeno v (4.63) a funkce $\Omega_\pm(\xi_j, y)$ jsou definovány následovně

$$\Omega_+(\xi, y) = \begin{cases} |y|^{d+1-\beta} F^+_{d+1-\beta}(\xi, y), & \text{pro} \quad d = 2k+1, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \\ \mathrm{sign}(y)|y|^{d+1-\beta} F^-_{d+1-\beta}(\xi, y), & \text{pro} \quad d = 2k, \qquad k \in \mathbb{Z}, \end{cases} , \tag{4.93}$$

a

$$\Omega_-(\xi,y)=\begin{cases}\mathrm{sign}(y|y|^{d+1-\beta}F^-_{d+1-\beta}(\xi,y), & \text{pro}\quad d=2k+1,\quad k\in\mathbb{Z},\\ \\ |y|^{d+1-\beta}F^+_{d+1-\beta}(\xi,y) & \text{pro}\quad d=2k,\qquad k\in\mathbb{Z},\end{cases}\tag{4.94}$$

a funkce $F^{\pm}_{d+1-\beta}(\xi,y)$ jsou zavedeny v (4.61) a (4.62).

V další části předložené práce budeme studovat především symetrická qualokační pravidla. Tedy kvadraturní vzorce, pro které platí, že jestliže $\xi\in(0,\frac{1}{2})$ je kvadraturním bodem, pak i $1-\xi$ je kvadraturním bodem a navíc váhy příslušející těmto kvadraturním bodům jsou stejné. V následující větě je zformulováno, které qualokační metody jsou stabilní pro silně eliptické operátory a které jsou stabilní pro liše eliptické operátory.

Věta 4.4.1. *Uvažujme qualokační metodu (4.2) a symetrické kvadraturní pravidlo s kladnými vahami.*

a) Předpokládejme, že d a d' jsou obě buď lichá, nebo sudá čísla. Dále předpokládejme, že v případě kdy d a d' jsou obě lichá, jestliže $J=1$, pak $\xi_1\neq\frac{1}{2}$ a v případě kdy d a d' jsou obě sudá, jestliže $J=1$, pak $\xi_1\neq 0$. Metoda je stabilní pro všechny silně eliptické operátory L_0 právě tehdy, když platí

$$D_+(y)\geq|D_-(y)|\qquad \textit{pro}\quad y\in\left\langle 0,\frac{1}{2}\right\rangle.\tag{4.95}$$

b) Předpokládejme, že d a d' jsou jedno sudé a jedno liché číslo. Dále předpokládejme, že v případě kdy d je liché a d' je sudé, jestliže $J=1$, pak $\xi_1\neq 0$ a v případě kdy d je sudé a d' je liché, jestliže $J=1$, pak $\xi_1\neq\frac{1}{2}$. Metoda je stabilní pro všechny liše eliptické operátory L_0 právě tehdy, když platí

$$D_-(y)\geq|D_+(y)|\qquad \textit{pro}\quad y\in\left\langle 0,\frac{1}{2}\right\rangle.\tag{4.96}$$

Důkaz. Důkaz věty je uveden v [SloWend99]. □

Řád qualokační metody (včetně dodatečného řádu konvergence) je definován stejně jako v definici 4.3.2. Funkce $E(y)$ je zde ale definována pomocí funkcí $E_+(y)$ a $E_-(y)$ následovně $E(y)=b_+E_+(y)+b_-\mathrm{sign}(y)E_-(y)$, kde

$$E_\pm(y)=\sum_{j=1}^{J}w_j\Omega_\pm(\xi_j,y)[1+\overline{\Delta'(\xi_j,y)}],\qquad y\in\langle-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle\tag{4.97}$$

A podobně jako v předcházející podkapitole souvisí dodatečný řád konvergence qualokační metody s vlastnostmi funkce $G_\alpha(x)$ definované v (4.50). Uveďme zmíněný vztah přesně.

Věta 4.4.2. *Uvažujme qualokační metodu (4.2) a symetrické kvadraturní pravidlo s kladnými váhami. Metoda má dodatečný řád konvergence b, jestliže $d' \geq b-1$ a jestliže pro kvadraturní pravidlo platí, že*

$$\sum_{j=1}^{J} w_j G_{d+1-\beta+l}(\xi_j) = 0 \qquad \text{pro} \quad l = 0, 1, ..., b-1. \tag{4.98}$$

Důkaz. Důkaz věty je uveden v [SloWend99]. $\square$

O kvadraturním pravidle řekneme, že má stupeň přesnosti k, pokud integruje přesně všechny polynomy stupně $\leq k$. V další větě je uvedena podmínka, která zaručuje jistý stupeň přesnosti symetrického qualokačního kvadraturního pravidla.

Věta 4.4.3. *Uvažujme qualokační metodu (4.2) a symetrické kvadraturní pravidlo s $d' \geq b-1$. Jestliže je navíc s podmínkou (4.98) splněna podmínka*

$$\sum_{j=1}^{J} w_j B_{2k}(\xi_j) = 0 \qquad pro \quad k = 1, \ldots, \left[\frac{d-\beta}{2}\right], \tag{4.99}$$

kde B_α je Bernulliho polynom stupně α, potom kvadraturní pravidlo má stupeň přesnosti $d-\beta+b$ a metoda má dodatečný řád b.

Důkaz. Důkaz věty je uveden v [SloWend99]. $\square$

Uveďme ještě konvergenční větu.

Věta 4.4.4. *Nechť rovnice (4.87) je řešena dobře definovanou qualokační metodou, která je stabilní a řádu $d+1-\beta+l$, $b \geq 0$. Potom pro všechna h dostatečně malá u_h je jednoznačně definováno a navíc pro s, t, která splňují*

$$s < d + \frac{1}{2}, \quad \beta + \frac{1}{2} < t, \quad \beta - b \leq s \leq t \leq r,$$

platí

$$\|u_h - u\|_s \leq c h^{t-s} ||u||_{t+\max(\beta-s,0)}. \tag{4.100}$$

V závěru práce [SloWend99] jsou uvedeny tabulky s kvadraturními pravidly splňujícími jak pouze vlastnost (4.98) (jsou označena malými písmeny), tak i kvadraturními pravidly splňujícími obě vlastnosti (4.98) i (4.99). (Jsou pro odlišení označena velkými písmeny). Některé tabulky uvádějí kvadraturní pravidla pro silně eliptické operátory a pro $\beta = -1, 0, 1$, jiná uvádějí kvadraturní pravidla pro liše eliptické operátory a pro $\beta = -1, 0, 1$. Symetrická qualokační pravidla jsou navíc dvojího typu. Qualokační kvadraturní pravidla označená písmenem G, popřípadě g, jsou kvadraturní pravidla Gaussova typu, tedy krajní body nejsou kvadraturními body. Qualokační kvadraturní pravidla označená písmenem L, popřípadě l, jsou kvadraturní pravidla Lobattova typu, tedy krajní bod je kvadraturním bodem. U každého kvadraturního pravidla jsou navíc uvedeny tři parametry. Totiž J-počet kvadraturních bodů,-b dodatečný řád konvergence a $\alpha = d + 1 - \beta$.

V práci [SloWend99] je rozšířena qualokační metoda na rovnice s nekonstantními koeficienty. Uvažovaná integrální rovnice $Lu = f$ je rovnice s integrálním operátorem $L : H^s \to H^{s-\beta}$ ve tvaru

$$L = b_+ L_+^\beta + b_- L_-^\beta + K, \tag{4.101}$$

kde $b_\pm$ jsou jedno-periodické funkce z $C^\infty(\mathbb{R})$ a operátory $L_\pm^\beta = \sum_{k\in\mathbb{Z},} [k]_\pm^\beta \widehat{u}(k) \mathrm{e}^{2\pi i k x}$, kde

$$[k]_\pm = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & k = 0, \\ \pm|k|^\beta, & k \in -\mathbb{N} \\ k^\beta, & k \in \mathbb{N} \end{array} \right\}.$$

Dále o operátoru L v tomto případě budeme předpokládat, že je buď stejnoměrně silně eliptický (angl. *uniformly strong elliptic*) nebo stejnoměrně liše eliptický (angl. *uniformly odd elliptic*). Uveďme přesnou definici.

Definice 4.4.2. *Operátor L je stejnoměrně silně eliptický, jestliže existuje hladká jedno-periodická funkce $\theta(x)$ taková, že*

$$\gamma_+ = \inf_{x\in\mathbb{R}} \min\{\mathrm{Re}[\theta(x)(b_+ + b_-(x))], \mathrm{Re}[\theta(x)(b_+(x) - b_-(x))]\} > 0. \tag{4.102}$$

Operátor L je stejnoměrně liše eliptický, jestliže existuje hladká jedno-periodická funkce $\vartheta(x)$ taková, že

$$\gamma_+ = \inf_{x\in\mathbb{R}} \min\{\mathrm{Re}[\vartheta(x)(b_-(x) + b_+(x))], \mathrm{Re}[\vartheta(x)(b_-(x) - b_+(x))]\} > 0. \tag{4.103}$$

V případě, že L je stejnoměrně silně eliptický operátor, budeme předpokládat, že řády $d+1$ a $d'+1$ použitých splinů z prostorů S_h^d a $S_h^{d'}$ jsou obě buď sudá, nebo lichá čísla a v případě, že L je stejnoměrně liše eliptický budeme předpokládat, že řády $d+1$ a $d'+1$ použitých splinů z prostorů S_h^d a $S_h^{d'}$ jsou vždy jedno sudé a jedno liché číslo. Navíc předpokládáme, že qualokační metoda je dobře definovaná, tedy jestliže $d > \beta$, pak může být $\xi_1 = 0$ nebo jestliže $d > \beta - \frac{1}{2}$, pak $\xi_1 \neq 0$.

Definujme operátor $\mathcal{J}u = \widehat{u}(0) = \int_0^1 u(x)dx$ a operátory

$$L_z u(x) = b_+(z) L_+^\beta u(x) + b_-(z) L_-^\beta u(x) + (b_+(z) + b_-(z))\mathcal{J}u. \tag{4.104}$$

Množina $\{L_z; z \in \mathbb{R}\}$ je množina operátorů s konstantními koeficienty, kde $z \in \mathbb{R}$ je jedno-periodický parametr. Další dva předpoklady na qualokační pravidla a operátor K zformulujme v následujícím.

Předpoklad A. Nechť qualokační pravidlo je vybráno tak, že pro všechna $z \in \mathbb{R}$ a pro každé $v \in H^t$ s $t > \beta + \frac{1}{2}$ množina řešení $v_h \in S_h^d$ qualokačních rovnic

$$\langle L_z v_h, v_h' \rangle = \langle f, v_h' \rangle \qquad \forall v_h' \in S^{d'_h} \tag{4.105}$$

je jednoznačně určena pro každé h a za předpokladu, že $v \in H^t$ a

$$\beta \leq s \leq t \leq d+1, s < d + \frac{1}{2}, t > \beta + \frac{1}{2}, \tag{4.106}$$

v_h splňuje asymptotický odhad chyby

$$\|v_h - v\|_s \leq ch^{t-s}\|v\|_t \tag{4.107}$$

stejnoměrně pro $z \in \mathbb{R}$ s c nezávislým na z, h, v. Navíc qualokační pravidlo je symetrické a splňuje: jestliže $J = 1$ a d' je liché, pak $\xi_1 \neq \frac{1}{2}$, a jestliže $J = 1$ a d' je sudé, pak $\xi_1 \neq 0$.

Předpoklad B. Aby qualokační metoda měla dodatečný řád konvergence $b \geq 0$, předpokládejme, že operátor K je tvaru

$$K = \sum_{i=1}^{b}(a_{i,+}L_+^{\beta-i} + a_{i,-}L_-^{\beta-i}) + K', \tag{4.108}$$

kde $a_{i,\pm} \in C^\infty$ a $a_{i,\pm}$ je jsou jedno-periodické a $K' : H^s \to H^{s-\beta+b+\nu}$ je ohraničený pro nějaké $\nu > \frac{1}{2}$ a všechna $s \in \mathbb{R}$.

Všechna stabilní qualokační pravidla uvedená v [SloWen98] splňují předpoklad A a ve všech těchto případech jsou kvadraturní body a váhy nezávislé na konstantách $b_\pm(z)$. Tato qualokační pravidla jsou tedy aplikovatelná i na rovnici $Lu = f$ s L ve tvaru (4.101).
Konvergenční vlastnosti qualokační metody splňující uvedené předpoklady jsou zformulovány v následující větě:

Věta 4.4.5. *Nechť L je buď stejnoměrně silně eliptický nebo stejnoměrně liše eliptický operátor tvaru (4.101) s $\beta \in \mathbb{Z}$. Předpokládejme, že $d > \beta$, $d' \geq 1$ a qualokační metoda pro rovnice s konstantními koeficienty splňuje předpoklad A a navíc qualokační metoda má dodatečný řád b s $0 \leq b \leq d'+1$ a pro $s < d + \frac{1}{2}$, $\beta + \frac{1}{2} < t$, $\beta - b \leq s \leq t \leq r$ odhad*

$$\|v_h - v\|_s \leq ch^{t-s}||v||_{t+\max(\beta-s,0)} \tag{4.109}$$

je splněn pro všechna $v_h \in S_h^d$ řešení (4.105) stejnoměrně vzhledem k z. Dále předpokládejme, že operátor K splňuje předpoklad B a také, že qualokační pravidlo má stupeň přesnosti nejméně $d-\beta+b$. Pak existuje $h_0 > 0$ takové, že qualokační řešení u_h rovnice $\langle Lu_h, \chi_h\rangle = \langle f, \chi_h\rangle$, $\chi_h \in S_h^{d'}$, je jednoznačně určeno pro každé $h \in (0, h_0\rangle$. Navíc pro $\beta - b \leq s \leq \beta$ a $\beta + \frac{1}{2} < t \leq d+1$ platí odhad

$$\| u_h - u \|_s \leq ch^{t-s} \| u \|_{t+\max(\beta-s,1)} \tag{4.110}$$

a pro $\beta \leq s \leq t \leq d+1$, $s < d + \frac{1}{2}$ a $\beta + \frac{1}{2} < t$ platí odhad

$$\| u_h - u \|_s \leq ch^{t-s} \| u \|_t \,. \tag{4.111}$$

Důkaz. Důkaz věty je uveden v [SloWen98]. Uveďme jen, že v tomto důkazu je třeba zapsat qualokační metodu pomocí qualokační projekce R_h na prostor $S_h^{d'}$, definované předpisem

$$R_h g \in S_h^{d'}, \langle R_h g, \chi_h \rangle = \langle g, \chi_h \rangle \qquad \forall \chi_h \in S_h^{d'}. \tag{4.112}$$

Qualokační aproximace rovnice $Lu = f$ může být potom pomocí této qualokační projekce přepsána do tvaru

$$u_h \in S_h^d, \quad R_h L u_h = R_h f. \tag{4.113}$$

□

V pracích [SloTr98] a [SloTr01] je standardní qualokační metoda rozšířena na tolerantní verzi qualokační metody. V tolerantní qualokační metodě hledáme takové $u_h^T \in S_h^d$, pro které platí

$$\langle L u_h^T, \chi_h \rangle = (f, \chi_h) \qquad \forall \chi_h \in S_h^{d'}, \tag{4.114}$$

kde (f, g) je klasický skalární součin v $L^2_{\langle 0,1 \rangle}$ definovaný $(f,g) = \int\limits_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$ a $\langle f, g \rangle$ je qualokační kvadraturní pravidlo definované v (4.3). Tedy na rozdíl od standardní qualokační metody v tolerantní verzi počítáme pravou stranu přesně, nikoli pomocí nějakého qualokačního pravidla. A jak vyplývá z následující věty, za stejných předpokladů jako ve větě (4.4.5) dostaneme stejný řád konvergence, ale za menších požadavků na hladkost přesného řešení.

Věta 4.4.6. *Nechť $d > \beta$ a $d' > 0$. Dále nechť je qualokační pravidlo vybráno tak, že platí předpoklad A pro nějaké b, $0 < b \leq d' + 1$, a toto kvadraturní pravidlo nechť má dále stupeň přesnosti nejméně $d - \beta + b$. Potom existuje $h_0 > 0$ takové, že pro každé $h \in (0, h_0\rangle$ rovnice (4.113) má jediné řešení $u_h \in S_h^d$ a pro $\beta - b \leq s < d + \frac{1}{2}$ a $\beta + \frac{1}{2} < t \leq d + 1$ platí odhad*

$$\|u_h - u\|_s \leq c h^{t-s} \|u\|_t. \tag{4.115}$$

Pro rovnice tvaru

$$-\frac{1}{\pi} \int\limits_\Gamma \log|x - \xi| u(\xi) d\Gamma(\xi) = f(x), \qquad x \in \Gamma, \tag{4.116}$$

byla v práci [EPS96] studována konvergence qualokační metody i případě, že Γ není hladká křivka, ale polygon.

Plně diskrétní qualokační metoda pro rovnici (4.116) s hladkou uzavřenou křivkou Γ je uvedena v [BS92]. Zde je vnitřní integrál aproximován lichobežníkovým kvadraturním pravidlem. Další plně diskrétní qualokační metody pro stejný typ rovnic ale s obecnější hranicí jsou studovány v [JSSE97] a [SloSa92].

Jiná cesta, kterou vývoj qualokační metody směřuje, je použití jiných aproximačních funkcí než B-splinů nebo použití neekvidistantích uzlů. V práci [GriSlo05] je studována qualokační metoda s využitím periodických splinů s vícenásobnými uzly a užití qualokační metody na nerovnoměrné síti je popsáno v práci [GriSlo04].

4.5 Numerický příklad

Naším řešeným problémem bude integrální rovnice, na kterou může být převedena Dirichletova úloha pro Laplaceovu rovnici. Mějme dánu omezenou otevřenou oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, jejíž hranice Γ je uzavřená hladká křivka. Tuto hranici Γ lze vyjádřit jako obraz intervalu $\langle 0,1\rangle$ v zobrazení ν, $\Gamma = \nu\langle 0,1\rangle$, kde $\nu : \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}^2$ je spojitá funkce s $|\nu'| > 0$. Tedy chceme nalézt harmonickou funkci $U : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ takovou, že

$$\Delta U(P) = 0, \qquad P \in \Omega, \tag{4.117}$$

$$U(P) = f, \qquad P \in \Gamma, \tag{4.118}$$

kde f je daná funkce.

Hledanou funkci U můžeme vyjádřit jako potenciál jednovrstvy s neznámou hustotou ρ

$$U(P) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma} \rho(Q) \ln \frac{1}{|P-Q|} dl_Q, \qquad P \in \Omega. \tag{4.119}$$

Hustota ρ je tedy řešením integrální rovnice $L\rho(P) = f(P)$, pro $P \in \Gamma$, kde

$$L\rho(P) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma} \rho(Q) \ln \frac{1}{|P-Q|} dl_Q$$

a kde $|P-Q|$ je euklidovská vzdálenost $Q, P \in \Gamma$.
Po zavedení parametrizace ν dalšími úpravami dostáváme

$$\begin{aligned}
L\rho(\nu(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{|\nu(x)-\nu(y)|}\right)\rho(\nu(y))|\nu'(y)|dy \\
&= 2\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{|2a\sin\pi(x-y)|}\right)\frac{1}{2\pi}\rho(\nu(y))|\nu'(y)|dy \\
&+ 2\int_0^1 \ln\left(\frac{|2a\sin\pi(x-y)|}{|\nu(x)-\nu(y)|}\right)\frac{1}{2\pi}\rho(\nu(y))|\nu'(y)|dy \\
&= (L_0u)(x) + (Ku)(x),
\end{aligned}$$

kde jsme položili $u(x) = (2\pi)^{-1}\rho(\nu(x))|\nu'(x)|$. Operátor K je integrální operátor s hladkým jádrem k, které je dáno vztahem

$$k(x,y) = \begin{cases} 2\ln(\frac{|a\sin(\pi(x-y))|}{|\nu(x)-\nu(y)|}), & x-y \notin \mathbb{Z}, \\ 2\ln(a\nu'(y)), & x-y \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{4.120}$$

Operátor L_0 je potenciál jednovrstvy pro kruh s poloměrem a, který lze vyjádřit ve tvaru (4.5), kde $\beta = -1$ a $b = 2\ln(a^{-1})$,

$$L_0u = 2\ln(r^{-1})\widehat{u}(0) + \sum_{k\neq 0} \frac{\widehat{u}(k)}{|k|} e^{2\pi i kx}. \tag{4.121}$$

Podle [KK69] totiž platí, že Fourierova řada funkce $-\ln(2|\sin\pi x|)$ je ve tvaru $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cos 2\pi kx$, a tedy

$$-\ln(2|\sin\pi x|)=\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z},k\neq 0}\frac{1}{|k|}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}kx}. \tag{4.122}$$

Proto můžeme psát

$$-2\ln(2a|\sin\pi x|=2\ln(a^{-1})+\sum_{k\in\mathbb{Z},k\neq 0}\frac{1}{|k|}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}kx}. \tag{4.123}$$

Pak operátor L_0 s konvolutorním jádrem můžeme psát ve tvaru (4.121). A integrální rovnici $L\rho(P)=f(P)$ můžeme vyjádřit ve tvaru

$$(L_0+K)u(x)=f(\nu(x)), \qquad x\in\langle 0,1\rangle. \tag{4.124}$$

Protože chceme odhadnout chybu u_h-u v negativní normě, spočteme nejprve aproximaci $U_h(P^*)$ funkce $U(P^*)$ následovně

$$U_h(P^*)=2\int_0^1\ln\frac{1}{|P^*-\nu(x)|}u_h(x)dx, \tag{4.125}$$

kde $u_h(x)$ je aproximace $u(x)$ a $P^*\in\Omega$.
Jestliže $U_h(P^*)$ zapíšeme jako skalární součin $(u_h(x),-2\ln|P^*-\nu(x)|)$ a $U(P^*)$ jako skalární součin $(u(x),-2\ln|P^*-\nu(x)|)$, můžeme pro libovolné $p\in\mathbb{R}^+$ psát

$$\begin{aligned}|U_h(P^*)-U(P^*)| &= |(u_h(x)-u(x),-2\ln|P^*-\nu(x)|)|\\ &\leq \|u_h-u\|_{-p}\|-2\ln|P^*-\nu(x)|\|_p.\end{aligned} \tag{4.126}$$

Z této poslední nerovnosti plyne, že řád konvergence $\|u_h-u\|_{-p}$ může být odhadnut pomocí $|U_h(P^*)-U(P^*)|$.
Přibližné řešení u_h budeme hledat jako lineární kombinaci po částech lineárních B-splinů $\phi_k(x)\in S_n^2$ daných předpisem

$$\phi_k(x)=\begin{cases}1-\frac{|x-kh|}{h}, & |x-kh|\leq h,\\ 0, & |x-kh|>h.\end{cases} \tag{4.127}$$

Tyto bázové funkce jsou jedno-periodické a každá funkce $\phi_k(x)$ má nosič interval $\langle(k-1)h,(k+1)h)$ a je rovna jedné v uzlech kh pro $k-0,1,\ldots,n-1$.
V našem případě budeme uvažovat rovnici (4.119) s integrační křivkou, která je kružnice se středem v $[0,0]$ o poloměru $\frac{1}{2}$, $\Gamma=\{P:|P|=\frac{1}{2}\}$ s parametrizací ve tvaru $\nu(x)=\frac{1}{2}(\cos 2\pi x,\sin 2\pi x)$. S takto vybranou hranicí Γ platí pro integrální operátor L, že $L=L_0$. Pravá strana rovnice $L\rho(P)=f(P)$ byla vybrána po zavedení parametrizace hranice Γ ve tvaru $f(\nu(x))=\frac{1}{2}\cos 2\pi x$, tedy tak, že přesné řešení rovnice (4.119)

je potenciál U v bodě o souřadnicích $[P_1, P_2]$ ve tvaru $U(P) = P_1$. V našem případě vezmeme bod $P = [0.1, 0.2]$.

Příslušnou integrální rovnici pro danou hranici Γ a pravou stranu můžeme pak přepsat takto

$$2\int_0^1 \ln \frac{1}{|\sin \pi(y-x)|} u_h(y)dy = \frac{1}{2}\cos 2\pi x. \tag{4.128}$$

Pro u_h ve tvaru $u_h = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \phi_k$ dostáváme pro kolokační metodu v uzlech kh, kde $k = 0, 1, \ldots, n-1$, z rovnice (4.128) soustavu lineárních algebraických rovnic $Ac = d$. Prvky matice A jsou dány vztahem

$$a_{j+1,k+1} = 2\int_0^1 \ln \frac{1}{|\sin \pi(y-kh)|}\phi_j(y)dy, \qquad j, k = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{4.129}$$

a pravá strana má tvar $d_k = \frac{1}{2}\cos 2\pi kh$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Integrály v rovnici (4.129) byly řešeny kvadraturní metodou uvedenou v [Chr71]. Idea této metody spočívá v následujícím rozepsání integrální rovnice $\int_0^T \ln |(\nu(t') - \nu(t)|\phi(t)dt = F(t')$, $t' \in \langle 0, T\rangle$, do tvaru

$$\int_0^T \ln |(\nu(t') - \nu(t)|(\phi(t) - \phi(t'))dt + \phi(t')\int_0^T \ln |(\nu(t') - \nu(t)|dt = F(t'). \tag{4.130}$$

Dodefinujeme-li první sčítanec v této rovnici nulou pro $t = t'$, bude se jednat o spojitou funkci na intervalu $\langle 0, T\rangle$ a příslušný integrál odhadneme obdélníkovým pravidlem. Druhý sčítanec je spočten metodou nazvanou anglicky „substracting out the singularity“. Neboli formálně místo integrálu $\int f$ spočteme $\int f - g + \int g$. První integrál je spočten numerickou kvadraturou a integrál z funkce g, která má stejný druh singularity jako funkce f, je spočten analyticky. Pomocí této kvadratury můžeme prvky matice A odhadnout prvky ve tvaru

$$a_{j,k} = h\ln(\sin |j-k|h) \quad j \neq k \tag{4.131}$$

$$a_{j,j} = h\left[\ln \pi + (n-1)\ln(0,5) + \frac{1}{3n} - n - 2\sum_{i=1}^{\frac{1}{2}n-1} \ln ih\right]. \tag{4.132}$$

Pro dvoubodovou qualokační metodu aplikovanou na rovnici (4.128) dostáváme soustavu lineárních algebraických rovnic $Ac = d$, kde prvky matice A jsou dány předpisem

$$
\begin{aligned}
a_{j+1,i+1} &= 2w_1h\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 \ln\frac{1}{|\sin\pi(y-(k+\xi_1)h)|}\phi_j(y)dy\phi_i((k+\xi_1)h) \\
&+ 2w_2h\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 \ln\frac{1}{|\sin\pi(y-(k+\xi_2)h)|}\phi_j(y)dy\phi_i((k+\xi_2)h) \quad (4.133)
\end{aligned}
$$

pro $j, i = 0, 1, \ldots, n-1$. Vektor pravých stran má v tomto případě prvky

$$
d_i = \frac{1}{2}h\sum_{k=0}^{n-1}(w_1\cos(2\pi(k+\xi_1)h)\phi_i(k+\xi_1)h + w_2\cos(2\pi(k+\xi_2)h)\phi_i(k+\xi_2)h. \quad (4.134)
$$

Pro kvadraturu vnitřního integrálu se singularitou byla použita idea naznačená v [Zh00]. Pokud totiž v 4.120 vezmeme $a = e^{-\frac{1}{2}}$, můžeme psát

$$
-2\ln(2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}|\sin\pi t|) = 1 + \sum_{m\in\mathbb{Z}, m\neq 0}\frac{1}{|m|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi mt}, \quad t\notin\mathbb{Z}. \quad (4.135)
$$

Pak dostaneme

$$
\begin{aligned}
L_0\phi_j(x) = -2\int_0^1 \ln|2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\sin\pi(x-y)|\phi_j(y)dy &= \int_0^1\left(1+\sum_{m\in\mathbb{Z},m\neq0}\frac{1}{|m|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi m(x-y)}\right)\phi_j(y)dy = \\
&= \left(\widehat{\phi}_j(0) + \sum_{m\in\mathbb{Z},m\neq0}\frac{1}{|m|}\widehat{\phi}_j(m)\right)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}mx} \quad (4.136)
\end{aligned}
$$

Jádro operátoru K z 4.120 má pak tvar konstanty $k(x,y) = -2h\ln 4$. Protože v našem příkladě pracujeme s reálnými funkcemi reálné proměnné, vezmeme odpovídající reálnou Fourierovu řadu. Příslušné Fourierovy koeficienty lze pro naše po částech lineární funkce spočítat analyticky.

n	kol.m.	ρ	qualokace($\frac{3}{7}, \frac{4}{7}$)	ρ	sym.qualokace($\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$)	ρ
4	$2,3\cdot10^{-2}$		$2,20.10^{-3}$		$1,90.10^{-3}$	
8	$5,4\cdot10^{-3}$	$2,09$	$1,31.10^{-5}$	$7,39$	$4,54.10^{-6}$	$8,7$
16	$1,3\cdot10^{-3}$	$2,05$	$3,71.10^{-7}$	$5,14$	$1,13.10^{-7}$	$5,33$
32	$3,2\cdot10^{-4}$	$2,02$	$1,12.10^{-8}$	$5,05$	$3,38.10^{-9}$	$5,06$
64	$8,12\cdot10^{-5}$	$1,98$	$2,78.10^{-10}$	$5,33$	$1,19.10^{-10}$	$4,82$

Tabulka 4.2: chyba a řád konvergence kolokační a qualokační metody

Chyba a řád konvergence pro kolokační metodu, qualokační metodu s dvoubodovým kvadraturním pravidlem v počátku a středu každého intervalu $\langle x_{k-1}, x_k)$ s vahami $\frac{3}{7}, \frac{4}{7}$ a symetrickým dvoubodovým kadraturním pravidlem v bodě $\xi = 0,2308296503$ a $1-\xi$ a s vahami $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$, jsou uvedeny v tabulce 4.2. Z tabulky vyplývá, že qualokační metoda dává vyšší řád konvergence než kolokační metoda.

Kapitola 5

Qualokační metoda a wavelety

5.1 Vztahy prostorů B-splinů a splinových waveletů

V této kapitole bude načrtnuta myšlenka použití jiných bázových funkcí v qualokační metodě než jedno-periodických B-splinů stupně d z prostoru S_h^d, jako v předešlých úvahách. Aproximační funkce a testové funkce v qualokační metodě nahradíme biortogonálními splinovými wavelety zavedenými ve druhé kapitole. Tato myšlenka byla uvedena v [S06]. Zabývejme se tedy nejprve vztahy prostorů B-splinů a splinových waveletů.

Předpokládejme, že $n = 2^J$ pro nějaké $J \in \mathbb{N}$, $J \geq j_0$. Nejhrubší waveletová úroveň j_0 je určena tak, aby nosič příslušné škálové funkce a waveletů byl menší než jedna. Označme $h_J := h = 2^{-J}$, $n_J := n = 2^J$, $V_J^{\langle 0,1)} := S_h^d$ a uzlové body $x_k^J = \frac{k}{n_J}$ pro $k = 0, 1, \ldots, n_J - 1$ na intervalu $\langle 0, 1)$. Protože z multirezoluční analýzy plyne, že

$$V_J^{\langle 0,1)} = V_{j_0}^{\langle 0,1)} \bigoplus_{j=1}^{J} W_j^{\langle 0,1)},$$

můžeme bázi prostoru $V_J^{\langle 0,1)}$, což je prostor jedno-periodických B-splinů stupně d s $h = 2^{-J}$, nahradit waveletovou bází prostorů $V_{j_0}^{\langle 0,1)}$ a $W_j^{\langle 0,1)}$, $j = j_0, \ldots, J-1$. Pokud označíme bázové funkce prostoru $V_J^{\langle 0,1)} := S_h^d$ jako ${}_d\phi_{J,k}$, $k = 0, 1, \ldots, n_J - 1$ a bázové funkce prostoru $W_j^{\langle 0,1)}$ jako ${}_{d,d'}\psi_{j,k}$, kde $k = 0, 1, \ldots, n_j - 1$ a $j = j_0, \ldots, J-1$ potom podle předchozího vztahu můžeme tuto bázi $\{{}_d\phi_{J,k}\}$, $k = 0, 1, \ldots, n_J - 1$ nahradit bází $\{{}_d\phi_{j_0,k}\}_{k=0}^{n_{j_0}} \bigcup \{{}_{d,d'}\psi_{j,k}\}_{k=0,1,\ldots,n_j-1, j=j_0,\ldots,J-1}$. Obě tyto báze budou generovat stejný prostor. (Protože v dalším budeme pracovat s biortogonálními wavelety představenými ve druhé kapitole, je použito označení pro wavelety ${}_{d,d'}\psi_{j,k}$, kde $d + d'$ je sudé číslo.) A pokud budeme přibližné řešení integrální rovnice hledat jako lineární kombinaci funkcí $\{{}_d\phi_{j_0,k}\}_{k=0}^{n_{j_0}-1} \bigcup \{{}_{d,d'}\psi_{j,k}\}_{k=0,\ldots,n_j-1, j=j_0,\ldots,J-1}$, hledáme vlastně řešení ve stejném prostoru, jako kdybychom ho hledali ve tvaru lineární kombinace splinů na nejjemnější úrovni. Ze třetí kapitoly navíc víme, že Fourierovy koeficienty splinových waveletů mají stejnou vlastnost jako Fourierovy koeficienty splinů. Tato volba bude mít výhodu v řídké matici odvozené soustavy rovnic qualokační metody.

5.2 Galerkinova metoda a biortogonální wavelety

Galerkinova metoda s využitím waveletů a její použití na hraniční integrální rovnice byla zpracována např. v [HSch01], [Zh00],[HKSch02], [HSch02], [LSch97]. Připomeňme, že qualokační metoda je vlastně semidiskrétní Galerkinova metoda, kde vnejší integrál je nahrazen speciálním qualokačním kvadraturním pravidlem. Protože se navíc jedná o poměrně propracovanou metodu pro řešení hraničních integrálních rovnic, uvedeme zde použití waveletové Galerkinovy metody pro řešení hraničních integrálních rovnic. Některé uvedené vlastnosti budeme totiž moci použít i případě, kdy vnější integrál nahradíme qualokačním kvadraturním pravidlem.
Budeme pracovat stejně jako v předešlé kapitole s integrální rovnicí,

$$\widetilde{L}z = \widetilde{f}, \qquad z \in \Gamma, \tag{5.1}$$

kterou lze pomocí parametrizace ν hranice Γ oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ převést na integrální rovnici

$$(Lu)(x) = f(x), \qquad x \in \langle 0,1), \tag{5.2}$$

kde $u(x) = z(\nu(x))|\nu'(x)| \in H^s_{(0,1)}$ je hledaná jedno-periodická funkce a $f = \widetilde{f}(\nu(x))$ je daná jedno-periodická funkce.

V Galerkinově metodě nahradíme prostor $H^s_{(0,1)}$ konečně dimensionálními prostory $V_J^{\langle 0,1)}$, kde $V_J^{\langle 0,1)} \equiv S^d_{h_J}$(prostory jedno-periodických B-splinů ${}_d\phi_{J,k}$ řádu $d+1$ s uzly v bodech $t_k^J = \frac{k}{n_J}$, kde $n_J = 2^J$ a $k = 0,1,\ldots,n_J - 1$ a $J \in \mathbb{N}, J \geq j_0$. V dalším ztotožníme uzly $t^J_{k+n_J l} \equiv t^J_k$ pro $l \in \mathbb{Z}$). Tedy v Galerkinově metodě hledáme takové $u_{h_J} \in S^d_{h_J}$, pro které platí

$$(Lu_{h_J}, {}_d\,\phi_{J,k}) = (f, {}_d\,\phi_{J,k}) \qquad \forall {}_d\phi_{h_J} \in S^d_{J,k},$$

kde $(\cdot,\cdot)$ označuje $L^2_{\langle 0,1\rangle}$ skalární součin $(f,g) = \int\limits_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$ a funkce ${}_d\phi_{J,k}$ jsou funkce z testového prostoru $V_J \equiv S^d_{h_J}$. Rovnice (5.2) s přesným řešením u nahrazeným přibližným řešením $u_{h_J} = \sum\limits_{k=1}^{n_J} a_k \cdot_d \phi_{J,k}$, pak vede na soustavu lineárních algebraických rovnic

$$L_{\phi,\phi} a = f_\phi, \tag{5.3}$$

kde $a = (a_1,\ldots,a_{n_J})^T$ a prvky matice $L_{\phi,\phi}$ jsou dány vztahem $l_{m+1,k+1} = (L_d\phi_{J,m}, {}_d\,\phi_{J,k})$ a pravá strana $f_{\phi_k} = (f, {}_d\,\phi_{J,k})$, kde $m,k = 0,\ldots,n_J - 1$.

Pokud však bázi $\{{}_d\phi_{J,k}\}_{k=0}^{n_J-1}$ prostoru $V_J^{\langle 0,1)}$ nahradíme bazí $\{{}_d\phi_{j_0,k}\}_{k=0}^{n_{j_0}-1} \bigcup \{{}_{d,d'}\psi_{j,k}\}$, pro $k = 0,1,\ldots,n_j - 1$ a $j = j_0,\ldots,J-1$, dostáváme soustavu lineárních algebraicých rovnic

$$\begin{pmatrix} A_{\phi\phi} & B_{\phi\psi} \\ C_{\psi\phi} & D_{\psi\psi} \end{pmatrix} p = f_\psi, \tag{5.4}$$

kde $p = \{p_{j,k}\}_{j=j_0,\dots,J-1,k=0,\dots,n_j-1}$, $a_{m+1,k+1} = (L_d\phi_{j_0,m},_d\, \phi_{j_0,k})$ jsou prvky matice $A_{\phi\phi}$ pro $m,k = 0,\dots,n_{j_0}-1$, prvky matice $B_{\phi\psi}$ jsou tvaru $b_{m+1,k+1} = (L_d\phi_{j_0,m},_{d,d'}\, \psi_{j,k})$, kde $m = 0,\dots,n_{j_0}-1$, $k = 0,\dots,n_j-1$, $j = j_0,\dots,J-1$, prvky matice $C_{\psi\phi}$ jsou tvaru $c_{m+1,k+1} = (L_{d,d'}\psi_{j,m},_d\, \phi_{j,k})$, $k = 0,\dots,n_{j_0}-1$, $m = 0,\dots,n_j-1$, $j = j_0,\dots,J-1$, a prvky matice $D_{\psi\psi}$ jsou tvaru $d_{m+1,k+1} = (L_{d,d'}\psi_{j,m},_{d,d'}\, \psi_{j,k})$ pro $k = 0,\dots,n_j-1$, $m = 0,\dots,n_j-1$, $j = j_0,\dots,J-1$.

Při diskretizaci některých operátorů bývá problémem takovéto soustavy rovnic špatná podmíněnost matice soustavy se zvětšujícím se J. Proto bylo v literatuře viz např. [HSch01], [HKSch02], [DHSch02] navrženo předpodmínění ve tvaru diagonální matice D^r s prvky $d^r_{(j,k),(j',k')} = 2^{rj}\delta_{j,j'}\delta_{k,k'}$, kde $k = 0,...,n_j-1, k' = 0,\dots,n_{j'}-1$ a $j_0 \le j,j' < J$. Jestliže integrální operátor $L : H^s \to H^{-s}$ je integrální operátor řádu $2s$ a označme-li $\overline{s} = \sup\{s \in \mathbb{R}; \widetilde{\psi}_{d,d'} \in H^s_{(0,1)}\}$, pak pokud $\overline{s} > -s$, pak matice $D^{-s}LD^{-s}$ je dobře podmíněna. Matice L je matice soustavy (5.4), tedy $L = \begin{pmatrix} A_{\phi\phi} & B_{\phi\psi} \\ C_{\psi\phi} & D_{\psi\psi} \end{pmatrix}$.

Dále ukážeme, že za jistých předpokladů můžeme některé prvky matice L a-priori položit rovny nule. Označme obrazy nosičů waveletů ${}_{d,d'}\psi_{j,k}$ následovně

$$\Omega_{j,k} = \left\{P = \nu(x) \in \mathbb{R}^2; x \in \operatorname{supp}_{d,d'}\psi_{j,k}\right\}.$$

V práci [HKSch02] je pro prvky matice L uveden odhad

$$|l_{(j,k),(j'k')}| \le C\frac{2^{(j+j')(\frac{1}{2}-d')}}{\operatorname{dist}(\Omega_{j,k},\Omega_{j',k'})^{1+2s+2d'}}. \tag{5.5}$$

Z odhadu plyne, že prvky matice L jsou nepřímo úměrné vzdálenosti obrazů nosičů waveletů ${}_{d,d'}\psi_{j,k}$ na hranici Γ. Tedy v matici L (kromě bloku $A_{\phi\phi}$) mohou být vynulovány ty prvky, ve kterých obrazy nosičů odpovídajících waveletů jsou od sebe vzdáleny více než jistý práh. Totiž (jak je uvedeno například v [HKSch02], [HSch01], [HSch02]) $l_{(j,k),(j'k')} = 0$, pokud $\operatorname{dist}(\Omega_{j,k},\Omega_{j',k'}) > B_{j,j'}$ pro $j,j' \ge j_0$. Zde práh $B_{j,j'}$ je pro parametry $a > 1$ a $d < \delta < d' + 2s$ definován následovně

$$B_{j,j'} = a\max\left\{2^{-\min\{j,j'\}}, 2^{\frac{2J(\delta-s)-(j+j')(\delta+d')}{2(d'+s)}}\right\}. \tag{5.6}$$

Tento krok se nazývá první komprese matice L. V této matici lze a-priori položit rovny nule ještě další prvky. Tato druhá fáze nulování se nazývá druhá komprese matice L. V ní jsou položeny nule prvky, v nichž diskretizační úrovně j a j' jsou příliš vzdáleny neboli ty prvky matice L, ve kterých obraz nosiče waveletu na jemnější úrovni je podmnožinou takové části obrazu nosiče waveletu na hrubší úrovni, na které je příslušný wavelet hladký. Přesněji: definujme tzv. singulární nosič waveletu $\Upsilon_{j,k}$ vztahem

$$\Upsilon_{j,k} = \left\{P = \nu(x) \in \mathbb{R}^2; \exists\varepsilon > 0|_{d,d'}\psi_{j,k} \in C^\infty(x-\varepsilon, x+\varepsilon)\right\}.$$

Při druhé kompresi matice L budou položeny nule ty prvky matice L, pro něž bude platit, buď že

$$\operatorname{dist}(\Upsilon_{j,k},\Omega_{j',k'}) > B'_{j,j'} \qquad j' > j,$$

nebo

$$\mathrm{dist}(\Upsilon_{j',k'}, \Omega_{j,k}) > B'_{j,j'}, \qquad j > j',$$

kde práh $B'_{j,j'}$ je pro parametry $a > 1$ a $d < \delta' < d' + 2s$ definován vztahem

$$B'_{j,j'} \;=\; a' \max\left\{2^{-\max\{j,j'\}}, 2^{\frac{2J(\delta'-s)-(j+j')\delta'-\max\{j,j'\}d'}{d'+2s}}\right\}. \tag{5.7}$$

Po provedené kompresi bude matice L řídká a bude tzv. „prstovou strukturu“.

Uveďme, jak budeme počítat vzdálenosti $\mathrm{dist}(\Omega_{j,k}, \Omega_{j',k'})$ a $\mathrm{dist}(\Upsilon_{j,k}, \Omega_{j',k'})$. Nalezneme kruhy $K(m_{j,k}, r_{j,k}) = \{P \in \mathbb{R}; |P - m_{j,k}| \leq r_{j,k}\}$, pro které bude platit, že $\Omega_{j,k} \subset K(m_{j,k}, r_{j,k})$. Potom dostáváme

$$\mathrm{dist}(\Omega_{j,k}, \Omega_{j',k'}) \leq \max\{0, |m_{j,k} - m_{j',k'}| - r_{j,k} - r_{j',k'}\}.$$

Vyjděme z nosičů waveletů ${}_{d,d'}\psi_{j,k}$. Pro $k = 0, \ldots, n_j - 1$ a $j \geq j_0$ platí, že

$$\mathrm{supp}_{d,d'}\psi_{j,k} = 2^{-j}\langle k + 1 - \frac{d+d'}{2}, k + \frac{d+d'}{2}\rangle.$$

Obrazy krajních bodů nosičů waveletů na úrovni $J-1$ v zobrazení ν označme postupně $P_1 = \nu(2^{-J+1}(k+1-\frac{d+d'}{2}))$ a $P_2 = \nu(2^{-J+1}(k+\frac{d+d'}{2}))$, kde $k = 0, \ldots, n_J-1$. Potom střed $m_{J-1,k}$ a poloměr $r_{J-1,k}$ příslušného kruhu $K(m_{j,k}, r_{j,k})$ jsou dány následujícími vztahy $m_{J-1,k} = |\frac{P_1+P_2}{2}|$ a $r_{J-1,k} = |\frac{P_1-P_2}{2}|$. Dále protože mezi nosiči waveletů na sousedních úrovních platí vztah

$$\mathrm{supp}_{d,d'}\psi_{j,k} = \mathrm{supp}_{d,d'}\psi_{j+1,2k+1-\frac{d+d'}{2}} + \mathrm{supp}_{d,d'}\psi_{j+1,2k+\frac{d+d'}{2}}$$

pro $k = 0, \ldots, n_j - 1$ a $j \geq j_0$, dostáváme následující vztah pro kruhy K na sousedních úrovních

$$K(m_{j,k}, r_{j,k}) \supset K(m_{j+1,2k+1-\frac{d+d'}{2}}, r_{j+1,2k+1-\frac{d+d'}{2},}) \cup K(m_{j+1,k+\frac{d+d'}{2}}, r_{j+1,k+\frac{d+d'}{2}}). \tag{5.8}$$

Tedy pokud určíme kruhy K na nejjemnější úrovni $J-1$, z tohoto vztahu můžeme získat kruhy na hrubších úrovních. Tyto kruhy nám také poslouží k určení $\mathrm{dist}(\Upsilon_{j,k}, \Omega_{j',k'})$. Singulární nosič $\mathrm{supp}\Upsilon_{j,k}$ pro $j \geq j_0$ obsahuje pouze body, $\nu(x)$, kde $x \in \langle 0, 1)$, které jsou uzly na úrovni $j + 1$. Můžeme tedy definovat množiny $2(d + d') - 1$ bodů

$$S_{j,k} = \{\nu(2^{-(j+1)}l); l = 0, ..., n_j - 1 \wedge 2(k + 1 - \frac{d+d'}{2}) \leq l \leq 2(k + \frac{d+d'}{2})\},$$

pro které platí, že $\Upsilon_{j,k} \subset S_{j,k}$. Připomeneme-li, že nosič škálové funkce na úrovni j_0, definované ve druhé kapitole, je interval $\langle 2^{-j_0}(k - \lfloor\frac{d}{2}\rfloor), 2^{-j_0}(k - \lceil\frac{d}{2}\rceil)\rangle$, pak singulární nosič, který obsahuje $d + 1$ bodů, je podmnožinou množiny označené jako

$$S_{j_0-1,k} = \{\nu(2^{-j_0}l); l = 0, \ldots, n_{j_0} \wedge k - \lfloor\frac{d}{2}\rfloor \leq l \leq k - \lceil\frac{d}{2}\rceil\}.$$

Z tohoto plyne, že

$$\operatorname{dist}(\Upsilon_{j,k}, \Omega_{j',k'}) \leq \max\{0, \min_{P \in S_{j,k}} |P - m_{j',k'}| - r_{j',k'}\}. \tag{5.9}$$

Nyní uveďme vztahy mezi kompresními prahy $B_{j,j'}$ a $B'_{j,j'}$ na různých úrovních j a j'. Ze zavedení kompresních prahů $B_{j,j'}$ a $B'_{j,j'}$ plyne, že jsou symetrické vzhledem k j a j'. Totiž $B_{j,j'} = B_{j',j}$ a $B'_{j,j'} = B'_{j',j}$. Tato vlastnost zachová symetrii matice L.

Navíc pro provedení komprese lze užít následující vztahy mezi kompresními prahy $B_{j,j'}$ a $B'_{j,j'}$ na různých úrovních j a j'. Připomeňme vztahy mezi obrazy nosičů $\Omega_{j,k}$, totiž $\Omega_{j+1,2k}, \Omega_{j+1,2k+1} \subset \Omega_{j,k}$ pro $k - 0, \ldots, n_j - 1$ a $j \geq j_0$ a následující vztah, který je zřejmý ze zavedení kompresních prahů, $B_{j+1,j'+1} \leq B_{j+1,j'} \leq B_{j,j'}$ pro $j, j' \geq j_0$. Z těchto vztahů plynou následující implikace

$$\operatorname{dist}(\Omega_{j,k}, \Omega_{j',k'}) > B_{j,j'} \Longrightarrow \begin{cases} \operatorname{dist}(\Omega_{j+1,2k}, \Omega_{j',k'}) > B_{j+1,j'}, \\ \operatorname{dist}(\Omega_{j+1,2k+1}, \Omega_{j',k'}) > B_{j+1,j'} \end{cases} \tag{5.10}$$

a odtud dále

$$\operatorname{dist}(\Omega_{j,k}, \Omega_{j',k'}) > B_{j,j'} \Longrightarrow \begin{cases} \operatorname{dist}(\Omega_{j+1,2k}, \Omega_{j'+1,2k'}) > B_{j+1,j'+1}, \\ \operatorname{dist}(\Omega_{j+1,2k}, \Omega_{j'+1,2k'+1}) > B_{j+1,j'+1}, \\ \operatorname{dist}(\Omega_{j+1,2k+1}, \Omega_{j'+1,2k'}) > B_{j+1,j'+1}, \\ \operatorname{dist}(\Omega_{j+1,2k+1}, \Omega_{j'+1,2k'+1}) > B_{j+1,j'+1}. \end{cases} \tag{5.11}$$

Pro kompresní práh $B'_{j,j'}$ z jeho zavedení v (5.7) pro $j > j' \geq j_0 - 1$ platí, že $B'_{j+1,j'} \leq B'_{j,j'}$. Ze vztahu mezi obrazy nosičů na sousedních úrovních pak plyne

$$\operatorname{dist}(\Omega_{j,k}, \Upsilon_{j',k'}) > B'_{j,j'} \Longrightarrow \begin{cases} \operatorname{dist}(\Omega_{j+1,2k}, \Upsilon_{j',k'}) > B_{j+1,j'}, \\ \operatorname{dist}(\Omega_{j+1,2k+1}, \Upsilon_{j',k'}) > B_{j+1,j'}. \end{cases} \tag{5.12}$$

Připomeňme ještě, že parametry a, a' a δ, δ' v kompresních prazích $B_{j,j'}$ a $B'_{j,j'}$ jsou vybrány tak, aby byly jistým kompromisem mezi hustotou matice L a absolutní chybou přesného řešení u. Po spočítání nenulových prvků matice L může být aplikována ještě a-posteriori komprese. Budou totiž položeny nule ty prvky matice L, jejichž hodnota je menší než nějaká prahová hranice. Tato prahová hranice byla v [DHSch02] navržena následovně

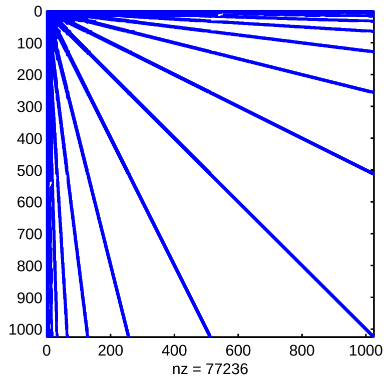
$$\varepsilon_{j,j'} = a'' \min\left\{2^{-\frac{|j-j'|}{2}}, 2^{-(J - \frac{j+j'}{2})\frac{\delta - s}{d+s}}\right\} 2^{2Js} 2^{-2\delta(J - \frac{j+j'}{2})},$$

kde $a'' < 1$ a $\delta \in (d, d' + 2s)$. Takto tedy získáme získáme řídkou matici soustavy. Především a-priori komprese má výhodu v tom, že není nutno počítat všechny prvky matice L.

5.3 Qualokace a biortogonální wavelety

V této části bude nastíněna myšlenka použití waveletů v qualokační metodě. Hledáme řešení rovnice

$$Lu(x) = f(x), \qquad x \in \langle 0, 1 \rangle, \tag{5.13}$$



Obrázek 5.1: Struktura matice L po kompresi

kde L je integrální operátor z H^s do $H^{s-\beta}$, f je známá funkce a u je hledané řešení z H^s. Předpokládejme, že tato rovnice vznikla z hraniční integrální rovnice po zavedení parametrizace hranice integrační oblasti z $\mathbb{R}^2$. Zvolme pevně $J \in \mathbb{N}$ a definujme přirozené číslo $n_J = 2^J$ a $h_J = \frac{1}{n_J}$. V qualokační metodě nahradíme prostor H^s konečně dimensionálními prostory $S^d_{h_J}$ (jedno-periodické B-spliny řádu $d+1$ s uzly v bodech $x_m = \frac{m}{n_J}$, $m = 0, \ldots, n_J - 1$), v nichž budeme hledat přibližné řešení u_{h_J} takové, aby platilo

$$\langle Lu_{h_J}, \chi_{h_J} \rangle = \langle f, \chi_{h_J} \rangle, \qquad \chi_{h_J} \in S^d_{h_J}.$$

Qualokační kvadraturní pravidlo je dáno obecně vztahem

$$\langle f, g \rangle = h_J \sum_{m=0}^{n_J-1} \sum_{k=1}^{K} w_k (f\overline{g})(x_m + \xi_k h_J),$$

kde váhy $w_k > 0$ a $\sum_{k=1}^{K} w_k = 1$ a pro body ξ_k platí $0 \leq \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_K < 1$. Pro jednoduchost budeme uvažovat nejjednodušší, tedy dvoubodové, qualokační pravidlo tvaru

$$\langle f, g \rangle = h_J \sum_{m=0}^{n_J-1} \left[w_1 (f\overline{g})(\frac{m+\xi_1}{n_J}) + w_2 (f\overline{g})(\frac{m+\xi_2}{n_J}) \right]. \tag{5.14}$$

Protože hledané přibližné řešení $u_{h_J} \in V_J \equiv S^d_{h_J}$, můžeme psát $u_{h_J} = \sum_{k=0}^{n_J-1} a_k \phi_{J,k}$, kde $\{\phi_{J,k}\}_{k=0}^{n_J-1}$ je báze prostoru $V_J \equiv S^d_{h_J}$. Tento prostor lze rozložit na direktní součet

$V_J = V_{j_0} \cup \bigcup\limits_{j=j_0}^{J} W_j$. A tudíž vzhledem k waveletové bázi můžeme psát

$$u_{h_J} = \sum_{k=0}^{n_{j_0}-1} a_k \phi_{j_0,k} + \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{k=0}^{n_j-1} b_{j,k} \psi_{j,k}.$$

Pro jednodušší zápis označme $\phi_{j_0,k} \equiv \psi_{j_0-1,k}$ a $a_k \equiv b_{j_0-1,k}$, kde $k = 0, \ldots, n_{j_0} - 1$. Pak můžeme psát

$$u_{h_J}(x) = \sum_{j=j_0-1}^{J} \sum_{k=0}^{n_j-1} b_{j,k} \psi_{j,k}, \qquad x \in \langle 0, 1 \rangle. \tag{5.15}$$

Dosadíme-li tento vztah do rovnice (5.13) a vezmeme-li za testovací funkce prvky waveletové báze $\{\psi_{j,k}\}_{j_0-1,\ \ k=0}^{J-1,n_j-1}$, můžeme rovnici (5.13) přepsat do tvaru

$$\sum_{j=j_0-1}^{J} \sum_{k=0}^{n_j-1} b_{j,k} \langle L\psi_{j,k}, \psi_{j',k'} \rangle = \langle f, \psi_{j',k'} \rangle, \qquad j' = j_0 - 1, \ldots, J-1, k = 0, \ldots, n_j \tag{5.16}$$

Tuto soustavu lineárních algebraických rovnic můžeme přepsat do tvaru $\mathbf{L}b = c$, kde čtvercová matice $\mathbf{L}$ je řádu 2^J, jejíž prvky jsou $\langle L\psi_{j,k}, \psi_{j',k'} \rangle$, kde $j, j' = j_0, \ldots, J$, $k = 0, \ldots, n_j$ a $k' = 0, \ldots, n_{j'}$, $b = \{b_{j,k}\}$ je vektor hledaných koeficientů s $j = j_0, \ldots, J$, $k = 0, \ldots, n_j$ a vektor c je vektor pravé strany $c = \langle f, \psi_{j',k'} \rangle$, kde $j' = j_0 - 1, \ldots, J-1$ a $k = 0, \ldots, n_j$. Qualokační kvadraturní pravidlo je tvaru

$$\langle L\psi_{j,k}, \psi_{J-1,k'} \rangle = h_J \sum_{m=0}^{n_J-1} \left[w_1 (L\psi_{j,k} \cdot \psi_{J-1,k'})(\frac{m+\xi_1}{n_J}) + w_2 (L\psi_{j,k} \cdot \psi_{J-1,k'})(\frac{m+\xi_2}{n_J}) \right]. \tag{5.17}$$

Podívejme se teď, jak toto qualokační pravidlo můžeme přepsat vzhledem k waveletům na různých úrovních. Uvažujme dále biortogonální wavelety ze druhé kapitoly a soustřeďme se na počástech konstantní nebo počástech lineární wavelety. Jak je vidět z obrázků (2.1), (2.3), (2.5), grafy waveletů $\psi_{j,k}$ budou vždy symetrické (nebo antisymetrické) vzhledem ke středu nosiče, který má délku $h_j(d + d' - 1)$, kde $d + d'$ je sudé číslo. Tedy délka nosiče waveletu $\psi_{j,k}$ je vždy lichý násobek h_j. Z toho plyne, že na prostředním intervalu délky h_j wavelet $\psi_{j,k}$ mění svůj funkční předpis, a tudíž různé předpisy po částech konstantní, resp. po částech lineární funkce bude mít příslušný wavelet na intervalu délky h_{j+1}.

Nejvyšší úroveň použitých waveletů je $J - 1$, tedy bude se jednat o wavelety $\psi_{J-1,k}$, kde $k = 0, \ldots, n_{J-1} - 1$. Podle předchozí úvahy, funkce $\psi_{J-1,k}$ bude mít různý funkční předpis na intervalech délky h_{J-1} a uprostřed nosiče na intervalech délky h_J. Navíc připomeňme, že předpokladem qualokační metody je ekvidistantní dělení intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Na této úrovni se tedy bude jednat o klasické dvoubodové qualokační kvadraturní pravidlo tvaru (5.17).

Na úrovni $J-2$ bude funkce $\psi_{j',k'}$ měnit svůj funkční předpis na intervalech délky h_{J-1} a h_{J-2}. Potom toto qualokační kvadraturní pravidlo můžeme přepsat následovně

$$\begin{aligned}
\langle L\psi_{j,k}, \psi_{J-2,k'}\rangle &= h_J \sum_{m=0}^{n_{J-1}-1} \left[w_1 (L\psi_{j,k} \cdot \psi_{J-2,k'}) \left(\frac{2m+\xi_1}{n_J}\right)\right. \\
&+ \left. w_2 (L\psi_{j,k} \cdot \psi_{J-2,k'}) \left(\frac{2m+\xi_2}{n_J}\right)\right] \\
&+ \left[w_1 (L\psi_{j,k} \cdot \psi_{J-2,k'}) \left(\frac{2m+1+\xi_1}{n_J}\right)\right. \\
&+ \left. w_2 (L\psi_{j,k} \cdot \psi_{J-2,k'}) \left(\frac{2m+1+\xi_2}{n_J}\right)\right]
\end{aligned}$$

Toto dvoubodové kvadraturní pravidlo můžeme formálně přepsat do tvaru čtyřbodového qualokačního pravidla, kde součet vah je roven jedné,

$$\begin{aligned}
\langle L\psi_{j,k}, \psi_{J-2,k'}\rangle &= h_{J-1} \sum_{m=0}^{n_{J-1}-1} \left[\frac{w_1}{2} (L\psi_{j,k} \cdot \psi_{J-2,k'}) \left(\frac{2m+\xi_1}{n_J}\right)\right. \\
&+ \left. \frac{w_2}{2} (L\psi_{j,k} \cdot \psi_{J-2,k'}) \left(\frac{2m+\xi_2}{n_J}\right)\right] \\
&+ \left[\frac{w_1}{2} (L\psi_{j,k} \cdot \psi_{J-2,k'}) \left(\frac{2m+1+\xi_1}{n_J}\right)\right. \\
&+ \left. \frac{w_2}{2} (L\psi_{j,k} \cdot \psi_{J-2,k'}) \left(\frac{2m+1+\xi_2}{n_J}\right)\right].
\end{aligned}$$

Stejnou úvahou obecně pro wavelety $\psi_{j',k'}$, $j' = j_0, \ldots, J-1$, můžeme toto qualokační pravidlo přepsat do tvaru kvadraturního pravidla následujícího tvaru

$$\begin{aligned}
\langle L\psi_{j,k}, \psi_{j',k'}\rangle &= h_{j'+1} \sum_{m=0}^{n_{j'+1}-1} \left[\frac{w_1}{2^{J-j'-1}} \sum_{i=0}^{J-j'-1} (L\psi_{j,k} \cdot \psi_{j',k'}) \left(\frac{2^{J-j'-1}m+i+\xi_1}{n_J}\right)\right. \\
&= \left. \frac{w_2}{2^{J-j'-1}} (L\psi_{j,k} \cdot \psi_{j',k'}) \left(\frac{2^{J-j'-1}m+i+\xi_2}{n_J}\right)\right].
\end{aligned}$$

Na nejnižší úrovni j_0 pro wavelety $\psi_{j_0,k'}$ můžeme dané qualokační pravidlo přepsat formálně do tvaru kvadraturního pravidla s 2^{J-j_0+1} kvadraturními body,

$$\begin{aligned}
\langle L\psi_{j,k}, \psi_{j_0,k'}\rangle &= h_{j_0+1} \sum_{m=0}^{n_{j_0+1}-1} \left[\frac{w_1}{2^{J-j_0-1}} \sum_{i=0}^{J-j_0-1} (L\psi_{j,k} \cdot \psi_{j_0,k'}) \left(\frac{2^{J-j_0-1}m+i+\xi_1}{n_J}\right)\right. \\
&+ \left. \frac{w_2}{2^{J-j_0-1}} \sum_{i=0}^{J-j_0-1} (L\psi_{j,k} \cdot \psi_{j_0,k'}) \left(\frac{2^{J-j_0-1}m+i+\xi_2}{n_J}\right)\right].
\end{aligned}$$

Pro škálové funkce na úrovni j_0 označené jako $\psi_{j_0-1,k'}$, kde $k = 0, \ldots, n_{j_0} - 1$, můžeme qualokační pravidlo přepsat do tvaru

$$\begin{aligned}\langle L\psi_{j,k}, \psi_{j_0-1,k'} \rangle &= h_{j_0} \sum_{m=0}^{n_{j_0}-1} \left[\frac{w_1}{2^{J-j_0}} \sum_{i=0}^{J-j_0} (L\psi_{j,k} \cdot \psi_{j_0-1,k'}) \left(\frac{2^{J-j_0}m + i + \xi_1}{n_J} \right) \right. \\ &+ \left. \frac{w_2}{2^{J-j_0}} \sum_{i=0}^{J-j_0} (L\psi_{j,k} \cdot \psi_{j_0-1,k'}) \left(\frac{2^{J-j_0}m + i + \xi_2}{n_J} \right) \right].\end{aligned}$$

Nyní se na qualokační metodu můžeme podívat jako na semidiskrétní Galerkinovu metodu, kde vnější integrál je řešen speciálním kvadraturním pravidlem. Z popisu Galerkinovy metody a jejího použití při řešení hraničních integrálních rovnic při použití biortogonální waveletové báze, vyplývá, že v příslušné matici soustavy lineárních rovnic (5.16) můžeme provést dříve popsanou první a druhou kompresi. Odpovídající matice soustavy lineárních rovnic bude tedy řídká a bude mít tzv. „prstovou“ strukturu. Qualokační kvadraturní pravidlo bude tedy nutné spočítat pouze pro některé prvky. A zároveň použitím tohoto qualokačního kvadraturního pravidla pro vnější integrál máme zajištěno, že rychlost konvergence bude stejná jako u Galerkinovy metody.

Literatura

[A83] Arnold, D. N.: *A Spline-Trigonomeric Galerkin Method and an Exponentially Convergent Boundary Integral Method*, Math. Comp., vol. 41, Issue 164, p. 383-397, 1983.

[AW85] Arnold, D. N., Wendland, W. L. : *The Convergence of Spline Collocation for Strongly Elliptic Equations on Curves*. Numer. Math. 47, p. 317-541, 1985.

[A97] Atkinson, K. E.: *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*, Cambridge University Press, 1997.

[BS92] Burn, B. J., Sloan, I. H. : *An Unconventional Quadrature Method for Logarithmic-kernel Integral Equations on Closed Curves* J. Integral Eqns. Applics., vol. 4., no. 1, 1992.

[B05a] Bittner, K.: *A New Veiw on Biorthogonal Spline Wavelets*, preprint submitted to Appl. Comput. Harmon. Anal., 2005.

[B05b] Bittner, K.: *Biorthogonal Spline Wavelets on the Interval*, conference title, editors, pp.1-6, 2005.

[CDF92] Cohen, A., Daubeschies, I., Feauveau, J. C.: *Biorthogonal Bases of Compactly Supported Wavelets* , Pure Appl. Math., vol. 45, p. 485-560, 1992.

[Da92] Daubeschies, I.: *Ten lectures on wavelets*, Capital City Press, Montpelier, Vermont, 1992.

[EPS96] Elschner, J., Prössdorf, S., Sloan, I. H.: *The Qualocation Method for Symm's Integral Equation on a Polygon*, Math. Nachr. 177, pp. 81–108, 1996.

[DHSch02] Dahmen, W., Harbrecht, H., Konik, M., Schneider, R.: *Compression Techniques for Boundary Integral Equations-Optimal Complexity Estimates*, Sonderforschungsbereich 393, Technische Universität Chemnitz, preprint SFB393/02-06 2002.

[GraRy71] Gradštejn, I. D., Ryžik, I. M.: *Tablici integralov, summ, rjadov i proizvedenij*, Nauka, Moskva, 1971.

[GriSlo05] Grigorieff, R. D., Sloan, I. H.: *Qualocation for Boundary Integral Equations Using Splines with Multiple Knots*,J. Integral Eqns. Applics., vol. 18, no. 1, Spring 2006.

[GriSlo04] Grigorieff, R. D., Sloan, I. H.: *On Qualocation and Collocation Methods for Equations with Piesewise Continuous Coefficients Using Continuous Splines on Quasi-uniform Meshes*, $http : //www.maths.unsw.edu.au/applied/files/2000/amr00_10.pdf$.

[Gl90] ed.Golberg, M. A.: *Numerical Solution of Integral Equations*, Plenum Press, New York, 1990.

[HagSil88] Hagen, R., Silbermann, B.: *On the Stability of the Qualocation Method,* Seminar analysis. Operator equations and numerical analysis 1987/88, Berlin, Akad. d. Wiss. d. DDR, p. 43-52, 1988.

[HagSil91] Hagen, R., Silbermann, B.: *On the Convergence of the Qualocation Method*, preprint Nr. 207/5. Jg./ 1991.

[HSch01] Harbrecht, H., Schneider, R.: *Wavelet Galerkin Schemes for 2D-BME*, Operator Theory: Advances and Applications, vol. 121, pp. 221-260, 2001.

[HKSch02] Harbrecht, H., Konik, M., Schneider, R.: *Fully Discrete Wavelet Galerkin Schemes*, Sonderforschungsbereich 393, Technische Universität Chemnitz,preprint SFB 393/02-03 2002.

[HSch02] Harbrecht, H., Schneider, R.: *Wavelets for the Fast Solution of Boundary Integral Equations*, Sonderforschungsbereich 393, Technische Universität Chemnitz, preprint SFB393/02-19, 2002.

[ChanSlo90] Chandler, G. A., Sloan, I. H.: *Spline Qualocation Methods for Boundary Integral Equations* , Numer. Math. 58, p. 537-567, 1990.

[Chr71] Christiansen, S.: *Numerical Solution of an Integral Equation with a Logarithmic Kernel*, BIT 11, pp. 276-287, 1971.

[Chui92a] ed. Chui, C. K.: *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*, Academic press, Inc., 1992.

[Chui92b] Chui,C.K.: *An Introduction to Wavelets*, Academic press, Inc., 1992.

[ChuWa92a] Chui, C. K., Wang ,J.: *A General Framework of Compactly Supported Splines and Wavelets*, J. Approx. Theory 71, pp. 54-68, 1992.

[ChuWa92b] Chui,C.K.,Wang,J.: *On Compactly Supported Spline Wavelets and a Duality Principle*, Trans. Amer. Math. Soc. 330, pp. 903-915, 1992.

[JSSE97] Jeon, Y., Sloan, I. H., Stephan, E. P., Elschner, J.: *Discrete Qualocation Methods for Logaritmic-Kernel Integral Equations on a Piecewise Smooth Boundary*, Adv.Comp. Math., vol. 7, no. 4, pp. 547-571(25), 1997.

[Kr89] Kress, R.: *Linear Integral Equations*, Springer-Verlag, 1989.

[KK69] Kufner, A., Kadlec, J.: *Fourierovy řady*, Academia, 1969.

[LMR97] Louis, A., K., Maass, P., Reieder, A.: *Wavelets. Theory and Applications*, Chichester, 1997.

[LSch97] Lage, Ch., Schwab, Ch.: *Wavelet Galerkin Algorithms for Boundary Integral Equations*, Seminar für Angewaldte Mathematik, Zürich, Switzerland, 1997.

[Naj04] Najzar, K.: *Základy teorie waveletů*, Karolinum, Praha, 2004.

[Sat98] Satoru, I.: *Real Analysis-With an Introduction to Wavelet Theory*, in Translations of Mathematical Monographs, vol. 177, AMS, 1998.

[Slo88] Sloan, I. H.: *A Quadrature-Based Approach to Improving the Collocation Method*, Numer. Math. 54, p. 41-56, 1988.

[Slo91] Sloan, I. H.: *Error Analysis of Boundary Integral Methods*, Acta Numerica 1, pp. 287-339, 1991.

[Slo00] Sloan, I. H.: *Qualocation*, J. Com. and Appl. Math. 125, p. 461-478, 2000.

[SloSa92] Sloan, I. H., Saranen, J.: *Quadrature Methods for Logaritmic-kernel Integral Equations on Closed Curves*, IMA J. Numer. Anal. 12, p. 167-187, 1992.

[SloTr98] Sloan, I. H., Tran, T.: *Toletant Qualocation-a Qualocation Method for Boundary Integral Equations with Reduced Regularity Requirement*, J. Integral Eqns. Applics., vol. 10, 1, 1998.

[SloTr01] Sloan, I. H., Tran, T.: *The Toletant Qualocation Methods for Variable-Coefficient Elliptic Equations on Curves*, J. Integral Eqns. Applics., vol. 13, 1, 2001.

[SloWen89] Sloan, I. H., Wendland, W. L.: *A Quadrature-Based Approach to Improving the Collocation Method for Splines of Even Degree*, Z. für Anal. und ihre Anw. 8, p. 361-376, 1989.

[SloWen98] Sloan, I. H., Wendland, W. L.: *Qualocation Methods for Elliptic Equations on Curves*, Numer. Math. 83, p. 497-533, 1999.

[SloWen99] Sloan, I. H., Wendland, W. L.: *Commutator Properties for Periodic Splines*, J. Approx. Theory 97, p. 254-281, 1999.

[SloWend99] Sloan, I. H., Wendland, W. L.: *Spline Qualocation Methods for Variable-Coefficient Elliptic Boundary Integral Equations*, Numer. Math. 79, p. 451-483, 1998.

[S02] Šimsová, J.: *Wavelet Galerkin Method for Solving the Fredholm's Integral Equations of the Second Kind*, sborník z konference 9th Polish-Czech Mathematical School, ISSN 1643-6555.

[S03] Šimsová, J.: *The Comparison of Semi-Orthogonal Wavelet and Othonormal Wavelet Sets for Solving Fredholm's Integral Equations of the Second Kind*, sborník z konference 10th Polish-Czech Mathematical School, Czestochowa, ISBN 83-7098-824-5.

[S05] Šimsová, J.: *Qualocation Methods-Methods for Solving of Integral Equations*, sborník z konference 12th Polish-Czech Mathematical School, Hluboš, ISBN 80-7044-663-3.

[S06] Šimsová, J.: *Qualocation Methods and Spline Wavelets*, sborník z konference 13th Polish-Czech Mathematical School, Krakow, v tisku.

[S07] Šimsová, J.: *Properties of Fourier Coefficients of Spline Wavelets*, sborník z konference 14th Polish-Czech Mathematical School, Czestochowa, v tisku.

[WC99] Walter, G. G., Cai, L.: *Periodic Wavelets from Scratch*, J. Com. Anal. Appl., vol. 1, no. 1, 1999.

[YSlo88] Yan, Y. G., Sloan, I. H.: *On Integral Equations of the First Kind with Logaritmic Kernels*, J. Integral Eqns. Applics., vol. 1., no. 4., p. 549-579, 1988.

[Zh00] Zhang, P., Zhang, Y.: *Wavelet Method for Boundary Integral Equations*, J.Comp. Math., Vol.18, pp 25-42, 2000.