Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

Matematický ústav Univerzity Karlovy

Role nekonečných součinů v budování teorie funkcí komplexní proměnné

Disertační práce

Autor: Mgr. Ondřej Moc

Školitel: Doc. RNDr. Jiří Veselý, CSc.

Obor: M8 – Obecné otázky matematiky a informatiky

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem tuto disertační práci vypracoval samostatně a že jsem použil pouze citované zdroje.

V Ústí nad Labem dne 20. dubna 2007 *Ondřej Moc*

Obsah

Předmluva

Nekonečné součiny se ve výuce základního kurzu matematické analýzy v současnosti spíše krčí ve stínu svého „sourozence“ – nekonečných řad. Avšak nebylo tomu tak vždy. Například učebnice teorie funkcí z konce 19. a počátku 20. století obsahují poměrně rozsáhlé kapitoly věnované nekonečným součinům a výsledkům z nich plynoucím.

Tato práce si klade za cíl popsat některé aspekty dějin matematiky spojené s nekonečnými součiny. Přitom kladu důraz na ukázku toho, jak byly nekonečné součiny použity při odhalování vlastností funkce gama a funkce sinus a jakou roli sehrály tyto vlastnosti při formulaci tzv. faktorizační věty. Název disertační práce zní *Role nekonečných součinů v budování teorie funkcí komplexní proměnné.* Podrobnější stanovení úkolů práce mi bylo zadáno následujícím způsobem:

> *Prozkoumat zavádění nekonečných součinů u Gausse, Eulera, Weierstrasse a dalších a identifikovat základní výsledky teorie funkcí komplexní proměnné, které jsou s nimi spojeny. Soustředit se zejména na funkci gama, nalézt co nejpřístupnější cestu k Bohr-Mollerupově větě a Wielandově větě o charakterizaci funkce gama. Studovat paralelu mezi vlastnostmi součtů řad a nekonečných součinů.*

Kromě tohoto zadání jsem měl na zřeteli myšlenku, že jedním z možných čtenářů je i středoškolský učitel matematiky, který má zájem prohloubit si své znalosti o jedno netradiční téma.

Disertační práce je rozdělena do osmi kapitol. Protože pracuji s nekonečnými součiny komplexních čísel a komplexních funkcí, je první kapitola věnována připomenutí některých definic a vět z komplexní analýzy. Druhá kapitola představuje úvod do teorie nekonečných řad a tvoří přípravný materiál pro následující kapitolu. V třetí kapitole je uvedena definice nekonečného součinu čísel a funkcí. Dále jsou zde popsány některé analogie mezi vlastnostmi nekonečných řad a nekonečných součinů. Poslední část třetí kapitoly je věnována dvěma nejstarším známým nekonečným součinům, jejichž autory jsou François Viète (1540 – 1603) a John Wallis (1616 – 1703).

Za těžiště disertační práce považuji kapitoly číslo 4 až 6. V čtvrté kapitole se zabývám tím, jak Leonhard Euler (1707 – 1783) pracoval s nekonečnými součiny. Konkrétně je popsán způsob Eulerova odvození funkcí gama a sinus ve formě nekonečných součinů. V čtvrté kapitole se také zabývám podmínkami, které jednoznačně charakterizují funkci gama. Na příkladech ukazuji, proč k definici funkce gama nepostačuje pouhé uvedení funkcionální rovnice $f(x+1) = xf(x)$, ani přidání podmínek spojitosti nebo konvexity řešení zmíněné funkcionální rovnice. Je zmíněna Bohr-Mollerupova věta, která uvádí podmínky pro jednoznačnou charakterizaci funkce gama v reálném oboru, respektive Wielandtova věta, která jednoznačně charakterizuje funkci gama v komplexním oboru. Při popisu výsledků spojených s tzv. *sinovým součinem*, tj. vyjádřením funkce sinus ve tvaru nekonečného součinu, se věnuji i funkci zeta a jejím hodnotám.

Pátá kapitola popisuje způsob, kterým KARL FRIEDRICH GAUSS (1777 – 1855) definoval funkci gama pomocí nekonečného součinu v komplexním oboru. Protože Gaussovo odvození se opírá o hypergeometrickou funkci, je připojena zmínka o této funkci. Na závěr kapitoly popisuji odvození tzv. Gaussovy multiplikační formule.

V šesté kapitole je popsán způsob, kterým Weierstrass dospěl k faktorizační větě. Je zmíněn Cauchyho výsledek o charakterizaci jistých funkcí pomocí jejich nulových bodů, Weierstrassovo zavedení funkce *factorielle*, dále pak tzv. *elementární faktory* a jejich role v konvergenci nekonečných součinů funkcí.

Poslední dvě kapitoly mají spíše informativní charakter. Sedmá kapitola přináší životopisné údaje o některých matematicích, zmíněných v této práci. V osmé kapitole uvádím internetové zdroje, ze kterých jsem čerpal původní texty a o kterých si myslím, že mohou být prospěšné pro ostatní čtenáře.

Rád bych na tomto místě poděkoval všem, kteří mi jakýmkoliv způsobem pomohli při tvorbě této práce. Zejména bych chtěl poděkovat doc. RNDr. Jiřímu Veselému, CSc. za cenné rady a připomínky, poskytnutou literaturu a laskavou pomoc během celého postgraduálního studia. Dále pak Ing. Miloslavu Průchovi a Ing. Josefu Smejkalovi za jejich nezištnou pomoc při překladu některých cizojazyčných textů. V neposlední řadě patří můj dík i RNDr. Pavlu Šišmovi, Ph.D. za jeho příspěvky do emailové konference math-his@muni.cz, ve kterých naší komunitu upozorňuje na nově objevené informační zdroje.

Ondřej Moc

Kapitola 1

Komplexní analýza

1.1 Úvod

Teorie funkcí komplexní proměnné (dále jen komplexní analýza) byla postavena na pevné základy v průběhu devatenáctého století. Patrně nejvíce se v této době o rozvoj komplexní analýzy zasloužili tito tři muži: Louis Augustin Cauchy (1789 – 1857), Bernhard Riemann (1826 – 1866) a Karl Weierstrass (1815 – 1897).

Cauchy ve svých pracích vyšetřoval vlastnosti holomorfních funkcí plynoucí z jejich integrace. Věnoval se tedy např. problému nezávislosti křivkového integrálu na integrační cestě. Riemannův přístup byl geometrický. Pro Riemanna funkce představovaly zobrazení oblastí v komplexní rovině. Často využíval fyzikální představy spojené např. s hydrodynamickými jevy. Weierstrassovo pojetí se opíralo zejména o práci s mocninnými řadami. Studoval celé funkce, tj. funkce, které jsou holomorfní ve všech bodech Gaussovy roviny. Při vyšetřování jejich vlastností věnoval Weierstrass velkou pozornost funkcím, které jsou definovány pomocí nekonečných součinů.

Uvedené přístupy se v některých případech vzájemně ovlivňovaly. Současný historik matematiky Umberto Bottazzini [1]) uvedl v článku [6]:

> *Riemannova teorie komplexních funkcí se zdá být pozadím Weierstrassových prací a přednášek. Významný důkaz podává nepublikovaná korespondence Weierstrasse s jeho bývalým studentem Schwarzem. Mnoho Weierstrassových výsledků, včetně příkladu spojité, nikde nediferencovatelné funkce, nebo jeho protipříkladu k Dirichletovu principu, bylo motivováno kritikou Riemannových metod a jeho nedůvěrou k Riemannovým „geometrickým fantaziím“. Místo toho (Weierstrass) pracoval s mocninnými řadami, a to pro své přesvědčení, že teorie analytických funkcí musí být založena na jednoduchých „algebraických pravdách“.*

---

[1]) Umberto Bottazzini je řádným profesorem matematiky na Katedře matematiky, Univerzita Palermo, Itálie; email: bottazzi@math.unipo.it.

1.2 Operace s komplexními funkcemi

V této práci budu používat některé pojmy z teorie funkcí komplexní proměnné. Proto připomenu vybrané pojmy, se kterými se budeme dále setkávat. Předpokládám přitom, že čtenář je seznámen s pojmy *množina*, *zobrazení*, *komplexní číslo*, dále pak s početními operacemi s komplexními čísly, s *absolutní hodnotou* a *argumentem* komplexního čísla, s (prstencovým) *okolím bodu*. Symbolem $\mathbb{C}$ budu značit množinu všech komplexních čísel. Množinu $\mathbb{S}$ definujeme rovností $\mathbb{S} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. *Komplexní funkcí komplexní proměnné* (dále jen *komplexní funkcí* [2])) rozumíme zobrazení z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{S}$.

Definice limity komplexní funkce je po formální stránce stejná jako v $\mathbb{R}$. Nechť symbol $U(A, \varepsilon)$ značí (kruhové) okolí bodu $A \in \mathbb{C}$ s poloměrem $\varepsilon > 0$ a symbol $P(z_0, \delta)$ prstencové (redukované) okolí bodu $z_0 \in \mathbb{C}$ s poloměrem $\delta > 0$. Budeme také pracovat s pojmem okolí nevlastního bodu ∞. Okolí $U(\infty, \rho)$ bodu ∞ s poloměrem $\rho > 0$ je definováno předpisem

$$U(\infty, \rho) := \left\{ z \in \mathbb{S}; |z| > \frac{1}{\rho} \right\}.$$

Potom $\lim_{z \to z_0} f(z) = A$ znamená, že existuje takové číslo $A \in \mathbb{S}$, pro které platí

$$(\forall U(A, \varepsilon))\ (\exists P(z_0, \delta))\ (\forall z \in P(z_0, \delta))\ (f(z) \in U(A, \varepsilon)).$$

Pro výpočty limit, ve kterých vystupuje nevlastní bod ∞, je možné použít následující vzorce:

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = A, \text{ právě když } \lim_{z \to 0} f(1/z) = A, \tag{1.1}$$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty, \text{ právě když } \lim_{z \to z_0} (1/f(z)) = 0.$$

Derivace komplexní funkce f v bodě z_0 je definována analogicky jako v $\mathbb{R}$, tedy pomocí vzorce

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \qquad \text{resp.} \qquad f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h},$$

přičemž předpokládáme, že funkce f je definována na nějakém okolí bodu z_0 a uvedená limita existuje v $\mathbb{C}$.

Nechť pro komplexní proměnnou z platí rovnost $z = x + iy$, kde $x, y \in \mathbb{R}$. Potom lze komplexní funkci f vyjádřit ve tvaru $f = u(x, y) + i\ v(x, y)$, kde funkce $u = \mathrm{Re}\ f$ a $v = \mathrm{Im}\ f$. Funkce u a v lze interpretovat jako reálné funkce dvou reálných proměnných x a y. Mezi parciálními derivacemi funkcí u, v podle obou proměnných x, y a derivací komplexní funkce f existuje vzájemná souvislost, popsaná následující větou.

[2]) Zkrácené označení není úplně přesné. Správně pojem komplexní funkce znamená pouze zobrazení do $\mathbb{S}$. Protože v dalším textu budeme pracovat s komplexními funkcemi komplexní proměnné, učiníme na tomto místě domluvu, že slovním spojením *komplexní funkce* budeme nadále rozumět komplexní funkci komplexní proměnné.

Věta 1.2.1 (Cauchy-Riemannovy podmínky). *Nechť f je komplexní funkce ve tvaru $f = u(x, y) + i\ v(x, y)$. Nutnou podmínkou pro existenci derivace funkce f v bodě $z_0 = x_0 + iy_0$ je existence prvních parciálních derivací funkcí u a v podle obou proměnných v bodě $[x_0, y_0]$ a splnění následujících podmínek*

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}. \tag{1.2}$$

Pokud navíc budou obě první parciální derivace funkcí u a v podle obou proměnných v bodě $[x_0, y_0]$ spojité funkce, bude existence derivace funkce f v bodě $z_0 = x_0 + iy_0$ zaručena.

Rovnice (1.2) publikoval Leonhard Euler (1707 – 1783) v roce 1734 v článku *De infinitis curvis eiusdem generis seu methodus inveniendi aequationes pro infinitis curvis eiusdem generis.* V roce 1752 publikoval stejné rovnice v článku o obtékání pevného tělesa ideální kapalinou Jean d'Alembert (1717 – 1783). Dodejme, že sestavení rovnic vycházelo u obou jmenovaných autorů z fyzikálně motivovaných úloh a patrně příliš neovlivnilo rozvoj komplexní analýzy. V roce 1814 použil rovnice (1.2) Louis Augustin Cauchy (1789 – 1857) v článku *Sur les intégrales définies* (O určitých integrálech), který se často považuje za základní kámen komplexní analýzy. V roce 1851 vydal Bernhard Georg Friedrich Riemann (1826 – 1866) svou disertační práci s názvem *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse* (Základy teorie funkcí komplexní proměnné), ve které se rovnice (1.2) staly výchozím bodem jeho úvah o komplexních funkcích. Poznamenejme, že v některých pracích se rovnice (1.2) nazývají *d'Alembert-Eulerovy rovnice.*

1.3 Holomorfní funkce

Nyní přikročíme k důležité definici, která hovoří o pojmu holomorfní funkce. Tento pojem je ukázkou toho, jak byla komplexní analýza formována pomocí různých přístupů.

Definice 1.3.1. Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina. Řekneme, že funkce f je *holomorfní na množině G*, existuje-li derivace funkce f v každém bodě množiny G. Funkce f je *holomorfní v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$*, existuje-li takové okolí bodu $z_0 \in \mathbb{C}$, na němž je funkce f holomorfní.

Připomeňme, že pro holomorfní funkce platí řada tvrzení, které nemají analogii v reálném oboru. Následující věta je ukázkou jedné takové vlastnosti holomorfních funkcí.

Věta 1.3.2. *Je-li f holomorfní funkce na otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$, pak na množině G existují derivace všech řádů $f^{(n)}$ a tyto jsou rovněž holomorfními funkcemi na množině G.*

Weierstrass definoval tzv. *analytickou funkci* jako funkci, kterou lze na G lokálně [3]) rozvinout v mocninou řadu. Dnes již víme, že takto definovaná funkce odpovídá pojmu holomorfní funkce, proto lze definici holomorfní funkce zavést i následujícím způsobem.

Definice 1.3.3. Řekneme, že funkce f je holomorfní v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ právě tehdy, když lze funkci f na nějakém okolí $U(z_0)$ bodu z_0 vyjádřit ve tvaru mocninné řady se středem v bodě z_0, tj. když pro všechna $z \in U(z_0)$ platí:

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \ldots, \tag{1.3}$$

kde $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Poznámka 1.3.4. Zápis, kterým je vyjádřena řada (1.3), není úplně přesný, neboť na místě „vytečkovaných“ členů si můžeme představit jakékoliv výrazy. Na tomto místě tedy učiníme dohodu, že pokud v dalším textu nahradíme vyjádření některých členů řady tečkami, bude v zápisu řady uvedeno znění n-tého členu řady tak, aby bylo zřejmé, jak řada pokračuje.

Definice 1.3.3 je ekvivalentní forma Definice 1.3.1. Lze dokázat, že holomorfní funkci je možné lokálně vyjádřit jako součet mocninné řady. Stejně tak je možné vyjádřit funkci, která je holomorfní na nějakém prstencovém okolí bodu z_0, jako součet tzv. Laurentovy řady se středem v bodě z_0:

Definice 1.3.5. Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$ pro všechna $n \in \mathbb{Z}$. Potom řadu funkcí

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \tag{1.4}$$

nazýváme *Laurentovou řadou.* Řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ nazýváme *regulární část*, řadu

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} \tag{1.5}$$

nazýváme *hlavní část* Laurentovy řady. Řekneme, že řada (1.4) konverguje v bodě $z \in \mathbb{C}$ právě tehdy, když v tomto bodě konvergují jak hlavní, tak i regulární část řady.

Pro mocninou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \tag{1.6}$$

platí, že existuje právě jedno $R \in (0, +\infty)$ takové, že řada (1.6) konverguje absolutně pro všechna $z \in \mathbb{C}$, $|z - z_0| < R$ a diverguje pro všechna $z \in \mathbb{C}$, pro něž je $|z - z_0| > R$. Mohou nastat i případy, kdy řada konverguje pouze v bodě z_0, pak je $R = 0$; nebo kdy řada konverguje pro všechna $z \in \mathbb{C}$, pak je $R = \infty$. Číslo R nazýváme poloměrem konvergence řady (1.6). O konvergenci řady (1.5) pojednává následující lemma.

[3]) Výraz „lokálně rozvinout“ znamená možnost vyjádřit funkci na okolí každého bodu množiny G pomocí mocninné řady, jejíž součet je na daném okolí roven uvažované funkci.

Lemma 1.3.6. *Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $a_{-n} \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Existuje právě jedno nezáporné reálné číslo r takové, že řada (1.5) konverguje absolutně pro všechna $z \in \mathbb{C}$, $|z - z_0| > r$ a diverguje pro všechna $z \in \mathbb{C}$, $|z - z_0| < r$.*

V případě, že platí nerovnost $r < R$, můžeme vyslovit následující definici součtu řady (1.4) na množině $P(z_0, r, R) := \{z \in \mathbb{C};\ r < |z - z_0| < R\}$.

Definice 1.3.7. Součet Laurentovy řady (1.4) je pro $z \in P(z_0, r, R)$ definován vztahem

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n.$$

Je-li $0 \leq r < R \leq \infty$, pak množinu $P(z_0, r, R)$ často nazýváme *prstencem konvergence* řady (1.4).

Poznamenejme, že stejně jako mocninná řada je i Laurentova řada (tj. její koeficienty a_n a a_{-n}) v bodě z_0 určena jednoznačně.

1.4 Singularity holomorfních funkcí

Body, ve kterých je funkce f holomorfní, nazýváme *regulární body* funkce f. Jestliže je funkce f holomorfní na nějakém prstencovém okolí bodu z_0, ale není holomorfní v bodě z_0, řekneme, že z_0 je *izolovaný singulární bod* funkce f neboli *izolovaná singularita* funkce f. Existuje několik typů izolovaných singularit. O jejich rozdělení hovoří následující definice.

Definice 1.4.1. Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ je izolovaná singularita funkce f.

(i) Jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A \in \mathbb{C},$$

potom bod z_0 nazýváme *odstranitelným* singulárním bodem (*odstranitelnou singularitou*) funkce f.

(ii) Jestliže má funkce f v bodě z_0 nevlastní limitu, tj.

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty,$$

potom bod z_0 nazýváme *pól* funkce f.

(iii) Jestliže neexistuje limita funkce f, nazýváme bod z_0 *podstatným* singulárním bodem (*podstatnou singularitou*) funkce f.

O charakteristikách jednotlivých izolovaných singularit holomorfních funkcí hovoří následující, tzv. Casorati-Weierstrassova věta, viz např. [46], str. 135 – 137.

Věta 1.4.2 (Casorati, Weierstrass). *Nechť funkce f je holomorfní v nějakém prstencovém okolí $P(z_0)$ bodu $z_0 \in \mathbb{C}$. Nechť $f(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ pro všechna $z \in P(z_0)$. Potom nastane právě jedna ze tří následujících možností:*

(i) *Existuje prstencové okolí $P_1(z_0, \delta)$, $\delta > 0$, $P_1(z_0, \delta) \subseteq P(z_0)$, ve kterém je funkce f omezená. Pak existuje v $\mathbb{C}$ limita $\lim_{z \to z_0} f(z)$ a po spojitém rozšíření funkce f touto limitou v bodě z_0 je f holomorfní na $U(z_0)$. Hlavní část Laurentova rozvoje funkce f v $P(z_0)$ je identicky rovna 0.*

(ii) *Funkce f má limitu $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$. Hlavní část Laurentova rozvoje funkce f v $P(z_0)$ má pouze konečný nenulový počet nenulových koeficientů a_n.*

(iii) *Každé prstencové okolí $P(z_0)$ bodu z_0 se funkcí f zobrazí na množinu, která je hustá v $\mathbb{S}$. Hlavní část Laurentova rozvoje funkce f v $P(z_0)$ má nekonečně mnoho nenulových koeficientů a_n.*

V případě (i) *je bod z_0 odstranitelnou singularitou funkce f; v případě* (ii) *je bod z_0 pólem funkce f; v případě* (iii) *je bod z_0 podstatnou singularitou funkce f.*

Funkce, které jsou holomorfní v každém bodě $z \in \mathbb{C}$, nazýváme *celé funkce.* Tyto pak dělíme na polynomy a celé transcendentní funkce, a to podle toho, zda je lze vyjádřit mocninnou řadou s konečným nebo nekonečným počtem nenulových členů. Příkladem celých transcendentních funkcí jsou např. funkce exp a sin.

Pro celé funkce platí tvrzení, která nemají obdobu v reálné analýze. Jako příklad uveďme následující větu.

Věta 1.4.3 (Liouville). *Každá celá omezená funkce je konstantní funkcí.*

Důkaz. Důkaz lze najít např. v knize [46], str. 116. □

V našich dalších úvahách bude hrát významnou roli fakt, že funkce exp nemá žádné nulové body, zatímco funkce sin jich má v $\mathbb{C}$ nekonečně mnoho. Připomeňme proto definici nulového bodu holomorfní funkce a jeho řádu (násobnosti).

Definice 1.4.4. Nechť existuje okolí bodu $z_0 \in \mathbb{C}$, na kterém je funkce f holomorfní a na kterém se anuluje pouze v z_0. Potom z_0 je *izolovaným nulovým bodem* funkce f. Je-li současně $f'(z_0) \neq 0$, nazveme bod z_0 *nulovým bodem prvního řádu.* Obecně, je-li $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) = 0$, $\ldots$, $f^{(n-1)}(z_0) = 0$, zatímco $f^{(n)}(z_0) \neq 0$, nazveme bod z_0 *nulovým bodem n-tého řádu.*

Je-li bod z_0 nulovým bodem n-tého řádu holomorfní funkce f, lze funkci f lokálně vyjádřit ve tvaru

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z), \tag{1.7}$$

kde $g(z)$ je holomorfní funkce v bodě z_0 a $g(z_0) \neq 0$.

Definice 1.4.5. Řekneme, že funkce f má v bodě z_0 *pól n-tého řádu*, je-li bod z_0 izolovanou singularitou a funkci f lze na prstencovém okolí bodu z_0 lokálně vyjádřit ve tvaru

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n}, \tag{1.8}$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $g(z)$ je holomorfní funkce v bodě z_0 a platí $g(z_0) \neq 0$.

Úvahy opírající se o práci s póly funkce vyžadují, aby měl čtenář alespoň nějakou představu o „komplexním nekonečnu“ [4]). Funkce f, která má pól v bodě z_0, představuje zobrazení $f : G \mapsto \mathbb{S}$, kde oblast G představuje okolí bodu z_0.

Vraťme se k vzorci (1.8). Protože funkce $g(z)$ je holomorfní v bodě z_0, lze ji na okolí tohoto bodu vyjádřit ve tvaru mocninné řady se středem z_0

$$g(z) = g(z_0) + \frac{g'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{g''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots, \tag{1.9}$$

z čehož plyne možnost vyjádřit funkci f ve tvaru

$$f(z) = \frac{F_n}{(z - z_0)^n} + \frac{F_{n-1}}{(z - z_0)^{n-1}} + \frac{F_{n-2}}{(z - z_0)^{n-2}} + \dots + \frac{F_1}{(z - z_0)} + F(z),$$

kde koeficienty F_i postupně odpovídají výrazům ve tvaru zlomku v řadě (1.9), tedy $F_n = g(z_0)$, $F_{n-1} = g'(z_0)/1!$, ... a funkce $F(z)$ je holomorfní v bodě z_0. Připomeňme, že koeficient F_1 se nazývá *reziduum funkce* f v bodě z_0.

Jestliže funkce f je holomorfní na oblasti $G \subset \mathbb{C}$ a pro všechna $z \in G$ platí nerovnost $f(z) \neq 0$, potom funkci f'/f nazýváme *logaritmická derivace* funkce f. Pokud není splněna podmínka nenulovosti funkce f na oblasti G a bod $z_0 \in G$ je nulovým bodem n-tého řádu funkce f, lze za použití vztahu (1.7) vyjádřit logaritmickou derivaci funkce f pomocí výrazu

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}, \tag{1.10}$$

kde $g'(z)/g(z)$ je holomorfní funkce v bodě z_0. Z toho plyne, že pro logaritmickou derivaci funkce f je bod z_0 pólem prvního řádu a reziduum funkce f'/f v bodě z_0 je rovno číslu n.

Podobně lze ze vztahu (1.8) odvodit, že je-li bod z_0 pólem n-tého řádu funkce f, potom pro logaritmickou derivaci funkce f platí

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-n}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}, \tag{1.11}$$

kde podíl $g'(z)/g(z)$ opět představuje funkci holomorfní v bodě z_0. V tomto případě je bod z_0 opět pólem prvního řádu logaritmické derivace funkce f a reziduum funkce f'/f v bodě z_0 je rovno číslu $-n$.

Pomocí pólů funkce f můžeme definovat novou třídu tzv. *meromorfních* funkcí, které, jak později ukážeme, představují jisté zobecnění racionálních funkcí.

[4]) Podrobnosti o zavedení nevlastního bodu lze nalézt např. v knize [46], str. 16 – 17.

Definice 1.4.6. Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina. Řekneme, že funkce $f : G \mapsto \mathbb{S}$ je meromorfní na množině G, jestliže kromě případných pólů nemá funkce f na množině G žádné další singularity a množina všech pólů funkce f je izolovaná v G.

Z uvedené definice vyplývá, že funkce, která je holomorfní na oblasti G, je na této množině také meromorfní. Je-li f celá funkce, která není identicky rovna nule, je f'/f meromorfní funkce bez ohledu na to, zda má funkce f nulové body, viz vzorec (1.10).

1.5 Komplexní logaritmus

Tato část je věnovaná komplexní exponenciále a komplexnímu logaritmu. Abychom odlišili tyto funkce od příslušných restrikcí na $\mathbb{R}$, budeme v této části používat dvojí značení. Reálné funkce reálné proměnné budu označovat symboly *exp*, *log*, *sin*, *cos*. Pro jejich komplexní „protějšky“ budu používat označení exp, log, atd. Reálnou funkci *exp* lze vyjádřit jako součet řady $exp\ x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$, $x \in \mathbb{R}$. Je to formálně mocninná řada o středu $x_0 = 0$ a je proto přirozené pomocí ní definovat exponenciální funkci i v celé komplexní rovině. Ukazuje se, že jediné rozšíření této reálné funkce na $\mathbb{C}$, které je holomorfní na $\mathbb{C}$, je právě popsané rozšíření.

Pokud bychom chtěli popsat vztah komplexní exponenciály $\exp z$ k reálným funkcím, je pro $z = x + iy$

$$\exp z = exp\ x(cos\ y + i\ sin\ y).$$

Z tohoto vyjádření vidíme, že exp je v $\mathbb{C}$ periodická funkce; její hlavní perioda je $2\pi i$. Proto nelze komplexní logaritmus zavést jednoduše jako inverzní funkci ke komplexní exponenciále. Volíme pás o šířce 2π tak, aby obsahoval množinu $\mathbb{R}$ (z důvodu rozšíření), např.

$$M := \{z = x + iy \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}, y \in (\pi, \pi\rangle\}.$$

Na této množině je funkce exp prostá a lze k ní na této množině uvažovat inverzní funkci. Definujme funkci log jako funkci inverzní k restrikci $\exp|M$ na množinu M. Takovou funkci budeme nazývat *hlavní hodnota funkce logaritmus* [5]) a platí pro ni vzorec

$$\log z = log|z| + i\varphi,$$

kde $log|z|$ značí reálnou funkci proměnné $|z|$ a argument φ čísla z vyhovuje nerovnostem $0 < \varphi \leq 2\pi$. Množinu všech čísel $w \in \mathbb{C}$, která vyhovují vztahu $z = e^w$, nazýváme *komplexní logaritmus čísla* z a značíme ji symbolem Log z. Je tedy

$$\mathrm{Log}\ z := \{w \in \mathbb{C};\ z = e^w\}, \qquad z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

Mnohoznačnost komplexního logaritmu sehrála významnou roli ve sporu mezi Leibnizem a Bernoullim o povaze logaritmů záporných a komplexních čísel. Leibniz tvrdil, že logaritmy záporných čísel nabývají komplexní hodnoty, zatímco Bernoulli se snažil

[5]) Více viz např. [35].

dokázat, že jejich hodnoty jsou reálné. I když měl Leibniz v tomto sporu pravdu, přesto nebylo jeho zdůvodnění správné.

Správné vysvětlení podal až Leonhard Euler v práci *De la controverse entre Mrs. Leibniz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres negatifs et imaginaires* (O sporu mezi pány Bernoullim a Leibnizem o logaritmech záporných a imaginárních čísel) [6]), publikované v roce 1751. Eulerovo řešení je založeno na tom, že rovnost $y = \mathrm{Log}\ x$ je ekvivalentní s rovností (používám historické značení)

$$x = e^y = \left(1 + \frac{y}{N}\right)^N ,$$

kde N představuje nekonečně velké číslo. Odtud Euler dostal vzorec $y = N\left(x^{\frac{1}{N}} - 1\right)$, který odpovídá známému vyjádření

$$y = \mathrm{Log}\ x = \lim_{n\to\infty} n\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right).$$

Protože komplexní n-tá odmocnina má n různých hodnot, má výraz $x^{\frac{1}{N}}$ nekonečně mnoho různých hodnot, většinou imaginárních. Proto má i komplexní logaritmus nekonečně mnoho různých hodnot, většinou imaginárních. Euler položil

$$x = a + bi = e^C(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

kde i představuje imaginární jednotku, e^C je absolutní hodnota čísla x a φ je argument tohoto čísla. Tak vyjádřil všechny tyto hodnoty ve tvaru

$$y = \mathrm{Log}\ x = C + i(\varphi + 2k\pi), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Tímto způsobem Euler ukázal, že logaritmy záporných (a imaginárních) čísel jsou imaginární, jak to tvrdil Leibniz. Je však nutné dodat, že komplexní logaritmus $\mathrm{Log}\ z$ je množina, která má pro každou hodnotu z nekonečně mnoho prvků, které se navzájem liší o celočíselný násobek čísla $2\pi i$. Přitom pro kladné reálné hodnoty je pouze jedna z hodnot komplexního logaritmu reálná a všechny ostatní jsou imaginární, pro reálná záporná čísla a pro imaginární čísla jsou všechny hodnoty komplexního logaritmu imaginární.

[6]) Anglický překlad článku je k dispozici na adrese: http://www.math.dartmouth.edu/∼euler/.

Kapitola 2

Nekonečné řady

2.1 Úvod

Tato kapitola pojednává o součtech nekonečných řad, zejména o otázkách spojených s konvergencí nekonečné řady. Pro přiblížení pojmu konvergence nekonečné řady začnu jednou z aporií [1]), jejímž autorem je Zenón z Eleje (490 – 425 př. n. l.). Jedná se o aporii, ve které vystupuje Achilles a želva.

Achilles s želvou se utkali v běžeckém závodě. Protože Achilles běží rychleji než želva, dostala želva náskok. Zenón se snažil ukázat, že Achilles nikdy nemůže želvu dostihnout. Jeho argumentace spočívala v tom, že když Achilles doběhne k místu, odkud startovala želva, ta se mezitím posune na jiné místo. Když Achilles doběhne i na toto místo, želva bude opět o nějaký kus vpředu a tato situace se neustále opakuje. Achilles bude náskok želvy stále snižovat, ale nikdy ji nemůže dohonit. S tímto závěrem však můžeme jen stěží souhlasit, neboť na základě zkušenosti víme, že Achilles želvu nakonec po jisté době předhoní. Pokusme se vysvětlit, v čem je Zenónova argumentace nesprávná.

Zenón vycházel z chybného předpokladu, že součet nekonečně mnoha kladných čísel je vždy nekonečně velké číslo. Ukažme to na konkrétním příkladě. Nechť se například Achilles pohybuje desetkrát rychleji než želva, a nechť náskok, který Achilles dovolil želvě, je velký 10 metrů. Označme symbolem s vzdálenost, kterou musí Achilles uběhnout, aby dostihl želvu. Potom je

$$s = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots = 11,111\cdots = 11,\overline{1}. \tag{2.1}$$

Achilles doběhne želvu ve vzdálenosti $11,\overline{1}$ metrů od místa, ze kterého vybíhal, čímž je vysvětlen rozpor Zenónovy argumentace s naší zkušeností.

Nyní se pokusím přiblížit pojem nekonečné řady a její konvergence. Budu se přitom snažit postupovat tak, aby postup mohl sledovat i matematicky méně fundovaný čtenář. Vyjádříme součet řady v rovnici (2.1) jako zlomek v základním tvaru. Z mnoha možných

[1]) Aporie – logicky neřešitelný protimluv.

způsobů výpočtu použijme následující. Mějme číslo

$$s = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots .$$

Vynásobením obou stran rovnice číslem deset dostaneme [2])

$$10s = 100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots = 111,\overline{1}.$$

Je tedy $10s - s = 100$, a proto je $s = 100/9$. Použitý způsob výpočtu však ukrývá jeden nedostatek. K jeho ilustraci provedu následující výpočet. Použijeme stejný postup pro nalezení součtu řady čísel $1 + 10 + 100 + 1000 + \cdots$. Nechť číslo t je rovno součtu uvažované řady, tedy

$$t = 1 + 10 + 100 + 1000 + \cdots .$$

Číslo t vynásobíme deseti

$$10t = 10 + 100 + 1000 + 10\,000 + \cdots .$$

Podle předchozího vzoru je $10t + 1 = t$, a proto „platí“ $t = -1/9$.

Zatímco v případě Achillea s želvou věříme tomu, že želva skutečně uběhla 10/9 metru než ji Achilles doběhl, těžko uvěříme tomu, že součet kladných čísel je záporné číslo. V obou případech jsme přitom použili stejný postup výpočtu. Proč tentýž postup jednou dává správný výsledek a podruhé špatný? Odpověď na tuto otázku nalezneme při hlubším vyšetřování situace, která nastane při sčítání nekonečně mnoha čísel, tedy při zkoumání tzv. nekonečných číselných řad a jejich konvergence [3]).

2.2 Vývoj nekonečných řad

Nekonečné řady tvoří nedílnou součást infinitezimálního počtu. Bez výrazné nadsázky lze prohlásit, že rozvoj diferenciálního a integrálního počtu byl nemyslitelný bez nekonečných řad. V této kapitole stručně připomenu několik etap vývoje teorie o nekonečných řadách. Tyto poznámky budou mít pouze ilustrační a motivační charakter a budou dále využity v kapitole o nekonečných součinech. Rozhodně se nejedná o systematický popis vývoje nekonečných řad [4]).

Již z Rhindova papyru (sepsaného přibližně roku 1650 př. n. l. matematikem Ahmesem) lze vyčíst, že staří Egypťané řešili úlohy spojené se součtem konečně mnoha členů aritmetické a geometrické posloupnosti. Ve starém Řecku se poznatky o sčítání (konečně či nekonečně mnoha) členů posloupnosti postupně vyvíjely od naivních představ až ke schopnosti správně sečíst konkrétní nekonečnou řadu čísel. Ukázkou nepochopení toho,

[2]) Pro tuto chvíli pomineme otázku, zda je tato operace korektní. Jedná se o ilustrační příklad a později ukážeme, že uvedená operace je „v pořádku“.

[3]) Pojmu konvergence se věnuji v kapitole 2.3.

[4]) Bližší informace o vývoji pojmu konvergentní nekonečná řada lze nalézt např. v [43].

že součet nekonečně mnoha kladných čísel může být roven konečné hodnotě, jsou právě proslulé Zenónovy aporie. Patrně prvním matematikem, který uvedl správný součet konkrétní nekonečné číselné řady byl Archimedes ze Syrakus (287 – 212 př. n. l.). Stalo se tak v souvislosti s kvadraturou paraboly [5]) a sečtena byla geometrická řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots .$$

Je však nutno říci, že Archimedes tehdy nepracoval se součtem členů (nekonečné) geometrické posloupnosti. Zmíněný postup spočíval v tom, že Archimedes součet řady „uhodl“ a teprve potom dokázal správnost výsledku metodou dvojího sporu.

Významnější pokrok ve sčítání nekonečných řad nastal ve 14. století, kdy Richard Swineshead (? – 1355) [6]) určil hodnotu součtu řady $\sum_{n=1}^{\infty} n/2^n$ a Nicole Oresme (1323 – 1382) dokázal divergenci harmonické řady. V roce 1593 uvedl François Viète (1540 – 1603) obecný vzorec pro součet nekonečné geometrické řady. Z dalších objevů stojí za zmínku rozvoje některých funkcí pomocí mocninných řad, např.

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots , \tag{2.2}$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots , \tag{2.3}$$

kde objev řady (2.2) bývá přisuzován Nicolausovi Mercatorovi (1620 –1687); řadu (2.3) objevil James Gregory (1638 – 1675) v roce 1671. V roce 1673 objevil řadu (2.3) nezávisle na Gregorym Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 – 1716). Ten dále odvodil i rozvoje funkcí sin, cos, exp do mocninných řad. Tyto rozvoje nám umožňují určit např. součet některých číselných řad. Dosazením $x = 1$ do (2.3) získáme známou řadu [7])

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots , \tag{2.4}$$

dosazením $x = 1$ do (2.2) získáme součet řady

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots . \tag{2.5}$$

Popsané manipulace s nekonečnými řadami se staly důležitým impulzem k dalšímu rozvoji teorie nekonečných řad. Snahy o určení součtu nekonečných řad vedly k myšlence konvergence a divergence řady a ukázaly nutnost precizní definice součtu řady.

[5]) Více viz. [40], str. 15 – 17, nebo [11], str. 35 – 40.

[6]) Údaje o roku úmrtí Roberta Swinesheada se rozcházejí. Použil jsem letopočet, který jsem v literatuře objevil nejčastěji.

[7]) Poznamenejme, že rovnosti (2.4) a (2.5) skutečně platí, i když to není jednoduché dokázat, neboť poloměr konvergence obou řad je $R = 1$.

V dalším textu uvedu několik příkladů, které ukazují, že součet nekonečné řady nemá některé vlastnosti běžné pro sčítání konečně mnoha sčítanců. Klasickým příkladem, který rozpoutal rozsáhlou diskusi, je řada

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} = 1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots . \tag{2.6}$$

Neopatrné zacházení s řadou (2.6) vede ke sporným tvrzením, jako je např.

$$0 = (1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots = 1-1+1-1+1-1+\cdots =$$

$$= 1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\cdots = 1.$$

Kromě toho je možné „vypočítat“ součet řady (2.6) následujícím způsobem.

$$s = 1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots = 1-(1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots) = 1-s.$$

Pro s platí $s = 1-s$, je tedy $s = 1/2$. Poslední výsledek lze navíc „zdůvodnit“ i jiným způsobem, a to dosazením $x = 1$ do rozvoje

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = 1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots .$$

Podobných tvrzení lze nalézt v historii nekonečných řad celou řadu.

Z tohoto náčrtu je zřejmé, že práce s nekonečným počtem sčítanců byla pouhou „formální hrou“ se symboly, bez hlubšího zamyšlení nad významem výrazů typu (2.6). Jak píše Kline v knize [26], str. 460:

> *Dnes jsme si vědomi toho, že práce s řadami byla v 18. století velmi formální a že otázky konvergence a divergence nebyly jistě brány příliš vážně; dokonce můžeme říci, že byly úplně ignorovány. Newton, Leibniz, Euler a dokonce i Lagrange považovali řady za rozšíření algebry polynomů a sotva si uvědomovali, že rozšířením sčítání na nekonečný počet sčítanců zavádějí úplně nový druh problémů. Proto nebyli zcela připraveni čelit problémům, které jim nekonečné řady kladly do cesty; na druhé straně, zdánlivé obtíže, které se objevily, způsobily, že se o těchto problémech začalo přinejmenším hovořit. Zvláště zajímavé je, že jak často bylo správné řešení paradoxů a dalších problémů zveřejňováno, tak často bylo i ignorováno.*

Současný pohled na nekonečné řady je odlišný. Dnes se již neptáme: "Kolik je výraz $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$?". Otázka spíše zní: "Jak (jakým způsobem) bychom mohli definovat výraz $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$?". Jedno možné řešení spočívá v zavedení limity posloupnosti částečných součtů. Pojetí součtu nekonečné řady se tedy liší od pojetí součtu konečného počtu sčítanců užitím limitního přechodu.

2.3 Konvergence a divergence

Následující části této kapitoly jsou věnovány připomenutí některých základních poznatků o nekonečných řadách, které budu dále považovat za známé. Předpokládám, že čtenář je již seznámen s pojmy *posloupnost*, *vybraná posloupnost* a *limita posloupnosti.*

Poznámka 2.3.1. Pro označení posloupnosti budu používat symbol $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, nebo krátce $\{a_n\}$. Nekonečnou řadu budu značit symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Pokud existuje součet řady, pak symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ můžeme rozumět i její součet. V zájmu zjednodušení zápisu někdy použiji sumační symbol bez uvedení mezí. Takový zápis bude vždy znamenat, že sčítání probíhá vzhledem ke všem hodnotám indexu od jedné do nekonečna. Je tedy

$$\sum a_n \text{ totéž co } \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Součet nekonečné řady je definován pomocí posloupnosti částečných součtů s_n. Členy posloupnosti $\{s_n\}$ jsou definovány předpisem $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Pro limitu $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ potom může nastat právě jedna z následujících možností [8]).

(i) Uvedená limita existuje a její hodnota je rovna číslu $s \in \mathbb{C}$.

(ii) Uvedená limita existuje a její hodnota je rovna ∞.

(iii) Uvedená limita neexistuje.

V případě (i) říkáme, že řada konverguje a jejím součtem je hodnota uvedené limity. Platí tedy $\sum a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = s$. V případě (ii) říkáme, že řada diverguje k ∞. V případě (iii) říkáme, že řada diverguje (osciluje).

Pro konvergentní řady platí následující důležitá věta.

Věta 2.3.2 (Bolzano-Cauchyho podmínka konvergence nekonečných řad). *Řada $\sum a_n$ konverguje právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $p \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $r \in \mathbb{N}$ platí nerovnost*

$$|a_{p+1} + a_{p+2} + a_{p+3} + \cdots + a_{p+r}| < \varepsilon.$$

Důkaz. Důkaz věty lze najít ve většině učebnic diferenciálního počtu, viz např. [22], str. 86. □

Tato věta nám umožní zjednodušit některé další důkazy.

[8]) Následující rozdělení platí pro členy $a_n \in \mathbb{C}$. Pokud bychom pracovali pouze s členy $a_n \in \mathbb{R}$, potom pro v případě (ii) předpokládáme, že uvedená limita existuje a je rovna buď $-\infty$ nebo $+\infty$. Podle toho pak říkáme, že daná řada diverguje buď k $-\infty$ nebo $+\infty$.

Lemma 2.3.3. *Nechť $\mathcal{S} := \{s_n^1\}, \{s_n^2\}, \dots, \{s_n^k\}$ je konečný systém posloupností (kde čísla $1, 2, \dots, k$ značí indexy, nikoliv mocninu). Nechť všechny tyto posloupnosti konvergují ke stejné hodnotě $w \in \mathbb{C}$. Nechť $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ je posloupnost, která obsahuje pouze prvky posloupností $\{s_n^1\}, \{s_n^2\}, \dots, \{s_n^k\}$; každý z prvků s_n^j je v posloupnosti $\{a_m\}$ právě jednou a každá z posloupností $\{s_n^j\}_{n=1}^{\infty}$ je vybranou posloupností z posloupnosti $\{a_m\}$. Potom také posloupnost $\{a_m\}$ konverguje a je $\lim_{m\to\infty} a_m = w$.*

Důkaz. Jestliže všechny posloupnosti $\{s_n^1\}, \dots, \{s_n^k\}$ konvergují k hodnotě w, potom ke každému $\varepsilon > 0$ existují pro každou posloupnost přirozená čísla $n_1, n_2, \dots, n_k$ taková, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n > n_1$ je $|s_n^1 - w| < \varepsilon$, pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n > n_2$ je $|s_n^2 - w| < \varepsilon$, atd. Nechť $r := n_1 + n_2 + \dots + n_k$. Potom pro všechna $m \in \mathbb{N}$, $m > r$ je $|a_m - w| < \varepsilon$, což dokazuje tvrzení. □

2.4 Asociativita součtu řady

Sčítání konečného počtu sčítanců je asociativní operací, tj. hodnota součtu nezávisí na způsobu uzávorkování sčítanců. V této kapitole se budeme zabývat tím, za jakých okolností je sčítání nekonečně mnoha sčítanců analogickou vlastností k asociativitě.
Příklad: Uvažujme řadu

$$\sum (-1)^{n+1} = 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots, \tag{2.7}$$

jejíž posloupnost částečných součtů je dána předpisem $s_n = \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2}$. Použijeme dva různé způsoby, jak řadu (2.7) uzávorkovat.

i) $[1 + (-1)] + [1 + (-1)] + [1 + (-1)] + \cdots = 0 + 0 + 0 + \cdots = 0,$

ii) $1 + [(-1) + 1] + [(-1) + 1] + [(-1) + 1] + \cdots = 1 + 0 + 0 + 0 + \cdots = 1.$

Hodnota součtu obou uzávorkovaných řad se liší; způsob, kterým uzávorkujeme členy řady, může ovlivnit výsledný součet řady.
Příklad: Uvažujme řadu

$$\sum (-1)^{n+1} \cdot n = 1 + (-2) + 3 + (-4) + 5 + (-6) + \cdots, \tag{2.8}$$

jejíž posloupnost částečných součtů je dána předpisem $s_n = (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}$. Ukážeme, že i v tomto případě závisí hodnota $\lim_{n\to\infty} s_n$ na způsobu, kterým jsme uzávorkovali členy řady. Použijeme dva různé způsoby uzávorkování řady (2.8).

i) $1 + [(-2) + 3] + [(-4) + 5] + [(-6) + 7] + \cdots = 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots = \infty,$

ii) $[1 + (-2) + 3] + [(-4) + 5 + (-6)] + [7 + (-8) + 9] + \cdots = 2 - 5 + 8 - \cdots.$

Posloupnost částečných součtů řady (ii) je $s_n = (-1)^{n+1}[(3/2)n + (1/4)] + (1/4)$. Tato posloupnost nemá limitu, a proto v případě (ii) řada nekonverguje. Tento příklad ukázal, že různé způsoby uzávorkování členů řady mohou vést k různým hodnotám limity posloupnosti částečných součtů, resp. k tomu, že daná limita ani neexistuje.

Přestože asociativita není obecnou vlastností sčítání nekonečně mnoha sčítanců, je možné vyčlenit jistou třídu řad, které tuto vlastnost mají. Následující věta uvádí postačující podmínku pro rozhodnutí, zda lze řadu uzávorkovat bez změny jejího součtu.

Věta 2.4.1. *Jestliže o řadě $\sum a_n$ platí, že příslušná posloupnost částečných součtů $\{s_n\}$ má limitu, pak součet řady nezávisí na způsobu uzávorkování členů řady, tj. je-li $\{n_k\}$ libovolná vybraná rostoucí posloupnost z posloupnosti přirozených čísel, pak řada*

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \cdots + a_{n_2}) + \cdots +$$

$$+(a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \cdots + a_{n_k}) + \cdots ,$$

má stále stejný součet.

Důkaz. Předpokládejme, že posloupnost částečných součtů neuzávorkované řady má limitu. Jestliže členy posloupnosti $\{a_n\}$ uzávorkuji libovolným (rozumným) [9]) způsobem, vzniklá posloupnost částečných součtů je vybranou posloupností posloupnosti $\{s_n\}$ a má proto stejnou limitu. To znamená, že uzávorkovaná řada má stejný součet jako původní řada. □

2.5 Přerovnání členů řady

V další části se budeme zabývat tím, za jakých podmínek má sčítání nekonečně mnoha sčítanců vlastnost analogickou komutativitě operace sčítání konečného počtu sčítanců. Nejprve připomeňme pojem přerovnání řady. Je-li $\{n_k\}$ prostá posloupnost všech přirozených čísel, budeme řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ nazývat *přerovnáním* řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Uvažujme posloupnost

$$\{a_n\} = \left\{1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \dots\right\}$$

a z ní vytvořenou řadu $\sum a_n$. Posloupnost částečných součtů

$$\{s_n\} = \left\{1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, 0, \dots\right\} = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{n+1}$$

konverguje k nule, je tedy součet řady $\sum a_n$ roven nule.

Nyní posloupnost a_n přerovnáme následujícím způsobem. Vytvoříme dvě vybrané posloupnosti $\{p_n\}$ a $\{q_n\}$ tak, aby pro jejich členy platilo

$$p_n = a_{2n-1} \quad \text{a} \quad q_n = a_{2n}.$$

[9]) Tím se rozumí to, že závorky se nepřekrývají. Každý člen posloupnosti $\{a_n\}$ je tedy obsažen právě v jedné závorce. Pokud by některé závorky obsahovaly ještě vnitřní závorky, tak ani jejich přítomnost neovlivní součet řady, neboť ve vnitřních závorkách se vyskytuje pouze konečný počet sčítanců, pro které je sčítaní asociativní operací.

Nyní postupujeme tak, že vytvoříme novou posloupnost $\{b_n\}$ složenou vždy ze dvou po sobě jdoucích prvků posloupnosti $\{p_n\}$ a jednoho prvku posloupnosti $\{q_n\}$. Pak je

$$\sum b_n = 1 + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \cdots .$$

Uvažujme posloupnost částečných součtů s_n řady $\sum b_n$. Prvky této posloupnosti rozdělíme do tří „vzájemně disjunktních" posloupností $\{s_{3n-2}\}$, $\{s_{3n-1}\}$ a $\{s_{3n}\}$. Snadno ověříme, že prvky jednotlivých posloupností jsou výrazy

$$\begin{aligned}
\{s_{3n-2}\} &= \left\{1,\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3},\ \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5},\ \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7},\ \ldots,\ \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(n-1)+j},\ \ldots\right\},\\
\{s_{3n-1}\} &= \left\{\frac{1}{1} + \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4},\ \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6},\ \ldots,\ \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{n+j},\ \ldots\right\},\\
\{s_{3n}\} &= \left\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{3} + \frac{1}{4},\ \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6},\ \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8},\ \ldots,\ \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j},\ \ldots\right\}.
\end{aligned}$$

Z rovností

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(n-1)+j} &= \frac{1}{n} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j} - \frac{1}{2n},\\
\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{n+j} &= \frac{1}{n} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j}
\end{aligned}$$

lze snadno nahlédnout, že $s_{3n-1} = s_{3n} + 1/n$ a $s_{3n-2} = s_{3n} + 1/(2n)$. Pro limity posloupností dostaneme $\lim_{n\to\infty} s_{3n-2} = \lim_{n\to\infty} s_{3n-1} = \lim_{n\to\infty} s_{3n}$. Každý člen posloupnosti s_n se nachází právě v jedné z posloupností s_{3n-2}, s_{3n-1} a s_{3n} a každá z těchto posloupností konverguje ke stejné hodnotě. Podle Lemmatu 2.3.3 posloupnost s_n konverguje k této hodnotě také. Dále je

$$s_{3n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j} = \frac{1}{n+1} + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{(n+1)+j} - \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2(n+1)} + s_{3(n+1)}.$$

Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $s_{3n} > s_{3(n+1)}$. Posloupnost s_{3n} je klesající posloupnost (kladných) čísel a je proto ohraničená. Posloupnost s_n je ohraničená a řada $\sum b_n$ konverguje.

Protože je řada $\sum b_n$ konvergentní, je možné uzávorkovat její členy libovolným způsobem. Proveďme tuto operaci následujícím způsobem

$$\sum b_n = 1 + \left[\frac{1}{2} - 1\right] + \frac{1}{3} + \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right] + \frac{1}{5} + \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right] + \frac{1}{7} + \left[\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\right] + \cdots ,$$

tím dostaneme již známou řadu (2.5), jejíž součet je roven hodnotě $\ln 2$. Tedy, přestože je řada vytvořena ze stejných prvků, změna jejich pořadí způsobila změnu součtu řady.

Není dokonce problém najít takové přerovnání řady, aby byl její součet roven ∞. Stačí sestavit posloupnost (označme ji např. symbolem $\{c_n\}$) tak, že z $\{p_n\}$ vybereme vždy tolik prvků, aby jejich součet byl nejméně o číslo jedna větší, než kolik je hodnota prvku z posloupnosti $\{q_n\}$, který bude následovat. To, že je možné tolik prvků z posloupnosti $\{p_n\}$ vybrat, je zřejmé díky tomu, že p_n je harmonická řada. Potom platí

$$\sum c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \mathbf{1} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{20} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \frac{1}{21} + \cdots + \frac{1}{78} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} + \cdots .$$

Řadu $\sum c_n$ je opět možné uzávorkovat beze změny jejího součtu. To provedeme následujícím způsobem

$$\begin{aligned}\sum c_n = &\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \mathbf{1}\right] + \left[\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{20} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right] + \\ &+ \left[\frac{1}{21} + \cdots + \frac{1}{78} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right] + \cdots \geq 1 + 1 + 1 + \cdots = \infty,\end{aligned}$$

z čehož vyplývá, že řada $\sum c_n$ diverguje k nekonečnu.

Z uvedených příkladů je vidět, že přerovnáním členů řady můžeme ovlivnit hodnotu součtu řady, popřípadě její konvergenci. Přesto lze vymezit jistou třídu řad, jejichž součet bude stále stejný při libovolném přerovnání řady. Tím se dostáváme k pojmu absolutně konvergentní řady.

Definice 2.5.1. O řadě $\sum a_n$ řekneme, že je *absolutně konvergentní*, jestliže konverguje řada $\sum |a_n|$. Řady, které konvergují, ale nejsou absolutně konvergentní, nazýváme *neabsolutně konvergentní.*

Následující dvě věty popisují základní vlastnosti absolutně konvergentních řad.

Věta 2.5.2. *Absolutně konvergentní řady jsou konvergentní.*

Důkaz. Jestliže řada $\sum a_n$ konverguje absolutně, pak na základě Bolzano-Cauchyho podmínky pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $p \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $r \in \mathbb{N}$ platí

$$|a_{p+1}| + |a_{p+2}| + \ldots + |a_{p+r}| < \varepsilon.$$

Z trojúhelníkové nerovnosti pak plyne nerovnost

$$|a_{p+1} + a_{p+2} + \ldots + a_{p+r}| \leq |a_{p+1}| + |a_{p+2}| + \ldots + |a_{p+r}| < \varepsilon,$$

což znamená, že řada $\sum a_n$ konverguje. □

Věta 2.5.3. *Přerovnáním absolutně konvergentní řady získáme řadu, která je opět absolutně konvergentní a platí, že součty obou těchto řad se rovnají.*

Důkaz. Důkaz věty můžeme najít např. v knize [24], str. 88 – 89. □

Z Věty 2.5.3 plyne, že absolutně konvergentní řady při libovolném přerovnání zachovávají stále stejný součet. Pro neabsolutně konvergentní řady s reálnými členy platí věta, která zobecňuje výše uvedené příklady.

Věta 2.5.4 (Riemann). *Každou neabsolutně konvergentní řadu* $\sum a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$ *lze přerovnat tak, že součet přerovnané řady je roven libovolnému, předem stanovenému číslu* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Řadu* $\sum a_n$ *lze dokonce přerovnat tak, že vznikne divergentní řada.*

Důkaz. Přerovnanou řadu s předem stanoveným součtem α sestrojíme tak, že členy původní neabsolutně konvergentní řady rozdělíme do dvou posloupností, které obsahují pouze kladné, resp. nekladné členy (vzhledem k neabsolutní konvergenci řady je kladných i nekladných členů nekonečně mnoho). Z členů obou posloupností vytváříme přerovnanou řadu se součtem α tím způsobem, že za její členy postupně vybíráme prvky z posloupnosti kladných členů a to tak dlouho, dokud jejich součet nepřekročí číslo α. Pak začneme přičítat prvky posloupnosti nekladných členů a to opět tak dlouho, až součet s_n všech dosud použitých (kladných i nekladných) členů klesne pod číslo α. Pak opět přičítáme kladné členy, atd. Je třeba si uvědomit, že řada kladných, resp. nekladných členů je divergentní a proto je možné číslo α při každém „přičítání“ i „odčítání“ překročit. Protože však původní řada konverguje neabsolutně, musí být limity posloupností kladných i nekladných členů rovny nule. Posloupnost částečných součtů proto konverguje k hodnotě α. □

Riemannovu větu lze zobecnit i pro řady s komplexními členy. V následující větě využiji často používaného zobrazení komplexních čísel na body tzv. Gaussovy roviny. Hovořím-li o bodu z se souřadnicemi $[a, b]$, mám tím na mysli komplexní číslo $z = a+bi$.

Věta 2.5.5. *Nechť* $\sum a_n$, $a_n \in \mathbb{C}$ *je konvergentní řada. Potom pro množinu součtů všech konvergentních řad, které vzniknou z řady* $\sum a_n$ *jejím přerovnáním (označme ji symbolem* M*) nastane právě jeden z následujících tří případů.*

(i) *Množina* M *obsahuje jediný bod.*

(ii) *Všechny prvky množiny* M *leží na jedné přímce.*

(iii) *Množina* M *obsahuje všechna komplexní čísla.*

Důkaz. Důkaz věty lze nalézt např. v článku [25]. □

Kapitola 3

Nekonečné součiny

V této kapitole se budeme věnovat nekonečným součinům čísel a funkcí. Naším cílem bude definovat pojem nekonečného součinu a konvergenci, resp. absolutní konvergenci nekonečného součinu. Chceme, aby vytvořené pojmy měly analogické vlastnosti, se kterými jsme se setkali u nekonečných řad ve Větách 2.5.2 a 2.5.3. Na závěr kapitoly jsou připojeny historické poznámky o nejstarších známých nekonečných součinech.

3.1 Nekonečné součiny čísel

Při definici nekonečného součinu čísel budeme požadovat, aby konvergence nekonečného součinu nezávisela na konečném počtu činitelů součinu, resp. aby hodnota **konvergentního** nekonečného součinu byla rovna nule pouze tehdy, obsahuje-li alespoň jeden nulový faktor. Uvedeným podmínkám vyhovuje následující definice.

Definice 3.1.1. Nechť $\{z_n\}$ je posloupnost komplexních čísel. Jestliže existuje $r \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq r$ platí $z_n \neq 0$ a současně existuje v $\mathbb{C}$ nenulová limita

$$\prod_{i=r}^{\infty} z_i := \lim_{s\to\infty} \prod_{i=r}^{s} z_i, \tag{3.1}$$

říkáme, že nekonečný součin

$$\prod_{i=1}^{\infty} z_i \tag{3.2}$$

konverguje, nebo že je konvergentní. Jeho hodnotu S definujeme rovností

$$S = \prod_{i=1}^{\infty} z_i = \left(\prod_{i=1}^{r-1} z_i\right) \cdot \left(\prod_{i=r}^{\infty} z_i\right)$$

a říkáme, že nekonečný součin (3.2) má hodnotu S.

Poznamenejme, že čtenáře může napadnout, že uvedený přístup je příliš složitý, a že by bylo jednodušší definovat konvergenci nekonečného součinu podle analogie s číselnými řadami. To znamená, že bychom definovali posloupnost částečných součinů $\{p_n\}$, jejíž n-tý člen je dán předpisem

$$p_n = \prod_{i=1}^{n} z_i \tag{3.3}$$

a nekonečný součin bychom pak definovali jako limitu posloupnosti $\{p_n\}$, tj.

$$\prod_{i=1}^{\infty} z_i = \lim_{n\to\infty} p_n. \tag{3.4}$$

Takto definovaný nekonečný součin (3.4) bychom prohlásili za konvergentní, pokud by limita na pravé straně vztahu (3.4) existovala a byla vlastní.

Touto definicí by ovšem nekonečný součin ztrácel některé požadované vlastnosti. Např. konvergence nekonečného součinu $0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots$ by závisela na konečném počtu faktorů. Podle výše uvedené definice je v daném případě posloupnost částečných součinů (3.3) rovna nulové posloupnosti, tedy i její limita je rovna nule, a proto by podle uvedené definice tento součin konvergoval k 0. Vynecháním prvního činitele však vzniká součin, pro který posloupnost p_n nemá vlastní limitu a je proto divergentní. Konvergence by v tomto případě závisela na jediném (!) faktoru.

Zajištění nenulové hodnoty součinu složeného z nenulových faktorů vede k podmínce, aby limita na pravé straně výrazu (3.1) byla různá od nuly. Pro ilustraci si uvedeme příklad nekonečného součinu $\prod_{n=1}^{\infty}(1/n)$. Podle zmíněné „nesprávné“ definice (3.4) je tento součin konvergentní. Problémem však je, že limita posloupnosti (3.3) je rovna nule a hodnota nekonečného součinu by proto byla rovna nule. Přitom všechny faktory jsou různé od nuly, a tedy „nekonečný součin“ nenulových činitelů je roven nule, což je ve sporu s naším požadavkem.

Čísla z_n nazýváme činiteli (faktory) nekonečného součinu (3.2). Pokud součin (3.2) nekonverguje, říkáme, že je divergentní, neboli že diverguje. Z Definice 3.1.1 vyplývá, že pokud nekonečný součin diverguje k 0, je buď $z_n = 0$ pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$, nebo existuje pouze konečný počet nulových členů z_n a takové $k \in \mathbb{N}$, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n > k$ je $z_n \neq 0$ a současně platí

$$\lim_{r\to\infty} \prod_{n=k}^{r} z_n = 0.$$

Nekonečný součin tedy konverguje k hodnotě 0, je-li nejméně jeden a nejvýše konečně mnoho členů z_n rovno nule.

Poznámka 3.1.2. Podobně jako u nekonečných řad, budeme pro zjednodušení zápisu používat u nekonečných součinů zkrácené označení. Pokud použiji součinový symbol bez označení mezí, bude to v celém textu znamenat násobení vzhledem k hodnotám indexu od jedné do nekonečna, tj.

$$\prod a_n \text{ je totéž co } \prod_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Pro nekonečné součiny existují (podobně jako pro číselné řady) různé nutné a postačující podmínky konvergence.

Věta 3.1.3. *Nutnou podmínkou konvergence nekonečného součinu* $\prod z_n$ *je splnění rovnosti* $\lim_{n\to\infty} z_n = 1$.

Důkaz. Uvažujme konvergentní nekonečný součin $\prod z_n$ s hodnotou $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Pro zjednodušení zápisu budu používat symbol P_n ve smyslu $P_n := \prod_{i=1}^{n} z_i$. Je tedy $\lim_{n\to\infty} P_n = \alpha$. Potom pro $n > 1$ platí $z_n = \frac{P_n}{P_{n-1}}$, tedy $\lim_{n\to\infty} z_n = \frac{\alpha}{\alpha} = 1$. □

Věta 3.1.4. *Nechť nekonečný součin* $\prod a_n$ *konverguje. Potom hodnota součinu* $\prod a_n$ *nezávisí na způsobu uzávorkování členů součinu, tj. je-li* $\{n_k\}$ *libovolná vybraná rostoucí posloupnost z posloupnosti přirozených čísel, pak součin*

$$(a_1 a_2 \cdots a_{n_1})(a_{n_1+1} a_{n_1+2} \cdots a_{n_2}) \cdots (a_{n_{k-1}+1} a_{n_{k-1}+2} \cdots a_{n_k}) \cdots ,$$

má stále stejnou hodnotu.

Důkaz. Označme počet nulových faktorů součinu $\prod a_n$ symbolem m. Pokud součin $\prod a_n$ konverguje, je buď $m \in \mathbb{N}$, nebo je $m = 0$. V prvním případě je hodnota součinu rovna nule při libovolném uzávorkování, neboť „nový“ součin opět obsahuje konečný počet nulových faktorů. V druhém případě má posloupnost částečných součinů neuzávorkovaného součinu limitu různou od nuly. Jestliže členy posloupnosti $\{p_n\}$ uzávorkuji libovolným (rozumným) [1]) způsobem, vzniklá posloupnost částečných součinů je vybranou posloupností posloupnosti $\{p_n\}$ a má proto stejnou limitu. To znamená, že uzávorkovaný nekonečný součin má stejnou hodnotu jako původní nekonečný součin. □

V dalším textu se budeme zabývat vztahem mezi konvergencí nekonečných řad a nekonečných součinů. Z toho důvodu je vhodné přejít k modifikovanému označení, při kterém budeme faktory nekonečného součinu zapisovat ve tvaru $z_n = (1 + a_n)$. Pro konvergenci nekonečného součinu je pak nutnou podmínkou rovnost $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, což je zároveň nutná podmínka pro konvergenci řady $\sum a_n$. Následující věta je analogií k Větě 2.3.2.

Věta 3.1.5 (Bolzano-Cauchyho podmínka). *Nekonečný součin* $\prod z_n$ *konverguje právě tehdy, když ke každému* $\varepsilon > 0$ *existuje* $p \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé* $k \in \mathbb{N}$ *a každé* $r \in \mathbb{N}$, $r \geq p$ *platí*

$$|z_{r+1} z_{r+2} \cdots z_{r+k} - 1| < \varepsilon.$$

[1]) Tím se rozumí to, že závorky se nepřekrývají. Každý člen posloupnosti $\{a_n\}$ je obsažen právě v jedné závorce. Pokud by některé závorky obsahovaly ještě vnitřní závorky, tak ani jejich přítomnost neovlivní hodnotu součinu, neboť ve vnitřních závorkách se vyskytuje pouze konečný počet faktorů, pro které je násobení asociativní operací.

Při vyšetřování konvergence nekonečných součinů **reálných** čísel se často používá následující věta.

Věta 3.1.6. *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost nezáporných reálných čísel. Nekonečný součin $\prod(1+a_n)$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum a_n$.*

Důkaz. Při důkazu využijeme nerovnost $1+x \le e^x$, která platí pro každé $x \in \mathbb{R}$. To snadno ověříme např. nalezením lokálního minima funkce $f(x) = e^x - x - 1$ v bodě $x = 0$. Pro posloupnost částečných součinů díky uvedené nerovnosti platí:

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \le e^{a_1}e^{a_2}\cdots e^{a_n} = \exp(a_1+a_2+\cdots+a_n).$$

Je-li $\{a_n\}$ nekonečná posloupnost nezáporných čísel, dostaneme použitím limitního přechodu nerovnost:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) \le \exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big). \tag{3.5}$$

Konverguje-li řada $\sum a_n$, pak $\exp\left(\sum a_n\right)$ je horním odhadem hodnoty nekonečného součinu na levé straně nerovnosti (3.5). Posloupnost částečných součinů je neklesající a shora ohraničená, má tedy vlastní limitu. Proto nekonečný součin $\prod(1+a_n)$ konverguje. $\square$

Stejně jako u nekonečných řad lze i u nekonečných součinů vyčlenit třídu součinů, jejichž hodnota nezávisí na pořadí faktorů.

Definice 3.1.7. Nechť $a_n \in \mathbb{C}$. Řekneme, že nekonečný součin $\prod(1+a_n)$ *konverguje absolutně*, konverguje-li nekonečný součin $\prod(1+|a_n|)$. Každý nekonečný součin, který konverguje, ale ne absolutně, se nazývá *neabsolutně konvergentní.*

Mohlo by se zdát, že Definice 3.1.7 je opět zbytečně komplikovaná. Kdybychom však nekonečný součin $\prod z_n$ prohlásili za absolutně konvergentní tehdy, když konverguje součin $\prod |z_n|$, ztratila by v některých případech absolutní konvergence nekonečných součinů vlastnost analogickou k vlastnosti absolutně konvergentních řad popsané ve Větě 2.5.2. Vhodným příkladem je součin

$$\prod(-1)^n = (-1)(1)(-1)(1)\cdots.$$

Tento součin by byl podle uvažované definice absolutně konvergentní, neboť

$$\prod_{n=1}^{\infty}|(-1)^n| = 1\cdot 1\cdot 1\cdots = 1.$$

Původní součin však nekonverguje, takže dostáváme případ součinu, který je divergentní a zároveň absolutně konvergentní, což je v rozporu s tím, co bychom od absolutní konvergence očekávali.

Snadno lze dokázat následující dvě věty, které jsou analogií příslušných vlastností nekonečných řad.

Věta 3.1.8. *Absolutně konvergentní nekonečný součin je konvergentní.*

Důkaz. Jestliže nekonečný součin $\prod(1+a_n)$ konverguje absolutně, potom na základě Věty 3.1.5 pro každé $\varepsilon > 0$ existuje číslo $p \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ a každé přirozené číslo $r \geq p$ platí nerovnost

$$(1+|a_{r+1}|)(1+|a_{r+2}|)\cdots(1+|a_{r+k}|) - 1 < \varepsilon. \tag{3.6}$$

Protože je

$$|(1+a_{r+1})\cdots(1+a_{r+k}) - 1| =$$
$$= |a_{r+1} + \cdots + a_{r+k} + a_{r+1}a_{r+2} + \cdots + a_{r+1}a_{r+2}a_{r+3} + \cdots + a_{r+1}\cdots a_{r+k}| \leq$$
$$\leq |a_{r+1}| + \cdots + |a_{r+k}| + |a_{r+1}a_{r+2}| + \cdots + |a_{r+1}a_{r+2}a_{r+3}| + \cdots + |a_{r+1}\cdots a_{r+k}| =$$
$$= (1+|a_{r+1}|)\cdots(1+|a_{r+k}|) - 1,$$

dostaneme odtud pomocí (3.6) nerovnost

$$|(1+a_{n+1})(1+a_{n+2})\cdots(1+a_{n+k}) - 1| < \varepsilon,$$

což podle Věty 3.1.5 znamená, že nekonečný součin $\prod(1+a_n)$ konverguje. □

Definice 3.1.9. Je-li $\{n_k\}$ prostá posloupnost všech přirozených čísel, potom součin $\prod_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ nazýváme *přerovnáním* nekonečného součinu $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$.

Věta 3.1.10. *Konvergence a hodnota absolutně konvergentního nekonečného součinu nezávisí na pořadí jeho faktorů, tj. faktory absolutně konvergentního nekonečného součinu lze přerovnat, aniž se tím poruší absolutní konvergence a hodnota součinu.*

Důkaz. Nejprve dokážeme, že konvergence absolutně konvergentního nekonečného součinu nezávisí na pořadí faktorů. Přitom dvakrát využijeme ekvivalenci dokázanou ve Větě 3.1.6. Nechť $\{n_k\}$ je prostá posloupnost všech přirozených čísel. Jestliže konverguje součin $\prod(1+|a_n|)$, potom podle Věty 3.1.6 řada $\sum |a_n|$ konverguje a její konvergence není porušena přerovnáním členů řady. Řada $\sum |a_{n_k}|$ tedy konverguje, a proto konverguje i nekonečný součin $\prod(1+|a_{n_k}|)$.

Nyní dokážeme, že přerovnáním faktorů absolutně konvergentního součinu nezměníme jeho hodnotu. Budeme přitom předpokládat, že všechny faktory jsou různé od nuly (v opačném případě by byla hodnota součinu při libovolném přerovnání vždy rovna nule). Označme symbolem $\{p_n\}$ posloupnost částečných součinů pro absolutně konvergentní součin $\prod(1+a_n)$, symbol $\{r_n\}$ značí posloupnost částečných součinů přerovnaného součinu $\prod(1+a_{n_k})$. Chceme dokázat, že platí $\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} r_n$. Z první části důkazu již víme, že obě limity jsou vlastní. V podílu p_n/r_n se některé faktory nezkrátí, označme indexy u_i resp. v_i pořadí těchto faktorů. Je tedy

$$\frac{p_n}{r_n} = \frac{(1+a_{u_1})(1+a_{u_2})\cdots(1+a_{u_m})}{(1+a_{v_1})(1+a_{v_2})\cdots(1+a_{v_m})}, \tag{3.7}$$

kde $u_1 < \cdots < u_m$, $v_1 < \cdots < v_m$. Výskyt těchto faktorů je závislý na hodnotě n, protože libovolný faktor součinu je pro dostatečně velké n obsažen jak v p_n, tak i r_n. Proto pro $n \to \infty$ rostou hodnoty indexů u_1 a v_1 nade všechny meze. Protože už je dokázáno, že i „přerovnaný“ součin konverguje, tak víme, že oba součiny splňují nutnou podmínku $\lim_{n\to\infty}(1+a_n) = 1$. Protože zlomek na pravé straně (3.7) obsahuje v čitateli i jmenovateli vždy konečný počet faktorů, lze rovnost (3.7) přepsat do tvaru

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{r_n} = \frac{\lim\limits_{u_1\to\infty} [(1+a_{u_1})(1+a_{u_2})\cdots(1+a_{u_m})]}{\lim\limits_{v_1\to\infty} [(1+a_{v_1})(1+a_{v_2})\cdots(1+a_{v_m})]} = \frac{1}{1} = 1.$$

Z toho plyne $\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} r_n$ a tedy i požadovaná rovnost hodnot obou součinů. □

Příklad 3.1.11. Vyšetřeme konvergenci a hodnotu součinu

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1}. \tag{3.8}$$

Zřejmě platí

$$\frac{n^3-1}{n^3+1} = 1 + \frac{-2}{n^3+1},$$

a protože řada $\sum_{n=2}^{\infty}(-2)/(n^3+1)$ konverguje absolutně, potom z Věty 3.1.6 vyplývá, že i součin (3.8) konverguje absolutně.

Hodnotu součinu (3.8) určíme pomocí posloupnosti částečných součinů p_n. Vzhledem k rovnostem $n^3-1 = (n-1)(n^2+n+1)$ a $n^3+1 = (n+1)(n^2-n+1)$ platí

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1\cdot 7}{3\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot 13}{4\cdot 7}\cdot\frac{3\cdot 21}{5\cdot 13}\cdot\frac{4\cdot 31}{6\cdot 21}\cdot\frac{5\cdot 43}{7\cdot 31}\cdot \cdots \\ &\cdots \cdot\frac{(n-3)\left(n^2-3n+3\right)}{(n-1)\left(n^2-5n+7\right)}\cdot\frac{(n-2)\left(n^2-n+1\right)}{n\left(n^2-3n+3\right)}\cdot\frac{(n-1)\left(n^2+n+1\right)}{(n+1)\left(n^2-n+1\right)} = \\ &= \frac{1\cdot 2}{3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

Je tedy

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1\cdot 2}{3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}\right] = \frac{2}{3}.$$

Příklad 3.1.12. Vyšetřete konvergenci nekonečného součinu

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n+(-1)^{n-1}}{n} \tag{3.9}$$

a v případě, že je součin (3.9) konvergentní, určete jeho hodnotu.

Při vyšetřování konvergence součinu (3.9) nelze použít Větu 3.1.6, protože při přepsání jednotlivých faktorů do tvaru $(1+a_n)$ není splněna podmínka nezápornosti všech členů a_n. Konvergenci součinu (3.9) proto dokážeme pomocí Bolzano-Cauchyho podmínky (Věta 3.1.5). Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Hledáme $p \in \mathbb{N}$ takové, aby pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ byla splněna nerovnost

$$\left| \frac{p+1}{p} \cdot \frac{p}{p+1} \cdot \frac{p+3}{p+2} \cdot \frac{p+2}{p+3} \cdots \frac{p+k+(-1)^{k-1}}{p+k} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Je zřejmé, že v závislosti na p a k bude součin na levé straně nerovnosti buďto roven jedné, nebo bude nabývat hodnotu nejvýše $(p+1)/p$. Stačí tedy vyšetřovat nerovnost

$$\left| \frac{p+1}{p} - 1 \right| < \varepsilon,$$

čímž dostaneme pro p odhad $p > 1/\varepsilon$. Součin (3.9) je proto konvergentní. Jedná se však o relativní konvergenci, neboť $\sum \left|(-1)^{n-1}/n\right| = \sum 1/n$ je divergentní řada. Podle Věty 3.1.6 tedy součin $\prod(1+1/n)$ diverguje a součin (3.9) konverguje neabsolutně.

Pro posloupnost částečných součinů p_n součinu (3.9) platí

$$p_n = \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}.$$

Je tedy

$$p_n = \begin{cases} 1 & \ldots \text{ je-li } n \text{ sudé číslo,} \\ \dfrac{n+1}{n} & \ldots \text{ je-li } n \text{ liché číslo.} \end{cases}$$

Hodnota součinu (3.9) je rovna $\lim_{n\to\infty} p_n = 1$.

Nyní vyšetříme, jestli přerovnáním nekonečného součinu (3.9) získáme nekonečný součin s jinou hodnotou. Uvažujme nekonečný součin

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}} \cdots, \tag{3.10}$$

který vznikl ze součinu (3.9) tak, že jsou do něj dosazeny vždy dva členy z původně liché pozice a za ně je přidán jeden prvek z původně sudé pozice. Ukážeme, že hodnota součinu (3.10) není rovna hodnotě součinu (3.9). Vzhledem k tomu, že zatím ani nevíme, zda je součin (3.10) konvergentní či divergentní, budeme vyšetřovat obě možnosti. Pokud by byl součin (3.10) divergentní, nemá ani smysl porovnávat hodnoty obou nekonečných součinů, neboť součin (3.10) by žádnou hodnotu neměl. Pokud je součin (3.10) konvergentní, můžeme jeho členy podle Věty 3.1.4 uzávorkovat následujícím způsobem

$$\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right) \cdot \left(\frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\right) \cdot \left(\frac{10}{9} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}}\right) \cdots = \frac{4}{3} \cdot \frac{36}{35} \cdot \frac{100}{99} \cdots > \frac{4}{3} > 1.$$

V tomto případě se hodnoty součinů (3.10) a (3.9) liší. Tento příklad slouží jako ilustrace pro Větu 3.1.14, kterou vyslovíme pro neabsolutně konvergentní součiny s **reálnými** členy.

Poznámka 3.1.13. Protože ve Větě 3.1.14 předpokládáme, že součin $\prod(1+a_n)$ je konvergentní, faktory nekonečného součinu musí splňovat podmínku $\lim_{n\to\infty}(1+a_n)=1$. Proto může být pouze konečný počet faktorů $(1+a_n)$ roven zápornému číslu. Podle toho, zda je počet záporných faktorů sudý nebo lichý, bude hodnota nekonečného součinu kladná nebo záporná. Stejné znaménko proto bude mít i hodnota libovolného nekonečného součinu vzniklého přerovnáním původního nekonečného součinu. Abychom nemuseli rozlišovat mezi tím, zda je hodnota nekonečného součinu kladná nebo záporná, je ve Větě 3.1.14 použita absolutní hodnota nekonečného součinu, která je vždy nezáporná.

Věta 3.1.14. *Každý neabsolutně konvergentní nekonečný součin $\prod(1+a_n)$, $a_n \in \mathbb{R}$, jehož hodnota je různá od nuly, lze přerovnat tak, že absolutní hodnota přerovnaného nekonečného součinu bude rovna libovolnému, předem stanovenému číslu $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Neabsolutně konvergentní nekonečný součin $\prod(1+a_n)$ lze dokonce přerovnat tak, že vznikne divergentní nekonečný součin.*

Důkaz. Nejprve ukážeme, že nekonečný neabsolutně konvergentní součin s nenulovou hodnotou lze přerovnat tak, že nově vzniklý nekonečný součin bude divergovat. Z předpokladů Věty 3.1.14 vyplývají rovnosti $\prod(1+a_n)=\alpha\in\mathbb{R}$ a $\prod(1+|a_n|)=\infty$. Podle Věty 3.1.6 je $\sum a_n$ neabsolutně konvergentní řada. Podle Věty 2.5.4 lze řadu $\sum a_n$ přerovnat tak, že vzniklá řada $\sum a_{n_k}$ bude divergovat. Potom nekonečný součin $\prod(1+a_{n_k})$, který vznikl z přerovnání nekonečného součinu $\prod(1+a_n)$, bude divergentní.

Nyní dokážeme, že neabsolutně konvergentní nekonečný součin s nenulovou hodnotou lze přerovnat tak, že vznikne součin s libovolnou absolutní hodnotou (ve smyslu Poznámky 3.1.13). Budeme přitom pro zjednodušení předpokládat, že pracujeme s nekonečným součinem, jehož všechny faktory $(1+a_n)$ jsou kladné. Přerovnaný nekonečný součin s předem stanovenou hodnotou $\alpha\in\mathbb{R}_+$ sestrojíme tak, že faktory původního neabsolutně konvergentního nekonečného součinu rozdělíme do dvou posloupností, jejichž prvky označíme symboly α_n^- a α_n^+. Posloupnost $\{\alpha_n^-\}$ obsahuje členy nekonečného součinu, pro které platí $0<(1+a_n)<1$, posloupnost $\{\alpha_n^+\}$ obsahuje pouze ty členy nekonečného součinu, pro které platí $(1+a_n)\geq 1$. Z členů obou posloupností vytváříme přerovnaný nekonečný součin s hodnotou α tak, že za jeho členy postupně dosazujeme prvky α_n^+ a to tak dlouho, až hodnota jejich součinu překročí číslo α. Pak začneme přidávat prvky α_n^- a to opět tak dlouho, až hodnota součinu všech dosazených členů klesne pod číslo α. Pak opět přidáváme členy posloupnosti $\{\alpha_n^+\}$, atd. Je třeba si uvědomit, že nekonečné součiny $\prod\alpha_n^+$ a $\prod\alpha_n^-$ jsou divergentní, proto lze číslo α vždy překročit vynásobením konečného počtu členů α_n^+, resp. α_n^-. Protože však původní řada konverguje neabsolutně, musí být limity posloupností $\{\alpha_n^+\}$ a $\{\alpha_n^-\}$ rovny jedné. Posloupnost částečných součinů proto konverguje k hodnotě α. □

3.2 Nekonečné součiny funkcí

V následujících kapitolách budeme pracovat s nekonečnými posloupnostmi a součiny funkcí. Připomenu, že pod pojmem *posloupnost funkcí* rozumíme zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do množiny funkcí. Posloupnost funkcí $f_1, f_2, f_3, \dots$ budu značit symbolem $\{f_n\}$. V celé kapitole budu předpokládat, že každá z funkcí $f_1, f_2, f_3, \dots$ je definovaná na otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$ a je na této množině holomorfní.

Definice 3.2.1. Nechť funkce $f_1, f_2, f_3, \dots$ jsou prvky posloupnosti funkcí $\{f_n\}$. Potom *nekonečným součinem funkcí* $f_1, f_2, f_3, \dots$ definovaným na množině G nazýváme výraz definovaný předpisem

$$\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z) := f_1(z)f_2(z)\cdots f_n(z)\cdots . \tag{3.11}$$

Funkci f_n nazýváme *n-tým faktorem* nekonečného součinu. Funkci $p_n(z) = \prod_{k=1}^{n} f_k(z)$, $n \in \mathbb{N}$, nazýváme n-tý částečný součin nekonečného součinu funkcí a posloupnost $\{p_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá posloupnost částečných součinů nekonečného součinu funkcí.

Stejně jako u nekonečných součinů čísel se budeme zabývat konvergencí nekonečných součinů funkcí.

Definice 3.2.2. O nekonečném součinu funkcí (3.11) řekneme, že *konverguje bodově* na G, jestliže nekonečný součin čísel $\prod f_n(z)$ konverguje (ve smyslu Definice 3.1.1) v každém bodě $z \in G$. Jestliže je $p(z) = \prod f_n(z)$ pro všechna $z \in G$, pak říkáme, že nekonečný součin funkcí (3.11) bodově konverguje na G k funkci $p(z)$.

V další části této kapitoly budeme pracovat s pojmy absolutní konvergence a lokálně stejnoměrné konvergence nekonečného součinu funkcí. Lokálně stejnoměrná konvergence nekonečného součinu spojitých funkcí zaručuje přenos některých vlastností funkcí f_n (např. holomorfnosti) na limitní [2]) funkci. Absolutní konvergence nekonečného součinu funkcí zase zaručí to, že přerovnáním faktorů součinu (3.11) nebude porušena ani jeho konvergence, ani hodnoty limitní funkce. Proto opět přejdeme od faktorů součinu $f_n(z)$ k faktorům ve tvaru $1 + a_n(z)$.

Definice 3.2.3. Nekonečný součin funkcí $\prod [1 + a_n(z)]$ nazveme *absolutně konvergentní na* G, jestliže součin $\prod [1 + |a_n(z)|]$ bodově konverguje na G, tj. právě tehdy, když součin (3.11) konverguje absolutně ve všech bodech $z \in G$.

Definice 3.2.4. Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n(z)\}$ *konverguje lokálně stejnoměrně na G k funkci* $f(z)$, jestliže ke každému $z \in G$ existuje okolí $O(z)$ bodu z, ve kterém je splněna podmínka

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in N)(\forall z \in O(z))(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq k)(|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon).$$

[2]) Výrazem „limitní“ funkce (označme ji $p(z)$) zde mám na mysli limitu posloupnosti částečných součinů funkcí $f_n(z)$. Je tedy $p(z) = \lim_{n\to\infty} p_n(z)$.

Definice 3.2.5. Řadu funkcí nazveme lokálně stejnoměrně konvergentní na oblasti G, jestliže příslušná posloupnost částečných součtů funkcí $\{s_n\}$ je lokálně stejnoměrně konvergentní na G.

Nekonečný součin funkcí nazveme lokálně stejnoměrně konvergentní na oblasti G, je-li příslušná posloupnost částečných součinů funkcí $\{p_n\}$ lokálně stejnoměrně konvergentní na G.

Uvedené definice mají tu nevýhodu, že k ověření toho, zda posloupnost funkcí konverguje lokálně stejnoměrně, potřebujeme znát i příslušnou limitní funkci $p(z)$. Následující věta tuto nevýhodu odstraňuje.

Věta 3.2.6 (Bolzano-Cauchyho podmínka). *Nutnou a postačující podmínkou pro lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí $\{m_n(z)\}$ na G je, aby ke každému $z_0 \in G$ existovalo okolí $O(z_0) \subset G$, pro které je splněna podmínka*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in N)(\forall z \in O(z_0))(\forall i, j \in \mathbb{N}, i, j \geq k)(|m_i(z) - m_j(z)| < \varepsilon).$$

Pro nekonečné řady funkcí platí kritérium (zvané M-test), které budeme později potřebovat při určování lokálně stejnoměrné konvergence nekonečných součinů funkcí.

Věta 3.2.7 (M-test). *Mějme posloupnost funkcí $\{f_p(z)\}$, definovaných na G. Nechť existují čísla M_p taková, že pro všechna $z \in G$ a všechna $p \in \mathbb{N}$ je $|f_p(z)| \leq M_p$. Jestliže řada $\sum M_p$ konverguje, potom řada $\sum f_p$ konverguje stejnoměrně na množině G.*

Důkaz. Mějme $\varepsilon > 0$, potom podle Věty 2.3.2 existuje číslo $p \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $r \in \mathbb{N}$ platí

$$|M_{p+1} + M_{p+2} + \cdots + M_{p+r}| < \varepsilon.$$

Protože pro všechna $z \in G$ platí $|f_p(z)| \leq M_p$, lze odvodit následující nerovnosti

$$|f_{p+1}(z) + f_{p+2}(z) + \cdots + f_{p+r}(z)| \leq |M_{p+1} + M_{p+2} + \cdots + M_{p+r}| < \varepsilon.$$

Označme $s_n(z) = f_1(z) + \cdots + f_n(z)$. Potom z rovnosti

$$|f_{p+1}(z) + \cdots + f_{p+r}(z)| = |s_{p+r}(z) - s_p(z)|$$

a Věty 3.2.6 plyne, že posloupnost částečných součtů $s_n(z)$ konverguje lokálně stejnoměrně na G. Podle Definice 3.2.5 řada $\sum f_p$ konverguje lokálně stejnoměrně na G. □

Věta 3.2.8 (Základní věta o konvergenci nekonečného součinu holomorfních funkcí). *Nechť $M \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a a_n jsou pro všechna $n \in \mathbb{N}$ holomorfní funkce na množině M. Jestliže řada funkcí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(z)|$$

konverguje lokálně stejnoměrně na množině M, pak platí:

(i) *Nekonečný součin funkcí*

$$\prod_{n=1}^{\infty} [1 + a_n(z)] \tag{3.12}$$

konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na množině M.

(ii) *Funkce $f(z)$ definovaná vztahem*

$$f(z) := \prod_{n=1}^{\infty} [1 + a_n(z)] \tag{3.13}$$

je holomorfní na množině M.

(iii) *Funkce $f(z)$ (definovaná vztahem (3.13)) má nulové body právě v těch bodech, ve kterých se rovná nule alespoň jeden z faktorů $1 + a_n(z)$ $(n = 1, 2, \cdots)$.*

Důkaz. Důkaz věty lze najít např. v knize [39], Věta 15.6. str. 332. □

Příklad 3.2.9. Ukažme, že nekonečný součin

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right), \tag{3.14}$$

určuje celou funkci.

Uvažujme posloupnost celých funkcí $a_n = -z^2/n^2$. Potom je $f_n(z) = 1 + a_n(z)$ posloupnost celých funkcí a podle bodu (i) Věty 3.2.8 stačí ověřit, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| -\frac{z^2}{n^2} \right| \tag{3.15}$$

konverguje lokálně stejnoměrně na $\mathbb{C}$. Nechť $k \in \mathbb{N}$ a množina K je definována předpisem $K := \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \leq k\}$. Potom pro všechna $z \in K$ je majorantou řady (3.15) řada $\sum(k^2/n^2) = k^2 \sum(1/n^2) = (k\pi)^2/6$, což podle Věty 3.2.7 znamená, že řada (3.15) konverguje na $\mathbb{C}$ lokálně stejnoměrně a tedy součin (3.14) konverguje na $\mathbb{C}$ lokálně stejnoměrně k holomorfní funkci. Součin (3.14) je tedy celou funkcí. Je zřejmé, že nulové body funkce definované součinem (3.14) jsou $z = \pm 1, \pm 2, \cdots$. Později se budeme zabývat vztahem této funkce k funkci $(\sin \pi z)/(\pi z)$.

Ve zbývající části této kapitoly se budu věnovat historickým poznámkám o nejstarších známých nekonečných součinech.

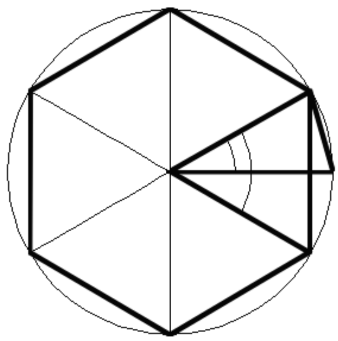
3.3 Viètův nekonečný součin

Nekonečný součin se objevil poprvé patrně v práci, jejímž autorem byl významný francouzský matematik, právník a politik François Viète (1540 – 1603). V roce 1593 Viète vydal v Tours spis *Variorum de rebus mathematicis responsorum liber octavus*

(Různé matematické problémy, svazek osmý). V tomto díle se zabýval některými známými úlohami jako např. zdvojením krychle, trisekcí úhlu, konstrukcí pravidelného sedmiúhelníku, vyšetřoval křivku kvadratrix, Hippokratovy měsíčky, atp.

Kromě toho zde můžeme nalézt i hlavní předmět našeho zájmu, tedy nekonečný součin. Ten se zde objevil v souvislosti s výpočtem hodnoty čísla π. Při jeho odvození Viète využíval klasickou archimedovskou aproximaci kruhu o poloměru r (vepsanými) pravidelnými mnohoúhelníky, přičemž pracoval s podílem obsahu mnohoúhelníku o n stranách a mnohoúhelníku s $2n$ stranami.

Obsah n-úhelníku je dán vztahem $S(n) = n \cdot S(\Delta OAB)$, kde symbolem $S(\Delta OAB)$ je míněn obsah trojúhelníka OAB, viz Obrázek č. 3.1. Pro obsah trojúhelníku OAB



Obrázek 3.1: K odvození Viètova nekonečného součinu

platí $S(\Delta OAB) = 1/2\ 2r \sin\varphi\ r\cos\varphi$, kde r je poloměr uvažovaného kruhu a 2φ značí velikost úhlu AOB. Po jednoduché úpravě tak pro obsah n-úhelníku dostaneme vztah $S(n) = 1/2\ nr^2 \sin 2\varphi$. Podobně, obsah mnohoúhelníku s $2n$ stranami je dán vztahem $S(2n) = nr^2 \sin\varphi$. Pro poměr obsahů obou mnohoúhelníků platí $S(n)/S(2n) = \cos\varphi$.

Jestliže zdvojnásobíme počet stran mnohoúhelníku, dostaneme výraz

$$\frac{S(n)}{S(4n)} = \frac{S(n)}{S(2n)} \cdot \frac{S(2n)}{S(4n)} = \cos\varphi \cdot \cos(\varphi/2). \tag{3.16}$$

Matematickou indukcí lze z rovnosti (3.16) dokázat vztah

$$\frac{S(n)}{S(2^k n)} = \frac{S(n)}{S(2n)} \frac{S(2n)}{S(4n)} \cdots \frac{S(2^{k-1}n)}{S(2^k n)} = \cos\varphi \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdots \cos\left(\frac{\varphi}{2^{k-1}}\right). \tag{3.17}$$

Čím větší volíme hodnotu k, tím přesněji aproximuje vepsaný mnohoúhelník kruh. Zapíšeme-li přesněji to, co Viète považoval za samozřejmé, pak se po provedení limitního přechodu $k \to \infty$ z mnohoúhelníku s $2^k n$ stranami stane kruh a pro jeho obsah platí $S(2^k n) = \pi r^2$. Ze vztahu (3.17) tak získáme rovnost

$$\pi = \frac{1/2\ n \sin 2\varphi}{\cos\varphi \cos(\varphi/2) \cos(\varphi/4) \cos(\varphi/8) \ldots}.$$

Viète zvolil za počáteční mnohoúhelník čtverec. Je tedy $n = 4$, $\varphi = \pi/4$, $\sin 2\varphi = 1$, $\cos\varphi = \sqrt{1/2}$. Vezmeme-li ještě v úvahu známý vztah pro kosinus polovičního úhlu

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\varphi},$$

můžeme vyjádřit výsledek ve tvaru

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdots},$$

který se však častěji zapisuje pomocí rovnosti

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\ \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\ \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots. \tag{3.18}$$

Viète byl první matematik o kterém víme, že pracoval s nekonečným součinem. Jeho snahou bylo vyjádřit hodnotu čísla π pomocí výrazu s nekonečným počtem algebraických operací. Myšlenka opakovat jisté operace *ad infinitum* je ovšem mnohem starší a sahá až do starodávného Řecka. Zmiňme např. ARCHIMÉDA (asi 287 – 212 před n. l.) a jeho *exhaustivní metodu*, s jejíž pomocí určoval obsahy některých rovinných útvarů, resp. objemy těles. Viète řecké klasiky znal a dokonce se na ně ve svém díle odkazoval. Staří Řekové však nedovedli provést příslušný výpočet přímo [3]), proto Viètův součin považujeme za skutečně první známý případ, ve kterém se podařilo určit hodnotu výrazu s nekonečným počtem členů.

3.4 Wallisův nekonečný součin

V roce 1655 vyšla kniha *Arithmetica infinitorum* (Aritmetika nekonečna), jejímž autorem byl JOHN WALLIS (1616 – 1703). V tomto díle můžeme nalézt známý, tzv. *Wallisův* nekonečný součin

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot\frac{8\cdot 8}{7\cdot 9}\cdots = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}. \tag{3.19}$$

Při popisu hlavních idejí Wallisova odvození budu používat současné matematické značení. Wallisův postup [4]) souvisí se snahou o výpočet obsahu čtvrtiny jednotkového kruhu. Wallis používal symbol $\square$ pro převrácenou hodnotu obsahu uvažované plochy a k výpočtu používal vzorec

$$\frac{1}{\square} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\sqrt{1-\frac{k^2}{n^2}}, \tag{3.20}$$

[3]) Řekové pociťovali jistou „hrůzu z nekonečna“. Svou roli v tom sehrály tzv. *Zenonovy paradoxy.* Ani Archimédes nedefinoval součet nekonečné řady, pouze odhadl součet řady a pak metodou dvojího sporu ukázal, že dané číslo je „součtem“ konkrétní nekonečné řady.

[4]) Odvození je převzato z knihy [11].

který z dnešního hlediska představuje analogii k Riemannovým součtům k integrálu

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$$

Wallis nebyl schopen přímým výpočtem určit limitu součtu na pravé straně rovnosti (3.20), proto se snažil odvodit hodnotu výrazu $1/\square$ pomocí nejrůznějších analogií. Byla mu známa rovnost

$$\int_0^1 x^{p/q}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(p/q)+1} = \frac{q}{p+q}, \qquad p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}, \tag{3.21}$$

proto se snažil nalézt analogický vzorec i pro výpočet hodnoty, která odpovídá integrálu

$$\int_0^1 (1-x^{1/p})^q\,\mathrm{d}x, \tag{3.22}$$

kde p a q představují libovolná reálná čísla a potom substitucí $p = q = \frac{1}{2}$ získat hodnotu výrazu

$$\frac{1}{\square} = \int_0^1 (1-x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x.$$

Uvažujme např. $p = 2$ a $q = 3$. Tím dostaneme integrál $\int_0^1 (1-\sqrt{x})^3\,\mathrm{d}x$, jehož hodnotu $1/10$ určíme snadno použitím vztahu (3.21). Aby se vyhnul práci se zlomky, začal Wallis pracovat s převrácenou hodnotou integrálu (3.22)

$$a_{p,q} = \frac{1}{\int_0^1 (1-x^{1/p})^q\,\mathrm{d}x}.$$

V Tabulce 3.1 jsou uvedeny hodnoty $a_{p,q}$, které Wallis vypočítal pro $p, q \in \mathbb{N}$, $p \leq 10$, $q \leq 10$. Na základě vypočtených hodnot Wallis považoval za zřejmé, že Tabulka 3.1 je tabulkou binomických koeficientů. Stejně tak na tato čísla nahlížel jako na posloupnosti „figurálních" čísel. Například, řádek s čísly $a_{2,q}$ obsahuje trojúhelníková čísla $1, 3, 6, 10, 15, \ldots$, pro která platí vztah $a_{2,q} = \frac{1}{2}(q+1)(q+2)$. Podobně, v řádku s čísly $a_{3,q}$ podle Wallise nalezneme „pyramidální" čísla $1, 4, 10, 20, 35, \ldots$, pro která platí $a_{3,q} = \frac{1}{6}(q+1)(q+2)(q+3)$. Obecně, pro hodnoty $a_{p,q}$ platí

$$a_{p,q} = \frac{1}{p!}(q+1)(q+2)\cdots(q+p). \tag{3.23}$$

Wallis též odvodil, že pro členy $a_{p,q}$ platí rekurentní vztahy

$$a_{p,q} = \frac{p+q}{q} a_{p,q-1} \quad \text{a} \quad a_{p,q} = \frac{p+q}{p} a_{p-1,q}. \tag{3.24}$$

Nyní chtěl Wallis interpolovat mezi prvky Tabulky 3.1 a to tak, aby zde byly obsaženy hodnoty $p = 1/2$, $q = 1/2$. Do vzorce (3.23) vložil místo čísla q, $q \in \mathbb{N}$, hodnoty $nq/2$, kde $q, n \in \mathbb{N}$, čímž interpoloval mezi prvky p-tého řádku. Pro ilustraci vypočtěme několik hodnot

$$a_{2,\ 1/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right) = \frac{15}{8},$$

$$a_{3,\ 5/2} = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{2}+1\right)\left(\frac{5}{2}+2\right)\left(\frac{5}{2}+3\right) = \frac{693}{48}.$$

Díky diagonální symetrii můžeme vložit dané řádky mezi prvky odpovídajícího q-tého sloupce v Tabulce 3.1. Dále Wallis vložil neznámou hodnotu $a_{1/2,\ 1/2} = \square$.

Tabulka 3.1: Hodnoty $a_{p,q}$

	q						
p	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	...	**10**
0	1	1	1	1	1	...	1
1	1	2	3	4	5	...	11
2	1	3	6	10	15	...	66
3	1	4	10	20	35	...	286
4	1	5	15	35	70	...	1001
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
10	1	11	66	286	1001	...	184756

Dalším Wallisovým krokem bylo zaplnění nevyplněných hodnot v Tabulce 3.2. K usnadnění zápisu zavedu označení $m = 2p$, $n = 2q$, $b_{m,n} = a_{p,q} = a_{m/2,n/2}$. Jestliže m a n

Tabulka 3.2: Hodnoty $a_{p,q} = b_{2p,2q}$

	n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	...
		q							
m	**p**	**0**	$\frac{1}{2}$	**1**	$\frac{3}{2}$	**2**	$\frac{5}{2}$	**3**	...
0	**0**	1	**1**	1	**1**	1	**1**	1	...
1	$\frac{1}{2}$	**1**	$\square$	$\frac{3}{2}$		$\frac{15}{8}$		$\frac{105}{48}$	...
2	**1**	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	...
3	$\frac{3}{2}$	**1**		$\frac{5}{2}$		$\frac{35}{8}$		$\frac{315}{48}$	...
4	**2**	1	$\frac{15}{8}$	3	$\frac{35}{8}$	6	$\frac{63}{8}$	10	...
5	$\frac{5}{2}$	**1**		$\frac{7}{2}$		$\frac{63}{8}$		$\frac{693}{48}$	...
6	**3**	1	$\frac{105}{48}$	4	$\frac{315}{48}$	10	$\frac{693}{48}$	20	...

jsou sudá čísla, pak ze vztahu (3.24) vyplývá

$$b_{mn} = a_{m/2,\ n/2} = \frac{m/2 + n/2}{m/2} a_{m/2,\ (n/2)-1} = \frac{m+n}{m} b_{m,\ n-2}. \tag{3.25}$$

Wallis zjistil, že rovnosti (3.25) také vyhovují ty prvky $a_{m,n}$, kde m a n jsou lichá čísla, která byla vložena do Tabulky 3.2 v předchozím kroku. Např. z $b_{12} = \frac{3}{2}$ získal

$$b_{14} = \frac{5}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{8},$$

a z $b_{41} = \frac{15}{8}$ obdržel

$$b_{43} = \frac{7}{3} \times \frac{15}{8} = \frac{35}{8}.$$

Potom Wallis použil symbol $\square$ k doplnění zbývajících prvků v řádku $m = 1$ (a pomocí symetrie k sloupci $n = 1$). Ze vzorce (3.25) dostal hodnoty

$$b_{13} = \frac{4}{3} b_{11} = \frac{4}{3}\square, \quad \text{resp.} \quad b_{15} = \frac{6}{5} b_{13} = \frac{8}{5}\square.$$

Nakonec zaplnil prázdné místo v sloupci $n = 1$ v Tabulce 3.2 použitím vztahu

$$b_{m,n} = b_{m,n-2} + b_{m-2,n}. \tag{3.26}$$

Pro sudá m a n vyjadřuje rovnost (3.26) známé pravidlo pro počítání s kombinačními čísly $a_{p,q} = a_{p,q-1} + a_{p-1,q}$ použité v Tabulce 3.1. Wallis jednoduše předpokládal, že vztah (3.26) analogicky platí i tehdy, jsou-li m a n lichá čísla. Použitím dříve vypočtených hodnot $b_{13} = b_{31} = \frac{4}{3}\square$ například dostal z rovnosti (3.26) výsledek

$$b_{33} = \frac{4}{3}\square + \frac{4}{3}\square = \frac{8}{3}\square.$$

Dále

$$b_{35} = b_{33} + b_{15} = \frac{8}{3}\square + \frac{8}{5}\square = \frac{64}{15}\square, \quad \text{atd.}$$

Dokončení výpočtu hodnoty $\square = b_{11}$ nyní spočívá v doplnění řádku pro $m = 1$.

Tabulka 3.3: Výpočet pro hodnotu $m = 1$.

	n							
m	0	1	2	3	4	5	6	...
1	1	$\square$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}\square$	$\frac{15}{8}$	$\frac{8}{5}\square$	$\frac{105}{48}$	...

Dosazením $m = 1$ do vzorce (3.25) Wallis dostal

$$b_{1,n} = \frac{n+1}{n} b_{1,n-2},$$

z čehož pomocí tzv. britské indukce [5]) pro sudá n odvodil vztah

$$b_{1,n} = 1 \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} \times \cdots \times \frac{n+1}{n}, \tag{3.27}$$

[5]) Termínem „britská indukce“ označujeme postup, ve kterém na základě provedení indukčních kroků pro malá přirozená čísla považujeme hodnoty zbývajících členů za ověřené.

zatímco pro lichá n dostal rovnost

$$b_{1,n} = \frac{\square}{2} \times \frac{2}{1} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n+1}{n}\,. \tag{3.28}$$

S přihlédnutím k (3.27) a (3.28) Wallis tvrdil, že posloupnost $b_{1,n}$ je rostoucí, což ho vedlo k nerovnostem

$$b_{1,1} < b_{1,2} < b_{1,3} \cdots < b_{1,n} < b_{1,n+1} < \cdots\ .$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ proto platí

$$b_{1,2n-1} < b_{1,2n} < b_{1,2n+1}. \tag{3.29}$$

Porovnáním nerovností (3.29) se vzorci (3.27) a (3.28) Wallis získal nerovnosti

$$\frac{\square}{2} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1} < \prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k} < \frac{\square}{2} \prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k}{2k-1}\,.$$

Snadnou úpravou pak předchozí nerovnosti převedl do tvaru

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} < \frac{2}{\square} < \left[\prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}\right] \frac{2n+2}{2n+1}\,. \tag{3.30}$$

Připomeňme, že $2/\square = \pi/2$. Limitním přechodem $n \to \infty$ již snadno získáme *Wallisův součin* (3.19).

Tímto způsobem Wallis odvodil vzorec, který dnes nese jeho jméno. Množství hypotéz a nedokázaných tvrzení, které přitom použil, neuniklo kritice jeho současníků. Známý je například spor [6]) mezi Wallisem a Thomasem Hobbesem (1588 – 1679). V roce 1685 Wallis vydal knihu *Algebra*, ve které se snažil obhájit svůj postup. Prohlásil, že jeho cílem

> (...) *nebylo popsat důkazy známých věcí, avšak spíše ukázat způsob vyšetřování nebo zjišťování věcí dosud neznámých* [7]).

Dnes se odvození vzorce (3.19) zpravidla opírá o metodu integrace per partes a odvození rekurentních vztahů

$$I_{2n} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \cdots \cdot \frac{2n-1}{2n}$$

a

$$I_{2n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\, dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \cdots \cdot \frac{2n}{2n+1},$$

[6]) Více o tomto dlouholetém sporu je možné najít např. v knize [21].

[7]) Citát je převzat z knihy [11].

(viz např. [23], kap. 3, §5. pozn. 3). Jak uvidíme později, je možné Wallisův nekonečný součin získat také dosazením některých konkrétních hodnot do známých vyjádření funkcí nekonečnými součiny.

Shrnutím dosavadních historických poznámek je zřejmé, že výskyt nekonečných součinů byl v té době nahodilý, v žádném případě nešlo o hlubší vyšetřování jejich vlastností. Spíše lze říci, že nekonečné součiny se používaly jako prostředek k řešení jiných problémů.

Kapitola 4

Leonhard Euler a nekonečné součiny

Tato kapitola pojednává o některých nekonečných součinech v pracích LEONHARDA EULERA (1707 – 1783), zejména v souvislosti s funkcí gama a funkcí sinus. Jsou také zmíněny dvě charakterizační věty pro funkci gama.

4.1 Gama funkce

Euler měl již od počátku své vědecké kariéry originální přístup k řešení problémů. V 21 letech vytvořil základy teorie budoucí gama funkce. Stalo se tak při řešení problému, který dlouhou dobu trápil přední matematiky. Následující řádky věnuji popisu daného problému. Rozvoj matematické analýzy v 17. a 18. století vedl k úlohám spojeným s interpolací mezi prvky číselných posloupností. Vhodnou jednoduchou ilustraci poskytuje vzorec pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{4.1}$$

Vztah (4.1) byl znám již ve starém Řecku a to např. v souvislosti s tzv. *figurálními čísly*[1]). Pokud chceme určit součet např. prvního sta přirozených čísel, můžeme buď postupně všechna čísla sečíst, nebo dosadit $n = 100$ do vzorce na pravé straně (4.1). Pro libovolné n tak redukujeme výpočet na provedení pouhých tří početních operací. Z našeho pohledu stojí za povšimnutí, že zatímco výraz na levé straně rovnosti (4.1) má význam pouze pro $n \in \mathbb{N}$, výraz na pravé straně vzorce (4.1) je definován pro libovolné $n \in \mathbb{R}$ a nabízí tak jedno možné řešení problému interpolace mezi členy posloupnosti 1, $1 + 2$, $1 + 2 + 3$, $1 + 2 + 3 + 4$, atd.

Řešení podobných interpolačních problémů bylo často spojeno s integrálním počtem. Například již zmíněný John Wallis v knize *Arithmetica infinitorum* (Aritmetika neko-

[1]) Viz [44], str. 49, nebo [4], str. 42.

nečna) (1655) použil metodu *indivisibilií*[2]) ploch k řešení problému kvadratury kruhu. Jedním ze získaných výsledků přitom byl nekonečný součin (3.19) popsaný v předchozí kapitole. Poznamenejme, že právě součin (3.19) sehrál významnou roli při Eulerově odvození integrálního tvaru gama funkce.

Euler se začal věnovat problémům vedoucím ke gama funkci v roce 1729. Tehdy, z podnětu CHRISTIANA GOLBACHA (1690 – 1764), hledal obecný předpis, který by poskytl všechny členy posloupnosti 1, $1 \cdot 2$, $1 \cdot 2 \cdot 3$, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$, atd. Z dnešního pohledu Euler hledal vzorec analogický k (4.1) lišící se pouze tím, že místo sčítání přirozených čísel uvažujeme jejich násobení. Uvědomíme-li si, že v té době již k „běžné matematické výbavě“ patřila binomická věta, Taylorův rozvoj a další, je zřejmé, že znalost vzorce, který by usnadnil výpočet faktoriálů, se jevila velmi žádoucí. Současně se též od takového vztahu očekávalo, že umožní interpolovat mezi faktoriály.

Dnešní pojetí funkce, jakožto vztahu mezi dvěma množinami čísel, nabízí vcelku jednoduché řešení. Přirozeným číslům přiřadíme jejich faktoriály a ostatní hodnoty můžeme stanovit „libovolně“. Tomu graficky odpovídá zanesení bodů o souřadnicích $[0,1]$, $[1,1]$, $[2,2]$, $[3,6]$, ... do kartézského souřadného systému a například jejich následné propojení křivkou tak, aby vznikl graf funkce. To lze samozřejmě provést mnoha způsoby.

Obtížnost Eulerova úkolu spočívala v tehdejším vymezení pojmu funkce. V [13] Euler uvedl:

> *Funkce proměnné veličiny je* analytický výraz *složený libovolným způsobem z této proměnné veličiny a z čísel nebo konstantních veličin.*

Zmiňovaný analytický výraz znamenal předpis (vzorec) získaný pomocí základních početních operací jako jsou sčítání, odčítání, násobení, dělení, mocnění, atd[3]). Zadání Goldbachovy úlohy tedy znělo: „Najít funkci (ve formě analytického výrazu), která v přirozených číslech nabývá hodnot faktoriálů těchto čísel.“

První uspokojivá řešení Goldbachova problému se objevila v roce 1729 a jejich autory byli nezávisle na sobě Euler a DANIEL BERNOULLI (1700 – 1782). Dne 6. října 1729 poslal Daniel Bernoulli Goldbachovi dopis věnovaný řešení jedné úlohy spojené s cykloidou. V dodatku dopisu je uvedeno řešení interpolačního problému:

> *Nechť x je index členu a A je nekonečně velké číslo; tvrdím, že obecný člen (tj. $x!$)*[4]) *bude*
>
> $$\left(A + \frac{x}{2}\right)^{x-1} \left(\frac{2}{1+x} \cdot \frac{3}{2+x} \cdot \frac{4}{3+x} \cdots \frac{A}{A-1+x}\right).$$

[2]) Metoda indivisibilií se používala při výpočtu obsahů ploch, resp. objemů těles. Spočívala v rozdělení plochy na části čar (např. přímky), resp. rozdělení tělesa na části ploch (např. kruhy). Tyto se nazývaly indivisibilie a vhodné sečtení jejich velikostí (tj. z geometrického hlediska jejich složení do původního útvaru) poskytlo hledaný obsah plochy, resp. objem tělesa, více viz [40], str. 25.

[3]) Více poznámek k vývoji pojmu funkce lze nalézt např. v článcích [41] a [27].

[4]) Poznámka autora.

> *Jestliže místo toho, abychom A považovali za nekonečně velké, položíme A rovno nějakému dostatečně velkému číslu, pak získáme veličinu, blízkou k obecnému členu.*

Ukažme, co tím měl Bernoulli na mysli. Tak např. chceme-li určit hodnotu 3!, položíme $x = 3$. Potom je

$$3! \sim \left(A + \frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdots \frac{A-1}{A+1} \cdot \frac{A}{A+2}\right) = 6\left(1 + \frac{1}{4A^2 + 12A + 8}\right).$$

Je zřejmé, že se zvyšující se hodnotou A dostaneme přesnější odhad 3!. Např. pro $A = 10$ je $3! \sim 6 + \frac{1}{88}$, pro $A = 100$ je $3! \sim 6 + \frac{1}{6868}$ a limitní přechod $A \to \infty$ dává $3! = 6$. Tolik k řešení Daniela I. Bernoulliho. Dodejme jen, že tento výsledek byl publikován teprve v roce 1843.

Euler k řešení přistoupil obecněji. Goldbachovi zaslal k danému problému celkem dva dopisy. První z nich nese datum 13. října 1729 a pojednává o problému interpolace pomocí nekonečného součinu. V druhém dopisu z 8. ledna 1730 je popsáno řešení v integrálním tvaru. Oba dopisy obsahovaly pouze jednoduchý nástin řešení. Podrobnosti Euler zveřejnil v článku [14]. V tomto textu Euler shrnul oba výsledky, přičemž hlavní důraz kladl na odvození vzorce v integrálním tvaru. O nekonečném součinu se zmiňuje již jen krátce. Euler uvádí [5]):

> (...) *hledal jsem obecné vyjádření, které dává všechny členy posloupnosti*
>
> $$1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots .$$
>
> *Za předpokladu* (...), *že se tato posloupnost chová víceméně jako geometrická posloupnost, nalezl jsem následující vyjádření*
>
> $$\frac{1 \cdot 2^n}{1+n} \cdot \frac{2^{1-n} \cdot 3^n}{2+n} \cdot \frac{3^{1-n} \cdot 4^n}{3+n} \cdot \frac{4^{1-n} \cdot 5^n}{4+n} \cdot \cdots, \tag{4.2}$$
>
> *které vyjadřuje n-tý člen dané posloupnosti. Tento výraz se však nikdy úplně nezkrátí. Pokud je n celé číslo nebo zlomek, výsledkem je pouze přibližná hodnota žádaného členu, vyjma případů $n = 0$ a $n = 1$, kdy je výsledek roven číslu* 1.

Zde se nabízí otázka, jak dalece Euler chápal limitní procesy spojené s nekonečnými součiny. Je např. snadné vyjádřit posloupnost částečných součinů odpovídající hodnotě $n = 3$. Je

$$p_k = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{1 \cdot 1 \cdot 4} \cdot \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 5} \cdot \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{3 \cdot 3 \cdot 6} \cdot \cdots \cdot \frac{(k+1)(k+1)(k+1)}{k \cdot k \cdot (k+3)} = 2 \cdot 3 \cdot \frac{(k+1)(k+1)}{(k+2)(k+3)}.$$

Chceme-li získat hodnotu 3! vypočteme $\lim_{k\to\infty} p_k$. Je

$$\lim_{k\to\infty} 2 \cdot 3 \cdot \frac{(k+1)(k+1)}{(k+2)(k+3)} = 6.$$

[5]) Citovaný úryvek je převzat z anglického překladu [15], který je pro čtenáře dostupný na adrese http://home.sandiego.edu/~langton/eg.pdf.

Euler píše, že si je vědom toho, že popsaný výsledek není vhodný k určování hodnot faktoriálů. Všiml si však, že vzorec má smysl i pro neceločíselné hodnoty, a je proto vhodný k interpolaci mezi faktoriály. Dále Euler uvádí, že při dosazení $n = 1/2$ získal vztah podobný (3.19).

> (...) *dostal jsem řadu*
>
> $$\sqrt{\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 6}{5\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 8}{7\cdot 7}\cdot\frac{8\cdot 10}{9\cdot 9}\cdot\cdots},$$
>
> *která vyjadřuje hodnotu hledaného členu. Tato řada je mi ale povědomá v souvislosti se vzorcem pro obsah kruhu, který jsem viděl u Wallise. Wallis zjistil, že hodnotu podílu obsahu čtverce a kruhu o jeho průměru lze vyjádřit ve tvaru*
>
> $$2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdot 10\cdots \quad \textit{ku} \quad 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdot 9\cdots .$$
>
> *Jestliže průměr kruhu bude roven jedné, bude obsah kruhu roven*
>
> $$= \frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 6}{5\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 8}{7\cdot 7}\cdot\ \cdots .$$
>
> *Z této souvislosti jsem odvodil, že člen s indexem $n = 1/2$ je roven odmocnině z obsahu kruhu s průměrem rovným jedné.*

Jak Euler dále uvádí, v jistých případech můžeme integrací získat vzorce související s kvadraturou křivek. Protože věděl, že člen $n = 1/2$ souvisí s obsahem kruhu, napadlo ho hledat obecné vyjádření faktoriálů pomocí vhodné formule v integrálním tvaru. Začal vyšetřovat integrál $\int_0^1 x^w(1-x)^n dx$, kde $n \in \mathbb{Z}$ a číslo $w \in \mathbb{R}$ představuje libovolnou, ale pevně zvolenou hodnotu. Pomocí binomické věty rozložil výraz $(1-x)^n$, z čehož po vynásobení členem x^w dostal

$$x^w(1-x)^n = x^w - \frac{n}{1}x^{w+1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{w+2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{w+3} + \cdots .$$

Integrací obou stran vzniklé rovnosti získal výraz

$$\int x^w(1-x)^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{w+1}}{w+1} - \frac{nx^{w+2}}{1\cdot(w+2)} + \frac{n(n-1)x^{w+3}}{1\cdot 2\cdot(w+3)} - \cdots . \tag{4.3}$$

S integrálem na levé straně rovnice (4.3) začal Euler pracovat jako s určitým integrálem [6]) s mezemi od 0 do 1. Tímto způsobem dospěl k výrazu

$$\int_0^1 x^w(1-x)^n \mathrm{d}x = \frac{1}{w+1} - \frac{n}{1\cdot(w+2)} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2\cdot(w+3)} - \cdots . \tag{4.4}$$

[6]) Euler samozřejmě nepracoval s pojmem určitého integrálu. Prováděl však operace, které k němu z dnešního pohledu vedou.

Tento výraz je důležitý z toho důvodu, že pro daná n nabývá hodnoty

$$\begin{aligned} n=0 &\quad\cdots\quad \frac{1}{w+1},\\ n=1 &\quad\cdots\quad \frac{1}{(w+1)(w+2)},\\ n=2 &\quad\cdots\quad \frac{1\cdot 2}{(w+1)(w+2)(w+3)},\\ n=3 &\quad\cdots\quad \frac{1\cdot 2\cdot 3}{(w+1)(w+2)(w+3)(w+4)},\ \cdots. \end{aligned}$$

Pravidlo, podle kterého vznikají další členy, je zřejmé. Euler tak dospěl pro nezáporná celá n a libovolné $w \in \mathbb{R}$ k obecnému vyjádření

$$\int_0^1 x^w(1-x)^n \mathrm{d}x = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n}{(w+1)(w+2)\cdots(w+n+1)}. \tag{4.5}$$

Pokud n není nezáporné celé číslo, je pro vyjádření hodnoty výrazu $\int x^w(1-x)^n \mathrm{d}x$ vhodnější používat vzorec (4.4). Vynásobíme-li každou ze stran rovnosti (4.5) výrazem $w+n+1$, dostaneme

$$(w+n+1)\int_0^1 x^w(1-x)^n \mathrm{d}x = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{(w+1)(w+2)\cdots(w+n)}. \tag{4.6}$$

Nahradíme-li v rovnici (4.6) člen w zlomkem ve tvaru f/g dostaneme po jednoduché úpravě rovnost

$$\frac{(f+(n+1)g}{g^{n+1}}\int_0^1 x^{f/g}(1-x)^n \mathrm{d}x = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{(f+g)(f+2g)\cdots(f+ng)}. \tag{4.7}$$

Položením $f=1$ a $g=0$ se výraz na pravé straně (4.7) změní na $1\cdot 2\cdot 3\cdots n$ a výraz na levé straně (4.7) potom bude integrálním vyjádřením hledané závislosti, tedy

$$1\cdot 2\cdot 3\cdots n = \int_0^1 \frac{x^{\frac{1}{0}}(1-x)^n \mathrm{d}x}{0^{\frac{1}{0}}}. \tag{4.8}$$

V dalším textu Euler vyšetřuje, co neurčitý výraz na pravé straně (4.8) znamená. Ve vzorci (4.7) nahradil proměnnou x výrazem $x^{\frac{g}{f+g}}$ a současně místo $\mathrm{d}x$ dosadil výraz $\frac{g}{f+g}x^{\frac{-f}{f+g}}\mathrm{d}x$. Takto převedl integrál na pravé straně (4.8) do tvaru

$$\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}}\int_0^1 \frac{g}{f+g}\left(1-x^{\frac{g}{f+g}}\right)^n \mathrm{d}x$$

a položením $f=1$ a $g=0$ získal rovnost

$$1\cdot 2\cdot 3\cdots n = \int_0^1 \frac{(1-x^0)^n}{0^n}\mathrm{d}x. \tag{4.9}$$

Pro vyjádření integrandu v (4.9) Euler uvažoval související výraz $(1-x^z)/z$ pro $z \to 0$. Z dnešního pohledu použil rovnost $\lim_{z\to 0}(1-x^z)/(z) = -\ln x$ a díky tomu našel pro „faktoriálovou funkci“ vyjádření

$$n! = \int_0^1 (-\ln x)^n \,\mathrm{d}x. \tag{4.10}$$

Z rovnosti

$$I_n = \int_0^1 (-\ln x)^n \mathrm{d}x = [x(-\ln x)^n]_0^1 + n\int_0^1 (-\ln x)^{n-1}\mathrm{d}x = n\int_0^1 (-\ln x)^{n-1}\mathrm{d}x$$

plyne rekurentní vzorec $I_n = n\cdot I_{n-1}$, který ukazuje, že pro $n \in \mathbb{N}$ vzorec (4.10) skutečně vytváří hodnoty faktoriálů. Navíc integrál (4.10) poskytuje smysluplné hodnoty i pro libovolné $n \in (-1,\infty)$. V roce 1809 upravil v práci [29] Adrien Maria Legendre (1752 – 1833) integrál (4.10) pomocí substituce $x = \exp(-t)$ a „posunutí“ definičního oboru do dnes používaného tvaru

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t, \qquad x \in (0,\infty). \tag{4.11}$$

Od Legendra též pochází označení funkce řeckým písmenem Γ a pojmenování integrálu (4.11) *Eulerovým integrálem druhého druhu.* Mezi gama funkcí a faktoriály platí vztah

$$\Gamma(x) = (x-1)!, \qquad x \in \mathbb{N}. \tag{4.12}$$

Integrací per partes dostaneme z integrálu (4.11) vztah

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x}\mathrm{d}t = \left[-e^{-t}t^x\right]_0^\infty + x\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t = x\Gamma(x).$$

Gama funkce tedy vyhovuje funkcionální rovnici

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \qquad x \in (0,\infty), \tag{4.13}$$

která je analogií ke vztahu (4.24).

Řešení (4.10) v integrálním tvaru Euler podrobně zdůvodnil. Způsob, pomocí kterého odvodil součin (4.2), však v [14] neuvádí. Teprve v roce 1789 ho podrobněji popsal v článku *De termino generali serierum hypergeometricarum* (O obecných členech hypergeometrické řady). Převedeme-li Eulerovy úvahy do dnešního značení, můžeme je popsat následujícím způsobem:

Vyjdeme od charakteristického vztahu pro faktoriály $n! = n\cdot(n-1)!$. Jestliže $n \in \mathbb{N}$, můžeme psát

$$(x+n)! = x!\,(x+1)(x+2)\cdots(x+n). \tag{4.14}$$

Jestliže je i x přirozené číslo, potom platí

$$(x+n)! = (n+x)! = n!\,(n+1)(n+2)\cdots(n+x).$$

Je tedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(x+n)!}{n!} \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+x)} = 1. \tag{4.15}$$

Nechť α značí libovolné, ale pevně zvolené reálné číslo. Potom snadno nahlédneme, že pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{N}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+x)}{(n+\alpha)^x} = 1. \tag{4.16}$$

Pomocí (4.15) a (4.16) získáme vztah

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(x+n)!}{n!\ (n+\alpha)^x} = 1. \tag{4.17}$$

Použitím vzorců (4.14) a (4.17) obdržíme vztah

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x!\ (x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{n!\ (n+\alpha)^x} = 1. \tag{4.18}$$

V této limitě vystupuje $x!$ jako proměnná, která se „neúčastní“ limitního procesu. Můžeme ji proto vytknout před limitu a po úpravě dostaneme

$$x! = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\ (n+\alpha)^x}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}. \tag{4.19}$$

Označme nyní symbolem p_n hodnotu zlomku na pravé straně výrazu (4.19) pro nějaké konkrétní $n \in \mathbb{N}$ a $\alpha = 1$. Je tedy např.

$$p_1 = \frac{1!\ (1+1)^x}{x+1}, \quad p_2 = \frac{2!\ (2+1)^x}{(x+1)(x+2)}, \quad p_3 = \frac{3!\ (3+1)^x}{(x+1)(x+2)(x+3)}, \quad \dots \tag{4.20}$$

Pro limitní přechod $n \to \infty$ Euler využil „teleskopičnost“ nekonečného součinu

$$\lim_{n\to\infty} p_n \sim p_1 \frac{p_2}{p_1} \frac{p_3}{p_2} \frac{p_4}{p_3} \cdots \tag{4.21}$$

Dosazením (4.20) do (4.21) dostaneme z (4.19) vztah

$$x! = \frac{2^x}{x+1}\ \frac{2^{1-x}\ 3^x}{x+2}\ \frac{3^{1-x}\ 4^x}{x+3}\ \frac{4^{1-x}\ 5^x}{x+4}\ \cdots \tag{4.22}$$

Porovnáním s (4.2) zjistíme, že (4.22) je hledaný výraz pro interpolaci mezi faktoriály, který Euler popsal v roce 1729. Dodejme jen, že vzorec (4.22) lze upravit do tvaru

$$\begin{aligned} x! &= \left(\frac{2^x}{1^{x-1}} \frac{1}{x+1}\right)\left(\frac{3^x}{2^{x-1}} \frac{1}{x+2}\right) \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^x \frac{n}{n+x}\right] = \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^x \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}\right]. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Krátce po vydání [14] Euler dokázal, že oba získané vzorce (4.2) a (4.10) definují na $(0,\infty)$ tutéž funkci. Uvědomíme-li si, kolika různými způsoby je možné řešit uvedený interpolační problém, vyniká o to více Eulerova geniální intuice, která ho vedla různými postupy k totožným výsledkům.

4.1.1 Bohr–Mollerupova věta

V této části se budu podrobněji věnovat dalšímu možnému způsobu zavedení „faktoriálové funkce“. Hledáme funkci, která pro $n \in \mathbb{N}$ vyhovuje vztahu $f(n) = n!$. Již víme, že takových funkcí existuje větší počet. Proto úlohu zúžíme a budeme hledat funkci, která splňuje některé dodatečné podmínky [7]). Jednou z „přirozených“ podmínek je požadavek, aby hledaná funkce vyhovovala funkcionální rovnici

$$f(x+1) = (x+1)f(x), \quad x \in \mathbb{R}^+ := (0, \infty), \tag{4.24}$$

která představuje zobecnění rekurentního vzorce $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$, $n \in \mathbb{N}$.

S přihlédnutím ke vztahům $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2, \ldots$ můžeme pro funkci f určit další podmínky, např. $f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, atd. Za zmínku stojí, že z uvedených podmínek stačí uvést pouze jedinou. Ostatní podmínky vyplývají z rovnice (4.24). Tu lze upravit do tvaru $f(x+2) = (x+2)f(x+1) = (x+2)(x+1)f(x)$, resp. obecně vyjádřit ve tvaru

$$f(x+n) = (x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)f(x), \qquad n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^+. \tag{4.25}$$

Pak platí $f(1) = f(0+1) = 1 \cdot f(0) = 1$, $f(2) = f(0+2) = 2 \cdot 1 \cdot f(0) = 2$, atd. Rovnice (4.25) má další důležitou vlastnost. Pokud bychom znali všechny hodnoty x např. z intervalu $(0, 1\rangle$, mohli bychom pomocí rovnice (4.25) vypočítat všechny hodnoty z intervalu $(n, n+1\rangle$, kde $n \in \mathbb{N}$, tedy obecně pro libovolné $x \in \mathbb{R}^+$. Rovnici (4.25) navíc můžeme upravit pro $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, -2, -3, \ldots\}$ do tvaru

$$f(x) = \frac{f(x+n)}{(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)}, \qquad n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, -2, -3, \ldots\}. \tag{4.26}$$

Rovnosti (4.26), (4.25) umožňují vypočítat hodnoty f na množině $\mathbb{R}\backslash\{-1, -2, -3, \ldots\}$, a to na základě znalosti hodnot funkce v intervalu $(x, x+1\rangle$, kde $x \in \langle -1, \infty)$. Zbývá tedy „pouze“ určit hodnoty funkce f v nějakém vhodném intervalu.

Vraťme se proto k rovnici (4.24). Řešení této rovnice není jednoznačné. Vzhledem k výše uvedenému nám situaci neusnadní ani požadavek na spojitost funkce f. Na řadu přichází výše zmiňovaná podmínka $f(0) = 1$. Spojité řešení rovnice (4.24) spolu s podmínkou $f(0) = 1$ vytváří spojitou funkci, která produkuje faktoriály, nicméně i tato omezení jsou nedostatečná k získání jednoznačného řešení. To lze ukázat pomocí následujícího příkladu. Nechť f je hledané spojité řešení rovnice (4.24), které splňuje podmínku $f(0) = 1$. Uvažujme libovolnou spojitou periodickou funkci $g(x)$ s periodou $p = 1$, pro kterou platí $g(0) = 1$. Je tedy např. $g(x) = \cos 2\pi x$ nebo $g(x) = 1 + \sin 2\pi x$. Budeme vyšetřovat funkci $h(x) := f(x) \cdot g(x)$. Snadno ověříme, že platí rovnost

$$h(x+1) = (x+1)h(x).$$

[7]) Čtenáře upozorňuji, že uvedené podmínky se týkají faktoriálů, nikoliv funkce gama. Zde odvozené vztahy použijeme v páté kapitole.

Protože platí rovnost $h(0) = 1$, je $h(x)$ spojitou funkcí, jejíž hodnoty v přirozených číslech odpovídají faktoriálům těchto čísel.

Mohli bychom opět zesílit požadavky kladené na funkci f a přidat např. požadavek konvexity [8]) a diferencovatelnosti nalezeného řešení. Ovšem ani tyto vlastnosti hledaného řešení nezajistí jednoznačně určené řešení funkcionální rovnice (4.24). Dostatečně silnou podmínkou se ukázala být tzv. logaritmická konvexita. Nejprve však připomeňme definici konvexní funkce.

Definice 4.1.1. Funkce f definovaná na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ je *konvexní na* I, jestliže pro každé dva body $x, y \in I$ a každé $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$ platí

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y).$$

Právě popsaná vlastnost má řadu geometrických interpretací. Například porovnáním směrnic sečen grafu konvexní funkce lze dospět pro každou trojici bodů

$$x_1 < x_2 < x_3, \quad x_1, x_2, x_3 \in I,$$

k soustavě nerovností, z nichž každá charakterizuje konvexitu funkce f

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}. \tag{4.27}$$

Definice 4.1.2. Řekneme, že funkce f definovaná na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ je *logaritmicky konvexní na* I, je-li funkce f kladná na I a složená funkce $\log \circ f$ konvexní na I.

Logaritmická konvexita je silnější podmínkou než „obyčejná“ konvexita. Logaritmicky konvexní funkce jsou konvexní, ne každá konvexní funkce je však logaritmicky konvexní. Např. konvexní polynomy libovolně vysokého stupně nejsou logaritmicky konvexní na žádném intervalu.

Věta 4.1.3. *Součin logaritmicky konvexních funkcí je logaritmicky konvexní funkce.*

Důkaz. Nechť funkce f a g jsou logaritmicky konvexní na intervalu I. To podle definice znamená, že pro každé dva body $x, y \in I$ a každé $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$ platí nerovnosti

$$\log f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha \log f(x) + (1-\alpha) \log f(y),$$

$$\log g(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha \log g(x) + (1-\alpha) \log g(y).$$

Sečtením obou výše uvedených nerovností a následnou jednoduchou úpravou dostaneme nerovnost

$$\log(f \cdot g)(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha \log(f \cdot g)(x) + (1-\alpha) \log(f \cdot g)(y).$$

To však znamená, že i součin funkcí f a g je logaritmicky konvexní funkce. □

[8]) Řešení popsaná pomocí zmiňovaných goniometrických funkcí nejsou konvexní funkce. Podle hezkého přirovnání v [10] připomínají „záda velbloudа“.

Věta 4.1.4 (Bohr–Mollerup). *Existuje právě jedna kladná spojitá funkce f definovaná na intervalu $(0, \infty)$, která*

(i) *pro všechna $x \in (0, \infty)$ vyhovuje funkcionální rovnici $f(x+1) = xf(x)$,*

(ii) *vyhovuje podmínce $f(1) = 1$,*

(iii) *je logaritmicky konvexní na intervalu $(0, \infty)$.*

Tuto větu dokázali v roce 1922 dánští matematici Harald Bohr [9]) (1887 – 1925) a Johannes Mollerup (1872–1937). V roce 1931 vydal Emil Artin (1898–1962) práci [1], ve které uvedl významně jednodušší důkaz této věty. Význam Věty 4.1.4 spočívá v tom, že pokud dokážeme, že nějaká funkce vyhovuje všem předpokladům Věty 4.1.4, pak se na intervalu $(0, \infty)$ tato funkce nutně musí rovnat gama funkci (4.11).

Důkaz. K důkazu Věty 4.1.4 musíme ověřit dvě skutečnosti. Za prvé je nutné ukázat, že funkce s uvedenými vlastnostmi existuje a za druhé, že taková funkce je určena jednoznačně. V první části důkazu ukážeme, že funkce $\Gamma(x)$ definovaná předpisem (4.11) vyhovuje všem předpokladům Věty 4.1.4. Podmínka (i) je již ověřena, neboť pro funkci $\Gamma(x)$ jsme odvodili, že vyhovuje rovnici (4.13). Podmínku (ii) ověříme též snadno následujícím výpočtem

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{s\to\infty}\int_0^s e^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{s\to\infty}\left(1 - e^{-s}\right) = 1.$$

Nechť funkce $f(x), g(x)$ jsou kladné v intervalu $(0, \infty)$. Zvolme $p \in \mathbb{R}$, $p > 1$ a $q \in \mathbb{R}$ takové, že platí $(1/p) + (1/q) = 1$. Potom podle Hölderovy nerovnosti [10]) v integrálním tvaru platí pro každé $x, y \in (0, \infty)$ nerovnost

$$\int_0^\infty f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \le \left(\int_0^\infty f^p(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_0^\infty g^q(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{4.28}$$

Pomocí (4.28) snadno ověříme následující vztahy

$$\int_0^\infty t^{(x/p)+(y/q)-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \left(t^{x-1}e^{-t}\right)^{1/p}\left(t^{y-1}e^{-t}\right)^{1/q}\,\mathrm{d}t \le$$

$$\le \left(\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}\left(\int_0^\infty t^{y-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\right)^{1/q}.$$

[9]) Harald Bohr byl mladší bratr slavného fyzika, autora kvantového modelu atomu, Nielse Bohra. Poznamenejme, že oba bratři byli náruživí sportovci. Hráli nejvyšší dánskou fotbalovou ligu. Harald byl dokonce členem dánského reprezentačního fotbalového mužstva, které na olympijských hrách v Londýně v roce 1908 získalo stříbrnou medaili. Při této poznámce se často dodává, že Harald Bohr je jediný profesionální matematik, který získal olympijskou medaili.

[10]) Viz např. učebnice [22].

Funkce Γ proto vyhovuje nerovnosti

$$\Gamma\left(\frac{x}{p}+\frac{y}{q}\right) \leq (\Gamma(x))^{1/p}\,(\Gamma(y))^{1/q}\,. \tag{4.29}$$

Zlogaritmováním obou stran nerovnosti (4.29) a jednoduchou úpravou dostaneme

$$\log\Gamma\left(\frac{x}{p}+\frac{y}{q}\right) \leq \frac{1}{p}\log\Gamma(x)+\frac{1}{q}\log\Gamma(y),$$

což podle Definice 4.1.1 znamená, že funkce Γ je logaritmicky konvexní na intervalu $(0,\infty)$. Funkce gama definovaná předpisem (4.11) proto vyhovuje všem podmínkám Věty 4.1.4.

Nyní ukážeme, že podmínkám Věty 4.1.4 vyhovuje jediná funkce. Nechť f je funkce, která vyhovuje všem podmínkám dokazované věty. Ze vztahu (4.27) a předpokladu logaritmické konvexity funkce f vyplývají pro všechna $x_1, x_2, x_3 \in (0,\infty)$, $x_1 < x_2 < x_3$, nerovnosti

$$\frac{\log f(x_2)-\log f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{\log f(x_3)-\log f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{\log f(x_3)-\log f(x_2)}{x_3-x_2}\,. \tag{4.30}$$

Pro $x \in (0,1\rangle$ a $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnosti $n-1<n<n+x\leq n+1$. Vzhledem k tomu můžeme nerovnosti (4.30) přepsat ve tvaru

$$\frac{\log f(n-1)-\log f(n)}{(n-1)-n} \leq \frac{\log f(x+n)-\log f(n)}{(x+n)-n} \leq \frac{\log f(n+1)-\log f(n)}{(n+1)-n}\,.$$

Z podmínky (i) ihned vyplývají rovnosti $\log f(n) = \log(n-1)+\log f(n-1)$, resp. $\log f(n+1) = \log(n)+\log f(n)$. Použitím těchto vztahů a jednoduchou úpravou dostaneme

$$x\log(n-1)+\log f(n) \leq \log f(x+n) \leq x\log n+\log f(n),$$

což vzhledem ke vztahům $f(x+n) = x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)f(x)$ a $f(n) = (n-1)!$ vede po „odlogaritmování“ k nerovnostem

$$(n-1)^x(n-1)! \leq x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)f(x) \leq n^x(n-1)!.$$

Vzhledem k tomu, že nerovnosti platí pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, výraz n lze nahradit hodnotou $n+1$. Tím získáme

$$n^x n! \leq x(x+1)(x+2)\dots(x+n)f(x) \leq (n+1)^x n!,$$

resp.

$$1 \leq \frac{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}{n^x n!}f(x) \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^x,$$

což po limitním přechodu $n\to\infty$ dává rovnost

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}\,, \tag{4.31}$$

z čehož na základě jednoznačnosti limity plyne platnost Věty 4.1.4. □

Důsledkem Věty 4.1.4 je vzorec

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}, \qquad x \in (0,\infty),\ n \in \mathbb{N}. \tag{4.32}$$

Úpravou vzorce (4.32) můžeme odvodit některá další vyjádření funkce gama. Protože platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^x}{n^x} = 1,$$

lze v (4.32) nahradit n^x výrazem $(n+1)^x$, čímž získáme

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^x n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}. \tag{4.33}$$

Jmenovatel zlomku lze upravit do tvaru

$$x(x+1)(x+2)\cdots(x+n) = n!x\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right). \tag{4.34}$$

Pomocí (4.34) a „teleskopické“ vlastnosti nekonečného součinu

$$\left(\frac{2}{1}\right)^x\left(\frac{3}{2}\right)^x\left(\frac{4}{3}\right)^x\cdots\left(\frac{n+1}{n}\right)^x = (n+1)^x$$

upravíme vzorec (4.33) do tvaru

$$\Gamma(x) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{x}\prod_{n=1}^{m}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^x\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}\right],$$

z čehož vyplývá rovnost

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^x\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}\right]. \tag{4.35}$$

Nekonečný součin (4.35) je navíc definován pro všechna $x \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1,-2,\ldots\}$. Je proto vhodný k definici gama funkce na množině $\Omega = \mathbb{R}\backslash\{0,-1,-2,\ldots\}$. Ze vzorce (4.32) lze pro funkci gama odvodit další důležitý vztah. Zřejmě platí

$$n^x = e^{x\log n}\cdot e^{x/1}\cdot e^{-x/1}\cdot e^{x/2}\cdot e^{-x/2}\cdots e^{x/n}\cdot e^{-x/n}. \tag{4.36}$$

Pomocí (4.36) můžeme z rovnosti (4.32) odvodit vztah

$$\Gamma(x) = \exp\left(-x\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} 1/k - \log n\right]\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\exp\left(x/1+x/2+\cdots+x/n\right)}{x\left(1+x/1\right)\left(1+x/2\right)\cdots\left(1+x/n\right)}.$$

Dále položíme $\gamma := \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} 1/k - \log n\right)$. Číslo $\gamma = 0{,}577215\ldots$ nazýváme Euler-Mascheroniova [11]) konstanta. Potom lze funkci gama vyjádřit pomocí rovnosti

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}e^{-\gamma x}\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\frac{e^{x/k}}{1+(x/k)}, \qquad x \in \Omega, \tag{4.37}$$

Vzorec (4.37) se stal výchozím bodem pro mnoho dalších výpočtů.

[11]) Euler určil hodnotu γ s přesností na 15 desetinných míst. Lorenzo Mascheroni (1750 – 1800) na 32 míst, z toho však pouze 19 bylo správných. Do dnešního dne není patrně známo, zda je γ racionální nebo iracionální číslo. V roce 1997 vypočítal Thomas Papanikolaou hodnotu γ na 1 000 000 desetinných míst a pomocí rozvoje γ v řetězový zlomek ukázal, že pokud je γ racionální číslo, má jeho jmenovatel více než 244 663 číslic, viz [33], str. 81.

4.1.2 Wielandtova věta

V této části se budeme zabývat některými vlastnostmi funkce gama v komplexním oboru.

Označení 4.1.5. Symbolem $\mathbb{N}_0$ v této kapitole rozumím množinu $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Množina $\mathbb{A}$ je v celé této kapitole definována předpisem $\mathbb{A} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z > 0\}$.

Kromě Bohr-Molerupovy věty, která charakterizuje funkci gama v reálném oboru, existuje analogická věta o jednoznačnosti funkce gama i v komplexním oboru. V následujícím lemmatu připomenu některá známá tvrzení o funkci gama. Znění následujících lemmat i tzv. Wielandtovy věty je převzato z [37].

Lemma 4.1.6. *Funkce $\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ je holomorfní na $\mathbb{A}$ a konverguje stejnoměrně na každém pásu $\{z \in \mathbb{C} : a \leq \text{Re } z \leq b\}$, kde $0 < a < b < \infty$. Funkce gama je ohraničená na každém pásu $\{z \in \mathbb{C} : a \leq \text{Re } z \leq b\}$, kde $0 < a < b < \infty$.*

Důkaz. Důkaz tvrzení lze najít např. v knize [36]. □

Lemma 4.1.7. *Nechť f je holomorfní funkce na množině $\mathbb{A}$ a nechť na této množině vyhovuje rovnici*

$$f(z+1) = zf(z), \qquad z \in \mathbb{A}. \tag{4.38}$$

Potom existuje funkce $\hat{f}$, která je meromorfní na množině $\mathbb{C}$, je holomorfní na množině $\mathbb{C}\backslash\{0, -1, -2, \ldots\}$ a pro restrikci funkce $\hat{f}$ na množinu $\mathbb{A}$ platí rovnost $\hat{f}|\mathbb{A} = f$. Funkce $\hat{f}$ má v bodech $-n, n \in \mathbb{N}_0$ póly řádu nejvýše 1, jejichž rezidua mají hodnotu $(-1)^n f(1)/n!$. Navíc, $\hat{f}$ je celá funkce, pokud platí $f(1) = 0$.

Důkaz. Ze vztahu (4.38) snadno ukážeme, že pro všechna $z \in \mathbb{A}$ platí rovnost

$$f(z+n+1) = z(z+1)\cdots(z+n)f(z).$$

Uvažujme bod $z \in \mathbb{C}\backslash\{0, -1, -2, \ldots\}$. Definujme bod $\hat{z}$ předpisem $\hat{z} := z + n + 1$ tak, aby pro dostatečně velké $n \in \mathbb{N}_0$ bylo $\hat{z} \in \mathbb{A}$. Dále zavedeme funkci $\hat{f}$ pomocí předpisu

$$\hat{f}(z) := \frac{f(\hat{z})}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

Tato definice je nezávislá na volbě n a tím dostáváme funkci $\hat{f}$, která je holomorfní na množině $\mathbb{C}\backslash\{0, -1, -2, \ldots\}$. Pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ je

$$\lim_{z \to -n}(z+n)\hat{f}(z) = \lim_{z \to -n} \frac{f(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} = \frac{(-1)^n}{n!}f(1).$$

Je-li $f(1) \neq 0$, je bod $-n, n \in \mathbb{N}_0$ jednoduchým pólem funkce $\hat{f}$ s hodnotou rezidua $(-1)^n f(1)/n!$. Je-li $f(1) = 0$, má výraz $(-1)^n f(1)/n!$ nulovou hodnotu a $\hat{f}$ je celá funkce. □

Věta 4.1.8 (Wielandt). *Nechť $F(z)$ je funkce holomorfní na $\mathbb{A}$. Nechť dále platí, že $F(z)$ má následující vlastnosti*

(i) $F(z+1) = zF(z), \qquad z \in \mathbb{A}.$

(ii) *$F(z)$ je ohraničená na pásu $S := \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq \text{Re } z < 2\}$.*

Potom pro všechna $z \in \mathbb{A}$ platí rovnost $F(z) = a\Gamma(z)$, kde $a := F(1)$.

Důkaz. Vzhledem k předpokladům Věty 4.1.8 je funkce $f := F - a\Gamma$ holomorfní na množině $\mathbb{A}$. Podle podmínky (i) snadno ověříme, že funkce f pro všechna $z \in \mathbb{A}$ vyhovuje rovnosti $f(z+1) = zf(z)$. Protože $f(1) = 0$, je podle Lemmatu 4.1.7 možné funkci f rozšířit na celou funkci $\hat{f}$. Funkce $\Gamma|S$ je podle Lemmatu 4.1.6 ohraničená, proto i funkce $f|S$ je podle podmínky (ii) Věty 4.1.8 ohraničená. Z toho plyne ohraničenost funkce f na množině $S_0 := \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \text{Re } z < 1\}$. Pro body množiny S_0 vyhovující nerovnosti $|\text{Im } z| > 1$ plyne ohraničenost f z rovnosti $f(z) = f(z+1)/z$ a ohraničenosti funkce f na S. Pro z vyhovující nerovnosti $|\text{Im } z| \leq 1$ je ohraničenost f zřejmá.

Nyní uvažujme celou funkci $s(z) := \hat{f}(z)\hat{f}(1-z)$. Protože funkce $f(z)$ a $f(1-z)$ nabývají na S_0 stejné hodnoty, je funkce $s(z)$ ohraničená na S_0. Ze zřejmých rovností $\hat{f}(z+1) = z\hat{f}(z)$ a $\hat{f}(-z) = -\hat{f}(1-z)/z$ dostaneme vztah $s(z+1) = -s(z)$. Funkce $s(z)$ je proto ohraničená na $\mathbb{C}$. Podle Věty 1.4.3 je funkce $s(z)$ konstantní. Je tedy $s(z) \equiv s(1) = \hat{f}(1)\hat{f}(0) = 0$, z čehož dostaneme $\hat{f}(z) \equiv 0$. Tím je tvrzení dokázáno. □

Větu 4.1.8 dokázal Helmut Wielandt (1910 – 2001) v roce 1939. Wielandtova věta umožňuje dokázat některé klasické výsledky o funkci gama v komplexním oboru. Např. Reinhold Remmert (*1930) v článku [37] ukázal, jak lze na základě Věty 4.1.8 odvodit Gaussův multiplikační vzorec, vztah mezi funkcí beta a gama, Stirlingův vzorec, a další.

4.2 Sinový součin

Vyjádření funkce sinus pomocí nekonečného součinu (dále jen *sinový součin*) se objevilo poprvé v roce 1734 v Eulerově práci *De summis serierum reciprocarum* (O součtu reciprokých řad) v souvislosti s problémem určení součtu řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}, \qquad z \in \mathbb{N}. \tag{4.39}$$

Součet řady (4.39) byl později označen symbolem $\zeta(z)$ a tato funkce, rozšířená na množinu $(1, \infty)$, byla na počest významného německého matematika Georga Friedricha Bernharda Riemanna (1826 – 1866) později nazvána *Riemannova zeta funkce.* Řada $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \zeta(2)$ před rokem 1734 úspěšně odolávala jakýmkoliv pokusům o určení součtu. Vypočítat hodnotu $\zeta(2)$ se marně snažila řada matematiků, např. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), Johann Bernoulli (1667 – 1748) a jeho bratr

JACOB BERNOULLI (1654 – 1705), a to i přesto, že v té době již byly známé součty podobných řad jako např. $\sum_{n=2}^{\infty} 1/(n^2-1)$, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n^2+n)$ nebo $\sum_{n=2}^{\infty} 1/(n^2-n)$.

Teprve Euler dokázal v roce 1734 určit hodnotu $\zeta(2)$. Vyšel přitom ze vzorce

$$1-\frac{s^2}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{s^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\dots=\left(1-\frac{s^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{s^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{s^2}{9\pi^2}\right)\cdots, \tag{4.40}$$

který pro $s \in \mathbb{R}$ zdůvodnil následujícím způsobem. V rovnosti (4.40) vlevo je (Maclaurinův) rozvoj funkce $(\sin s)/s$. Nulové body této funkce jsou $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, atd. Proto je řada (podle analogie s polynomy [12])) dělitelná výrazy $1\pm s/\pi$, $1\pm s/(2\pi)$, $1\pm s/(3\pi)$, atd.

Eulerovo řešení vyvolalo u některých matematiků rozpaky. Např. Johann Bernoulli poukázal na správnost zdůvodnění pouze za předpokladu, že funkce $\sin z$ nemá kromě bodů $n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$, žádné další nulové body. Tyto námitky byly pro Eulera motivem k dalšímu bádání. Výsledkem byla řada objevů, např. vztah $e^{\sqrt{-1}z}=\cos z+\sqrt{-1}\sin z$ a z něho plynoucí rovnosti [13])

$$\sin z=\frac{e^{\sqrt{-1}z}-e^{-\sqrt{-1}z}}{2\sqrt{-1}},\quad \cos z=\frac{e^{\sqrt{-1}z}+e^{-\sqrt{-1}z}}{2}, \tag{4.41}$$

nebo formule $e^x=\lim_{n\to\infty}(1+x/n)^n$, se kterou Euler pracoval ve tvaru

$$e^x=\left(1+\frac{x}{i}\right)^i. \tag{4.42}$$

Zde bych jen poznamenal, že Euler v (4.42) značil symbolem i nekonečně velké číslo [14]) (lat. *infinitus*). Abych se vyhnul kolizím ve značení, budu v následujícím textu používat pro nekonečně velkou veličinu namísto i označení N.

Pomocí vztahů (4.41) a (4.42) Euler v roce 1743 odvodil sinový součin znovu a to v práci *De summis serierum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortarum dissertatio altera in qua eaedem summationes ex fonte maxime diverso derivantur* (Další pojednání o součtu řady převrácených mocnin přirozených čísel, ve kterém jsou tyto součty odvozeny úplně odlišným způsobem) [15]). Toto odvození popsal roku 1748 obšírněji v učebnici [13]. Při dalším výkladu budu vycházet právě z této knihy.

Sinový součin je zde odvozen v IX. kapitole s názvem *De investigatione factorum trinomialium* (O vyšetřování trojčlených faktorů). Výklad začíná odkazem na známý postup nalezení reálných dvojčlených faktorů (tj. rozkladu na kořenové činitele) celistvé

[12]) Euler pracoval s nekonečnými řadami jako s polynomy nekonečného stupně.

[13]) V textu dodržuji Eulerův způsob zápisu a místo dnes užívaného symbolu i pro imaginární jednotku používám symbol $\sqrt{-1}$. Protože symbol $\sqrt{-1}$ znamená dvě různé hodnoty, a to i a $-i$, je vhodné učinit dohodu, že symbolem $\sqrt{-1}$ v dalším textu rozumíme výhradně číslo i.

[14]) Použití i ve smyslu označení imaginární jednotky (lat. *imaginarius*) nalezneme u Eulera až od roku 1777.

[15]) Pouze volný překlad. Název článku zřejmě souvisí s předchozí prací *De summis serierum reciprocarum.*

funkce $f(z) = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \ldots$. Hledá tedy výraz $p - qz$, který vyhovuje podmínce $f(p/q) = 0$.

Co tím máme na mysli? Dnes studenti již na střední škole vědí, že např. polynom $x^2 + px + q$, kde $p, q \in \mathbb{R}$, má pro $p^2 - 4q \geq 0$ kořeny

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Zmíněný polynom lze tedy vyjádřit pomocí rozkladu na kořenové činitele ve tvaru $(x - x_1)(x - x_2)$. Jestliže má výraz $p^2 - 4q$ zápornou hodnotu, jsou kořeny polynomu komplexně sdružená čísla. Podobně můžeme rozložit na kořenové činitele (faktory) i polynomy vyššího stupně s reálnými koeficienty. Právě o nalezení vhodného postupu výpočtu těchto faktorů se Euler snažil.

V další části IX. kapitoly Euler popisuje způsob, kterým lze nalézt imaginární faktory [16]) funkce, a tedy i imaginární nulové body funkce. Vychází ze skutečnosti, že imaginární faktory spolu souvisí tak, že jejich součin je reálný výraz. Zkoumá proto reálný výraz $p - qz + rz^2$, jehož faktory jsou imaginární. Trojčlen $p - qz + rz^2$ bude mít imaginární faktory, jestliže $4pr > q^2$, resp. $q/(2\sqrt{pr}) < 1$. Protože hodnoty funkce sinus, resp. kosinus jsou v absolutní hodnotě rovny nejvýše jedné, bude mít výraz $p - qz + rz^2$ imaginární faktory tehdy, jestliže $q/(2\sqrt{pr})$ bude rovno sinu nebo kosinu nějakého úhlu φ. Nechť $\cos\varphi = q/(2\sqrt{pr})$, resp. $q = 2\sqrt{pr} \cdot \cos\varphi$. Potom trojčlen $p - qz + rz^2$ má imaginární faktory. Euler však dále nepracuje s tímto trojčlenem, obsahujícím nepříjemnou iracionalitu, ale s jednodušším výrazem $p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2$, jehož imaginární faktory jsou $qz - p(\cos\varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin\varphi)$ a $qz - p(\cos\varphi - \sqrt{-1} \cdot \sin\varphi)$. Je-li dána funkce $f(z) = \alpha\beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \ldots$, pak její imaginární faktory najdeme tehdy, jestliže určíme hodnoty p a q spolu s úhlem φ tak, aby trojčlen $p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2$ byl faktorem funkce. Imaginárními faktory funkce budou tedy výrazy

$$qz - p(\cos\varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin\varphi) \qquad \text{a} \qquad qz - p(\cos\varphi - \sqrt{-1} \cdot \sin\varphi); \tag{4.43}$$

funkce f pak bude mít nulové body

$$z = \frac{p}{q}(\cos\varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin\varphi) \qquad \text{a} \qquad z = \frac{p}{q}(\cos\varphi - \sqrt{-1} \cdot \sin\varphi). \tag{4.44}$$

V další části Euler vysvětluje na několika příkladech výpočet faktorů funkce. Pro ilustraci uvedu postup nalezení faktorů funkce

$$a^n - z^n, \tag{4.45}$$

pro kterou máme nalézt trojčlenné faktory ve tvaru $p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2$. Jestliže v (4.45) položíme $z = r(\cos\varphi \pm \sqrt{-1}\sin\varphi)$ (kde $r = p/q$), tak sečtením a odečtením obou vzniklých rovnic získáme výrazy

$$0 = a^n - r^n\cos n\varphi \qquad \text{a} \qquad 0 = r^n \sin n\varphi. \tag{4.46}$$

[16]) Tj. kořenové činitele obsahující kromě nezávisle proměnné i imaginární kořeny.

Vzhledem k nenulové hodnotě r poskytuje druhá rovnice v (4.46) vztah $\sin n\varphi = 0$. Odtud se $n\varphi$ rovná $(2k+1)\pi$ nebo $2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Tyto případy Euler rozlišuje proto, že jejich kosiny jsou různé; v prvním případě bude $\cos(2k+1)\pi = -1$, v druhém případě $\cos 2k\pi = +1$. Euler využil druhou možnost $\varphi = 2k\pi$, neboť potom pro $n \in \mathbb{N}$ platí rovnost $\cos n\varphi = 1$. Odtud $a^n - r^n = 0$, tedy $r = a = p/q$. Z toho důvodu Euler usoudil, že $p = a$, $q = 1$ a $\varphi = 2k\pi/n$. Faktory funkce $a^n - z^n$ proto budou výrazy

$$a^2 - 2az\cos\frac{2k\pi}{n} + z^2, \quad k \in \mathbb{N},\ k \le n. \tag{4.47}$$

Faktory (4.47) Euler použil při řešení dalších úloh. Hledal např. faktory funkce $e^x - e^{-x}$. Pomocí (4.42) vyjádřil uvedenou funkci ve tvaru

$$e^x - e^{-x} = \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N - \left(1 - \frac{x}{N}\right)^N. \tag{4.48}$$

V (4.48) provedl substituci $N = n$, $1 + x/N = a$ a $1 - x/N = z$. Tím převedl (4.48) na funkci $a^n - z^n$ a podle (4.47) snadno získal faktory funkce $e^x - e^{-x}$ ve tvaru

$$\left(1+\frac{x}{N}\right)^2 - 2\left(1+\frac{x}{N}\right)\left(1-\frac{x}{N}\right)\cos\frac{2k\pi}{N} + \left(1-\frac{x}{N}\right)^2. \tag{4.49}$$

Zde se Euler nezastavil. Přihlédnutím k nekonečně velké hodnotě N nahradil člen [17]) $\cos(2k\pi/N)$ výrazem $1 - 2k^2\pi^2/N^2$ a vzorec (4.49) upravil na tvar

$$\frac{4x^2}{N^2} + \frac{4k^2\pi^2}{N^2} - \frac{4x^2k^2\pi^2}{N^4} = \frac{4k^2\pi^2}{N^2}\left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2} - \frac{x^2}{N^2}\right). \tag{4.50}$$

Z levé strany rovnice (4.50) Euler usoudil, že pro $k = 0$ je faktorem funkce výraz [18]) $2x$. Pravá strana rovnice (4.50) zase poskytuje faktory funkce pro $k \ne 0$ ve tvaru

$$1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2} - \frac{x^2}{N^2}. \tag{4.51}$$

Vzhledem k nekonečně velké hodnotě N Euler zanedbal člen x^2/N^2. Hledanými faktory funkce jsou proto výrazy $2x$ a $1 + x^2/(k^2\pi^2)$, kde $k \in \mathbb{N}$. Po uspořádání faktorů dostaneme pro funkci $e^x - e^{-x}$ vzorec

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\cdots. \tag{4.52}$$

Jestliže x bude imaginární veličinou, stanou se tyto exponenciální výrazy siny a kosiny nějakého reálného úhlu. Nechť $x = z\sqrt{-1}$. Potom podle (4.41) je možné vyjádřit rovnost (4.52) ve tvaru

$$\frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin z = z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{16\pi^2}\right)\cdots. \tag{4.53}$$

[17]) Úprava je umožněna rozvojem funkce kosinus v mocninnou řadu a vhodným zanedbáním.

[18]) V předchozím textu (§ 148, § 150) Euler zdůvodnil, proč v případě faktorů ve formě čtverce jistého výrazu uvažuje pouze jeho první mocninu.

Rovnost v (4.53) vpravo je často nazývána *sinový součin.* Uvedený postup umožňuje nalézt všechny (i imaginární) faktory funkce sinus. Z těchto faktorů snadno určíme nulové body funkce. Z (4.53) je zřejmé, že všechny faktory funkce $\sin z$ lze vyjádřit ve tvaru z nebo $1 - z^2/(k^2\pi^2)$. Nulovými body funkce sinus jsou proto pouze hodnoty $k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Tímto způsobem Euler vyhověl námitce Johanna Bernoulliho a ukázal, že funkce sinus nemá kromě $k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, v oboru komplexních čísel žádné další nulové body. Poznamenejme jen, že další důkazy rovnosti (4.53) lze nalézt např. v [36].

4.3 Zeta funkce

V X. kapitole [13] se Euler vrátil k funkci $\zeta(z)$ a ukázal, jakým způsobem je možné použitím sinového součinu vypočítat funkční hodnoty pro $z = 2n,\ n \in \mathbb{N}$. Je-li funkce vyjádřena ve formě součinu svých faktorů, tedy je-li

$$f(z) = (1 + \alpha z)(1 + \beta z)(1 + \gamma z)(1 + \delta z) \cdots , \tag{4.54}$$

potom roznásobením těchto faktorů získáme výraz

$$f(z) = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \cdots , \tag{4.55}$$

kde

$$\begin{aligned} A &= \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \cdots , \\ B &= \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \cdots + \beta\gamma + \beta\delta + \cdots + \gamma\delta + \cdots , \\ C &= \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \cdots + \alpha\gamma\delta + \cdots + \beta\gamma\delta + \cdots , \text{atd.} \end{aligned}$$

Položme P, Q, R, S, atd. po řadě rovno součtu prvních, druhých, třetích, čtvrtých, atd. mocnin koeficientů α, β, γ, δ, atd. Pro koeficienty P, Q, R, S, atd. můžeme odvodit následující vzorce [19])

$$P = A,\ Q = AP - 2B,\ R = AQ - BP + 3C,\ S = AR - BQ + CP - 4D,\ \cdots . \tag{4.56}$$

Porovnáním (4.52) s rozvojem funkce $(e^x - e^{-x})/2$ v mocninnou řadu a následnou substitucí $x^2 = \pi^2 z$ Euler získal vzorec

$$1+\frac{\pi^2}{3!}z+\frac{\pi^4}{5!}z^2+\frac{\pi^6}{7!}z^3+\frac{\pi^8}{9!}z^4+\cdots = (1+z)\left(1+\frac{1}{4}z\right)\left(1+\frac{1}{9}z\right)\left(1+\frac{1}{16}z\right)\cdots . \tag{4.57}$$

Porovnáním koeficientů mocnin z v rovnostech (4.54) a (4.55) spolu s definicí veličin A, B, C, $\ldots$ obdržel z rovnice (4.57) vzorce

$$A = \frac{\pi^2}{6}, \quad B = \frac{\pi^4}{120}, \quad C = \frac{\pi^6}{5\,040}, \quad D = \frac{\pi^8}{362\,880}, \quad \cdots . \tag{4.58}$$

[19]) Tyto vzorce Euler obvykle nazýval *Newtonovy formule* a v [13] je nedokazuje. Uvádí však, že se snadno ověří zkouškou a že důkaz poskytne integrální počet. Více viz poznámky v ruském vydání [13] z roku 1961.

Dosazením hodnot (4.58) do (4.56) získáme

$$P = \frac{\pi^2}{6}, \quad Q = \frac{\pi^4}{90}, \quad R = \frac{\pi^6}{945}, \quad S = \frac{\pi^8}{9\ 450}, \quad \cdots. \tag{4.59}$$

Vzhledem k definici P, Q, R, S, atd. je zřejmé, že

$$P = \zeta(2), \quad Q = \zeta(4), \quad R = \zeta(6), \quad S = \zeta(8), \quad \cdots. \tag{4.60}$$

V [13] Euler provedl výpočet $\zeta(2)$, $\zeta(4)$, $\zeta(6)$, ..., $\zeta(26)$. Výsledky vyjádřil ve tvaru

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \frac{2^{2n-2}}{(2n+1)!} \cdot \frac{a_{2n}}{b_{2n}} \pi^{2n},$$

kde a_{2n}/b_{2n} jsou postupně zlomky 1/1, 1/3, 1/3, 3/5, 5/3, 691/105, 35/1, ... Jak Euler tvrdí, tyto zlomky se zdají být na první pohled nahodilé, mají však celou řadu dalších použití. To souvisí se vztahem

$$\zeta(2n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \frac{(-1)^{n+1} B_{2n} (2\pi)^{2n}}{2(2n)!}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{4.61}$$

kde B_{2n} jsou tzv. *Bernoulliho čísla*, viz např. [45]. Tímto způsobem Euler vyřešil problém nalezení součtu převrácených hodnot druhých mocnin přirozených čísel a navíc podal obecný návod pro určení součtu pro sudé mocniny.

Vzorec (4.61) ukazuje pozoruhodnou souvislost mezi hodnotami funkce zeta v sudých číslech a „geometrickou“ konstantou π. Euler ukázal, že pro sudá čísla m jsou hodnoty $\zeta(m)$ rovny součinu π^m a jistého racionálního čísla. Hodnoty zeta funkce v sudých číslech proto musí být iracionální čísla. Nabízí se přirozená otázka. Dají se hodnoty zeta funkce v lichých číslech vyjádřit pomocí mocnin π a existuje i v tomto případě analogický vztah jako (4.61)? Odpověď stále neznáme. Hodnoty $\zeta(2n+1)$, $n \in \mathbb{N}$ jsou vypočteny na mnoho desetinných míst a souvislost s π stále uniká (pokud vůbec existuje).

$$\begin{aligned}
\zeta(3) &= 1,202056903159594285399738 2\ \ldots \\
\zeta(5) &= 1,036927755143369926331365 5\ \ldots \\
\zeta(7) &= 1,008349277381922826839797 5\ \ldots \\
\zeta(9) &= 1,002008392826082214417852 8\ \ldots
\end{aligned}$$

Nevíme dokonce ani to, zda jsou tyto hodnoty racionální nebo iracionální čísla. S jedinou výjimkou. V roce 1978 udivil Roger Apéry (1916 – 1994) matematickou obec svým důkazem iracionality $\zeta(3)$. Důkaz byl zpočátku přijímán s nedůvěrou, neboť, jak píše A. van der Poorten v článku [34]:

> *Apéryho neuvěřitelný důkaz se zdá být směsí zázraků a záhad* (...).

Po důkladném rozboru se však matematici přiklonili k názoru, že důkaz je správný a na počest autora důkazu se dnes hodnota $\zeta(3)$ někdy nazývá *Apéryho konstanta.*

Důkaz i s komentářem je popsán např. v [34]. Zdálo by se, že po „odvalení prvního balvanu“ budou následovat i důkazy racionality či iracionality ostatních hodnot zeta funkce v lichých číslech. Není tomu tak, i když jistý pokrok existuje. Např. Tanguy Rivoal v roce 2000 dokázal, že množina $\{\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11), \zeta(13), \dots\}$ obsahuje nekonečně mnoho iracionálních čísel; důkaz lze nalézt v [38] [20]). V roce 2001 Wadim Zudilin dokázal, že minimálně jedno z čísel $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ je iracionální. Zatím jenom nevíme, které (která) z nich to je (jsou). Důkaz lze nalézt [21]) v [50].

Stanovení hodnot $\zeta(2n)$, $n \in \mathbb{N}$ nebylo jediným Eulerovým významným výsledkem spojeným s funkcí zeta a nekonečnými součiny. V roce 1727 publikoval článek *Variae observationes circa series infinitas* (Různá pozorování o nekonečných řadách), ve kterém odvodil vzorec

$$\zeta(s) = \prod_{p \in P} \frac{1}{1 - p^{-s}}, \qquad s \in (1, \infty), \tag{4.62}$$

kde symbol P ve výrazu na pravé straně znamená množinu všech prvočísel. Stejné odvození je uvedeno i v 15. kapitole [13]. Ukažme, jakým způsobem Euler vzorec (4.62) odvodil. Nejdříve položil

$$x = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \cdots, \tag{4.63}$$

Vynásobením obou stran rovnice výrazem $1/2^n$ Euler dostal

$$\frac{1}{2^n}\, x = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{8^n} + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{12^n} + \cdots. \tag{4.64}$$

Odečtením (4.64) od (4.63) obdržel

$$\frac{2^n - 1}{2^n}\, x = 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \cdots, \tag{4.65}$$

čímž z jmenovatelů řady odstranil všechny sudé základy mocnin. Dále obě strany (4.65) vynásobil výrazem $1/3^n$, čímž dostal

$$\frac{2^n - 1}{2^n} \cdot \frac{1}{3^n}\, x = \frac{1}{3^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{15^n} + \frac{1}{21^n} + \frac{1}{25^n} + \frac{1}{29^n} + \cdots. \tag{4.66}$$

Odečtení (4.66) od (4.65) vede k rovnici

$$\frac{(2^n - 1)(3^n - 1)}{2^n \cdot 3^n}\, x = 1 + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \frac{1}{17^n} + \frac{1}{19^n} + \cdots. \tag{4.67}$$

Tím se Euler zbavil ve jmenovatelích řady všech zbývajících základů mocnin dělitelných třemi. Nyní je již zřejmé, jak postupovat dále. Vynásobením obou stran (4.67) výrazem $1/5^n$ a následným odečtením tohoto výrazu od rovnice (4.67) Euler dospěl k řadě

$$\frac{(2^n - 1)(3^n - 1)(5^n - 1)}{2^n \cdot 3^n \cdot 5^n}\, x = 1 + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \frac{1}{17^n} + \frac{1}{19^n} + \frac{1}{23^n} + \cdots,$$

[20]) Článek je v elektronické podobě k dispozici na adrese http://arxiv.org/abs/math/0008051.

[21]) Článek lze získat na adrese http://front.math.ucdavis.edu/math.NT/0206176.

které v jmenovatelích chybí základy mocnin dělitelné pěti. Dalším násobením výrazy $1/7^n$, $1/11^n$, $1/13^n$, $\ldots$ a následným odečtením se tak v jmenovatelích řad postupně zbavil všech mocnin o základech dělitelných příslušnými prvočísly. Provedením těchto operací přes všechna prvočísla zůstane výraz

$$\frac{(2^n-1)(3^n-1)(5^n-1)(7^n-1)(11^n-1)(13^n-1)\cdots}{2^n\cdot 3^n\cdot 5^n\cdot 7^n\cdot 11^n\cdot 13^n\cdots}\,x=1.$$

Nahrazením x původní řadou z (4.63) Euler dostal

$$\frac{2^n}{(2^n-1)}\cdot\frac{3^n}{(3^n-1)}\cdot\frac{5^n}{(5^n-1)}\cdot\frac{7^n}{(7^n-1)}\cdots=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\cdots.$$

Odtud je již snadný přechod ke vztahu (4.62). Poznamenejme, že právě odvozený vztah sehrál významnou roli ve vývoji matematiky, zvláště v teorii čísel. S jeho pomocí Euler našel další důkaz Euklidovy věty o nekonečném počtu všech prvočísel. Základní význam měl vzorec (4.62) pro Bernharda Riemanna (1826 – 1866) při jeho úvahách o rozložení prvočísel mezi přirozenými čísly. Tzv. *prvočíselnou hypotézu* nakonec dokázali v roce 1896 nezávisle na sobě Jacques Hadamard (1865 – 1963) a Charles de la Vallée Poussin (1866 – 1962) ve tvaru rovnosti

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\cdot\ln x}{x}=1,$$

kde $\pi(x)$ je funkce, jejíž hodnota je pro dané x rovna počtu prvočísel nepřevyšujících číslo x.

4.4 Funkce gama a sinový součin.

Funkce gama vyhovuje funkcionální rovnici $f(x+1)=xf(x)$, je tedy

$$\Gamma(1-x)=-x\Gamma(-x). \tag{4.68}$$

Ze vztahu (4.37) lze snadno odvodit rovnost

$$\frac{1}{\Gamma(x)}=xe^{\gamma x}\prod_{k=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-x/k}\right\},\quad x\in\mathbb{R}. \tag{4.69}$$

Funkce definovaná nekonečným součinem na pravé straně (4.69) má smysl pro všechna $x\in\mathbb{R}$. Protože funkce gama není definována v bodech $0,\,-1,\,-2,\,\cdots$, určíme hodnotu funkce $1/\Gamma$ v těchto bodech pomocí nekonečného součinu na pravé straně (4.69). Hodnota funkce $1/\Gamma$ v bodech $0,\,-1,\,-2,\,\cdots$, je proto rovna nule a v dalším textu budu za definiční obor funkce $1/\Gamma$ považovat množinu $\mathbb{R}$. Z rovností (4.68) a (4.69) dostaneme vzorec

$$\frac{1}{\Gamma(x)}\frac{1}{\Gamma(1-x)}=x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right),\qquad x\in\mathbb{R}. \tag{4.70}$$

Dosazením $z = \pi x$ do pravé strany rovnosti (4.53) získáme další z obvyklých zápisů sinového součinu

$$\sin(\pi x) = \pi x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{4.71}$$

Porovnáním (4.70) a (4.71) snadno zjistíme, že

$$\sin \pi x = \frac{\pi}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{4.72}$$

Pro tento výsledek, ukazující souvislost funkce gama s funkcí sinus, používáme název *reflekční vzorec* (reflection formula). Dosazením $x = 1/2$ v (4.72) snadno zjistíme, že $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ a podobně získáme další výsledky. Položením $x = 1/3$ v (4.72) dostaneme $\Gamma(1/3)\Gamma(2/3) = 2\sqrt{3}\pi/3$. Dále pro $x = 1/4$ plyne $\Gamma(1/4)\Gamma(2/4)\Gamma(3/4) = \sqrt{2\pi}\pi$, atd. Zobecněním předchozích výsledků je tzv. *Gaussova multiplikační formule*

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}}{\sqrt{n}}.$$

Zajímavé souvislosti mezi gama funkcí a zeta funkcí lze získat zlogaritmováním obou stran rovnice (4.37). Tím dostaneme rovnost

$$\log(\Gamma(x)) = \log\left(\frac{1}{x}\right) - \gamma x + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x}{k} - \log\left(1 + \frac{x}{k}\right)\right). \tag{4.73}$$

Existuje-li derivace f' kladné funkce f, je podíl f'/f derivací funkce $\log f$. Výraz f'/f proto často nazýváme *logaritmickou derivací* funkce f. Pro $x \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ zavedeme funkci $\Psi(x)$ jakožto logaritmickou derivaci funkce gama. Vzhledem k tomu, že řada vpravo v (4.73) konverguje lokálně stejnoměrně na $\mathbb{R}^+$, můžeme psát

$$\Psi(x) = \frac{d}{dx}\left(\log(\Gamma(x))\right) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k}\right).$$

Pro $x \in \mathbb{R}^+$ tedy platí

$$\Psi(x) = -\gamma + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k-1}\right). \tag{4.74}$$

Postupným derivováním vztahu (4.74) získáme rovnosti

$$\Psi'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k-1)^2}, \ \ldots, \ \Psi^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!}{(x+k-1)^{n+1}}. \tag{4.75}$$

Dosazením $x = 1$ do rovností (4.74) a (4.75) dostaneme hodnoty

$$\Psi(1) = -\gamma, \ \Psi'(1) = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \ \ldots, \ \Psi^{(n)} = (-1)^{n+1} n! \zeta(n+1), \tag{4.76}$$

kde $\zeta(z)$ je Riemannova zeta funkce (4.39). Rovnice (4.76) ukazují zajímavé chování funkce gama a jejích derivací v okolí bodu 1 a její souvislost s Euler-Mascheroniovou konstantou a hodnotami zeta funkce, neboť

$$\Psi(1) = \Gamma'(1) = -\gamma; \quad \Psi'(1) = \Gamma''(1) - (\Gamma'(1))^2,$$

tedy $\Gamma''(1) = \gamma^2 + \pi^2/6$, atd.

Kapitola 5

Karl Friedrich Gauss a nekonečné součiny

Tato kapitola pojednává o tom, jak KARL FRIEDRICH GAUSS (1777 – 1855) pracoval s nekonečnými součiny, konkrétně o Gaussově definici funkce gama pomocí nekonečného součinu. Toto odvození Gauss podal v souvislosti se zkoumáním vlastností hypergeometrické řady v knize [17]. Při práci na této kapitole jsem vycházel z německého překladu [18].

5.1 Vývoj zavádění komplexních čísel

Gaussův význam pro teorii gama funkce spočívá v tom, že s touto funkcí pracoval výhradně v oboru komplexních čísel. Připomeňme, jak se komplexní čísla v matematice objevila. Pojem komplexního čísla prošel dlouhým vývojem, který začal zhruba v polovině 16. století. Roku 1545 vydal GIERONIMO CARDANO (1501–1576) knihu *Ars Magna de Regulis Algebraicis* (Velké umění pravidel algebraických) zabývající se řešením rovnic třetího stupně. Cardano v *Ars Magna* řešil mimo jiné úlohu rozložit číslo 10 na součet dvou sčítanců, jejichž součin je roven 40. Pro rovnici $x(10-x) = 40$ nalezl kořeny ve tvaru $x_1 = 5 + \sqrt{-15}$, $x_2 = 5 - \sqrt{-15}$ a pro jejich součin obdržel

$$(5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 25 - (-15) = 40.$$

Výsledek označil jako „elegantní, ale bez užitku“. Cardano spolu s dalšími italskými matematiky rozšířil znalosti o řešení algebraických rovnic a přispěl též k objevu komplexních čísel. V roce 1572 vydal RAFAEL BOMBELLI (1526–1573) knihu *Algebra*. V této knize zavádí důslednou teorii ryze imaginárních čísel. Výraz $3i$ například označuje jako $\sqrt{0-9}$ (v jeho označení $R[0m.9]$, kde R značí radix a m minus). Bombelli ukázal, jak s imaginárními čísly pracovat, nestaral se však o to, jaké povahy tato čísla vlastně jsou. V roce 1637 RENÉ DESCARTES (1596–1650) nazval tato čísla „imaginární“, jako protiklad k „reálným“ číslům.

Patrně první použití komplexních čísel k řešení úloh matematické analýzy nacházíme u Gottfrieda Wilhelma Leibnize (1646–1716) a Johanna Bernoulliho (1667–1748). Oba používali pro integraci racionálních funkcí metodu rozkladu funkce na jednodušší zlomky. Dostali se tak k integrálům typu $\int \frac{dx}{ax+b}$, kde a i b jsou komplexní čísla. Jejich výpočty však byly mnohdy pouze formální. Uveďme ilustrativní příklad: Z rovnosti $(t+i)(t-i) = t^2+1$ byl formální integrací pomocí rozkladu na parciální zlomky odvozován vzorec

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2i}\left(\int_0^x \frac{dt}{t-i} - \int_0^x \frac{dt}{t+i}\right) = \frac{1}{2i}\log\frac{i-x}{i+x}. \tag{5.1}$$

Použití těchto úvah však provázely pochybnosti. Jestliže totiž ve vztahu (5.1) dosadíme $x=1$, dostaneme

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2i}\log\frac{i-1}{i+1} = \frac{1}{4i}\log\left(\frac{i-1}{i+1}\right)^2 = \frac{1}{4i}\log(-1) = \frac{1}{8i}\log(-1)^2 = 0. \tag{5.2}$$

Tedy $\frac{\pi}{4} = 0$. Z této ukázky je zřejmé, že představy o komplexních číslech byly v té době ještě nejasné a protiřečivé. Vědci si této skutečnosti byli vědomi, Leibniz se např. v roce 1702 vyjadřuje o komplexních číslech jako o

> (...) *podivnosti analýzy, o zrůdě ze světa ideí, o dvojité existenci, nacházející se mezi bytím a nebytím.*

Vývoj však pokračoval dále. V roce 1714 publikoval Roger Cotes (1682–1716) tvrzení o komplexních číslech, které lze zapsat v současně používané podobě ve tvaru

$$i\varphi = \log(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

V roce 1730 vydal anglický matematik francouzského původu Abraham de Moivre (1667–1754) knihu *Miscellanea Analytica de seriebus et quadraturis* (Rozmanitosti analytické o řadách a kvadraturách). V této knize se objevil vztah, z kterého vyplývá tzv. *Moivreův vzorec.*

Jednu z nejdůležitějších rolí v rozvoji poznatků o vlastnostech komplexních čísel sehrál Leonhard Euler. První etapa jeho výsledků je zakončena klasickým dílem *Introductio in analysin infinitorum* (Úvod do infinitezimálního počtu) vydaném v roce 1748. Na počátku této knihy Euler zdůrazňuje, že za proměnné veličiny nevylučuje dokonce ani nulu a imaginární čísla a dále uvádí množství příkladů blahodárnosti tak široké interpretace proměnné.

Z toho, co zatím bylo řečeno, by se mohlo zdát, že v polovině 18. století bylo počítání s komplexními čísly „dobře zažitou záležitostí“. Nebylo tomu tak. Sám Euler v jedné ze svých prací napsal $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-4} = \sqrt{4} = 2$, neboť $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{a\cdot b}$, ačkoliv $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-4} = i\cdot 2i = -2$. Zásadní přelom ve vztahu matematiků ke komplexním číslům nastal až na přelomu století, kdy Gauss zveřejnil v roce 1799 svůj první důkaz tzv. *základní věty algebry*. Díky tomuto důkazu komplexní čísla v matematice již dobře „zakořenila“.

Pro další rozvoj chápání komplexních čísel mělo velký vliv geometrické znázornění komplexních čísel body nebo vektory v rovině. Celkem blízko k takové představě byl Euler, nepovažoval ji však zřejmě za příliš významnou. Stejně jako on, tak i Cotes, Moivre a další používali rovinu ke znázorňování komplexních čísel, příslušné ztotožnění však neprovedli a nepopsali rovněž geometrický smysl operací s komplexními čísly. V jasné a systematické formě se tato představa komplexních čísel a operací s nimi nachází až v práci dánského geodeta CASPARA WESSELA (1745–1818) z roku 1799. Tato práce však vyšla pouze v dánštině a tak byl její přínos zanedbatelný. O něco později, v roce 1806 publikoval podobnou práci francouzský matematik JEAN ROBERT ARGAND (1768–1822). Argand zavedl dodnes používaný termín *modul* pro absolutní hodnotu. Obě práce vznikly patrně nezávisle a nevzbudily větší pozornost. Obecné uznání geometrické interpretace komplexních čísel přinesla až Gaussova práce *Theoria residuorum biquadraticorum* (Teorie bikvadratických zbytků) (1831). Roku 1837 zavedl WILLIAM ROWAN HAMILTON (1805–1865) komplexní čísla jako uspořádané dvojice reálných čísel.

5.2 Gaussův dopis Besselovi

Dne 21.11.1811 napsal Gauss FRIEDRICHU WILHELMOVI BESSELOVI (1784 – 1846) dopis, ve kterém se zmiňuje o svých pokrocích v oblasti faktoriálů. Z dopisu uvádím následující úryvek:

> *Z Vašich dopisů s radostí vidím, že jste také pracoval na faktoriálech. Patrně proto se naše názory budou potkávat častěji. Právě teď pracuji na jednom pojednání pro naši Společnost, dokončeno bude asi za šest týdnů a týká se řady*
>
> $$1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\textit{atd.},$$
>
> *také se týká funkce, která souvisí s Krampovým faktoriálem. Takovou funkci je jistě vhodné v analýze zavést; nemyslím ale, že je vhodné začít s funkcí, kterou Kramp značí $a^{b/c}$, tato závisí na třech proměnných veličinách, přičemž původní funkcí se stane, když za proměnnou veličinu dosadíme jednotku, tzn. $1^{x/1}$. Tedy součin*
>
> $$1\cdot 2\cdot 3\cdots x=\prod x$$
>
> *je tou funkcí, která podle mého názoru musí být v analýze zavedena, zvláště když z ní odvozené funkce*
>
> $$\frac{d\prod x}{\prod x\ dx},\ \textit{atd.}$$
>
> *umožňují řešení mnoha dalších úloh. Chce-li se ale člověk vyhnout nesčetným Krampovým paradigmatům a paradoxům, nesmí za definici $\prod x$ použít výraz*

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots x$, *který má nějaký smysl pouze tehdy, je-li x celé číslo, ale musí uvažovat obecnější definici, použitelnou i pro imaginární hodnoty x, přičemž tamta definice, jak jistě chápete, musí vyjít jako speciální případ této. Zvolil jsem následující*

$$\prod x = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k \cdot k^x}{(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+k)},$$

kde k je nekonečně velké. Těším se, až se střetnou naše další názory v těchto bodech.

Poznamenejme, že v dopise zmíněný Christian Kramp (1760 – 1826) byl jedním z matematiků, který se snažil nalézt hodnoty faktoriálů i pro neceločíselné hodnoty. V knize *Analyse des réfractions astronomiques et terrestres* (Analýza refrakcí astronomických a pozemských) (1799) uvedl definici tzv. numerického faktoriálu [1]) ve tvaru

$$a^{bIc} = a(a+c)(a+2c)\cdots(a+(b-1)c). \tag{5.3}$$

Kramp také v knize *Elements d'arithmétique universelle* (1808) poprvé použil označení n! pro n-faktoriál.

5.3 Hypergeometrická řada

Jak bylo řečeno výše, Gauss odvodil své poznatky o funkci $\prod x$ při zkoumání vlastností hypergeometrické řady. Zobecněná hypergeometrická funkce

$${}_pF_q(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_p, x)$$

je definována jako součet tzv. hypergeometrické řady, tj. řady, ve které můžeme poměr dvou po sobě jdoucích členů a_{n+1}/a_n vyjádřit pomocí zlomku

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(\alpha_1+n)(\alpha_2+n)\cdots(\alpha_p+n)}{(n+1)(\beta_1+n)(\beta_2+n)\cdots(\beta_q+n)}x.$$

V případě, že v uvedené definici položíme $p = 2$ a $q = 1$, dostaneme tzv. Gaussovu hypergeometrickou funkci ${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, x)$, jež je součtem řady

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \cdots. \tag{5.4}$$

Právě touto řadou se Gauss zabýval v [17]. V úvodu vymezil konvergenci, resp. divergenci řady (5.4) v závislosti na koeficientech α, β, γ, x, následujícím způsobem:

(...) *Když potom i čtvrtá hodnota x bude rovna určité hodnotě, tak v závislosti na ní bude řada buď konvergovat nebo divergovat. Bude-li x reálné číslo, menší v absolutní hodnotě než jedna, tak* (...) *bude řada mít konečný součet. Stejný*

[1]) V němčině *Die numerische Facultäten.*

výsledek získáme tehdy, má-li x imaginární hodnotu ve tvaru $a+b\sqrt{-1}$, pokud je $a^2+b^2<1$. Naproti tomu, pro reálnou hodnotu x větší než 1, nebo pro imaginární hodnotu ve tvaru $a+b\sqrt{-1}$, kde $a^2+b^2>1$, bude řada (...) divergovat, takže nemůže být ani řeč o jejím součtu. Pro hodnotu $x=1$ (nebo obecně pro hodnotu $a+b\sqrt{-1}$, kde $a^2+b^2=1$), bude konvergence, resp. divergence řady záviset na povaze čísel α, β a γ; (...)

Je tedy zřejmé, že Gauss pracoval s hodnotami x v komplexním oboru. Tímto způsobem rozšířil Eulerovy výsledky z reálného oboru do množiny komplexních čísel. Uvedenou Gaussovu poznámku zobecňuje následující věta.

Věta 5.3.1. *Nechť $x \in \mathbb{C}$ a pro $\gamma \in \mathbb{C}$ platí, že je různé od nuly, resp. záporných celočíselných hodnot. Pak řada* (5.4) *konverguje pro všechna $|x|<1$. Je-li $|x|=1$, potom řada* (5.4) *konverguje tehdy, platí-li* $\operatorname{Re}[\gamma-\alpha-\beta]>0$.

Dosazením konkrétních hodnot za parametry α, β, γ a x můžeme z řady (5.4) dostat rozvoje některých známých funkcí. Jednoduchým výpočtem lze např. ověřit, že platí rovnosti (místo symbolu ${}_2F_1$ budu psát již jen F)

$$(t+u)^n = t^n F\left(-n,\beta,\beta,-\frac{u}{t}\right), \quad \text{resp.} \quad \log(1+t) = tF(1,1,2,-t).$$

Podobných odvození najdeme v [18, §5] celkem 23. Jak dále Gauss uvádí, nabývají-li k, k' nekonečně velkých hodnot, platí potom např. vztahy

$$e^t = F\left(1,k,1,\frac{t}{k}\right) = 1+tF\left(1,k,2,\frac{t}{k}\right),$$

$$\sin t = tF\left(k,k',\frac{3}{2},-\frac{t^2}{4kk'}\right), \quad \cos t = F\left(k,k',\frac{1}{2},-\frac{t^2}{4kk'}\right).$$

Později využijeme i následující rovnosti

$$t = \sin t \cdot F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},\sin^2 t\right), \tag{5.5}$$

$$\sin nt = n\sin t \cdot F\left(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}n+\frac{1}{2},\frac{3}{2},\sin^2 t\right). \tag{5.6}$$

5.4 Gaussovo pojednání o hypergeometrické řadě

V prvním oddílu první kapitoly Gauss zavedl pojem vzájemně sousedních funkcí, což jsou funkce, jejichž parametry α, β nebo γ mají hodnotu větší nebo menší o číslo jedna oproti parametrům původní funkce, tedy $|\alpha'-\alpha|=1, \ldots$, kde α, resp. α' jsou parametry původní, resp. sousední funkce, atd. Tvrdí, že mezi těmito funkcemi v některých případech existuje jednoduchý vztah a uvádí 15 rovnic mezi sousedními funkcemi. Některé z nich budeme dále potřebovat a tak je uvedu v následujícím přehledu. Písmenem F přitom značím původní funkci $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$. Číslování rovnic přejímám z knihy [18].

$$(3^*)\quad 0 = (\gamma-\alpha-\beta)F + \alpha(1-x)F(\alpha+1,\beta,\gamma,x) - (\gamma-\beta)F(\alpha,\beta-1,\gamma,x)$$

$$(5^*)\quad 0 = (\gamma-\alpha-1)F + \alpha F(\alpha+1,\beta,\gamma,x) - (\gamma-1)F(\alpha,\beta,\gamma-1,x)$$

$$(6^*)\quad 0 = (\gamma-\alpha-\beta)F - (\gamma-\alpha)F(\alpha-1,\beta,\gamma,x) + \beta(1-x)F(\alpha,\beta+1,\gamma,x)$$

$$(8^*)\quad 0 = \gamma(1-x)F - \gamma F(\alpha-1,\beta,\gamma,x) + (\gamma-\beta)xF(\alpha,\beta,\gamma+1,x)$$

$$\begin{aligned}(9^*)\quad 0 = {} & (\alpha-1-(\gamma-\beta-1)x)F + (\gamma-\alpha)F(\alpha-1,\beta,\gamma,x) - \\ & - (\gamma-1)(1-x)F(\alpha,\beta,\gamma-1,x)\end{aligned}$$

$$(12^*)\quad 0 = (\gamma-\beta-1)F + \beta F(\alpha,\beta+1,\gamma,x) - (\gamma-1)F(\alpha,\beta,\gamma-1,x)$$

$$\begin{aligned}(15^*)\quad 0 = {} & \gamma(\gamma-1-(2\gamma-\alpha-\beta-1)x)F + (\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)xF(\alpha,\beta,\gamma+1,x) - \\ & - \gamma(\gamma-1)(1-x)F(\alpha,\beta,\gamma-1,x).\end{aligned}$$

Zdůvodnění uvedených tvrzení vychází z porovnání koeficientů u odpovídajících mocnin x. Pro zjednodušení zápisu položme

$$M = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+m-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+m-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m\cdot\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+m-1)}.$$

Potom koeficient členů obsahujících x^m u funkce

$$\begin{array}{rll} F(\alpha,\beta,\gamma,x) & \text{bude} & \alpha(\beta+m-1)M, \\ F(\alpha,\beta-1,\gamma,x) & \text{bude} & \alpha(\beta-1)M, \\ F(\alpha+1,\beta,\gamma,x) & \text{bude} & (\alpha+m)(\beta+m-1)M, \\ F(\alpha,\beta,\gamma-1,x) & \text{bude} & \dfrac{\alpha(\beta+m-1)(\gamma+m-1)M}{\gamma-1}. \end{array}$$

Koeficient členu obsahujícího x^{m-1} ve funkci $F(\alpha+1,\beta,\gamma,x)$, resp. koeficient u členu s x^m u funkce $xF(\alpha+1,\beta,\gamma)$ bude roven výrazu $m(\gamma+m-1)M$. Porovnáním koeficientů jednotlivých mocnin dostaneme rovnice (3*) a (5*). Ze záměny α a β (což si můžeme dovolit, neboť z definice funkce F plyne, že platí rovnost $F(\alpha,\beta,\gamma,x) = F(\beta,\alpha,\gamma,x)$) hned dostaneme ze vzorce (5*) formuli (12*). Stejnou záměnou dostaneme z rovnice (3*) vzorec (6*), z propojení rovnic (6*) a (12*) vznikne rovnice (9*). Substitucí $\alpha \to (\alpha-1)$ a $\gamma \to (\gamma+1)$ převedeme rovnici (5*) do tvaru

$$0 = (\gamma-\alpha+1)(F(\alpha-1,\beta,\gamma+1) + (\alpha-1)F(\alpha,\beta,\gamma+1,x) - \gamma F(\alpha-1,\beta,\gamma,x).$$

Podobně, dosazením $\gamma+1$ místo γ v rovnici (9*) dostaneme

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & (\alpha-1-(\gamma-\beta)x)F(\alpha,\beta,\gamma+1) + \\ & +(\gamma-\alpha+1)F(\alpha-1,\beta,\gamma+1) - \gamma(1-x)F(\alpha,\beta,\gamma,x). \end{aligned}$$

Odečtením těchto dvou rovnic dostaneme ihned vzorec (8*). Eliminací uvedeného výrazu $F(\alpha-1,\beta,\gamma,x)$ z rovnic (8*) a (9*) dospějeme konečně ke vzorci (15*).

V třetím oddílu první kapitoly Gauss vyšetřoval ty případy, ve kterých je poslední prvek x roven jedné. Dokázal, že řada je konvergentní pouze v případě, kdy je $\gamma-\alpha-\beta$ kladný výraz (speciální případ Věty 5.3.1). Dále vyslovil poznámku, která je obsahem následujícího lemmatu.

Lemma 5.4.1. *Když jsou koeficienty řady*

$$1+ax+bx^2+cx^3+\cdots=S \tag{5.7}$$

od určitého členu kladné a klesají pod jakoukoliv hraniční hodnotu[2]*), potom se součin*

$$(1-x)S=1+(a-1)x+(b-a)x^2+(c-b)x^3+\cdots \tag{5.8}$$

pro $x=1$ *rovná* 0*, a to i když je součet* S *řady* (5.7) *nekonečně velký.*

Zdůvodnění lemmatu je jednoduché, posloupnost částečných součtů řady na pravé straně rovnosti (5.8) dává pro $x=1$ postupně členy $s_1=1$, $s_2=a$, $s_3=b$, $s_4=c$, atd. takže součet nekonečně mnoha členů řady (5.8) je roven 0.

Pokud je ale $\gamma-\alpha-\beta$ kladný výraz, jsou pro funkci $F(\alpha,\beta,\gamma-1,x)$ splněny podmínky lemmatu (5.4.1) a pro $x=1$ musí platit

$$(1-x)F(\alpha,\beta,\gamma-1,x)=0.$$

Proto z výše uvedené rovnosti 15) plyne, že

$$0=\gamma(\alpha+\beta-\gamma)F(\alpha,\beta,\gamma,1)+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)F(\alpha,\beta,\gamma+1,1),$$

neboli

$$F(\alpha,\beta,\gamma,1)=\frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma-\alpha-\beta)}F(\alpha,\beta,\gamma+1,1). \tag{5.9}$$

Potom dále platí

$$F(\alpha,\beta,\gamma+1,1)=\frac{(\gamma+1-\alpha)(\gamma+1-\beta)}{(\gamma+1)(\gamma+1-\alpha-\beta)}F(\alpha,\beta,\gamma+2,1),$$

$$F(\alpha,\beta,\gamma+2,1)=\frac{(\gamma+2-\alpha)(\gamma+2-\beta)}{(\gamma+2)(\gamma+2-\alpha-\beta)}F(\alpha,\beta,\gamma+3,1),$$

atd. Obecně, pokud k značí kladné celé číslo, tak je funkce $F(\alpha,\beta,\gamma,1)$ rovna součinu

$$\begin{aligned} F(\alpha,\beta,\gamma,1) \quad &= \quad \frac{(\gamma-\alpha)(\gamma+1-\alpha)\cdots(\gamma+k-1-\alpha)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+k-1)}\cdot \\ &\cdot\frac{(\gamma-\beta)(\gamma+1-\beta)\cdots(\gamma+k-1-\beta)}{(\gamma-\alpha-\beta)(\gamma+1-\alpha-\beta)\cdots(\gamma+k-1-\alpha-\beta)}\,F(\alpha,\beta,\gamma+k,1). \end{aligned} \tag{5.10}$$

[2]) V lemmatu je pro ilustraci použita Gaussova terminologie. Dnes bychom totéž vyjádřili tak, že koeficienty a, b, c, ... tvoří monotónní posloupnost s kladnými členy, jejíž limita je rovna nule.

5.5 Zavedení funkce gama

V této kapitole je popsán způsob, kterým Gauss zavedl gama funkci a odvodil některé její vlastnosti. Na začátku Gauss uvedl výraz

$$\prod(k,z) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}{(z+1)(z+2)(z+3)\cdots(z+k)}k^z, \tag{5.11}$$

kde k značí kladné celé číslo a z uvažoval jako libovolné komplexní číslo. Potom snadno ověřil, že výraz

$$\frac{\prod(k,\gamma-1)\cdot\prod(k,\gamma-\alpha-\beta-1)}{\prod(k,\gamma-\alpha-1)\cdot\prod(k,\gamma-\beta-1)}$$

po příslušném zkrácení dává zlomek

$$\frac{(\gamma-\alpha)(\gamma+1-\alpha)\cdots(\gamma+k-1-\alpha)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+k-1)}\cdot$$

$$\cdot\frac{(\gamma-\beta)(\gamma+1-\beta)\cdots(\gamma+k-1-\beta)}{(\gamma-\alpha-\beta)(\gamma+1-\alpha-\beta)\cdots(\gamma+k-1-\alpha-\beta)}.$$

Díky tomu rovnost (5.10) upravil do tvaru

$$F(\alpha,\beta,\gamma,1) = \frac{\prod(k,\gamma-1)\cdot\prod(k,\gamma-\alpha-\beta-1)}{\prod(k,\gamma-\alpha-1)\cdot\prod(k,\gamma-\beta-1)}\cdot F(\alpha,\beta,\gamma+k,1) \tag{5.12}$$

Jaké vlastnosti má funkce $\prod(k,z)$? Je zřejmé, že funkce je definována pro všechna z s výjimkou záporných celých čísel. Pro celočíselné nezáporné hodnoty z však Gauss dostal (pro všechny hodnoty $k\in\mathbb{N}$)

$$\begin{aligned}
\prod(k,0) &= 1,\\
\prod(k,1) &= \frac{1\cdot k}{k+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{k}},\\
\prod(k,2) &= \frac{1\cdot 2\cdot k^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{1\cdot 2}{\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{2}{k}\right)},\\
\prod(k,3) &= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot k^3}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{2}{k}\right)\left(1+\frac{3}{k}\right)},
\end{aligned}$$

atd. Předchozí rovnosti zobecnil do vztahu

$$\prod(k,z) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots z}{\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{2}{k}\right)\left(1+\frac{3}{k}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{k}\right)}. \tag{5.13}$$

Obecně, je-li známa hodnota funkce $\prod(k,z)$ pro dané k a z, potom lze určit hodnotu funkce $\prod(k,z+1)$ z rekurentního vzorce

$$\prod(k,z+1) = \prod(k,z)\cdot\frac{z+1}{1+\frac{z+1}{k}}. \tag{5.14}$$

Podobně lze stanovit rekurentní vzorec vzhledem k proměnné k

$$\prod(k+1,z) = \prod(k,z)\cdot\left\{\frac{\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^{z+1}}{1+\dfrac{1+z}{k}}\right\}. \tag{5.15}$$

Protože je $\prod(1,z) = \dfrac{1}{z+1}$, Gauss odvodil pomocí vzorce (5.15) následující vztahy

$$\begin{aligned}
\prod(2,z) &= \frac{1}{1+z}\cdot\frac{\left(\dfrac{2}{1}\right)^{z+1}}{\dfrac{2+z}{1}} = \frac{1}{1+z}\cdot\frac{2^{z+1}}{2+z},\\
\prod(3,z) &= \frac{1}{1+z}\cdot\frac{2^{z+1}}{2+z}\cdot\frac{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{z+1}}{\dfrac{3+z}{2}} = \frac{1}{1+z}\cdot\frac{2^{z+1}}{2+z}\cdot\frac{3^{z+1}}{2^z(3+z)},
\end{aligned}$$

atd. Zobecněním předchozích rovnic zjistil, že funkce $\prod(k,z)$ vyhovuje rovnici

$$\prod(k,z) = \frac{1}{z+1}\cdot\frac{2^{z+1}}{1^z\cdot(2+z)}\cdot\frac{3^{z+1}}{2^z\cdot(3+z)}\cdots\frac{k^{z+1}}{(k-1)^z\cdot(k+z)}. \tag{5.16}$$

Poté obrátil pozornost k těm případům, kdy do funkce $\prod(k,z)$ při pevně stanovené hodnotě z dosazoval nekonečně velké hodnoty proměnné k. Při tomto vyšetřování položil k rovno h, přičemž předpokládal, že $z < h$. Potom je zřejmé, že když h přejde v $h+1$, zvětší se hodnota logaritmu $\prod(k,z)$ a tento přírůstek lze pomocí rovnosti (5.15) vyjádřit jako

$$\log\prod(h+1,z) - \log\prod(h,z) = \log\left\{\frac{\left(1+\dfrac{1}{h}\right)^{z+1}}{1+\dfrac{1+z}{h}}\right\} = \log\left\{\frac{\left(1+\dfrac{1}{h}\right)^{z}}{1+\dfrac{z}{h+1}}\right\}. \tag{5.17}$$

Z rovnosti $(h+1)/(h) = 1/(h/h+1)$ a rovnice (5.17) tedy plyne, že

$$\log\prod(h+1,z) - \log\prod(h,z) = -z\log\left(1-\frac{1}{h+1}\right) - \log\left(1+\frac{z}{h+1}\right). \tag{5.18}$$

Oba logaritmy z (5.18) vpravo Gauss rozvinul do mocninných řad ve tvaru

$$z\left(\frac{1}{h+1}+\frac{1}{2(h+1)^2}+\cdots\right) - \left(\frac{z}{h+1}-\frac{z^2}{2(h+1)^2}+\cdots\right).$$

Vzhledem k absolutní konvergenci obou řad Gauss vyjádřil zkoumaný přírůstek logaritmu $\prod(h,z)$ konvergentní řadou

$$\frac{z(1+z)}{2(h+1)^2}+\frac{z(1-z^2)}{3(h+1)^3}+\frac{z(1+z^3)}{4(h+1)^4}+\frac{z(1-z^4)}{5(h+1)^5}+\cdots.$$

Přejde-li k z hodnoty $h+1$ na $h+2$, bude pro přírůstek funkce platit

$$\log\prod(h+2,z)-\log\prod(h+1,z)=\frac{z(1+z)}{2(h+2)^2}+\frac{z(1-z^2)}{3(h+2)^3}+\frac{z(1+z^3)}{4(h+2)^4}+\cdots.$$

Obecně, přejde-li hodnota k z h na $h+n$ bude přírůstek $\log\prod(h+n,z)-\log\prod(h,z)$ roven výrazu

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\,z(1+z)\left(\frac{1}{(h+1)^2}+\frac{1}{(h+2)^2}+\frac{1}{(h+3)^2}+\cdots+\frac{1}{(h+n)^2}\right)+\\+\;&\frac{1}{3}\,z(1-z^2)\left(\frac{1}{(h+1)^3}+\frac{1}{(h+2)^3}+\frac{1}{(h+3)^3}+\cdots+\frac{1}{(h+n)^3}\right)+\\+\;&\frac{1}{4}\,z(1+z^3)\left(\frac{1}{(h+1)^4}+\frac{1}{(h+2)^4}+\frac{1}{(h+3)^4}+\cdots+\frac{1}{(h+n)^4}\right)+\;\cdots\end{aligned}$$

Poroste-li n nade všechny meze, je podle Gausse výsledkem výraz ve tvaru absolutně konvergentní dvojné řady

$$\sum_{i=1}^{\infty}\Big[\sum_{j=1}^{\infty}\Big(\frac{z+z^{2i}}{2i(h+j)^{2i}}+\frac{z-z^{2i+1}}{(2i+1)(h+j)^{2i+1}}\Big)\Big].$$

Jestliže z není záporné celé číslo, pak bude mít funkce $\lim_{k\to\infty}\prod(k,z)$ konečně velkou hodnotu. Hodnota $\lim_{k\to\infty}\prod(k,z)$ proto závisí výhradně na hodnotě z, neboli představuje funkci pouze proměnné z, kterou budeme dále označovat $\prod z$. Funkci $\prod z$ tedy Gauss definoval jako limitu součinu

$$\prod z=\lim_{k\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots k\cdot k^z}{(z+1)(z+2)(z+3)\cdots(z+k)},$$

nebo jako nekonečný součin

$$\prod z=\frac{1}{z+1}\cdot\frac{2^{z+1}}{1^z(2+z)}\cdot\frac{3^{z+1}}{2^z(3+z)}\cdot\frac{4^{z+1}}{3^z(4+z)}\cdots, \tag{5.19}$$

který představuje analogii Eulerova vzorce (4.2). Je zde však podstatný rozdíl v definičním oboru oproti Eulerově definici a to takový, že ve vzorci (5.19) uvažujeme $z\in\mathbb{C}\backslash\{-1,\ -2,\ -3,\ \ldots\}$.

5.6 Vlastnosti funkce $\prod z$

Z rekurentního vzorce (5.14) ihned plyne následující důležitá rovnost

$$\prod(z+1)=(z+1)\prod z. \tag{5.20}$$

Zobecněním (5.20) pro $n\in\mathbb{N}$ snadno dostaneme

$$\prod(z+n)=(z+1)(z+2)(z+3)\cdots(z+n)\prod z. \tag{5.21}$$

Pro záporné celočíselné hodnoty proměnné z bude funkce $\prod z$ nabývat nekonečně velkých funkčních hodnot. Pro $z = 0$ Gauss dostal z rovnosti (5.19) vztah $\prod 0 = 1$ a odtud pomocí (5.21) získal pro nezáporné celočíselné hodnoty z rovnosti $\prod 1 = 1$, $\prod 2 = 2$, $\prod 3 = 6$, $\prod 4 = 24$, …, tedy obecně

$$\prod z = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots z, \qquad z \in \mathbb{N}. \tag{5.22}$$

Gauss si uvědomoval, že k definici faktoriálů pro neceločíselné hodnoty se vzorec (5.22) nehodí. Existuje totiž větší množství funkcí, které budou pro nezáporné celočíselné hodnoty splňovat podmínku (5.22), přičemž v ostatních hodnotách se budou lišit. Jako příklady uvedl funkce $f(z) = \cos(2\pi z) \cdot \prod z$ nebo $g(z) = \cos^{2n}(\pi z) \cdot \prod z$. Na druhou stranu, známe-li hodnoty funkce $\prod z$ v nějakém intervalu délky 1, např. pro $z \in \langle 0, 1)$, lze snadno pomocí rovnice (5.21) vypočítat hodnoty funkce $\prod z$ pro všechny ostatní reálné hodnoty proměnné z. Gauss proto vytvořil tabulku, která obsahovala logaritmy funkce $\prod z$ vypočítané pro hodnoty $z \in \langle 0, 1\rangle$ s přesností na 20 desetinných míst.

Gauss se také vyjádřil ke vztahu funkcí $\prod(k, z)$ a $\prod z$. Pokud je zavedena funkce $\prod z$, je podle Gausse definice funkce $\prod(k, z)$ zbytečná, neboť tato se dá vyjádřit pomocí $\prod z$. Z rovnic (5.11), (5.21) a (5.22) totiž pro obě funkce vyplývá rovnost

$$\prod(k, z) = \frac{k^z \prod k \cdot \prod z}{\prod(k + z)}. \tag{5.23}$$

Gauss se také zabýval vztahem mezi jím zavedenou funkcí $\prod z$ a Krampovou funkcí (5.3). Podotkl, že pro obě funkce platí rovnice

$$a^{bIc} = \frac{c^b \, b^{\left(\frac{a}{c}-1\right)} \, \prod b}{\prod\left(b, \frac{a}{c} - 1\right)} = \frac{c^b \prod\left(\frac{a}{c} + b - 1\right)}{\prod\left(\frac{a}{c} - 1\right)}.$$

Protože Krampovu funkci a^{bIc} lze vyjádřit pomocí $\prod z$, je podle Gausse vhodnější používat spíše funkci $\prod z$. Jako důvod též Gauss uvedl:

> *Zdá se mi výhodné, aby se v matematické analýze zavedla funkce jedné proměnné, namísto funkce tří proměnných, zvláště když se tato druhá funkce dá snadno vyjádřit pomocí první.*

Z definice funkce $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ plyne $\lim_{k\to\infty} F(\alpha, \beta, \gamma + k, 1) = 1$. Díky tomu lze rovnost (5.12) upravit do následujícího tvaru

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\prod(\gamma - 1) \cdot \prod(\gamma - \alpha - \beta - 1)}{\prod(\gamma - \alpha - 1) \cdot \prod(\gamma - \beta - 1)}. \tag{5.24}$$

Položením $t = \pi/2$ v (5.5) Gauss dostal rovnost

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right) = \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots.$$

Ze vzorce (5.24) proto plyne

$$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},1\right) = \frac{\pi}{2} = \frac{\prod\frac{1}{2}\cdot\prod\left(-\frac{1}{2}\right)}{\prod 0\cdot\prod 0}.$$

Vzhledem k rovnostem $\prod 0 = 1$ a $\prod\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\prod\left(-\frac{1}{2}\right)$ bude platit $\pi = \left(\prod\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2$, neboli

$$\prod\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \qquad \text{resp.} \qquad \prod\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}. \tag{5.25}$$

Nyní položil $t = \pi/2$ v rovnosti (5.6). Tím lze s pomocí (5.24) získat vztah

$$\sin\frac{n\pi}{2} = \frac{n\prod\frac{1}{2}\cdot\prod\left(-\frac{1}{2}\right)}{\prod\left(-\frac{1}{2}n\right)\cdot\prod\frac{1}{2}n},$$

který upravil do tvaru

$$\prod\frac{1}{2}n\cdot\prod\left(-\frac{1}{2}n\right) = \frac{\frac{1}{2}n\pi}{\sin\frac{1}{2}n\pi}.$$

Substitucí $n = 2z$ dostal další elegantní rovnosti

$$\prod(-z)\cdot\prod(+z) = \frac{z\pi}{\sin z\pi}, \qquad \text{resp.} \qquad \prod(-z)\cdot\prod(z-1) = \frac{\pi}{\sin z\pi}, \tag{5.26}$$

což jsou vztahy ekvivalentní s Eulerovým vzorcem (4.72). Další vztah Gauss odvodil tím, že v rovnici (5.26) vpravo nahradil z výrazem $z+\frac{1}{2}$. Tím dostal

$$\prod\left(-\frac{1}{2}-z\right)\cdot\prod\left(-\frac{1}{2}+z\right) = \frac{\pi}{\cos z\pi}. \tag{5.27}$$

Z rovnosti (5.26) a definice funkce $\prod z$ vyplývají další významné důsledky. Platí totiž

$$\frac{z\pi}{\sin z\pi} = \prod(-z)\cdot\prod(+z) = \lim_{k\to\infty}\frac{(1\cdot 2\cdot 3\cdots k)^2}{(1-z^2)(4-z^2)(9-z^2)\cdots(k^2-z^2)},$$

z čehož Gauss snadno odvodil tzv. sinový součin

$$\sin z\pi = z\pi\left(1-z^2\right)\left(1-\frac{z^2}{4}\right)\left(1-\frac{z^2}{9}\right)\cdots = z\pi\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right).$$

Analogickým způsobem odvodil z rovnice (5.27) a Wallisova vzorce (3.19) vyjádření funkce kosinus pomocí nekonečného součinu

$$\cos z\pi = \left(1-4z^2\right)\left(1-\frac{4z^2}{9}\right)\left(1-\frac{4z^2}{25}\right)\cdots = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4z^2}{(2n-1)^2}\right).$$

5.7 Gaussova multiplikační formule

V této části je popsán způsob, kterým Gauss odvodil tzv. multiplikační vzorec. Začal zkoumáním výrazu

$$\prod(k,z)\prod\left(k,z-\frac{1}{n}\right)\prod\left(k,z-\frac{2}{n}\right)\cdots\prod\left(k,z-\frac{n-1}{n}\right), \tag{5.28}$$

který budu značit symbolem $(\prod(k,z))_{n-1}$. Rozepsáním součinů v (5.28) podle definice $\prod(k,z)$ a změnou pořadí činitelů v jmenovateli zlomku dostal Gauss rovnost

$$\left(\prod(k,z)\right)_{n-1}=\frac{(1\cdot 2\cdot 3\cdots k)^n\cdot k^{nz}\cdot k^{(n-1)/2}\cdot n^{nk}}{(nz+1)(nz+2)\cdots(nz+nk)}.$$

Dále platí, že

$$\prod(nk,nz)=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots kn\cdot(nk)^{nz}}{(nz+1)(nz+2)\cdots(nz+nk)}.$$

Pokud je $n\in\mathbb{N}$, bude po příslušném krácení

$$\frac{n^{nz}\left(\prod(k,z)\right)_{n-1}}{\prod(nk,nz)}=\frac{(1\cdot 2\cdot 3\cdots k)^n n^{nk}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots nk\cdot k^{(n-1)/2}}. \tag{5.29}$$

Výraz v (5.29) vpravo je nezávislý na proměnné z, takže jeho hodnota zůstane stejná i při změně veličiny z. Díky rovnosti $\prod(k,0)=\prod(nk,0)=1$ se dá vyjádřit součinem

$$\prod\left(k,-\frac{1}{n}\right)\cdot\prod\left(k,-\frac{2}{n}\right)\cdot\prod\left(k,-\frac{3}{n}\right)\cdots\prod\left(k,-\frac{n-1}{n}\right).$$

Pro $k\to\infty$ dostal Gauss rovnost

$$\frac{n^{nz}\prod z\cdot\prod\left(z-\frac{1}{n}\right)\cdot\prod\left(z-\frac{2}{n}\right)\cdots\prod\left(z-\frac{n-1}{n}\right)}{\prod nz}=$$
$$=\prod\left(-\frac{1}{n}\right)\cdot\prod\left(-\frac{2}{n}\right)\cdot\prod\left(-\frac{3}{n}\right)\cdots\prod\left(-\frac{n-1}{n}\right). \tag{5.30}$$

Ze vzorce na pravé straně rovnice (5.26) vyplývá pro $\alpha\in\mathbb{N}$, $\alpha\le n-1$ rovnost

$$\prod\left(-\frac{\alpha}{n}\right)\cdot\prod\left(-\frac{n-\alpha}{n}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{\alpha}{n}}.$$

V dalším kroku Gauss vzájemně vynásobil faktory z pravé strany rovnosti (5.30) (první s posledním, druhý s předposledním, atd.). V případě, že výraz $n-1$ je roven sudému číslu, obdržel rovnost

$$\prod\left(-\frac{1}{n}\right)\prod\left(-\frac{2}{n}\right)\cdots\prod\left(-\frac{n-1}{n}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{1}{n}\pi}\frac{\pi}{\sin\frac{2}{n}\pi}\cdots\frac{\pi}{\sin\frac{n-1}{2n}\pi}. \tag{5.31}$$

Pokud je výraz $n-1$ liché číslo, potom „prostřední“ faktor

$$\prod\left(-\frac{\frac{n}{2}}{n}\right)=\prod\left(-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

zůstane nevynásoben a platí

$$\prod\left(-\frac{1}{n}\right)\prod\left(-\frac{2}{n}\right)\cdots\prod\left(-\frac{n-1}{n}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{1}{n}\pi}\frac{\pi}{\sin\frac{2}{n}\pi}\cdots\frac{\pi}{\sin\frac{n-2}{2n}\pi}\sqrt{\pi}. \tag{5.32}$$

Pro úpravu výrazu v rovnosti (5.32) vpravo se vrátíme k Eulerovi a jeho knize [13]. Zde v § 240, kapitoly 14, Euler odvodil vztah

$$\sin nz = 2^{n-1}\sin z\sin\left(\frac{\pi}{n}-z\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}+z\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}-z\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}+z\right)\cdots, \tag{5.33}$$

kde na pravé straně rovnosti (5.33) uvažujeme celkem n činitelů s funkcí sinus. Dělením obou stran rovnice (5.33) výrazem $\sin z$ a následným limitním přechodem $z \to 0$ dostaneme v případě, že je n sudé číslo rovnost

$$\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}=\sqrt{n\cdot 2^{1-n}}.$$

V případě, že je n liché číslo obdržíme rovnost

$$\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}=\sqrt{n\cdot 2^{1-n}}.$$

Spojením posledních dvou rovností se vzorci (5.31), resp. (5.32) dostaneme tzv. Gaussův multiplikační vzorec

$$\frac{n^{nz}\prod z\cdot\prod\left(z-\frac{1}{n}\right)\cdot\prod\left(z-\frac{2}{n}\right)\cdots\prod\left(z-\frac{n-1}{n}\right)}{\prod nz}=\frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}}{\sqrt{n}}. \tag{5.34}$$

Dosadíme-li do rovnosti (5.34) za n číslo 2, výsledkem je tzv. Legendrova formule

$$\sqrt{\pi}\ \prod(2z)=2^{2z}\ \prod(z)\ \prod\left(z-\frac{1}{2}\right). \tag{5.35}$$

Kapitola 6

Karl Weierstrass a faktorizační věta

V této kapitole se budeme věnovat odvození tzv. faktorizační věty, jejímž autorem je Karl Weierstrass (1815 –1897). Jsou zmíněny i některé důsledky plynoucí z faktorizační věty.

6.1 Reprezentace funkce nulovými body

Podle základní věty algebry má každý polynom n-tého stupně ($n \geq 1$) právě n kořenů [1]) (každý počítáme tolikrát, kolik činí jeho násobnost). Jsou-li všechny kořeny polynomu $P(z)$ (označme je symboly z_n) různé od nuly, lze daný polynom vyjádřit ve tvaru

$$P(z) = c \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right),$$

kde $c \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$. Je tedy každý polynom jednoznačně (až na jistou multiplikativní konstantu c) určen svými kořeny. V dalším textu se budeme zabývat tím, jak dalece jsou svými nulovými body charakterizovány celé transcendentní funkce.

6.2 Cauchyho příspěvek

Uvažujme celou transcendentní funkci $f(z)$, jejíž nulové body tvoří nekonečnou posloupnost $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, vyhovující podmínce $\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$. Členy posloupnosti jsou uspořádány podle absolutních hodnot, tj. pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $|z_n| \leq |z_{n+1}|$, přičemž prozatím předpokládáme, že všechny členy posloupnosti $\{z_n\}$ jsou různé od nuly. Připomeňme, že funkce f'/f je meromorfní funkcí. Nechť dále platí, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|}, \tag{6.1}$$

[1]) V případě polynomů je z historických důvodů zvykem používat název *kořen* místo *nulový bod.*

konverguje. Potom lze dokázat, že i řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z - z_n|} \tag{6.2}$$

konverguje pro všechna $z \in \mathbb{C}\backslash\{z_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. S ohledem na vzorec (1.10) a konvergenci řady (6.2) můžeme říci, že výraz

$$\frac{f'(z)}{f(z)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z - z_n}$$

představuje funkci, která je holomorfní pro všechna $z \in \mathbb{C}$. Manipulací s touto funkcí lze dospět k vyjádření funkce f ve tvaru

$$f(z) = f(0)\, e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right),$$

kde $g(z)$ představuje celou funkci. K tomuto výsledku dospěl v roce 1829 Cauchy v článku [9], str. 232. Tím ukázal, že pokud má funkce $f(z)$ nekonečně mnoho nulových bodů z_n a řada (6.1) konverguje, není tato funkce plně charakterizována pouze posloupností $\{z_n\}$, tj. součinem

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right),$$

ale že funkce f je určena až na exponenciální faktor ve tvaru $e^{g(z)}$.

6.3 Faktorizační věta

Předchozí Cauchyho výsledek zobecnil Weierstrass v roce 1876 i pro ty případy, kdy řada (6.1) diverguje. V článku [48] Weierstrass píše:

Je-li $a_1, a_2, \ldots, a_r$ posloupnost nulových bodů celé racionální funkce $G(x)$ a x_0 nějaký bod různý od výše uvedených hodnot, tak platí

$$\frac{G(x)}{G(x_0)} = \prod_{n=1}^{r} \left(\frac{x - a_n}{x_0 - a_n}\right).$$

Nabízí se otázka, zda lze tuto větu rozšířit na transcendentní celé funkce, přitom se však dostaneme do značných potíží. Víme již, že obecně je nutné doplnit výraz o faktor

$$e^{\overline{G}(x)};$$

(Cauchy, Exercices de Mathematiques, IV.); toto ovšem stačí pouze tehdy, má-li funkce konečný počet nulových bodů, nebo tehdy, když řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n - x_0},$$

a také součin

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-a_n}{x_0-a_n}\right)$$

konvergují, což není obecný případ. (...) Obecně však není možné tímto způsobem získat konvergentní součin, jak ukazuje například funkce $1/\prod(x)$*, která z daných faktorů*

$$1+x, \quad 1+\frac{x}{2}, \quad 1+\frac{x}{3}, \quad \dots$$

vytváří ve většině případů divergentní součin.

Na tomto místě podotknu, že v roce 1854 Weierstrass vydal článek [49], ve kterém se zabýval zobecněním faktoriálů, resp. rozšířením faktoriálů na množinu $\mathbb{C}$. Přitom pracoval s nekonečným součinem

$$x \cdot \prod_{\alpha=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{x}\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)\right\},$$

který představuje převrácenou hodnotu funkce gama. Tato funkce představuje celou funkci, která je pro zacházení mnohem jednodušší než samotná funkce gama. V bodech, které jsou póly funkce gama, má tato funkce nulové body. Weierstrass pro ni zavedl zvláštní symbol. Výraz $1/\Gamma(x)$ nazval *factorielle* x a označil ho $\mathrm{Fc}(x)$. O tomto součinu Weierstrass v [49] napsal:

> *Rád bych pro toto navrhl název Factorielle u a zápis* $\mathrm{Fc}(u)$*, protože aplikace této funkce v teorii faktoriálů je jistě výhodnější než použití gama funkce. Je spojitá pro každou hodnotu u stejně jako nejjednodušší transcendentní funkce* exp*,* sin*,* cos*. Navíc má v podstatě charakter racionální celé funkce, takže je možné ji rozvinout v konvergentní řadu celých kladných mocnin u.*

Faktory, ze kterých je sestavena funkce $1/\prod x$, přinášejí myšlenku tzv. *konvergenčních faktorů*. Tyto exponenciální faktory způsobují konvergenci jinak divergentního nekonečného součinu a přitom nemění množinu všech nulových bodů funkce. Faktory funkce $1/\prod x$ se pro Weierstrasse staly inspirací pro „uhodnutí“ hledaného tvaru faktorů nekonečného součinu. O funkci $1/\prod x$ napsal Weierstrass v článku [48] následující:

> *Ale právě tato funkce nás vede k cestě, která vede k cíli. Podle Gaussovy definice je tato funkce rovna konvergentnímu nekonečnému součinu*
>
> $$\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-x}\right\},$$
>
> *neboli*
>
> $$\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)\cdot e^{-x\log\left(\frac{n+1}{n}\right)}\right\};$$

> *vede k funkci, která je vyjádřena jako součin nekonečně mnoha faktorů. Ty sice nejsou lineární funkce proměnné x, přesto však jde o jednoznačné funkce s jediným singulárním bodem (∞) a také jediným nulovým bodem. Toto vyjádření mě vedlo k otázce, zda je možné sestrojit libovolnou funkci $G(x)$ z faktorů ve tvaru*
>
> $$(kx+l)e^{\overline{G}(x)},$$
>
> *a sledováním této myšlenky jsem zjistil, jaká teorie jednoznačných funkcí s konečným počtem podstatných singularit přinese uspokojivé řešení. Každou takovou funkci nazývám* elementární faktor [2]) x, $(\ldots)$

Ukažme, jakým způsobem Weierstrass pracoval s výše uvedenými elementárními faktory. Nejprve odvodil pro hodnoty $|x|<1$ rovnosti

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{r=0}^{\infty}x^r=\frac{d}{dx}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{x^{r+1}}{r+1},$$

z nichž odvodil vzorce

$$1-x=\exp\left(-\sum_{r=0}^{\infty}\frac{x^{r+1}}{r+1}\right),\quad \text{resp.}\quad (1-x)\exp\left(\sum_{r=1}^{\infty}\frac{x^r}{r}\right)=1.$$

Potom zavedl funkce

$$\begin{aligned}
E(x,0) &= 1-x,\\
E(x,1) &= (1-x)\exp(x),\\
E(x,2) &= (1-x)\exp\left(x+\frac{1}{2}x^2\right),\\
&\ldots,\\
E(x,m) &= (1-x)\exp\left(\sum_{r=1}^{m}\frac{x^r}{r}\right).
\end{aligned}$$

Pro funkce $E(x,m)$ platí, že mají jediný nulový bod $x=1$ a je

$$E(x,m)=\exp\left(-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{x^{m+r}}{m+r}\right). \tag{6.3}$$

Nechť hodnoty a_n tvoří nekonečnou posloupnost všech nulových bodů funkce $f(z)$, přičemž tato posloupnost vyhovuje podmínkám:

(i) pro každé $n\in\mathbb{N}$ platí $0<|a_n|\le|a_{n+1}|$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\infty$.

[2]) Weierstrass ve své práci použil výraz *Primfunction*, v anglické literatuře se používá termín *primary factor*.

Nechť x je libovolný bod v konečné části roviny. Potom vzhledem k výše uvedeným podmínkám může pouze konečný počet prvků posloupnosti a_n ležet v kruhu se středem v počátku a poloměrem $|x|$. Označme tyto prvky a_1, a_2, $\ldots, a_{k-1}$ a nechť a_r značí některý ze zbývajících nulových bodů funkce. Pro $n > k$ je podle vzorce (6.3)

$$E\left(\frac{x}{a_n}, m_n\right) = \exp\left(-\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r+m_n}\left(\frac{x}{a_n}\right)^{r+m_n}\right).$$

Pak platí

$$\prod_{n=k}^{\infty} E\left(\frac{x}{a_n}, m_n\right) = \exp\left(-\sum_{n=k}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r+m_n}\left(\frac{x}{a_n}\right)^{r+m_n}\right). \tag{6.4}$$

Nekonečný součin v (6.4) bude konvergovat, bude-li konvergovat dvojná řada

$$\sum_{n=k}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r+m_n}\left(\frac{x}{a_n}\right)^{r+m_n}. \tag{6.5}$$

Konvergence řady (6.5) bude záležet na „poloze“ kořenů a_n funkce $f(x)$ a tomu odpovídající volbě čísel m_n. Weierstrass ukázal, že pro zajištění konvergence řady (6.5) stačí zvolit čísla m_n tak, aby řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{a_n}\left(\frac{x}{a_n}\right)^{m_n}\right| \tag{6.6}$$

konvergovala. K zajištění konvergence řady (6.6) zvolíme klesající posloupnost kladných čísel ϵ, ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3, $\ldots$ takovou, že $\epsilon < 1$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n$ konverguje. Čísla m_n vybereme tak, aby vyhovovala nerovnici $\epsilon^{m_n+1} \leq \epsilon_n$. Potom zvolíme ε tak, aby bylo (s výjimkou prvních $k-1$ členů posloupnosti a_n, kterých je konečně mnoho a neovlivní konvergenci řady (6.6))

$$\left|\frac{x}{a_k}\right| \leq \epsilon.$$

Tím dostaneme pro všechna $n \geq k$ nerovnosti

$$\left|\frac{x}{a_n}\right|^{m_n+1} \leq \epsilon^{m_n+1} \leq \epsilon_n.$$

Pak, vzhledem k nerovnostem $|x| < |a_n|$ pro $n \geq k$, platí

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left|\frac{1}{a_n}\left(\frac{x}{a_n}\right)^{m_n}\right| \leq \frac{1}{|x|}\left(\epsilon_k + \epsilon_{k+1} + \cdots\right) \leq \frac{1}{|x|}\left(\epsilon + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \cdots\right),$$

přičemž výraz $(\epsilon + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \cdots)$ konverguje vzhledem k předpokládané konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n$. Z toho plyne, že pro každou posloupnost a_n, která splňuje výše uvedené požadavky, existuje posloupnost přirozených čísel m_n taková, že řada (6.6) konverguje absolutně.

Pro řadu (6.5) jsou splněny nerovnosti

$$\sum_{n=k}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r+m_n}\left|\frac{x}{a_n}\right|^{r+m_n} \leq \sum_{n=k}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\left|\frac{x}{a_n}\right|^{r+m_n} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{1-\left|\frac{x}{a_n}\right|} \cdot \left|\frac{x}{a_n}\right|^{m_n+1}.$$

Protože posloupnost $|a_n|$ je neklesající, platí pro všechna $n \geq k$ nerovnost $|a_n| \geq |a_k|$. Pro všechna $n \geq k$ je

$$1 - \left|\frac{x}{a_k}\right| \leq 1 - \left|\frac{x}{a_n}\right|;$$

proto platí následující nerovnost

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{1 - \left|\frac{x}{a_n}\right|} \cdot \left|\frac{x}{a_n}\right|^{m_n+1} \leq \frac{1}{1 - \left|\frac{x}{a_k}\right|} \sum_{n=k}^{\infty} \left|\frac{x}{a_n}\right|^{m_n+1} = \frac{|x|}{1 - \left|\frac{x}{a_k}\right|} \sum_{n=k}^{\infty} \left|\frac{1}{a_n}\left(\frac{x}{a_n}\right)^{m_n}\right|. \quad (6.7)$$

Vzhledem ke konvergenci řady (6.6) má výraz na pravé straně (6.7) pro všechna $x \in \mathbb{C}$ konečnou hodnotu. Tím je zaručena absolutní konvergence dvojné řady (6.5). Z toho plyne, že nekonečný součin na levé straně rovnice (6.4) konverguje absolutně.

V předcházející části jsme předpokládali, že bod $x = 0$ není nulovým bodem funkce f a to z toho důvodu, že odpovídající faktor musí mít v tomto případě jiný tvar, než faktory vztažené k ostatním nulovým bodům. Předpokládejme, že počátek je nulovým bodem funkce f s násobností λ. Potom odpovídající faktor bude nabývat tvar x^λ.

Takto vyjádřená funkce však není jediná transcendentní celá funkce s výše uvedenou množinou nulových bodů. Weierstrass ukázal, že pokud $\overline{G}(x)$ značí libovolnou celou funkci, potom výraz

$$G(x)e^{\overline{G}(x)}$$

opět představuje nějakou celou funkci se stejnými nulovými body, jako má funkce $G(x)$.

Jestliže tedy $f(x)$ představuje nějakou celou funkci proměnné x, pak mohou nastat tři případy:

1. Funkce $f(x)$ nemá nulové body. Potom může být vyjádřena ve tvaru

$$f(x) = e^{\overline{G}(x)}.$$

2. Funkce $f(x)$ má konečný počet nulových bodů. Potom je možné ji vyjádřit ve tvaru

$$f(x) = G_0(x)e^{\overline{G}(x)},$$

kde $G_0(x)$ značí celou funkci.

3. Funkce $f(x)$ má nekonečný počet nulových bodů. V takovém případě může být vyjádřena ve tvaru

$$f(x) = x^\lambda G(x)e^{\overline{G}(x)},$$

kde λ je buď nula, nebo přirozené číslo, $G(x)$ je funkce ve tvaru nekonečného součinu

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{\sum_{r=1}^{m_n} \frac{1}{r}\left(\frac{x}{a_n}\right)^r} \right\},$$

čísla a_n jsou nulové body funkce f (různé od nuly) a m_n je vhodná posloupnost přirozených čísel.

Tím je zdůvodněna následující věta.

Věta 6.3.1 (Faktorizační věta). *Nechť $G(x)$ je celá funkce, pro kterou je počátek nulovým bodem násobnosti λ. Nechť $\{a_n\}$ značí konečnou nebo nekonečnou posloupnost všech zbývajících nulových bodů funkce G, přičemž platí, že každý nulový bod se v posloupnosti vyskytuje tolikrát, kolik činí jeho násobnost. Potom existuje posloupnost přirozených čísel $\{m_n\}$ a celá funkce $g(x)$ taková, že funkce G může být vyjádřena ve tvaru*

$$G(x) = x^{\lambda} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) \exp\left(\sum_{r=1}^{m_n} \frac{1}{r} \left(\frac{x}{a_n}\right)^r \right) \right\}.$$

Na základě faktorizační věty mohl Weierstrass odpovědět na dříve formulovanou otázku následujícím způsobem.

Věta 6.3.2. *Každá celá funkce proměnné x může být vyjádřena ve tvaru součinu, jehož elementární faktory jsou ve tvaru*

$$(kx + l)e^{g(x)},$$

kde $g(x)$ je vhodná celá funkce a čísla k, l jsou konstanty. V některých případech může být funkce $g(x)$ identicky rovna nule a stejně tak jedno z čísel k, l může mít nulovou hodnotu.

Weierstrass tak ukázal, že pro libovolnou posloupnost $\{a_n\}$, která vyhovuje podmínce $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$, existuje celá funkce, jejíž nulové body jsou tvořeny pouze členy posloupnosti $\{a_n\}$. Toto mu umožnilo odhalit řadu dalších vlastností komplexních funkcí. Uvedu jednu z nich, kterou uvedl současně s faktorizační větou. V třetí kapitole článku [48] Weierstrass píše:

> *Je-li $f(x)$ jednoznačná funkce proměnné x s podstatnou singularitou v bodě ∞, tak je možné v tom případě, kdy má funkce libovolný počet pólů (i nekonečně velký), sestrojit funkci $G_2(x)$, pro kterou je posloupnost nulových bodů identická s posloupností nulových bodů funkce $1/f(x)$. Pak je $G_2(x) \cdot f(x)$ rovněž celá funkce proměnné x a označíme-li tento součin symbolem $G_1(x)$, tak platí*
>
> $$f(x) = \frac{G_1(x)}{G_2(x)}.$$
>
> *Zároveň jsou tyto funkce $G_1(x)$, $G_2(x)$ takové, že se pro tutéž hodnotu nekrátí. A obráceně, máme-li dvě celé funkce této vlastnosti, a alespoň jedna z nich je transcendentní, tak podíl*
>
> $$\frac{G_1(x)}{G_2(x)}$$
>
> *představuje funkci, která má za singularitu nejvýše bod ∞.*

Tím Weierstrass dokázal následující důležitou větu o reprezentaci meromorfních funkcí.

Věta 6.3.3. *Každá funkce meromorfní v celé Gaussově rovině může být vyjádřena jako podíl dvou celých funkcí.*

Každou meromorfní funkci proměnné x je tedy možné vyjádřit jako součin tří faktorů. První z nich je tvořen celočíselnou mocninou proměnné x, druhým faktorem je celá funkce ve tvaru $e^{g(x)}$ a třetí faktor je podíl dvou (konečných nebo nekonečných) součinů.

Faktorizační větu lze zobecnit pro libovolnou otevřenou množinu, viz [39], str. 335.

Věta 6.3.4. *Nechť Ω je otevřená množina v $\mathbb{S}$, $\Omega \neq \mathbb{S}$. Nechť dále množina $A \subset \Omega$ nemá v Ω žádný hromadný bod. Každému $\alpha \in A$ přiřaďme přirozené číslo $m(\alpha)$. Potom existuje funkce f holomorfní na množině Ω s nulovými body pouze v množině A taková, že násobnost nulového bodu α funkce f je $m(\alpha)$.*

Weierstrassova věta měla velký vliv na matematickou obec. O jejím významu vypovídá např. citát z knihy [36], str. 80:

> *Vědomí toho, že existují celé funkce s „libovolně“ předepsanými nulovými body, způsobilo zásadní převrat v myšlení těch, kdo se zabývali teorií funkcí. Náhle bylo možné „sestrojit“ holomorfní funkce, o kterých dříve nebylo možné dokonce ani uvažovat při použití klasické (matematické) výzbroje.*

Kapitola 7

Biografické údaje

7.1 François Viète (1540 – 1603)

Viète se narodil ve francouzské provincii Poitiers v době, kdy se ve Francii začínal prohlubovat spor mezi katolíky a hugenoty [1]). Nejprve navštěvoval františkánskou školu v rodném městě. Od roku 1558 studoval práva na univerzitě v Poitiers, roku 1560 se stal bakalářem a začal pracovat jako advokát v rodném městě. V té době se ve Francii rozpoutala občanská válka [2]). V roce 1568 přesídlil do La Rochelle. Zde přišel do styku s vůdčími osobnostmi hugenotů, mimo jiné s Jindřichem Navarrským, pozdějším králem Jindřichem IV. (1553 – 1610). Viète sám byl katolík, v náboženských otázkách však byl velmi tolerantní.

Roku 1571 se Viète přestěhoval do Paříže a pokračoval v advokátní praxi. V Paříži se seznámil s významnými matematiky, zejména s profesorem pařížské univerzity Pierrem de la Ramé (1515 – 1572). Začal vydávat drobnější práce a rozesílat je známým matematikům. Roku 1573 přešel do státní služby a stal se poradcem parlamentu v Rennes v Bretani. V letech 1580 až 1584 pracoval jako poradce krále Jindřicha III. (1551 – 1589) a od roku 1589 se stal osobním poradcem krále Jindřicha IV. Ve službě u krále zůstal do roku 1602, kdy ho Jindřich IV. propustil ze svých služeb. V následujícím roce Viète zemřel.

I když Viète nebyl profesionálním matematikem, přesto sehrál významnou roli ve vývoji matematiky. Je považován za jednoho ze zakladatelů algebry. Pod jeho vlivem se algebra stala naukou o obecných postupech při práci s výrazy a rovnicemi. To byl významný posun, neboť do té doby se pracovalo pouze s konkrétně zadanými jednotlivými úlohami. Viète začal označovat veličiny písmeny, používal symboly pro aritmetické operace, atp. Více informací o Viètovi lze nalézt v článku [5], str. 191 – 202.

[1]) Hugenoti [*igenoti*] byli francouzští protestanti. Pocházeli ze všech společenských vrstev, včetně vysokých feudálů (např. Bourbonů). V roce 1598 došlo k zrovnoprávnění katolíků a hugenotů *ediktem nantským*. Tento výnos krále Jindřicha IV. zaručoval hugenotům náboženskou svobodu a občanskou rovnost. V roce 1685 byl králem Ludvíkem XIV. (1638 – 1715) *edikt nantský* zrušen a došlo k opětovnému pronásledování hugenotů, což vedlo k jejich emigraci z Francie. Samotný pojem *hugenoti* pochází z německého *Eidgenossen* (sdružení), což byl spolek tří měst – Ženevy, Freiburgu a Bernu, jež společně přijala reformaci a stala se ohniskem, ze kterého protestantismus pronikal do Francie.

[2]) Celkem osm válek mezi katolíky a hugenoty v období 1562 – 1598.

7.2 John Wallis (1616 – 1703)

Wallis se narodil v Ashfordu v Kentu jako syn anglického kněze. Všeobecné klasické vzdělání získal v Cambridge, kde vystudoval teologii, byl vysvěcen a několik let působil jako kněz. V roce 1645 se přestěhoval do Londýna a o dva roky později se začal intenzivně zabývat matematikou. Studoval klasická díla řeckých matematiků, dále díla Descarta, Keplera, Robervala, Torricelliho a Cavalieriho. Měl prý fenomenální paměť a byl výborný počtář. Vypráví se, že jednou za bezesné noci vypočítal zpaměti druhou odmocninu 53-místného čísla na 27 míst a ráno nadiktoval výsledek svého výpočtu. Za anglické revoluce se Wallis proslavil rozluštěním tajných dopisů přívrženců tehdejšího krále Karla I. Stuarta (1600 – 1649), které zachytili stoupenci Olivera Cromwella (1599 – 1658). Ten ho roku 1649 jmenoval profesorem geometrie v Oxfordu.

John Wallis stál u zrodu londýnské vědecké společnosti, pozdější *Royal Society.* Zabýval se infinitezimálním počtem, teorií čísel, aritmetikou a algebrou, kryptografií a položil základy interpolace. Wallis patřil mezi nejvýznamnější tvůrcem infinitezimálního počtu v období před Isaacem Newtonem (1642 – 1727) a Gottfriedem Wilhelmem Leibnizem (1646 – 1716). Více informací o Wallisově životě lze získat v článku [5], str. 215 – 219.

7.3 Leonhard Euler (1707 – 1783)

Leonhard Euler se narodil 15. dubna 1707 ve švýcarské Basileji v rodině venkovského pastora. V roce 1720 začal studovat na Basilejské univerzitě. Magistrem filozofie se stal v roce 1723 a na přání svého otce začal studovat teologii. Kromě teologických předmětů si zapsal i několik cizích jazyků, matematiku, fyziku, astronomii a medicínu. Matematiku Eulera učil přítel jeho otce Johann Bernoulli (1667 – 1748). Ten brzy rozpoznal Eulerovo nevšední nadání pro matematiku a pomohl přemluvit Eulerova otce k souhlasu s opuštěním studia teologie kvůli matematice. Během studií na univerzitě se Euler seznámil s Bernoulliho syny Mikulášem II. (1695 – 1726), Danielem I. (1700 – 1782) a Johannem II. (1710 – 1790). V roce 1726 ukončil studium na basilejské univerzitě a začal publikovat vědecká pojednání. V lipských Acta eruditorum uveřejnil článek *Constructio linearum isochronarum in medio quocunque resistente* (Konstrukce isochronní křivky v prostředí kladoucím odpor) (1726). V této práci navázal na Bernoulliho problém brachystochrony [3]), přičemž úlohu rozšířil o předpoklad pohybu hmotného bodu v prostředí s odporem. V roce 1727 se Eulerovi dostalo pochvalného uznání Pařížské Akademie za článek *Meditationes super problemate nautico* (Pojednání o problému mořeplavby), ve kterém řešil úlohu nejvhodnějšího umístění lodního stěžně. Kladná odezva publikovaných prací vedla Eulera k úsilí o získání místa v akademickém prostředí. Hledané uplatnění našel tehdy dvacetiletý Euler ve službách carského Ruska.

Rusko od počátku 18. století procházelo výraznou společenskou reformou. Tehdejší ruský car Petr I. Veliký (1672 – 1725) založil v roce 1703 v ústí řeky Něvy Petrohrad, který se v roce 1712 stal novým hlavním městem země. Car se snažil přiblížit Rusko Evropě. Zval do Ruska zahraniční odborníky, kteří jako řemeslníci, obchodníci, důstojníci a vědci pomáhali při pokusu o „revoluci shora“. Zavedl juliánský kalendář (od 1.1.1700), po západním vzoru

[3]) Brachystochrona je křivka, po níž se hmotný bod přesune v nejkratším čase působením gravitace z jednoho bodu do druhého. Podobně byly studovány i další křivky: izochrona (křivka, po níž těleso padá rovnoměrnou rychlostí) a tautochrona (křivka, po níž hmotný bod gravitačním poli dosáhne nejnižšího bodu v čase, nezávislém na výchozím bodě).

reorganizoval církev, armádu, státní správu a školství [4]). Po carově smrti pokračovala v tomto díle i jeho manželka Kateřina I. (1690 – 1727). V prosinci roku 1725 v Petrohradě založila (na základě výnosu cara Petra I. z 28. ledna 1724) Akademii věd, kam přijali pozvání i Mikuláš II. a Daniel I. Bernoulliovi.

V červenci 1726 však Mikuláš II. zemřel a jeho místo bylo díky přímluvě Daniela I. nabídnuto Eulerovi s tím, že bude vyučovat použití matematických a fyzikálních metod v medicíně. Euler přijel do Petrohradu v květnu 1727 a strávil zde následujících 13 let. Z rozhodnutí vedení Akademie se nakonec nemusel věnovat medicínským vědám, ale mohl se plně soustředit pouze na matematiku a příbuzné obory. V roce 1730 se stal profesorem fyziky, což mu umožnilo stát se plnoprávným členem Akademie. V roce 1733 se Daniel I. rozhodl vrátit do Basileje a Euler po něm převzal stolici matematiky. Toto jmenování ho finančně zajistilo natolik, že mohl založit rodinu. V lednu 1734 se oženil s Kateřinou Gsell (1700 – 1773), dcerou švýcarského malíře působícího v Petrohradě na gymnáziu. Měli spolu celkem 13 dětí. Sám Euler o sobě prohlašoval, že nejlépe se mu pracuje, když v ruce chová jedno dítě a ostatní děti si hrají u jeho nohou.

Již od počátku svého petrohradského pobytu Euler vědecky usilovně pracoval. Do sféry jeho zájmů patřily z matematiky hlavně diferenciální rovnice, teorie řad, speciální funkce, variační počet, diferenciální geometrie, řetězové zlomky, teorie čísel a z fyziky hlavně mechanika. Již ve druhém dílu *Komentářů Akademie* za rok 1727 Euler publikoval dva příspěvky. Kromě samotné publikační činnosti Euler zvládal řadu dalších činností. Psal učebnice a populárně naučné články, přednášel studentům. Byl často zván jako expert k řešení různých problémů technického charakteru: byl členem komise pro míry a váhy, pracoval na zmapování Ruska, přičemž kromě samotného geodetického měření se věnoval i kreslení map, atd. Již z tohoto výčtu je zřejmé, že pro Eulera je charakteristické propojení teoretického bádání s praktickou činností.

V této době byl již Euler velmi uznávaným vědcem. V letech 1738 a 1740 získal Velkou cenu Pařížské Akademie. Se získaným věhlasem rostla Eulerova cena a tak není divu, že obdržel nabídku pruského krále Friedricha II. Velikého (1712 – 1786) k práci v Prusku. Zpočátku Euler nechtěl Petrohrad opustit, avšak změna politického klimatu v Rusku po roce 1740 ho přiměla změnit názor. Proto zde v červenci 1741 přerušil pobyt a odjel do Berlína.

Friedrich II. Veliký se stal králem pruské říše v roce 1740. Byl příznivcem umění, věnoval se literatuře a divadlu. Stejně tak ho zaujala filozofie osvícenectví, se kterou ho seznámil Voltaire (1694 – 1778). Brzy po svém nástupu k moci zakázal pod vlivem osvíceneckých myšlenek mučení, provedl reformu státní správy, školství, právního řádu a zemědělství. Ve smyslu osvíceneckého absolutismu vybudoval úřednický stát, ve kterém zájmy státu nadřadil všemu ostatnímu a sám sebe prohlašoval za prvního služebníka státu. Obrázek o králi si můžeme vytvořit na základě vývoje vztahu mezi ním a Voltairem. Ten pobýval v Prusku v letech 1750 – 1753, přičemž s Friedrichem II. si dopisoval již řadu let předtím. Voltaire byl po svém příjezdu do Pruska okouzlen. Během tří let pobytu však jeho nadšení vyprchalo a od pruského dvora odešel po roztržce s Friedrichem, kterého pak charakterizoval slovy [5]):

> *Vyniká vrozenou inteligencí a nadáním, ale jeho přemrštěná sebeláska z něho nakonec učinila velmi směšného a velmi zlého člověka.*

Friedrich II. se snažil vytvořit z Berlína kulturní a vědeckou metropoli. Jedním ze způsobů,

---

[4]) Pro historiky matematiky může být zajímavý fakt, že když car předepsal pro necírkevní knihy tzv. *občanské písmo*, které přibližovalo cyrilici latinské antikvě, tak se v roce 1708 stala první knihou, tištěnou novým typem písma, učebnice geometrie.

[5]) Viz [20], str. 568.

jak toho chtěl dosáhnout, byla přeměna tehdejší berlínské vědecké společnosti (založené roku 1700) na Akademii věd v roce 1744. Prezidentem Akademie se stal Pierre Louise Moreau de Maupertuis (1698 – 1759). Euler byl jmenován ředitelem matematického ústavu. Kromě toho se jako člen správní rady podílel na vedení celé Akademie.

Vztah mezi Eulerem a Friedrichem II. se hodně podobal vztahu krále s Voltairem; sahal od nadšení a okouzlení až k nezájmu a neshodám. O jejich vztahu se můžeme dočíst [6]):

> *Král Friedrich, toužící ukázat se jako osvícený vladař a příznivec vědy a umění, nedokázal plně ocenit teoretické výzkumy v oblasti matematiky a mechaniky. Na druhé straně Euler neuměl hrát roli dvorního a salónního společníka, nutnou pro dobré vztahy s pruským králem.*

Po smrti Maupertiuse se Euler stal vůdčí osobností Akademie, i když pro neshody s králem nebyl jmenován jejím prezidentem.

Během svého pobytu v Berlíně Euler nepřerušil spolupráci s Petrohradskou Akademií. Z Ruska stále pobíral část svého platu. Na oplátku Euler publikoval některé své práce v Petrohradě, recenzoval práce ruských studentů, nakupoval pro petrohradskou akademii knihy a přístroje, atd. Tato spolupráce, spolu s rostoucími neshodami s pruským králem, vedla k Eulerově návratu do Ruska. Stalo se tak na přání carevny Kateřiny II. Veliké (1729 – 1796). O tom, že Euler byl prakticky založený muž, svědčí následující text [7]):

> *Kateřina II. (...) dala ruskému vyslanci v Prusku instrukce, aby přistoupil na jakékoliv Eulerovy podmínky. Euler (...) předložil ruskému vyslanci tyto podmínky: Stane se ředitelem Akademie s platem 3000 rublů ročně. Jeho žena obdrží v případě jeho smrti penzi 1000 rublů. Jeho tři synové získají dobré postavení v Petrohradě a nejstarší syn Johann se stane sekretářem Akademie.*

V roce 1766 se Euler (k velké nelibosti Friedricha II.) vrátil do Petrohradu, kde se skutečně stal ředitelem Akademie. Eulerova druhá etapa pobytu v Petrohradě byla poznamenána zrakovými problémy. Podle [51] Euler ve své autobiografii tvrdí, že jeho zrakové problémy začaly v roce 1738, a to díky vyčerpanosti z namáhavé kartografické práce. V roce 1740 Euler na jedno oko oslepl. V roce 1771 byl operován na oční zákal, nicméně ani tento zásah příliš jeho zrak nezlepšil a krátce nato Euler oslepl úplně. Přesto se ve své práci Euler nezastavil. Naopak, „pochvaloval si“, že teprve nyní se může díky své slepotě plně soustředit na práci. Jeho vynikající paměť mu umožňovala provádět dlouhé výpočty zpaměti a skoro polovina jeho publikací pochází z období úplné slepoty. S přípravou publikací mu v té době pomáhala řada asistentů, např. syn Johann Albrecht Euler (1734 – 1800), Anders Johann Lexell (1740 – 1784), Nikolaus Fuss (1755 – 1826) a řada dalších. Právě od Fusse, který byl manželem Eulerovy vnučky, pochází mnoho životopisných údajů o Eulerovi. Euler zemřel dne 18. září 1783.

Eulerův odkaz představuje úctyhodný výkon. Publikoval velké množství prací, podle některých pramenů [8]) je celkový počet jeho děl a prací roven číslu 886. Většina jeho publikací přinesla významné objevy spadající do všech odvětvích matematiky, přičemž některé obory sám svými výzkumy založil. Kromě množství článků napsal řadu knih, které se staly prototypem úspěšných matematických učebnic. Jmenujme např. *Methodus inveniendi* (Variační počet)

---

[6]) Viz [2], str. 460 – 461.

[7]) Viz [3], str. 126.

[8]) Viz např. [40], str. 50.

(1744), *Introductio in analysin infinitorum* (Úvod do analýzy nekonečně malých veličin) (1748), *Institutiones calculi differentialis* (Základy diferenciálního počtu) (1755), *Institutiones calculi integralis* (Základy integrálního počtu) (1768 - 1770), *Anleitung zur Algebra* (Úvod do algebry) (1770). Zde jsou uvedeny pouze nejvýznamnější učebnice matematiky. Kromě toho vydal řadu knih věnovaných např. optice, hydrodynamice, mechanice, atd. Euler se též snažil popularizovat vědecké poznatky široké veřejnosti. Příkladem může být dvousvazková kniha *Lettres à une princess d'Allemagne sur divers sujets de physique & de philosophie* (Dopisy německé princezně) (1768). Eulerovy učebnice měly takovou autoritu, že pomohly ustálit značení v mnoha matematických disciplínách. Od Eulera pocházejí symboly $f(x)$, π, i, e, a další[9]). Eulerovu reputaci dobře vystihuje výrok francouzského akademika FRANÇOISE ARAGA (1786 –1853):

> *Euler byl schopen počítat bez jakékoli viditelné námahy, asi jako jiní lidé dýchají nebo jako se orel vznáší ve vzduchu.*

7.4 Karl Friedrich Gauss (1777 – 1855)

Gauss se narodil 30. 4. 1777 v Braunschweigu. Rodiče byli málo zámožní, jeho otec provozoval různé živnosti; byl zedník, zahradník, účetní pohřebního spolku – tehdejší pojišťovny, atd. Karl Friedrich pocházel z otcova druhého manželství. Již v raném dětství projevoval značné nadání. Philip Lenard v knize [30] o Gaussovi uvádí:

> (...) *časně doma a později ve škole jevil malý Gauss známky neobyčejného nadání; čtení se naučil tím, že se vyptával, jak se které písmeno vyslovuje, a ještě dříve budilo údiv jeho počítání zpaměti, jemuž ho nikdo neučil.*

Gaussův nepřehlédnutelný talent způsobil, že byl v roce 1791 jako čtrnáctiletý hoch představen vévodovi z Braunschweigu Karlu Wilhelmu Ferdinandovi, který pak až do své smrti v roce 1806 Gaussovi vyplácel stipendium. To umožnilo Gaussovi, aby se stal finančně nezávislým a mohl se věnovat pouze studiu a vědecké práci. V letech 1792 – 95 studoval na Collegiu Carolinum v Braunschweigu, což byl technicky orientovaný ústav, z něhož později vznikla vysoká škola technická. Na této škole prostudoval dvě významné knihy: Newtonovu *Philosophiae naturalis principia mathematica* (Matematické základy přírodní filozofie) (1687) a *Ars Conjectandi* (Umění předpovídat) (1713) od Jacoba Bernoulliho. Od roku 1796 studoval na univerzitě v Göttingen. V roce 1998 opustil bez diplomu Göttingen a vrátil se do Braunschweigu. Na přání vévody z Braunschweigu předložil na univerzitě v Helmstedtu disertaci, v níž poprvé dokázal bez logických skoků základní větu algebry o tom, že každá algebraická rovnice má alespoň jeden kořen. Za tuto práci získal bez dalších zkoušek titul doktora filozofie. Dodejme jen, že sám Gauss nebyl s důkazem základní věty algebry zcela spokojen a publikoval ještě další tři důkazy věty.

Vědeckou proslulost získal Gauss v roce 1801 za publikace svých objevů v oblasti teorie čísel a astronomie. Z Petrohradu obdržel nabídku, aby se stal ředitelem místní hvězdárny. Gauss si však cenil své nezávislosti a místo odmítl, což si mohl dovolit díky rentě od brunšvického vévody. V roce 1805 se oženil s dcerou brunšvického koželuha Johannou Asthoffovou a v roce 1806 se jim narodil syn Joseph. V témže roce však brunšvický vévoda přišel v bitvě u Jeny o život a Gauss

[9]) Viz [53].

tak přišel o materiální podporu, kterou mu vévoda poskytoval. Z toho důvodu přijal pozvání, aby na univerzitě v Göttingenu zastával místo profesora matematiky. Současně se stal ředitelem rozestavěné göttingenské hvězdárny, zde pracoval až do své smrti. V roce 1808 se manželům Gaussovým narodila dcera Minna. Od roku 1809 však Gausse začaly stíhat životní pohromy. Při porodu syna Ludwiga zemřela Gaussova žena Johanna. O půl roku později zemřel i Ludwig. V roce 1810 se oženil podruhé, a to s přítelkyní své bývalé ženy, dcerou profesora práv Minnou Waldeckovou. Toto manželství vydrželo do roku 1831, kdy Gaussova druhá žena zemřela na plicní tuberkulózu. Z tohoto manželství se narodily tři děti: Eugen, Wilhelm a Thereza. Gauss pracoval intenzivně až do vysokého věku, zemřel ve spánku 23. února 1855 ve věku 77 let.

Zkusme načrtnout alespoň hrubý obrys vědecké práce, kterou po sobě Gauss zanechal. Pozdější generace nazývaly Gausse *knížetem matematiků*. Jeho současníci v něm viděli „muže, před nímž nemá matematika tajemství“. S jistou nadsázkou můžeme říci, že tvořivý vědecký přístup prokázal již jako chlapec ve známé příhodě se součtem prvního sta přirozených čísel. První skutečně vědeckou práci publikoval v roce 1796. Tato práce byla věnována euklidovské konstrukci pravidelného sedmnáctiúhelníku. Objev konstrukce sehrál významnou roli v jeho životě, neboť do té doby váhal mezi studiem matematiky a filozofie. Svého objevu si musel velice vážit, neboť na sklonku života projevil přání, aby pravidelný sedmnáctiúhelník zdobil jeho náhrobek. K tomuto objevu Gausse dovedly jeho mimořádné znalosti z teorie čísel a řešení algebraických rovnic. Ve stejné době objevil metodu nejmenších čtverců, kterou pak úspěšně využíval po celou svou profesní kariéru. V roce 1798 obhájil disertaci obsahující důkaz již zmíněné základní věty algebry. V roce 1801 vydal spis *Disquisitiones Arithmeticae* (Aritmetická bádání), ve kterém shrnul své poznatky z teorie čísel. Také díky této práci se pak teorie čísel stala samostatnou matematickou disciplínou.

V roce 1801 se středem Gaussova zájmu stala astronomie, a to v souvislosti s určením trajektorií planetek. V té době totiž italský astronom G. Piazze pozoroval planetku Ceres a určil její polohu ve třech po sobě jdoucích pozorováních – 2. a 22. ledna a 11. února 1801. Poté se planetka astronomům „ztratila“, neboť dospěla do blízkosti Slunce. Gauss dokázal díky metodě nejmenších čtverců vypočítat dráhu planetky a podle jeho údajů pak tato byla skutečně dne 7. prosince 1801 znovu objevena. Tento zdařilý výpočet z velmi krátké pozorovatelné dráhy byl považován za velký triumf newtonovské fyziky i samotného Gausse. Krátce nato v roce 1802 Gauss znovu použil svou metodu při výpočtu trajektorie dráhy nově objevené planetky Pallas. Své výsledky o výpočtech drah nebeských těles Gauss v roce 1809 shrnul v práci *Theoria motus corporum coelestium* (Teorie pohybu nebeských těles). V letech 1816 – 1818 vycházely jeho práce věnované teorii chyb a přibližným výpočtům, inspirované právě výpočty drah nebeských těles. Po roce 1817 se Gauss ve své práci odklonil od astronomie ke geodézii. V letech 1821 až 1825 vedl geodetické vyměřování hannoverského království. Po návštěvě sjezdu německých přírodovědců a lékařů v roce 1828 se předmět jeho zájmu opět změnil a Gauss se začal zabývat dalšími fyzikálními problémy. Spolu s mladým fyzikem Wilhelmem Weberem (1804 – 1891) pátrali po příčinách zemského magnetismu. Během tohoto bádání vypracovali nové postupy, předložili absolutní fyzikální soustavu měr CGS a vytvořili obecný pojem potenciálu. Gauss se stal organizátorem magnetických měření, která probíhala po celém světě a vyústila do vytvoření atlasu zemského magnetismu.

Kromě vyjmenovaných fyzikálních problémů se Gauss i nadále věnoval matematice. V roce 1831 navrhl pod vlivem svých geodetických výzkumů znázornění komplexních čísel v rovině. Toto zobrazení dnes na jeho počest nazýváme Gaussova rovina. Poznamenejme, že právě toto znázornění spolu s Gaussovou autoritou zbavilo komplexní čísla nádechu jakési mystiky a umožnilo jejich plné přijetí. Gauss byl zřejmě také prvním matematikem, který si uvědomil existenci neeukleidovských geometrií. I když o svých objevech v tomto oboru nepublikoval žádné práce, přesto je z jeho korespondence se spolužákem z göttingenské univerzity FARKASEM BOLYAIEM (1775 – 1856) zřejmé, že si byl vědom bezespornosti těchto geometrických systémů [10]).

Na konec této části uvedu citát z knihy [30], jenž popisuje Gaussovy názory na způsob vědeckého myšlení:

> (...) *Gauss, vynikající matematik, považoval analytické počítání – jakkoli v něm byl velikým mistrem – jen za pomocný prostředek k bezvadnému, bezpečnému provedení práce již předem prostým způsobem vykonané v myšlenkách, takže nikdy nebral vůbec do ruky pero k počítání, pokud úloha jím předem nebyla úplně uznána za řešitelnou. To, co se nyní na školách čím dále více učí jako přírodní vědy, je právě to, co Gaussovi – a tím spíše těm, kteří byli ještě více přírodozpytci – bylo pouhým prostředkem, pouhou vedlejší věcí: matematickou technikou. Fyzika takovýmto způsobem přednášená není cvičením zdravého prostého myšlení tváří v tvář jevům přírodním,* (...) *nýbrž pouze cvičištěm pro počtářskou techniku, zábavičku to malých duchů.*

7.5 Karl Weierstrass (1815 – 1897)

Karl Weierstrass se narodil 31. října 1815 v Ostenfelde v Pruské provincii Vestfálsko. Jeho otec, povoláním celník, byl velmi vzdělaný muž se zájmem o vědu a umění. Díky otcovu povolání byla Weierstrassova rodina nucena neustále měnit své bydliště a to až do roku 1829, kdy otec získal stálé místo na berním úřadě v Paderbornu. Zde Karl Weierstrass začal navštěvovat katolické gymnázium. Během studia vynikal nejen v matematice, ale také v němčině, latině a řečtině. V roce 1834 vstoupil na univerzitu v Bonnu, kde na otcovo přání začal studovat práva, finance a ekonomii. Ovšem daleko více ho lákala matematika, což vedlo k roztržce s otcem. V reakci na to začal studium na univerzitě zanedbávat. Věnoval se zábavě a četbě matematických učebnic. V té době přečetl např. Laplaceovu knihu *Traité de Mécanique Céleste* (Nebeská mechanika) (1799) a Jacobiho práce o eliptických funkcích. V roce 1838 neúspěšně ukončil studium na univerzitě. V květnu 1839 nastoupil na Akademii v Münsteru. Zde navštěvoval hlavně Gudermannovy přednášky o eliptických funkcích. Sám Gudermann povzbuzoval Weierstrasse v jeho studiu matematiky. V roce 1841 složil učitelské zkoušky a v letech 1842 – 1855 učil na gymnáziu v Münsteru. K získání učitelské způsobilosti podal v roce 1841 práci s názvem *Über die Entwicklung der Modular-Functionen* (O rozvoji modulárních funkcí). Již tato práce měla vědecký charakter. Po dobu svého působení na gymnáziu Weierstrass vědecky pracoval hlavně v oboru teorie funkcí komplexní proměnné. V roce 1854 publikoval v Crelleově žurnálu práci s názvem *Zur Theorie der Abel'schen Functionen* (K teorii Abelových funkcí). Na základě této práce získal v březnu 1854 čestný doktorát na univerzitě v Königsbergu. Poté využil roční dovolenou na doplnění svých matematických znalostí. Během této doby usilovně pracoval na doplnění teorie zveřejněné v článku z roku 1854 a v roce 1856 vydal v Crelleově žurnálu článek s názvem *Theorie der Abel'schen Functionen* (Teorie Abelovských funkcí). Díky této práci byl povolán na berlínskou univerzitu jako mimořádný profesor. Kromě toho ještě působil jako učitel na

[10]) Poutavé čtení, i když s jistou literární nadsázkou, o vztahu Gausse k neekleidovským geometriím lze nalézt v dodatku *Trýznivé tajemství* ke knize [47].

berlínské průmyslové akademii (pozdější technické vysoké škole). V roce 1864 se stal řádným profesorem na berlínské univerzitě. Zemřel v Berlíně dne 17.2.1897.

Weierstrasse lze zcela oprávněně považovat za otce moderní analýzy. Byl pověstný svou pečlivostí, která se projevila i v jeho matematickém díle. Weierstrassovi vděčíme za zpřesnění základních matematických pojmů. Díky němu a jeho žákům vynikla důležitost stejnoměrné konvergence. Zasloužil se o rozvoj teorie funkcí pomocí mocninných řad. Zabýval se teorií eliptických funkcí a Abelovských funkcí. Je znám svým příkladem spojité, nikde nediferencovatelné funkce. Nelze také nezmínit Weierstrassovu definici limity funkce za použití veličin ε, δ. Weierstrass měl velký vliv jako učitel. Jeho přednášky byly vyhledávané a Weierstrass sám byl školitelem mnoha dalších matematiků. Mezi jeho žáky např. patřili Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845 – 1918), Ferdinand Georg Frobenius (1849 – 1917), Otto Ludwig Hölder (1859 – 1937), Adolf Hurwitz (1859 – 1919), Matyáš Lerch (1860 – 1922), Magnus Gösta Mittag-Leffler (1846 – 1927), Hermann Amandus Schwarz (1843 – 1921) a další.

Kapitola 8

Zdroje na internetu

Některé zahraniční univerzity přikročily k digitalizaci tisků, na které se již nevztahují autorská práva, a k jejich publikaci na internetu. Díky tomu je možné čerpat informace ze zdrojů, které by jinak byly hůře dostupné. Při tvorbě disertační práce jsem potřeboval přístup zejména k těm pracím, které napsali Leonhard Euler, Karl Friedrich Gauss a Karl Weierstrass. Mnohé z díla Leonharda Eulera lze získat na stránkách

`http://www.math.dartmouth.edu/~euler/.`

Na této adrese může čtenář vyhledávat Eulerovy články řazené podle tématického zařazení (matematika, fyzika, astronomie, mechanika, ostatní), data napsání, resp. data vydání. Dále pak lze vyhledávat jednotlivé články podle místa vydání, nebo podle Enestromského indexu. Cennou součástí stránek jsou překlady 67 článků do angličtiny.

Dalším možným zdrojem článků Leonharda Eulera jsou stránky

`http://gallica.bnf.fr/.`

Na této adrese lze získat Eulerovy publikace v čitelnější podobě než z předchozího odkazu, nicméně není zde tak jasná struktura stránek, jako v předchozím případě. Podle vzhledu uvedených dokumentů soudím, že se jedná o shodné vydání díla *Opera Omnia* s tím, které se dříve nacházelo v knihovně MFF [1]) a bylo zničeno během povodní v roce 2002.

Gaussovu knihu [17] jsem získal na stránkách

`http://gdz.sub.uni-goettingen.de/en/index.html.`

Tyto stránky spravuje *Göttinger Digitalisierungs Zentrum*, což je pracoviště Univerzity v Göttingen, které má na starosti digitalizaci archivních materiálů (nejen) z oblasti matematiky. Německý překlad knihy [18] jsem získal meziknihovní výpůjční službou.

Weierstrassovy články [48] a [49] jsem našel na stránkách *University of Michigan Historical Mathematics Collection.* Toto je neustále doplňovaná sbírka matematických

[1]) V tzv. profesorské čítárně.

prací z období 19. a počátku 20. století. Navíc, kromě tištěných matematických prací je zde uvedena i jedna „hudební práce o matematice“. Tuto kolekci je možné nalézt na adrese

`http://www.hti.umich.edu/u/umhistmath/.`

Z těchto stránek je možné se „proklikat“ na příslušné Weierstrassovy texty.

Mnohé učebnice, ze kterých jsem čerpal poučení (např. [19]), se nacházejí na stránkách *Cornell University Library: Historical Mathematics Monographs* s adresou

`http://historical.library.cornell.edu/math/.`

Nejužitečnější odkaz podle mého názoru představují stránky *Digital Mathematics Library* na adrese

`http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~rehmann/DML/.`

Na zdejších stránkách je možné vyhledávat publikace buď podle jména publikace nebo autora. Odkazy pak vedou na již výše uvedené adresy, takže tyto stránky představují jakýsi souhrnný katalog stránek s digitalizovanými matematickými texty.

Literatura

[1] Artin, E.: *Einführung in die Theorie der Gammafunktion.* Teubner, Leipzig 1931.

[2] Bašmaková, I. G., Juškevič, A. P.: *Leonhard Euler.* Istoriko-matematičeskie issledovania VII, GIFML, Moskva 1954, 453-512.

[3] Beckmann, P.: *Historie čísla π.* Academia, Praha 1998.

[4] Bečvář, J.: *Hrdinský věk řecké matematiky.* Historie matematiky I, Prometheus, Praha 1993.

[5] Bečvář, J.: *Algebra v 16. a 17. století. Matematika v 16. a 17. století.* Dějiny matematiky, sv. 12. Prometheus, Praha 1999.

[6] Bottazzini, U.: *„Algebraic truths" vs „geometric fantasies". Weierstrass response to Riemann.* Proceedings of the ICM, Beijing 2002, Vol. 3, str. 923–934.

[7] Bottazzini, U.: *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass.* Springer, Berlin, Heidelberg 1986.

[8] Budinský, B. Charvát, J.: *Matematika I.* SNTL, Praha 1987.

[9] Cauchy, L.A.: *Usage du calcul des résidus pour l'evaluation ou la transformation des produits cheposes d'un nombre fini ou infini de factoreurs.* Exercices de Mathématiques. 1829.

[10] Davis, P. J.: *Leonhard Euler's integral: A historical profile of the Gamma function.* American Mathematical Monthly, Vol. 66, No. 10 (Prosinec, 1959), str. 849-869.

[11] Edwards, C. H. Jr.: *The historical development of the calculus.* Springer, New York 1979.

[12] Euler, L.: *De summis serierum reciprocarum.* Opera Omnia, Ser. 1, vol. 14, Leipzig 1925.

[13] Euler, L.: *Vvěděnije v analiz bezkoněčnych.* Tom I., vyd. 2., GIFML, Moskva 1961 (ruský překlad latinského díla „Introductio in analysin infinitorum", 1748).

[14] Euler, L.: *De progressionibus transcendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt.* Opera Omnia, Ser. 1, Vol. 14, Leipzig 1925.

[15] Euler, L.: *On transcendental progressions that is, those whose general terms cannot be given algebraically.* Překlad [14] z latiny S. G. Langton, University of San Diego, 1999.

[16] Folta, J., Neužilová, L.: *Leonhard Euler - tvůrce nových matematických disciplín a analytické mechaniky.* VTM 4 (1997), str. 5.

[17] Gauss, C. F.:*Disquisitiones Generales Circa seriem infinitam*

$$1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}xx+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+etc.$$

Werke, Göttingen 1812.

[18] Gauss, C.F.: *Allgemeine Untersuchungen über die unendliche Reihe*

$$1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}xx+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\dots.$$

Springer, Berlin 1888.

[19] Hancock, H.: *Theory of Elliptic Functions.* Chapman a Hall, London 1910.

[20] Harenberg, B.(ed.): *Kronika lidstva.* Fortuna Print, Praha 2003.

[21] Hellman, H.: *Velké spory na poli vědy.* Hel, Ostrava 2000.

[22] Jarník, V.: *Diferenciální počet II.* Academia, Praha 1984.

[23] Jarník, V.: *Integrální počet I.* Academia, Praha 1984.

[24] Jarník, V.: *Integrální počet II.* Academia, Praha 1984.

[25] Jarník, V.: *Über Umordnung unendlichen Reihen.* Věstník Král. Čes. Spol. Nauk, 1927.

[26] Kline, M.: *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* Oxford University Press, New York 1972.

[27] Kopáčková, A.: *Fylogeneze pojmu funkce.* Matematika v proměnnách věků II, Prometheus, Praha 2001.

[28] Lavičková, M.: *Carl Friedrich Gauss.* Přemožitelé času 5, Vydavatelství a nakladatelství Mezinárodní organizace Novinářů, Praha 1988.

[29] Legendre, A. M.: *Memoires de la classe des sciences mathematiques et physiques de l'Institut de France.* Paris 1809, str. 477–490.

[30] Lenard, P.: *Velcí přírodozpytci.* Orbis, Praha 1943.

[31] Markuševič, A.I.: *Očerky po istorii analitičeskych funkcij.* Gosudarstvěnoje Izdavatělstvo Techniko-Teoretičeskoj Literatury, Moskva 1951.

[32] Maurois, A.: *Dějiny Francie.* Nakladatelství Lidové Noviny, Praha 1994.

[33] Papanikolaou, T.: *Entwurf und Entwicklung einer objektorientierten Bibliothek für algorithmische Zahlentheorie.* Dizertační práce. Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät der Universität des Saarlandes, Saarbrücken 1997.

[34] Poorten, A. van der: *A proof that Euler missed . . . Apéry's proof of the irrationality of* $\zeta(3)$. Mathematical Intelligencer, (1979), vol. 1, str. 195–203.

[35] Rektorys, K.: *Přehled užité matematiky.* SNTL, Praha 1973.

[36] Remmert, R.: *Classical topics in complex function theory.* Springer, New York 1998.

[37] Remmert, R.: *Wielandt's Theorem About the* Γ*-function.* American Mathematical Monthly, Vol. 103, No. 3 (Březen, 1996), str. 214–220.

[38] Rivoal, T.: *La fonction Zeta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs.* C. R. Acad. Sci., (2000), Vol. 331, str. 267–270.

[39] Rudin, W.: *Analýza v reálném a komplexním oboru.* Academia, Praha 2003.

[40] Schwabik, Š., Šarmanová, P.: *Malý průvodce historií integrálu.* Prometheus, Praha 1996.

[41] Schwabik, Š.: *Několik postřehů k vývoji matematické analýzy v 19. století.* Matematika v 19. století, Prometheus, Praha 1996.

[42] Trojovský, P.: *Číselné řady u Bernoulliů.* Matematika v proměnách věků I, Prometheus, Praha 1998.

[43] Trojovský, P.: *Kořeny a vývoj pojmu konvergentní číselná řada.* Člověk – Umění – Matematika. Dějiny matematiky, svazek 4. Prometheus, Praha 1996.

[44] Veselý, J.: *Poznámky k historii funkce gama.* Člověk – Umění – Matematika, Prometheus, Praha 1996.

[45] Veselý, J.: *Matematická analýza pro učitele.* MatFyzPress, Praha 2001.

[46] Veselý, J.: *Komplexní analýza pro učitele.* Karolinum, Praha 2002.

[47] Vopěnka, P.: *Čtvrté rozpravy s geometrií.* Vesmír, Praha 1995.

[48] Weierstrass, K.: *Zur theorie der eindeutigen analytischen functionen.* Werke, Gottingen 1876.

[49] Weierstrass, K.: *Über die Theorie der analytischen Facultäten.* Werke, Gottingen 1854.

[50] Zudilin, W.: *Arithmetic of linear forms involving odd zeta values.* Théorie Nombres Bordeaux, (2004), vol. 16, str. 251–291.

[51] http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/∼ history/Mathematicians/Euler.html

[52] http://gdz.sub.uni-goettingen.de/en/index.html

[53] *Encyklopedická edice LISTY* (1). Encyklopedický dům, Praha 1997.