Univerzita Karlova v Praze, Filozofická fakulta
Katedra logiky

František Havlík

ORTOKOMPLEMENTÁRNÍ DIFERENČNÍ SVAZY
ORTHOCOMPLEMENTED DIFFERENCE LATTICES

Diplomová práce

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Pavel Pták, DrSc.

2007

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl všechny použité prameny a literaturu.

V Praze 20. srpna 2007

František Havlík

Poděkování

Rád bych na tomto místě poděkoval všem, kteří mě ve psaní práce podporovali, především Prof. RNDr. Pavlu Ptákovi, DrSc. a RNDr. Milanu Matouškovi za metodické vedení i za čas, který mi věnovali při konzultacích.

Abstrakt

Tématem této diplomové práce je studium binárního operátoru $\triangle$, který modeluje standardní symetrickou diferenci množin. Tento operátor je studován jednak samostatně (v kapitole II), jednak s doplňující svazovou strukturou (kapitola III a následující). Je zavedena třída $\mathcal{ODL}$ a jsou prozkoumány některé její základní vlastnosti. Dále je ukázána třída $\mathcal{HOR}$, která je podtřídou třídy $\mathcal{ODL}$ a má úzký vztah ke třídě Booleových algeber. V poslední kapitole je popsána konstrukce volného ortokomplementárního diferenčního svazu se dvěma generátory.

Abstract

The theme of this thesis is the investigation of a binary operator, $\triangle$, that models the standard symmetric difference of sets. This operator is studied both separately (in Chapter II) and with the supplementary lattice structure (Chapter III and the rest). The class $\mathcal{ODL}$ is introduced and some of its basic properties are investigated. Then there is exhibited the class $\mathcal{HOR}$. The class $\mathcal{HOR}$ is a subclass of $\mathcal{ODL}$ which is closely related to the class of Boolean algebras. In the last Chapter there is described the construction of free orthocomplemented difference lattice with two generators.

Obsah

1. Základní pojmy

1.1. Označení

Abychom se vyhnuli kolizi označení se symboly $\wedge$, $\vee$, budeme pro logické spojky "a", resp. "nebo" používat označení ".a.", resp. ".nebo." . Pro implikaci a ekvivalenci budeme samozřejmě moci užívat standardní symboly $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$.

Jsou-li X, Y množiny, pak zápis $X \subset Y$ znamená $X \subseteq Y$ .a. $X \neq Y$. Je-li $f : X \to Y$, $S \subseteq X$, pak $f[S] = \{f(x);\ x \in S\}$. Mohutnost množiny X budeme značit $|X|$.

Je-li A algebra signatury $\mathcal{L}$, pak její nosnou množinu budeme značit $\dot{A}$. Nebude-li moci dojít k nedorozumění, pak místo $x \in \dot{A}$, resp. $X \subseteq \dot{A}$ budeme psát jen $x \in A$, resp. $X \subseteq A$. Místo $|\dot{A}|$ budeme psát jen $|A|$. Algebra A se nazývá *triviální*, jestliže $|A| = 1$, *netriviální* pokud $|A| \geq 2$. Termín "triviální" pak budeme užívat i ve spojení s konkrétními třídami algeber. Tedy např. B je *triviální Booleova algebra*, pokud $|B| = 1$.

Je-li $F \in \mathcal{L}$ operační symbol, pak v případě, že by mohlo dojít k nedorozumění, budeme příslušnou n-ární operaci algebry A značit F_A.

Pomocí $\mathrm{Sub}(A)$ budeme značit množinu všech podalgeber algebry A. Jsou-li A, B izomorfní algebry téže signatury, budeme psát $A \cong B$. Zápis $f : A \cong B$ znamená, že zobrazení f je izomorfismem algebry A na algebru B.

1.2. Univerzální algebra

V této podkapitole si představíme některé základní pojmy z univerzální algebry (a z teorie modelů), ke kterým pak budu odkazovat na různých dalších místech práce. Omezím se pouze na znění vět a definic, místo důkazu pak bude zpravidla uveden odkaz na příslušnou literaturu.

Definice 1.1. *Teorií* rozumíme každou dvojici $\mathcal{T} = \langle \mathcal{L}, T \rangle$, kde $\mathcal{L}$ je jazyk a T je množina formulí v jazyce $\mathcal{L}$.

Definice 1.2. Řekneme, že teorie $\mathcal{T}$ je *kategorická v mohutnosti* κ nebo že je κ*-kategorická* (kde κ je nějaké kardinální číslo), jestliže všechny modely teorie $\mathcal{T}$ mohutnosti κ jsou izomorfní. Teorii označíme jako *kategorickou*, jestliže je kategorická v každé mohutnosti (tj. je κ-kategorická pro každé kardinální číslo κ).

Označení 1.3. Je-li dána teorie $\mathcal{T} = \langle \mathcal{L}, T \rangle$, pak třídu jejích modelů budeme značit $\mathrm{Mod}(\mathcal{T})$. Nebude-li moci dojít k nedorozumění, budeme používat jen označení $\mathrm{Mod}(T)$.

Je-li K třída $\mathcal{L}$-struktur, označme $\mathrm{Th}(K)$ množinu všech $\mathcal{L}$-formulí, jež platí v každé struktuře ze třídy K.

Definice 1.4. Buď K třída struktur v jazyce $\mathcal{L}$. Řekneme, že K je *axiomatizovatelná třída*, existuje-li teorie $\langle \mathcal{L}, T \rangle$ taková, že $K = \mathrm{Mod}(T)$.

Definice 1.5. Buď K třída $\mathcal{L}$-struktur. Řekneme, že K je *varieta* ($\mathcal{L}$-struktur), existuje-li množina Φ atomických $\mathcal{L}$-formulí tak, že $K = \mathrm{Mod}(\Phi)$.

Definice 1.6. Řekneme, že varieta K je *konečně bazírovaná* , existuje-li konečná množina identit E tak, že $K = \mathrm{Mod}(E)$.

Definice 1.7. *Kvaziidentitou* se nazývá každá formule tvaru

τ_1 .a. ... .a. $\tau_n \Rightarrow \tau$

kde $n \geq 0$ a každá z formulí $\tau_1, ..., \tau_n, \tau$ je atomická. Pokud $n = 0$, chápeme celý výše uvedený výraz jako atomickou formuli τ, tedy každou atomickou formuli považujeme rovněž za kvaziidentitu.

Definice 1.8. Buď K třída $\mathcal{L}$-struktur. Řekneme, že K je *kvazivarieta* ($\mathcal{L}$-struktur), existuje-li množina $\mathcal{L}$-kvaziidentit T taková, že $K = \mathrm{Mod}(T)$.

Nyní si uvedeme ještě charakterizační věty pro variety (a kvazivariety), jejichž důkazy může čtenář nalézt například v kapitole o axiomatizovatelnosti [17] či na straně 83 knihy [6]. Předtím ale několik nezbytných definic:

Definice 1.9. Buď φ formule. Řekneme, že φ je *univerzální formule*, jestliže $\varphi = \forall x_1 ... \forall x_n \psi$, kde ψ je otevřená (tj. bezkvantifikátorová) formule, $n \geq 0$.

Definice 1.10. *Buď K třída $\mathcal{L}$-struktur. Řekneme, že K je* univerzální třída*, existuje-li množina otevřených $\mathcal{L}$-formulí T taková, že $K = \mathrm{Mod}(T)$.*

Věta 1.11. *Nechť K je třída $\mathcal{L}$-struktur. Pak K je kvazivarieta právě tehdy, když je univerzální a uzavřená na kartézské součiny konečných souborů svých prvků.*

Důkaz Viz [17], podkapitola 11.4. □

Věta 1.12. *Nechť $K \neq \emptyset$ je třída $\mathcal{L}$-struktur. Pak K je varieta právě tehdy, když K je uzavřena na homomorfní obrazy, podstruktury a kartézské součiny.*

Důkaz Viz [17], podkapitola 11.5. □

1.3. Teorie grup

V této podkapitole se seznámíme s několika výsledky z teorie grup, které pak použijeme v části věnované diferenčním algebrám. Zájemce o bližší seznámení s touto látkou odkazuji především na knihu [14].

Definice 1.13. *Grupou* budeme nazývat algebru $G = (\dot{G}, +, -, 0)$, která splňuje následující podmínky:
(G_1) Operace $+$ je asociativní, tj. $a + (b + c) = (a + b) + c$ pro všechna $a, b, c \in \dot{G}$.
(G_2) Existuje prvek $0 \in \dot{G}$ takový, že $a + 0 = a = 0 + a$ pro všechna $a \in \dot{G}$, tento prvek se nazývá *neutrální*.
(G_3) Ke každému prvku $a \in \dot{G}$ existuje prvek $-a \in \dot{G}$ takový, že $a + (-a) = (-a) + a = 0$. Tento prvek se nazývá prvek *inverzní* k prvku a.

Jestliže navíc platí $a + b = b + a$ pro všechna $a, b \in \dot{G}$, mluvíme o *Abelově* grupě.

Výše uvedený zápis se zpravidla používá pro *aditivní* grupu – pro jazyk $L = (+, -, 0)$. Pokud bychom operace označili symboly $L = (\cdot, {}^{-1}, 1)$, hovoří se obvykle o tzv. *multiplikativních* grupách. Protože je rozdíl čistě formální, budeme používat vždy zápis, který je v dané situaci výhodnější. V této podkapitole tedy zvolíme úspornější multiplikativní zápis, v části věnované diferenčním algebrám se ukáží výhody aditivního zápisu.

Označení 1.14. *Buď G grupa, $\emptyset \neq X, Y \subseteq \dot{G}$. Pak označme $XY = \{xy; x \in X, y \in Y\}$. Je-li $g \in G$, pak místo $\{g\}X$ budeme psát pouze gX, místo $X\{g\}$ pak Xg.*

Lemma 1.15. *Nechť H je podgrupa grupy G. Pak systém množin $\{gH; g \in G\}$ je rozklad množiny $\dot{G}$.*

Důkaz Každá množina gH je neprázdná, protože $g \in gH$. Nechť jsou nyní $g_1, g_2 \in G$ a nechť $g_1H \cap g_2H \neq \emptyset$. Buď $g \in g_1H \cap g_2H$. Pak existují prvky $h_1, h_2 \in H$ takové, že $g = g_1h_1$, resp. $g = g_2h_2$. Tedy $g_1h_1 = g_2h_2$, tudíž ${g_1}^{-1}g_2 = h_1{h_2}^{-1} \in H$. Pak ale $g_2 \in g_1H$, a tedy $g_1H = g_2H$. Zbývá ukázat, že sjednocením všech množin $\{gH; g \in G\}$ je $\dot{G}$. To ale plyne z toho, že $g \in gH \subseteq G$. □

Definice 1.16. Buď H podgrupa grupy G. Pak systém množin $\{gH; g \in G\}$ nazveme *rozklad grupy G na levé třídy podle podgrupy H* a budeme jej značit $G/_lH$.

Analogicky, systém $G/_pH = \{Hg; g \in G\}$ se nazývá *rozklad grupy G na pravé třídy podle podgrupy H*. V souladu s úmluvou z úvodní podkapitoly budeme značit mohutnost systému množin $\{gH; g \in G\}$ symbolem $|G/_lH|$, obdobné označení $|G/_pH|$ použijeme pro mohutnost rozkladu grupy G na pravé třídy podle podgrupy H.

Lemma 1.17. *Nechť H je podgrupa grupy G. Pak $|G/_lH| = |G/_pH|$.*

Důkaz Definujme zobrazení $f : G/_lH \to G/_pH$ takto: $f(gH) = Hg^{-1}$. Toto zobrazení je definováno korektně a je to bijekce mezi $G/_lH$ a $G/_pH$. □

Definice 1.18. Nechť H je podgrupa grupy G. Označme

$$[G : H] = |G/_lH| = |G/_pH|.$$

Kardinální číslo $[G : H]$ se nazývá *index podgrupy H* v grupě G.

Lemma 1.19. *Nechť H je podgrupa grupy G, $g \in \dot{G}$. Pak platí:*

$$|gH| = |Hg| = |H|.$$

Důkaz Pro množinu $|gH|$ definujme zobrazení $l : H \to gH$ takto: $l(x) = gx$. Zobrazení l je bijekce $H \to gH$. Analogicky lze nadefinovat zobrazení $p : H \to Hg$ předpisem $p(x) = xg$. Zobrazení p je rovněž bijekce. □

Věta 1.20. (Lagrangeova) *Nechť H je podgrupa grupy G. Pak*

$$|G| = |H| \cdot [G : H].$$

Důkaz Množina $\dot{G}$ je disjunktně rozložena na levé třídy podle podgrupy H. Všechny tyto levé třídy mají dle předchozího Lemmatu mohutnost $|H|$, a jejich počet je $[G : H]$.

□

Důsledek 1.21. *Nechť G je konečná grupa. Pak řád (tj. počet prvků) každé podgrupy grupy G dělí řád grupy G.*

Na závěr podkapitoly uvedeme (již bez důkazu) ještě jeden výsledek převzatý z knihy [7], strana 40:

Věta 1.22. *Buď T teorie komutativních grup, jejichž každý prvek má řád p, kde $p > 1$ je prvočíslo. Pak každé dva modely teorie T téže mohutnosti jsou izomorfní.*

1.4. Ortomodulární svazy

Připomeňme si definici ortomodulárního svazu:

Definice 1.23. *Ortokomplementárním svazem* (zkráceně OCL) budeme nazývat algebru $L = (X, \wedge, \vee, ^{\perp}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ typu (2,2,1,0,0) takovou, že $(X, \wedge, \vee)$ je svaz a pro každé $x, y \in X$ platí:
(OC_1) $x \wedge x^{\perp} = \mathbf{0}$, $x \vee x^{\perp} = \mathbf{1}$,
(OC_2) $(x^{\perp})^{\perp} = x$
(OC_3) když $x \leq y$, pak $y^{\perp} \leq x^{\perp}$.
Pokud L splňuje navíc následující podmínku:
(OM_{def}) když $x \leq y$ a $y \wedge x^{\perp} = \mathbf{0}_L$, pak $x = y$,
pak se nazývá *ortomodulární svaz* (zkráceně OML).

Třídu všech ortokomplementárních svazů budeme značit $\mathcal{OCL}$, třídu všech ortomodulárních svazů $\mathcal{OML}$, třídu všech Booleových algeber $\mathcal{BA}$.

Tvrzení 1.24. *Nechť L je OCL. Pak L je OML právě tehdy, když je splněna následující odmínka (tzv. ortomodulární zákon) pro libovolné $x, y \in L$:*
(OM_{law}) když $x \leq y$, pak $y = x \vee (y \wedge x^{\perp})$

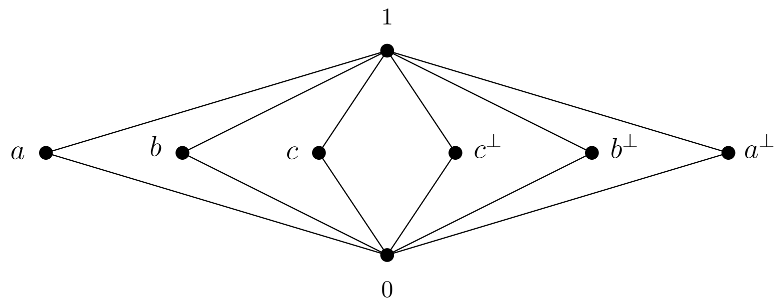
Důkaz Nechť L je OCL, buď $x, y \in L$, $x \leq y$. Nechť je splněna podmínka OM_{def}. Jelikož $x \leq y$, je i $x \vee (y \wedge x^{\perp}) \leq y$. Nyní $y \wedge (x \vee (y \wedge x^{\perp}))^{\perp} = y \wedge (x^{\perp} \wedge (y \wedge x^{\perp})^{\perp}) = y \wedge x^{\perp} \wedge (y \wedge x^{\perp})^{\perp} = \mathbf{0}$. Podle pomínky OM_{def} už musí platit $x \vee (y \wedge x^{\perp}) = y$.

Obráceně, nechť je splněna podmínka (OM_{law}), $x \leq y$, $y \wedge x^{\perp} = \mathbf{0}$. Pak $x \vee (y \wedge x^{\perp}) = x \vee \mathbf{0} = x$, tedy $x = y$. □

Definice 1.25. Buď L OML. Pro každý prvek $x \in L$ nazveme maximální Booleovu podalgebru ve svazu L obsahující prvek x *blok* v L. Systém všech bloků v L budeme značit $\mathrm{Bl}(L)$.

Je-li κ kardinál, pak označíme $\mathrm{Bl}_{\kappa}(L) = \{B \in \mathrm{Bl}(L);\ |B| \geq \kappa\}$.

Definice 1.26. Nechť L je OML a nechť $x, y \in L, x \leq y$. Označme $[x, y]_L = \{z \in L;\ z \leq y$ .a. $x \leq z\}$ *interval* v L. Speciálním často se vyskytujícím případem bude $[\mathbf{0}, x]_L = \{y \in L;\ y \leq x\}$.



Obrázek 1: Diagram svazu MO_3.

Představme si ještě jednu speciální třídu ortomodulárních svazů:

Definice 1.27. Buď κ kardinál. Označme MO_κ takový OCL L, který má $2 \cdot \kappa + 2$ prvků a pro každé dva prvky $x, y \in L$ různé od $\mathbf{0}, \mathbf{1}$ platí $x \wedge y = \mathbf{0}$, $x \vee y = \mathbf{1}$.

Tvrzení 1.28. *Je-li L MO_κ pro nějaké κ, pak je to OML.*

Důkaz Buďte $x, y \in L$, $x \leq y$. Pokud $x = y$, ortomodulární zákon samozřejmě platí. Buď tedy $x < y$. Pak musí být $x = \mathbf{0}$ nebo $y = \mathbf{1}$. Potom v prvním případě $y \wedge x^\perp = y = \mathbf{0}$, ve druhém $y \wedge x^\perp = x^\perp = \mathbf{0}$. V obou případech jsme dospěli ke sporu, a tedy $x = y$. $\square$

Na závěr této podkapitoly si ještě představíme metodu konstrukce ortokomplementárních (ale především ortomodulárních) svazů pomocí tzv. horizontální sumy. Ideou této konstrukce je jakési slepení daných ortokomplementárních svazů pomocí jejich nejmenších a největších prvků. Jelikož je tato metoda velmi často používaná, setkáme se s ní v každé knize věnované ortomodulárním svazům. Diagram na Obrázku 1 se dá také chápat jako horizontální suma tří čtyřprvkových BA.

Definice 1.29. Nechť I je neprázdná množina a nechť $K_i, i \in I$ jsou OCL takové, že $|K_i| > 2$ pro každé $i \in I$. Předpokládejme, že pro každé $i, j \in I$, $\mathbf{0}_{K_i} = \mathbf{0}_{K_j}$, $\mathbf{1}_{K_i} = \mathbf{1}_{K_j}$ a že žádný další společný prvek (kromě nejmenšího a největšího) algebry $K_i, i \in I$ nemají. Algebru M, kterou nazveme *horizontální sumou* $K_i, i \in I$ definujeme tak, že jejím nosičem bude sjednocení nosičů všech $K_i, i \in I$. Dále $\mathbf{0}_M = \mathbf{0}_{K_i}$, $\mathbf{1}_M = \mathbf{1}_{K_i}$ pro každé $i \in I$. Operace $\wedge_M, \vee_M, {}^{\perp}{}_M$ pak definujeme tak, aby množiny $K_i, i \in I$ byly poduniverza v M a pro $x \in K_i, i \in I$, $y \in K_j, j \in I$, $x \neq y$, x, y různé od $\mathbf{0}_{K_i}, \mathbf{1}_{K_i}$ resp. $\mathbf{0}_{K_j}, \mathbf{1}_{K_j}$ položme $x \wedge_M y = \mathbf{0}_M, x \vee_M y = \mathbf{1}_M$

Tvrzení 1.30. *Nechť I je indexová množina a nechť $K_i, i \in I$ jsou OML. Pak jejich horizontální suma (označme ji M) je též OML.*

Důkaz Buďte $x, y \in M$, $x \leq y$. Jelikož jsou prvky x, y srovnatelné, musí existovat $j \in I$ takové, že $x, y \in K_j$. Jelikož K_j je dle předpokladu OML, musí v něm platit ortomodulární zákon. $\square$

Zájemce o bližší seznámení s konstrukcí metodou horizontální sumy odkazuji na knihy [12] a [1]. Pro nás bude mít tato konstrukce zajímavé využití v kapitole věnované ortokomplementárním svazům se symetrickou diferencí, viz příslušná podkapitola.

1.5. Komutativita

Nyní si představíme dva druhy komutativity ve třídě ortokomplementárních svazů. Ukážeme, že pro třídu $\mathcal{OML}$ jsou spolu ekvivalentní.

Definice 1.31. Buď L OCL. Prvky $x, y \in L$ se nazývají *komutativní* (zkráceně $x\ C\ y$, nebo podrobněji $x\ C_L\ y$), jestliže $x = (x \wedge y) \vee (x \wedge y^{\perp})$. Pokud prvky x, y komutativní nejsou, budeme psát $x|y$ (nebo podrobněji $x|_L y$).

Tvrzení 1.32. *Buď L OCL, buďte $x, y \in L$.Prvek x komutuje s y právě tehdy, když komutuje s $y^{\perp}$.*

Důkaz Prvek x komutuje s y, jestliže (podle definice komutativity) $x = (x \wedge y) \vee (x \wedge y^{\perp})$. To je ale ekvivalentní s $x = (x \wedge (y^{\perp})^{\perp}) \vee (x \wedge y^{\perp})$, a tedy i $x\ C\ y^{\perp}$. $\square$

Tvrzení 1.33. *Buď L OCL, $x, y \in L$, $x \leq y$. Pak $x\ C\ y$.*

Důkaz Jelikož $x \leq y$, platí $x \wedge y = x$. Pak ale $(x \wedge y) \vee (x \wedge y^{\perp}) = x \vee (x \wedge y^{\perp}) = x$. $\square$

Definice 1.34. Buď L OCL. Prvky $x, y \in L$ se nazývají *booleovsky komutativní*, jestliže podalgebra algebry L generovaná prvky x, y je Booleova algebra.

Lemma 1.35. *Buď L OCL. Pak L je OML právě tehdy, když relace C je ve svazu L symetrická.*

Důkaz Nechť je L OML, $x, y \in L$, $x\ C\ y$, tedy $x = (x \wedge y) \vee (x \wedge y^{\perp})$. Máme ukázat, že $y = (y \wedge x) \vee (y \wedge x^{\perp})$. Vždy platí, že $y \geq (y \wedge x) \vee (y \wedge x^{\perp})$. Místo obrácené nerovnosti stačí ukázat, že $y \wedge [(y \wedge x) \vee (y \wedge x^{\perp})]^{\perp} = \mathbf{0}_L$. Nyní ale platí: $y \wedge [(y \wedge x) \vee (y \wedge x^{\perp})]^{\perp} = y \wedge [(y^{\perp} \vee x^{\perp}) \wedge (y^{\perp} \vee x)] = y \wedge (y^{\perp} \vee x^{\perp}) \wedge (y^{\perp} \vee [(x \wedge y) \vee (x \wedge y^{\perp})]) = y \wedge (y^{\perp} \vee x^{\perp}) \wedge (y^{\perp} \vee (x \wedge y)) = [y \wedge (y \wedge x)^{\perp}] \wedge [(y \wedge (x \wedge y)^{\perp})]^{\perp} = \mathbf{0}_L$.

Obráceně, nechť je relace C symetrická. Pak ukážeme, že v L platí ortomodulární zákon, tj. podmínka (OM_{law}): když $x \leq y$, pak $y = x \vee (y \wedge x^{\perp})$. Nechť $x \leq y$, pak dle Tvrzení 1.33 $x\ C\ y$. Tedy též $y\ C\ x$. Pak ale $y = (y \wedge x) \vee (y \wedge x^{\perp}) = x \vee (y \wedge x^{\perp})$. $\square$

Důsledek 1.36. *Buď L OML, $x, y \in L$. Pak $x\ C\ y$ právě tehdy, když $x = (x \vee y) \wedge (x \vee y^{\perp})$.*

Důkaz Platí: $x = (x \vee y) \wedge (x \vee y^{\perp}) \Leftrightarrow x^{\perp} = (x^{\perp} \wedge y^{\perp}) \vee (x^{\perp} \wedge y) \Leftrightarrow x^{\perp}\ C\ y \Leftrightarrow y\ C\ x^{\perp} \Leftrightarrow y\ C\ x \Leftrightarrow x\ C\ y$. $\square$

Definice 1.37. Buď L OML, $x, y \in L$. Označme $\varphi_x(y) = x \wedge (x^{\perp} \vee y)$. Prvek $\varphi_x(y)$ se nazývá *Sasakiho projekce prvku y na prvek x*.

Tvrzení 1.38. *Buď L OML, $x, y \in L$. Pak platí:*
$x\ C\ y$ právě tehdy, když $\varphi_x(y) = x \wedge y$.

Důkaz Nechť $x\ C\ y$. Chceme ukázat, že $x \wedge (x^\perp \vee y) = x \wedge y$. Vždy platí $x \wedge (x^\perp \vee y) \geq x \wedge y$; jelikož L je OML, stačí ukázat, že $x \wedge (x^\perp \vee y) \wedge (x \wedge y)^\perp = \mathbf{0}$. Platí $x \wedge (x^\perp \vee y) \wedge (x \wedge y)^\perp = x \wedge (x^\perp \vee y) \wedge (x^\perp \vee y^\perp) = x \wedge x^\perp = \mathbf{0}$, neboť $x^\perp\ C\ y$. Obráceně, nechť $\varphi_x(y) = x \wedge y$. Vždy $x \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge y^\perp)$. Nyní $x \wedge [(x \wedge y) \vee (x \wedge y^\perp)]^\perp) = x \wedge [(x \wedge y)^\perp \wedge (x^\perp \vee y)] = [x \wedge (x^\perp \vee y)] \wedge (x \wedge y)^\perp = \varphi_x(y) \wedge (x \wedge y)^\perp = (x \wedge y) \wedge (x \wedge y)^\perp = \mathbf{0}$. Protože L je OML, musí už platit $x = (x \wedge y) \vee (x \wedge y^\perp)$. □

Věta 1.39. (Foulisova-Hollandova) *Buďte x, y, z prvky ortomodulárního svazu L. Nechť alespoň jeden z nich komutuje se zbylými dvěma. Pak*
$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Důkaz Nejprve dokažme první rovnost. Vždy platí, že $x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$. Protože L je OML, stačí ukázat, že $x \wedge (y \vee z) \wedge [(x \wedge y) \vee (x \wedge z)]^\perp = \mathbf{0}$, tedy $x \wedge (y \vee z) \wedge (x^\perp \vee y^\perp) \wedge (x^\perp \vee z^\perp) = \mathbf{0}$. Rozlišme 2 případy:

(1) Nechť $x\ C\ y$, $x\ C\ z$. Pak platí $x \wedge (y \vee z) \wedge (x^\perp \vee y^\perp) \wedge (x^\perp \vee z^\perp) = [x \wedge (x^\perp \vee y^\perp)] \wedge [(y \vee z) \wedge (x^\perp \vee z^\perp)] = [x \wedge y^\perp] \wedge [(y \vee z) \wedge (x^\perp \vee z^\perp)] = [x \wedge (x^\perp \vee z^\perp)] \wedge (y \vee z) \wedge y^\perp = [x \wedge z^\perp] \wedge (y \vee z) \wedge y^\perp = (y^\perp \wedge z^\perp) \wedge (y \vee z) \wedge x = (y \vee z)^\perp \wedge (y \vee z) \wedge x = \mathbf{0}$.

(2) Nechť platí $y\ C\ x$, $y\ C\ z$ (případ, kdy $z\ C\ x$, $z\ C\ y$ je symetrický). Pak $x \wedge (y \vee z) \wedge (x^\perp \vee y^\perp) \wedge (x^\perp \vee z^\perp) = [x \wedge (x^\perp \vee y^\perp)] \wedge [(y \vee z) \wedge (x^\perp \vee z^\perp)] = [x \wedge y^\perp] \wedge [(y \vee z) \wedge (x^\perp \vee z^\perp)] = x \wedge [y^\perp \wedge (y \vee z)] \wedge (x^\perp \vee z^\perp) = x \wedge [y^\perp \wedge z] \wedge (x^\perp \vee z^\perp) = y^\perp \wedge (x \wedge z) \wedge (x \wedge z)^\perp = \mathbf{0}$.

V předchozích úvahách bylo využito Tvrzení 1.38 a symetričnost relace C v ortomodulárních svazech. K dokončení důkazu zbývá ukázat druhou rovnost:

Jestliže alespoň jeden z prvků x, y, z komutuje se zbylými dvěma, platí totéž i pro prvky $x^\perp, y^\perp, z^\perp$. Podle již dokázané části tvrzení pak platí: $x^\perp \wedge (y^\perp \vee z^\perp) = (x^\perp \wedge y^\perp) \vee (x^\perp \wedge z^\perp)$. To je ale ekvivalentní s tvrzením $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

□

Tvrzení 1.40. *Buď L OML, $x, y, z \in L$. Když $x\ C\ y$, $x\ C\ z$, pak také $x\ C\ y \wedge z$, $x\ C\ y \vee z$.*

Důkaz Nechť platí podmínky uvedené v předpokladech. Pak ale (díky symetričnosti C) platí $y\ C\ x$, $z\ C\ x$. Tedy $y = (y \wedge x) \vee (y \wedge x^\perp)$, $z = (z \wedge x) \vee (z \wedge x^\perp)$. Potom $y \vee z = (y \wedge x) \vee (y \wedge x^\perp) \vee (z \wedge x) \vee (z \wedge x^\perp) = [(x \wedge y) \vee (x \wedge z)] \vee [(x^\perp \wedge y) \vee (x^\perp \wedge z)] = [x \wedge (y \vee z)] \vee [x^\perp \wedge (y \vee z)]$, protože $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$, $x^\perp \wedge (y \vee z) = (x^\perp \wedge y) \vee (x^\perp \wedge z)$ díky Foulisově-Hollandově větě.

Nyní ale z rovnosti $y \vee z = [x \wedge (y \vee z)] \vee [x^\perp \wedge (y \vee z)]$ plyne $y \vee z\ C\ x$, a tedy též $x\ C\ y \vee z$.

Zbývá dokázat, že $x\ C\ y \wedge z$. Jelikož $x\ C\ y$, $x\ C\ z$, tak $x\ C\ y^\perp$, $x\ C\ z^\perp$. Dle výše dokázaného $x\ C\ y^\perp \vee z^\perp$, tedy též $x\ C\ (y^\perp \vee z^\perp)^\perp$, tudíž $x\ C\ y \wedge z$. □

Tvrzení 1.41. *Nechť $t(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)$ je $\{\wedge, \vee, \mathbf{0}, \mathbf{1}, ^\perp\}$-term. Buď L OML, $a, b_1, ..., b_n \in L$, přičemž $a\ C\ b_i$ pro $i = 1, ..., n$. Pak $a\ C\ t_L(b_1, ..., b_n)$.*

Důkaz Indukcí dle složitosti termu t. Jestliže t je proměnná, plyne tvrzení z předpokladu. Když je t složený term, použije se Tvrzení 1.40 a Lemma 1.35. $\square$

Tvrzení 1.42. *Buď L OML, $X \subseteq \dot{L}$. Buď K podalgebra algebry L generovaná množinou X. Pak K je Booleova algebra právě tehdy, když každé dva prvky množiny X komutují.*

Důkaz Když K je Booleova algebra, tak pro každé dva prvky $x, y \in K$ platí: $x = (x \wedge y) \vee (x \wedge y^{\perp})$, tedy spolu každé 2 prvky množiny X komutují. Obrácená implikace se dokáže následovně: Buďte $a, b \in K$. Pak existují termy $s(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m)$ a $t(\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_n)$ a prvky $a_1, ..., a_m, b_1, ..., b_n \in X$ takové, že $a = s_L(a_1, ..., a_m)$, $b = t_L(b_1, ..., b_n)$. S využitím předchozího tvrzení pak plyne, že $s_L(a_1, ..., a_m)\ C\ t_L(b_1, ..., b_n)$, a tedy $a\ C\ b$. Distributivní zákon pak plyne z Foulisovy-Hollandovy věty, jelikož každé dva prvky algebry K spolu podle výše uvedené úvahy komutují. $\square$

Důsledek 1.43. *Buď L OML, $x, y \in L$. Pak prvky x, y jsou booleovsky komutativní právě tehdy, když $x\ C\ y$.*

Tvrzení 1.44. *Buď L OML, $x \in L$. Pak množina $C(x) = \{y \in L;\ x\ C\ y\}$ je podalgebra v L. Navíc, jestliže $y \in L$ a prvky x, y jsou srovnatelné (tj. $x \leq y$ nebo $y \leq x$), pak $y \in C(x)$.*

Důkaz Ověřme, že příslušná množina je podalgebra: uzavřenost na konstanty $\mathbf{0}, \mathbf{1}$ plyne z Tvrzení 1.33. Uzavřenost na operaci $^{\perp}$ platí díky Tvrzení 1.32 a uzavřenost na binární operace průsek a spojení dostaneme díky Tvrzení 1.40. Druhá část tvrzení plyne z komutativity srovnatelných prvků, viz. Tvrzení 1.33. $\square$

Tvrzení 1.45. *Buď L OML, $M \subseteq L$, přičemž $x\ C\ y$ pro každé $x, y \in M$. Pak existuje $B \in \mathrm{Bl}(L)$ tak, že $M \subseteq B$.*

Důkaz Podle Tvrzení 1.42 je M obsažena v nějaké Booleově podalgebře (označme ji C) svazu L. Podle Zornova lemmatu je každá Booleova algebra podalgebrou nějaké maximální Booleovy algebry B. Potom $M \subseteq C \subseteq B$. $\square$

Na závěr této podkapitoly uveďme ještě jedno tvrzení, které je ekvivalentní komutativitě prvků ve třídě ortomodulárních svazů (a to jak booleovské, tak té z Definice 1.31).

Definice 1.46. Buď L OCL. Pro $x, y \in L$, buď $\mathrm{com}(x, y)$ *komutátor* prvků x, y, tj. $\mathrm{com}(x, y) = (x \vee y) \wedge (x \vee y^{\perp}) \wedge (x^{\perp} \vee y) \wedge (x^{\perp} \vee y^{\perp})$.

Tvrzení 1.47. *Buď L OML. Prvky $x, y \in L$ spolu komutují právě tehdy, když $\mathrm{com}(x, y) = \mathbf{0}_L$.*

Důkaz Nechť nejprve $x\ C\ y$, tedy $x = (x \wedge y) \vee (x \wedge y^{\perp})$. Pak $(x \vee y) \wedge (x \vee y^{\perp}) \wedge (x^{\perp} \vee y) \wedge (x^{\perp} \vee y^{\perp}) = [(x \vee y) \wedge (x \vee y^{\perp})] \wedge [(x^{\perp} \vee y) \wedge (x^{\perp} \vee y^{\perp})] = [(x \vee y) \wedge (x \vee y^{\perp})] \wedge [(x \wedge y^{\perp}) \vee (x \wedge y)]^{\perp} = [(x \vee y) \wedge (x \vee y^{\perp})] \wedge x^{\perp} = [(x^{\perp} \wedge y^{\perp}) \vee (x^{\perp} \wedge y)]^{\perp} \wedge x^{\perp} = x \wedge x^{\perp} = \mathbf{0}_L$. Obráceně, nechť $\mathrm{com}(x, y) = \mathbf{0}_L$. Vždy platí, že $x \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge y^{\perp})$. Jelikož L je OML, místo nerovnosti $x \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge y^{\perp})$ stačí ukázat, že $x \wedge [(x \wedge y) \vee (x \wedge y^{\perp})]^{\perp}) = \mathbf{0}_L$. Ale $x \wedge [(x \wedge y) \vee (x \wedge y^{\perp})]^{\perp}) = x \wedge (x^{\perp} \vee y^{\perp}) \wedge (x^{\perp} \vee y) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee y^{\perp}) \wedge (x^{\perp} \vee y) \wedge (x^{\perp} \vee y^{\perp}) = \mathbf{0}_L$. $\square$

1.6. Intervalové algebry

V této podkapitole ukážeme, jak dodefinovat operaci $^\perp$ na intervalu ortomodulárního svazu tak, aby vznikl opět svaz (tzv. intervalová algebra).

Definice 1.48. Buď L ortomodulární svaz, $o \in L$, $i \in L$, $o \leq i$. Nechť a je prvek L, který leží v intervalu $[o, i]$. Pak prvek $a^+ = o \vee (a^\perp \wedge i)$ nazveme *relativní ortokomplement* prvku a v intervalu $[o, i]$.

Tvrzení 1.49. *Buď L ortomodulární svaz, $o \in L$, $i \in L$, $o \leq i$. Nechť $a \in [o, i]$. Pak*
(i) $a \vee a^+ = i$
(ii) $a^+ = (o \vee a^\perp) \wedge i$
(iii) $a \wedge a^+ = o$.

Důkaz (i) $a \vee a^+ = a \vee (o \vee (a^\perp \wedge i)) = a \vee (a^\perp \wedge i) = (a \vee a^\perp) \wedge (a \vee i) = \mathbf{1} \wedge (a \vee i) = i$ díky faktu, že $a\ C\ i$, $a\ C\ a^\perp$ s použitím Foulisovy-Hollandovy věty.
(ii) Jelikož $o\ C\ i$, $o\ C\ a^\perp$, tak $a^+ = o \vee (a^\perp \wedge i) = (o \vee a^\perp) \wedge (o \vee i) = (o \vee a^\perp) \wedge i$, opět s použitím Foulisovy-Hollandovy věty.
(iii) $a \wedge a^+ = a \wedge ((o \vee a^\perp) \wedge i) = a \wedge (o \vee a^\perp) = (a \wedge o) \vee (a \wedge a^\perp) = o \vee \mathbf{0} = o$. □

Lemma 1.50. *Buď L ortomodulární svaz, $o, i \in L$, $o \leq i$. Buď a prvek L, který leží v intervalu $[o, i]$, $a^+ = o \vee (a^\perp \wedge i)$ buď relativní ortokomplement prvku a v intervalu $[o, i]$. Pak prvek a^+ komutuje se všemi prvky intervalu $[o, i]$, se kterými komutuje prvek a.*

Důkaz Nechť b je prvek z intervalu $[o, i]$, který komutuje s a. Potom zároveň $b\ C\ a^\perp$ a z nerovností $o \leq b \leq i$ plyne, že $b\ C\ o$, $b\ C\ i$. Podle Tvrzení 1.41 tedy b komutuje s $o \vee (a^\perp \wedge i) = a^+$. □

Lemma 1.51. *Buď L ortomodulární svaz, $o, i \in L$, $o \leq i$. Pak $([o, i], \vee, \wedge, ^+, o, i)$ je ortomodulární svaz.*

Důkaz Podmínku OC_1 jsme dokázali v Tvrzení 1.49 . Ověřme podmínku OC_2:

Nechť y je prvek z intervalu $[o, i]$. Pak $(y^+)^+ = ((i \wedge ((o \vee y^\perp) \wedge i)^\perp) \vee o = (i \wedge ((o^\perp \wedge y) \vee i^\perp)) \vee o = (i \wedge o^\perp \wedge y) \vee (i \wedge i^\perp) \vee o = (o^\perp \wedge y) \vee o = y$, s využitím Foulisovy-Hollandovy věty, ortomodulárního zákona a faktů, že navzájem kolmé či spolu srovnatelné prvky komutují.

Platnost podmínky OC_3 plyne z toho, že je-li $x \leq y$, pak $y^\perp \leq x^\perp$, a tedy i $y^+ = o \vee (y^\perp \wedge i) \leq o \vee (x^\perp \wedge i) = x^+$. Ověřme konečně platnost ortomodulárního zákona:

Buďte $x, y \in [o, i]$ prvky takové, že $x \geq y^+$ a $x \wedge y = o$. Chceme ukázat, že už $x = y^+$. Položme $s = x$, $t^\perp = y^+ = o \vee (y^\perp \wedge i)$. Pak $s \geq t^\perp$, $s \wedge t = x \wedge ((o^\perp \wedge y) \vee i^\perp) = (x \wedge (o^\perp \wedge y)) \vee (x \wedge i^\perp) \leq ((o^\perp \wedge o) \vee (i \wedge i^\perp) = \mathbf{0}$. Díky ortomodularitě svazu L tedy $s = t^\perp$, tedy i $x = y^+$. □

Definice 1.52. Buď L ortomodulární svaz, $o, i \in L$, $o \leq i$. Pak algebru z předchozího lemmatu nazveme *intervalová algebra*.

Lemma 1.53. *Buďte L, M ortomodulární svazy takové, že M je intervalovou algebrou ve svazu L a nechť a, b jsou prvky M. Pak a komutuje s b v L právě tehdy, když a komutuje s b v M.*

Důkaz Buďte o, i prvky vymezující intervalovou algebru M v L, $o \leq i$. S využitím bodu (ii) Tvrzení 1.49 je $a \wedge b^{+} = a \wedge (o \vee b^{\perp}) \wedge i = a \wedge (o \vee b^{\perp})$. Jelikož $o \leq a$, $o \leq b$, tak $a\ C\ o$, $o\ C\ b^{\perp}$. Podle Foulisovy-Hollandovy věty nyní $a \wedge b^{+} = (a \wedge o) \vee (a \wedge b^{\perp}) = o \vee (a \wedge b^{\perp})$. Protože $o \leq a$, $o \leq b$, je i $o \leq a \wedge b$. Potom $(a \wedge b) \vee (a \wedge b^{+}) = (a \wedge b) \vee o \vee (a \wedge b^{\perp}) = (a \wedge b) \vee (a \wedge b^{\perp})$, čímž je lemma dokázáno. □

V dalších kapitolách se často bude vyskytovat speciální případ, kdy bude jedním z prvků vymezujících intervalovou algebru prvek $\mathbf{0}$. Pro takový případ zaveďme následující označení:

Označení 1.54. Když L je nějaká algebra, $c \in L$ nějaký její prvek, označíme L^c intervalovou algebru v L vymezenou prvky $\mathbf{0}_L, c$.

V tomto speciálním případě se zjednoduší i definice relativního ortokomplementu (spojení s $\mathbf{0}_L$) můžeme vynechat, tedy v L^c platí: $a^{+} = \mathbf{0}_L \vee (a^{\perp} \wedge i) = a^{\perp} \wedge i$.

1.7. Některé vlastnosti Booleových algeber

V této podkapitole si připomeneme některé základní vlastnosti Booleových algeber, které pak dále využijeme především v části práce věnované horizontálním sumám Booleových algeber.

Lemma 1.55. *Každá Booleova algebra je ortomodulárním svazem.*

Důkaz Buď B Booleova algebra. Ověřme nejprve, že B je OCL. Podmínky (OC_1) a (OC_2) jsou splněny díky tomu, že každá BA je jednoznačně komplementární svaz. Podmínka (OC_3) je ekvivalentní platnosti De Morganových zákonů, které platí ve všech Booleových algebrách. K tomu, aby B byla OML ukažme, že platí podmínka (OM_{def}). Nechť $x, y \in B$ $x \leq y$ a $y \wedge x^{\perp} = \mathbf{0}_L$. Jelikož každé dva prvky spolu v B komutují, musí platit $y = (y \wedge x) \vee (y \wedge x^{\perp}) = y \wedge x$. Tedy $y \leq x$, a proto $y = x$. □

Zájemce o problematiku vztahů mezi třídami $\mathcal{OCL}$, $\mathcal{OML}$ a $\mathcal{BA}$ odkazuji na knihu [6], případně na jakoukoliv jinou knihu věnující se teorii svazů.

Připomeňme i známý výsledek o reprezentovatelnosti Booleových algeber, který poprvé ukázal Marshall H. Stone v roce 1936.

Definice 1.56. Buď $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Pak se uspořádaná dvojice $\langle X, \mathcal{S} \rangle$ nazývá *množinová algebra*, jestliže množina $\mathcal{S}$ je poduniverzum v Booleově podalgebře $\mathcal{P}(X)$. Symbolem $Uf(B)$ značíme množinu všech ultrafiltrů v B. Je-li $a \in B$, položme $r(a) = \{F \in Uf(B); a \in F\}$. Dále označme $\mathcal{B} = \{r(a); a \in B\}$. Nechť $\mathcal{S}(B)$ je topologie na množině $Uf(B)$ generovaná systémem $\mathcal{B}$. Topologický prostor $\langle Uf(B), \mathcal{S}(B) \rangle$ se nazývá *Stoneův prostor Booleovy algebry B.*

Věta 1.57. (Stoneova) *Buď B Booleova algebra. Pak B je izomorfní s algebrou obojetných množin Stoneova prostoru algebry B.*

Důkaz Viz kapitola 4 knihy [6]. □

Definice 1.58. Buď B Booleova algebra. *Atomem* v B nazveme každý nenulový prvek $a \in B$, pro který platí: jestliže $b \leq a$ pro nějaký prvek $b \in B$, tak $b = \mathbf{0}$ .nebo. $b = a$. Řekneme, že B je *atomická* BA, jestliže ke každému prvku $\mathbf{0} \neq b \in B$ existuje atom $a \in B$ takový, že $a \leq b$.

Definice 1.59. Buď B Booleova algebra. Řekneme, že B je *úplná* BA, jestliže ke každým dvěma prvkům $a, b \in B$ existuje infimum a supremum.

V následujících kapitolách nám bude stačit slabší verze Stoneovy věty:

Věta 1.60. *Buď B Booleova algebra. Pak B je izomorfní s Booleovou algebrou $\mathcal{P}(X)$ pro nějakou množinu X právě tehdy, když B je úplná atomická.*

Důkaz Plyne ze Stoneovy věty 1.57, dá se však dokázat i jednodušším způsobem, když se ukáže, že zobrazení $At : B \cong \mathcal{P}(At(B))$ a $S : \mathcal{P}(At(B)) \cong B$ (kde S je definováno pro $A \subseteq At(B)$ předpisem $S(A) = sup_B A$) jsou vzájemně inverzní izomorfismy. □

Důsledek 1.61. *Buďte B_1, B_2 konečné Booleovy algebry se stejným počtem prvků. Pak $B_1 \cong B_2$.*

1.8. Ortokomplementární posety

Obecnějším pojmem než je pojem ortokomplementárního svazu je ortokomplementární poset. V případě této struktury nebudeme požadovat, aby nosná množina byla svazově uspořádaná (tj. aby pro každou dvojici prvků existovalo supremum a infimum), spokojíme se s tím, že bude uspořádaná relací $\leq$, která bude reflexivní, slabě antisymetrická a tranzitivní.

Ve většině článků a knih (viz např. [13]) je zvolen postup výkladu "od posetu ke svazu" – jako primární struktura je definován ortokomplementární poset. To má tu výhodu, že za třídu ortokomplementárních svazů se prohlásí třída těch ortokomplementárních posetů, které jsou zároveň svazy. Všechna tvrzení dokázaná pro posety pak platí i pro ortokomplementární svazy. Cílem této práce ale bude především studium svazových struktur, takže kapitoly o ortokomplementárních posetech lze chápat spíše jen jako rozšíření a námět k zamyšlení, která tvrzení platící pro třídu $\mathcal{OCL}$ platí i pro třídu ortokomplementárních posetů.

Definice 1.62. *Uspořádanou množinou* nazveme uspořádanou dvojici $(X, \leq)$, kde X je neprázdná množina a $\leq$ je reflexivní, slabě antisymetrická a tranzitivní relace na množině X. Pro uspořádanou množinu budeme používat označení *poset* (což je zkratka anglického názvu partially ordered set). Analogicky jako v terminologii pro svazy bude $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$-*poset* uspořádaná množina P, která obsahuje nejmenší prvek $\mathbf{0}$ a největší prvek $\mathbf{1}$. Tedy $\mathbf{0} \leq a \leq \mathbf{1}$ pro každý prvek $a \in P$.

Definice 1.63. Buď $P = (X, \leq, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$-poset, $a, b \in P$. Zavedeme operaci *ortokomplementace* $^\perp : X \to X$ splňující následující podmínky:
(OP_1) když $a \leq b$, tak $b^\perp \leq a^\perp$
(OP_2) $(a^\perp)^\perp = a$
(OP_3) existuje supremum množiny $\{a, a^\perp\}$ a je rovno $\mathbf{1}$.

Řekneme, že $P = (X, \leq, \mathbf{0}, \mathbf{1}, ^\perp)$ je *ortokomplementární poset*, jestliže $P = (X, \leq, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ je $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$-poset a operace $^\perp : X \to X$ je ortokomplementace na množině X.

V souladu s označením ve třídě ortokomplementárních svazů budeme supremum prvků $a, b \in P$ značit $a \vee b$, infimum $a \wedge b$. Uvědomme si ale, že supremum ani infimum nemusí obecně v ortokomplementárním posetu existovat. Třídu všech ortokomplementárních posetů budeme značit $\mathcal{OCP}$.

Definice 1.64. Buď $P = (X, \leq, \mathbf{0}, \mathbf{1}, ^\perp)$ ortokomplementární poset, $a, b \in P$. Řekneme, že P je *ortomodulární poset* (zkráceně OMP), jestliže jsou splněny následující podmínky:
(OMP_1) když $a \leq b^\perp$, tak existuje supremum $a \vee b$ prvků a, b v P
(OMP_2) když $a \leq b$, tak $b = a \vee (a^\perp \wedge b)$.

Třídu všech ortomodulárních posetů budeme značit $\mathcal{OMP}$.

Lemma 1.65. *Každý ortokomplementární svaz je ortokomplementární poset, každý ortomodulární svaz je ortomodulární poset.*

Důkaz Buď $L = (X, \wedge, \vee, ^\perp, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ OCL. Relaci $\leq$ ve svazu L definujme následovně: Pro $a, b \in L$ buď
$a \leq_L b$ právě tehdy, když $a \wedge b = a$.

Ověřme, že $\leq_L$ je uspořádání na X, buďte $a, b, c \in X$: reflexivita relace $\leq_L$ plyne z faktu, že $a \wedge a = a$. Slabá antisymetrie: Když $a \leq b$ a zároveň $b \leq a$, tak $a = a \wedge b = b \wedge a = b$. Tranzitivita: Když $a \leq b$ a zároveň $b \leq c$, tak $a \wedge c = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) = a \wedge b = a$.

Označme $P = (X, \leq_L, \mathbf{0}_L, \mathbf{1}_L, ^{\perp_L})$. Pak už P je ortokomplementární poset, neboť se jedná o $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$-poset s ortokomplementací.

Nechť je nyní L navíc ortomodulární. Pak podmínka (OMP_1) je splněna díky tomu, že L je svaz a podmínka (OMP_2) je ortomodulární zákon (viz Tvrzení 1.24).

□

Na závěr této podkapitoly poznamenejme, že všechna tvrzení dokázaná výše o ortokomplementárních (ortomodulárních) svazech platí i o posetech, pokud v těchto tvrzeních požadujeme navíc existenci příslušných suprem či infim. Jako příklad takového tvrzení uvažme de Morganovy zákony pro třídu $\mathcal{OCP}$, ty potom mají následující tvar:

Lemma 1.66. *Buď $P = (X, \leq, \mathbf{0}, \mathbf{1}, ^\perp)$ ortokomplementární poset, $x, y \in P$.*
Když existuje $a \vee b$, tak $(a \vee b)^\perp = a^\perp \wedge b^\perp$.
Když existuje $a \wedge b$, tak $(a \wedge b)^\perp = a^\perp \vee b^\perp$

Důkaz Jelikož $a \leq a \vee b$, tak $a^\perp \geq (a \vee b)^\perp$, analogicky $b \leq a \vee b$, a tedy $b^\perp \geq (a \vee b)^\perp$. Celkem tedy $(a \vee b)^\perp \leq a^\perp \wedge b^\perp$. Dokažme opačnou nerovnost: K tomu, abychom ukázali $(a \vee b)^\perp \geq a^\perp \wedge b^\perp$ stačí ukázat, že $a \vee b \leq (a^\perp \wedge b^\perp)^\perp$. To nastane právě tehdy, když

$a \leq (a^{\perp} \wedge b^{\perp})^{\perp}$ a $b \leq (a^{\perp} \wedge b^{\perp})^{\perp}$. První nerovnost je ovšem ekvivalentní s tvrzením $a^{\perp} \geq a^{\perp} \wedge b^{\perp}$, druhá s $b^{\perp} \geq a^{\perp} \wedge b^{\perp}$, která obě triválně platí. Druhé tvrzení se dokáže analogicky. $\square$

1.9. Greechieho diagramy

Konstrukce pomocí horizontální sumy (kterou jsme si představili v podkapitole 1.4) se dá přirozeným způsobem zobecnit. Budeme vytvářet ortokomplementární svaz (či poset) z Booleových algeber obdobně jako při konstrukci pomocí horizontální sumy, v tomto případě ovšem povolíme, aby jednotlivé BA měly i jiné společné prvky než **0** a **1**. Otázky, za jakých podmínek nám touto metodou vzniknou OMP (případně OML) nám pak zodpoví závěrečné tvrzení.

Poznamenejme ještě, že zde popíšeme pouze základní vlastnosti Greechieho diagramů (které budeme potřebovat v následujících kapitolách – zhruba ve stejném rozsahu jako v [13]), zájemci o studium této problematiky mohou nalézt řadu dalších souvisejících výsledků v publikacích [1], [12], či v jiné publikaci věnované ortomodulárním svazům.

Definice 1.67. Buď $\mathcal{B}$ systém Booleových algeber. Řekneme, že $\mathcal{B}$ je *téměř disjunktní systém*, jestliže pro libovolné $A, B \in \mathcal{B}$ platí právě jedna z následujících podmínek:
(i) $A = B$
(ii) $A \cap B = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$
(iii) $A \cap B = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, x, x^{\perp}\}$, kde x je atom v A a zároveň v B, a navíc platí $\mathbf{0}_A = \mathbf{0}_B$, $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$, $x^{\perp_A} = x^{\perp_B}$.

Připomeňme nyní pojem cyklu:

Definice 1.68. Buď $\mathcal{B}$ téměř disjunktní systém Booleových algeber. Konečná posloupnost $B_0, B_1, B_2, ..., B_{n-1}$ algeber z $\mathcal{B}$ se nazývá *cyklus délky* n, jestliže jsou splněny následující podmínky: (indexy budeme chápat stejně jako v následujících tvrzeních této podkapitoly modulo n)
(i) pro libovolné $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$ platí $B_i \cap B_{i+1} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, x_i, x_i^{\perp}\}$, kde x_i je atom v algebrách B_i, B_{i+1}.
(ii) když $j \notin \{i-1, i, i+1\}$, tak $B_i \cap B_j = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$
(iii) pro různé indexy i, j, k platí $B_i \cap B_j \cap B_k = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$.

Uvědomme si, že každý cyklus $\{B_0, B_1, B_2, ..., B_{n-1}\}$ jednoznačně určuje posloupnost atomů $\{e_0, e_1, ..., e_{n-1}\}$, kde e_i je atom náležející do algeber B_{i-1} a B_i pro $0 \leq i \leq n-1$. Můžeme tedy vyslovit následující tvrzení:

Tvrzení 1.69. *Buď $\mathcal{B}$ téměř disjunktní systém Booleových algeber, buď $\{B_0, B_1, B_2, ..., B_{n-1}\}$ cyklus délky n. Nechť e_i je atom náležející do algeber B_{i-1} a B_i pro $0 \leq i \leq n-1$. Pak $e_i \perp e_{i+1}$.*

Důkaz Nechť platí uvedené předpoklady. Připomeňme, že $e_i \perp e_{i+1} \Leftrightarrow e_i \leq e_{i+1}^{\perp}$. Prvky e_i, e_{i+1} jsou atomy v B_i. Jelikož $B_{i-1} \cap B_{i+1} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, musejí to být atomy různé. Proto též $e_i \wedge e_{i+1} = \mathbf{0}$. Nyní platí: $e_i \leq e_i \vee e_{i+1}^{\perp} = (e_i \vee e_{i+1}^{\perp}) \wedge (e_{i+1} \vee e_{i+1}^{\perp}) = (e_i \wedge e_{i+1}) \vee e_{i+1}^{\perp} = e_{i+1}^{\perp}$. □

Tvrzení 1.70. *Buď $\mathcal{B}$ téměř disjunktní systém Booleových algeber. Položme $L = \bigcup \mathcal{B}$ a definujme na L relaci $\leq_L$ následujícím způsobem: $x \leq_L y$ právě tehdy, když existuje Booleova algebra $B \in \mathcal{B}$ taková, že $x, y \in B$ a $x \leq_B y$. Podobně definujme operaci ${}^{\perp_L} = {}^{\perp_B}$. Pak $\leq_L$ je uspořádání a ${}^{\perp_L}$ je ortokomplementace.*

Důkaz Viz [13], strana 10. □

Dostáváme se k fundamentálnímu výsledku v teorii Greechieho diagramů. V anglicky psané literatuře se často nazývá **Loop Lemma**, protože se zabývá závislostí mezi délkami cyklů (pro něž se v tomto kontextu používá výraz loop) v téměř disjunktním systému a ortomodularitou posetu, který z něj vznikne konstrukcí popsanou v předchozím tvrzení.

Lemma 1.71. (Loop Lemma) *Buď $\mathcal{B}$ téměř disjunktní systém Booleových algeber. Položme $L = \bigcup \mathcal{B}$. Pak platí:*
(a) L je OMP právě tehdy, když $\mathcal{B}$ neobsahuje cyklus délky 3.
(b) L je OML právě tehdy, když $\mathcal{B}$ neobsahuje ani cyklus délky 3, ani cyklus délky 4.

Důkaz Viz [13], strana 11. □

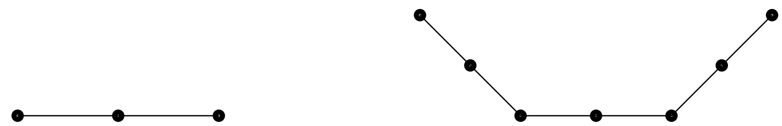
Definice 1.72. Algebra L se nazývá *Greechieho logika*, jestliže jsou splněny následující podmínky:
(a) Každý prvek L se dá napsat jako supremum nejvýš spočetně navzájem po dvou kolmých atomů v L.
(b) Bloky v L tvoří téměř disjunktní systém.

Greechieho diagramy slouží k zachycení Greechieho logik. Jedná se o grafy (tj. množiny uzlů a hran), kde uzly odpovídají atomům v Greechieho logice a hrany znázorňují náležení do bloků (tedy když leží dva vrcholy na stejné hraně, jsou jim odpovídající atomy v tomtéž bloku). Výhodou Greechieho diagramů je snadné ověření, zda obsahují cyklus délky 3 (případně 4), a dá se tedy snadno nahlédnout, zda jsou příslušné Greechieho logiky ortomodulárními posety (případně svazy).

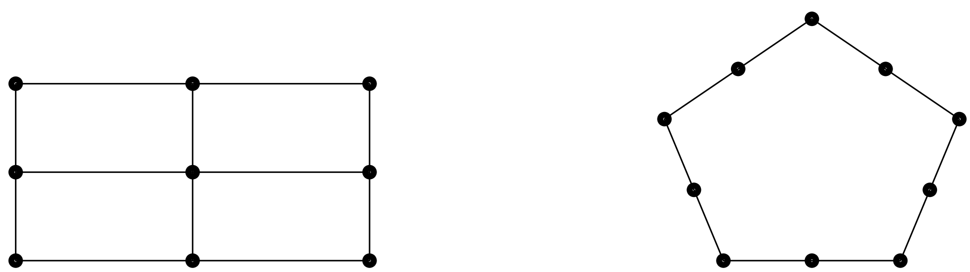
Na závěr této podkapitoly si ještě ukažme několik příkladů Greechieho diagramů, více jich čtenáři najdou v knihách [12] či [1]. Na Obrázku 2 je vlevo Greechieho diagram osmiprvkové Booleovy algebry, vpravo je pak takzvaný Dilworthův svaz, který vznikl slepením ze tří osmiprvkových Booleových algeber.

Obrázek 3 pak znázorňuje Greechieho diagramy ortomodulárních posetů, které obsahují cykly. Jelikož žádný neobsahuje cyklus délky 3, jde o posety. Poset zachycený diagramem vpravo je zároveň svazem, neboť neobsahuje cyklus délky 4, poset vlevo takový cyklus ovšem obsahuje, proto svazem není.

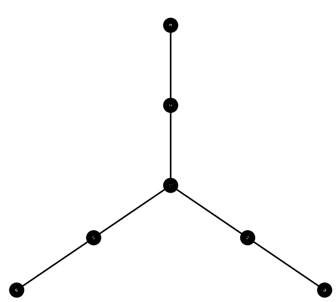
Uvědomme si ještě, že atom spolu s koatomem může být v Greechieho logice společný i pro více než dvě Booleovy algebry; nejmenší takový svaz je tvořen třemi osmiprvkovými Booleovými algebrami, které mají jeden společný atom. Diagram tohoto svazu je znázorněn na Obrázku 4.



Obrázek 2: Ukázky Greechieho diagramů, vlevo osmiprvková BA, vpravo Dilworthův svaz.



Obrázek 3: Greechieho diagramy obsahující cykly.



Obrázek 4: Greechieho diagram OML, v němž je jeden atom společný třem BA.

2. Diferenční algebry

Následující kapitola bude věnována studiu operátoru symetrické diference. Axiomy, které by měl tento operátor splňovat, jsou voleny tak, aby zachycoval symetrický rozdíl množin. Můžeme jej ovšem chápat také jako logickou spojku nazývanou "alternativa" (která se v přirozeném jazyce zpravidla vyjadřuje jako vylučovací disjunkce, "buď A, anebo B"). Jak uvidíme dále, na dvouprvkové struktuře (mající pouze prvky $\mathbf{0}$ a $\mathbf{1}$, které můžeme interpretovat jako pravdivostní hodnoty) se skutečně chová jako výše zmíněná logická spojka.

My si zde představíme některé základní vlastnosti tohoto operátoru (které pak budeme využívat i v dalších kapitolách této práce) a budeme se zabývat i vlastnostmi třídy diferenčních algeber.

Definice 2.1. Buď $D = (X, \diamond, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ algebra typu $(2, 0, 0)$. Řekneme, že D je *diferenční algebra* (zkr. DA) jestliže pro libovolné $x, y, z \in X$ platí:
(d_1) $x \diamond (y \diamond z) = (x \diamond y) \diamond z$,
(d_2) $x \diamond \mathbf{0} = x$,
(d_3) $x \diamond x = \mathbf{0}$,
(d_4) $(\exists x : x \neq \mathbf{0}) \Rightarrow \mathbf{1} \neq \mathbf{0}$.

Lemma 2.2. *Diferenční algebra $D = (X, \diamond, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ je netriviální, právě když $\mathbf{1} \neq \mathbf{0}$.*

Důkaz Implikace zprava doleva je zřejmá. Opačná implikace plyne z podmínky (d_4). □

Tvrzení 2.3. *Buď $D = (X, \diamond, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ diferenční algebra. Pak operace $\diamond$ je komutativní.*

Důkaz Dokažme nejprve, že pro $x \in X$ platí $\mathbf{0} \diamond x = x$. Platí:
$\mathbf{0} \diamond x = (x \diamond x) \diamond x = x \diamond (x \diamond x) = x \diamond \mathbf{0} = x$.
Buďte $x, y \in X$.
$x \diamond y = (x \diamond y) \diamond \mathbf{0} = (x \diamond y) \diamond [(y \diamond x) \diamond (y \diamond x)] = x \diamond y \diamond y \diamond x \diamond (y \diamond x) = x \diamond \mathbf{0} \diamond x \diamond (y \diamond x) = x \diamond x \diamond (y \diamond x) = \mathbf{0} \diamond (y \diamond x) = y \diamond x$. □

Tvrzení 2.4. *Buď D konečná DA. Pak D má 2^n prvků.*

Důkaz Pro $x \in D$ položme $-x = x$. Algebra $G_D = (X, \diamond, -, \mathbf{0})$ je grupa, v níž každý prvek má řád 2. Tudíž počet prvků grupy G_D (a tedy i algebry D) musí být podle Věty 1.20 mocninou čísla 2. □

Příklad 2.5. Buď B BA. Pak algebra $D_B = (\dot{B}, \Delta_B, \mathbf{0}_B, \mathbf{1}_B)$ je diferenční algebra.

Označení 2.6. Je-li D DA, $x \in D$, položme $x^\perp = x \diamond \mathbf{1}$. Třídu všech diferenčních algeber budeme značit $\mathcal{DA}$.

Tvrzení 2.7. *Buď D diferenční algebra. Pak pro $x, y, z \in D$ platí:*
(a) $\mathbf{0}^\perp = \mathbf{1}, \mathbf{1}^\perp = \mathbf{0}$ *;*
(b) $x^{\perp\perp} = x$ *;*
(c) $x^\perp = y^\perp \Rightarrow x = y$ *;*

(d) $x \diamond y^\perp = x^\perp \diamond y = (x \diamond y)^\perp$ *;*
(e) $x^\perp \diamond y^\perp = x \diamond y$ *;*
(f) $x \diamond x^\perp = \mathbf{1}$ *;*
(g) $x \diamond y = z \Leftrightarrow x \diamond z = y$ *;*
(h) $x \diamond y = x \diamond z \Rightarrow y = z$ *;*
(i) $x \diamond y = \mathbf{0} \Leftrightarrow x = y$ *;*
(j) $x \diamond y = \mathbf{1} \Leftrightarrow x = y^\perp$*.*

Důkaz (a) $\mathbf{0}^\perp = \mathbf{0} \diamond \mathbf{1} = \mathbf{1}$, $\mathbf{1}^\perp = \mathbf{1} \diamond \mathbf{1} = \mathbf{0}$.
(b) $x^{\perp\perp} = (x \diamond \mathbf{1}) \diamond \mathbf{1} = x \diamond (\mathbf{1} \diamond \mathbf{1}) = x \diamond \mathbf{0} = x$.
(c) Když $x \diamond \mathbf{1} = y \diamond \mathbf{1}$, pak $(x \diamond \mathbf{1}) \diamond \mathbf{1} = (y \diamond \mathbf{1}) \diamond \mathbf{1}$, a podle (b) platí $x = y$.
(d) $x \diamond y^\perp = x \diamond (y \diamond \mathbf{1}) = (x \diamond y) \diamond \mathbf{1} = (x \diamond y)^\perp$.
(e) Pomocí (d) dostáváme: $x^\perp \diamond y^\perp = (x^\perp \diamond y)^\perp = (x \diamond y)^{\perp\perp} = x \diamond y$.
(f) $x \diamond x^\perp = (x \diamond x)^\perp = \mathbf{0}^\perp = \mathbf{1}$.
(g) Nechť $x \diamond y = z$. Pak $x \diamond z = x \diamond (x \diamond y) = (x \diamond x) \diamond y = \mathbf{0} \diamond y = y$. Opačná implikace se dokáže analogicky.
(h) Nechť $x \diamond y = x \diamond z$. Pak $x \diamond (x \diamond y) = x \diamond (x \diamond z)$, tudíž $(x \diamond x) \diamond y = (x \diamond x) \diamond z$. Podle podmínky ($d_3$) definice 2.1 dostáváme $\mathbf{0} \diamond y = \mathbf{0} \diamond z$, a tedy $y = z$.
(i) Když $x = y$, pak $x \diamond y = \mathbf{0}$ podle podmínky (d_3). Předpokládejme naopak, že $x \diamond y = \mathbf{0}$. Pak $(x \diamond y) \diamond y = \mathbf{0} \diamond y$. To znamená, že $x \diamond (y \diamond y) = y$, a tedy $x = y$.
(j) $x \diamond y = \mathbf{1} \Leftrightarrow x \diamond y^\perp = \mathbf{0} \Leftrightarrow x = y^\perp$. □

Tvrzení 2.8. *Buď D netriviální DA, $x \in D$. Pak $x \neq x^\perp$.*

Důkaz Sporem. Nechť $x = x^\perp$. Pak $x \diamond x = x \diamond x^\perp$, tj. $\mathbf{0} = \mathbf{1}$, což je spor. □

Definice 2.9. Buď D diferenční algebra, $X \subseteq D$. Řekneme, že X je *nezávislá množina* v diferenční algebře D, platí-li: $\forall n \geq 1\ \forall x_1, \ldots, x_n \in X : x_1 \diamond \ldots \diamond x_n \neq \mathbf{1}$.

Definice 2.10. Buď D DA, $I \subseteq D$. Řekneme, že I je *kvaziideál* v D, platí-li
$\mathbf{0} \in I$,
$\forall x, y \in I : x \diamond y \in I$.
Je-li navíc $\mathbf{1} \notin I$, budeme I nazývat *vlastní kvaziideál*.

Tvrzení 2.11. *Buď $I \subseteq D$ kvaziideál. Pak I je vlastní kvaziideál právě tehdy, když pro každé $x \in D$ nejvýš jeden z prvků x, $x^\perp$ patří do I.*

Důkaz Nechť nejprve I je vlastní kvaziideál. Kdyby pro nějaký prvek $x \in D$ platilo současně $x \in I$, $x^\perp \in I$, pak by též $x \diamond x^\perp \in I$, tj. $\mathbf{1} \in I$, což je spor.

Nechť tedy obráceně pro každé $x \in D$ nejvýš jeden z prvků x, $x^\perp$ patří do I. Protože $\mathbf{0} \in I$, je $\mathbf{0}^\perp \notin I$, tj. $\mathbf{1} \notin I$ a I je tudíž vlastní kvaziideál. □

Tvrzení 2.12. *Buď X nezávislá množina v diferenční algebře D. Pak existuje vlastní kvaziideál I v D takový, že $X \subseteq I$.*

Důkaz Položme $I = \{\mathbf{0}\} \cup \{x_1 \diamond \ldots \diamond x_n;\ n \geq 1,\ x_1, \ldots, x_n \in X\}$. Z konstrukce je zřejmé, že se jedná o kvaziideál (je uzavřen na operaci $\diamond$) a je to dokonce nejmenší kvaziideál obsahující množinu X. Protože X je nezávislá množina, je to vlastní kvaziideál. □

Tvrzení 2.13. *Buď $I \subseteq D$ vlastní kvaziideál, $x \in D$, $x^\perp \notin I$. Položme $J = I \cup \{i \diamond x; i \in I\}$. Pak J je rovněž vlastní kvaziideál v D, přičemž $x \in J$, $x^\perp \notin J$.*

Důkaz Ověřme nejprve, že J je kvaziideál. Splnění podmínky $\mathbf{0} \in J$ plyne z toho, že $I \subseteq J$, $\mathbf{0} \in I$. Buďte nyní $u, v \in J$. Pokud jsou oba prvky zároveň v I, platí $u \diamond v \in I$, a tedy $u \diamond v \in J$. Nechť tedy např. $u \in I$, $v = x$. Pak ale $u \diamond x \in J$ podle definice J. Dokažme ještě, že $\mathbf{1} \notin J$. Postupujme sporem, nechť $\mathbf{1} \in J$. Pak musí být $\mathbf{1} = i \diamond x$ pro nějaké $i \in I$. Z rovnosti $\mathbf{1} = i \diamond x$ ale plyne $x^\perp = i \in I$, což je spor.

Dále, $x = \mathbf{0} \diamond x \in J$. Konečně, kdyby $x^\perp \in J$, pak by též $\mathbf{1} = x \diamond x^\perp \in J$, což by byl spor s již dokázaným faktem, že J je vlastní kvaziideál. □

Tvrzení 2.14. *Buď $I \subseteq D$ kvaziideál. Pak platí:*

I je maximální vlastní kvaziideál v D právě tehdy, když $\forall x \in D$ buď $x \in I$ nebo $x^\perp \in I$.

Důkaz ($\Rightarrow$) Nechť I je maximální vlastní kvaziideál. Buď $x \in D$. Předpokládejme nejprve sporem, že $x \notin I$, $x^\perp \notin I$. Podle Tvrzení 2.13 pak existuje vlastní kvaziideál $J \supset I$, což je spor s maximalitou I. Tedy aspoň jeden z prvků x, $x^\perp$ je prvkem I. Protože I je vlastní, nemohou být oba prvky množiny I.
($\Leftarrow$) Obráceně, nechť platí podmínka z pravé strany. Protože $\mathbf{0} \in I$, je $\mathbf{0}^\perp \notin I$, tj. $\mathbf{1} \notin I$, a I je vlastní kvaziideál. Předpokládejme dále, že $I \subset J$, kde J je kvaziideál v D. Ukážeme, že pak už $\mathbf{1} \in J$:

Protože $I \subset J$, existuje prvek x takový, že $x \in J$, $x \notin I$. Protože $x \notin I$, podle naší podmínky musí $x^\perp \in I$. Celkem tedy $x \in J$, $x^\perp \in J$, tudíž i $\mathbf{1} = x \diamond x^\perp \in J$. □

Tvrzení 2.15. *Buď $I_0 \subseteq D$ vlastní kvaziideál, $b \in D$, $b^\perp \notin I_0$. Pak existuje maximální vlastní kvaziideál J v D takový, že $I_0 \subseteq J$, $b \in J$.*

Důkaz Nechť $J_0 = I_0 \cup \{i \diamond b;\ i \in I_0\}$. Podle Tvrzení 2.13 je J_0 vlastní kvaziideál v L a $b \in J_0$. Označme $\mathcal{I} = \{I \subseteq \dot{D}; I$ je vlastní kvaziideál v $D, J_0 \subseteq I\}$. Pak $\mathcal{I} \neq \emptyset$, neboť $J_0 \in \mathcal{I}$. Dále ověřme, že systém $\mathcal{I}$ je uzavřen na sjednocení řetězců. Buď $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{I}$ neprázdný řetězec. Ukážeme, že $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{I}$. To, že $J_0 \subseteq \bigcup \mathcal{C}$ je zřejmé z toho, že $J_0 \subseteq I$ pro každé $I \in \mathcal{C}$. Stačí tedy ověřit, že $\bigcup \mathcal{C}$ je vlastní kvaziideál v D. Podmínky $\mathbf{0} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{1} \notin \mathcal{C}$ plynou z toho, že $\bigcup \mathcal{C}$ je sjednocení vlastních kvaziideálů. Nechť je nyní $x, y \in \bigcup \mathcal{C}$. Pak existují nějaké vlastní kvaziideály $K_1, K_2 \in \mathcal{C}$ takové, že $x \in K_1$, $y \in K_2$. Jelikož $\mathcal{C}$ je řetězec, musí platit $K_1 \subseteq K_2$ nebo $K_2 \subseteq K_1$. Nechť např. $K_1 \subseteq K_2$, pak $x, y \in K_2$ a tedy i $x \diamond y \in K_2$, tudíž $x \diamond y \in \bigcup \mathcal{C}$.

Podle principu maximality systém $\mathcal{I}$ obsahuje nějaký maximální prvek; jeden zvolme pevně a označme jej J. Protože $b \in J_0$ a $J_0 \subseteq J$, platí $b \in J$. Tedy J je hledaný maximální vlastní kvaziideál. □

Tvrzení 2.16. *Buď I maximální vlastní kvaziideál v D. Pak $|D| = 2 \cdot |I|$.*

Důkaz Z Tvrzení 2.14 plyne, že $^\perp$ je vzájemně jednoznačné zobrazení mezi množinou I a množinou $\dot{D} \setminus I$. □

Tvrzení 2.17. *Buďte D_1, D_2 diferenční algebry, $I \subseteq D_1$ maximální vlastní kvaziideál. Buď $f : I \to D_2$ zobrazení takové, že pro každé $x, y \in I$ platí: $f(x \diamond_{D_1} y) = f(x) \diamond_{D_2} f(y)$.*

Pak $f(I)$ je kvaziideál v D_2.

Důkaz Ověřme, že $f(I)$ je kvaziideál v D_2. Musíme tedy ukázat, že $f(I)$ obsahuje prvek $\mathbf{0}_{D_2}$ a je uzavřen na operaci $\diamond_{D_2}$. Přitom:

$f(\mathbf{0}_{D_1}) = f(\mathbf{0}_{D_1} \diamond_{D_1} \mathbf{0}_{D_1}) = f(\mathbf{0}_{D_1}) \diamond_{D_2} f(\mathbf{0}_{D_1}) = \mathbf{0}_{D_2}$. Jelikož $\mathbf{0}_{D_1} \in I$, je i $f(\mathbf{0}_{D_1}) \in f(I)$.

Dále, jsou-li $a, b \in f(I)$, $a = f(x)$, $b = f(y)$ pro $x, y \in I$, pak $a \diamond_{D_2} b = f(x) \diamond_{D_2} f(y) = f(x \diamond_{D_1} y) \in f(I)$, neboť $x \diamond_{D_1} y \in I$. Tedy $f(I)$ je kvaziideál v D_2. □

Tvrzení 2.18. *Buďte D_1, D_2 diferenční algebry, $I \subseteq D_1$ maximální vlastní kvaziideál. Buď $f : I \to D_2$ zobrazení takové, že pro každé $x, y \in I$ platí: $f(x \diamond_{D_1} y) = f(x) \diamond_{D_2} f(y)$.*

Pak existuje morfismus $g : D_1 \to D_2$ rozšiřující zobrazení f. Přitom platí, že je-li f prosté zobrazení a množina $f(I)$ je maximální vlastní kvaziideál v D_2, pak g je izomorfismus algebry D_1 na D_2.

Důkaz Definujme zobrazení $g : \dot{D}_1 \to \dot{D}_2$ takto:

$g(x) = f(x)$ pro $x \in I$,

$g(x) = (f(x^{\perp_{D_1}}))^{\perp_{D_2}}$ pro $x \in \dot{D}_1 \setminus I$.

Ukažme, že g je hledaný morfismus. Platí $g(\mathbf{0}_{D_1}) = f(\mathbf{0}_{D_1}) = \mathbf{0}_{D_2}$,
$g(\mathbf{1}_{D_1}) = (f(\mathbf{1}_{D_1}^{\perp_{D_1}}))^{\perp_{D_2}} = (f(\mathbf{0}_{D_1}))^{\perp_{D_2}} = \mathbf{0}_{D_2}^{\perp_{D_2}} = \mathbf{1}_{D_2}$.
Zbývá ukázat, že g zachovává operaci $\diamond$. Rozlišme 3 případy.

Nechť nejprve $x \in I$, $y \in I$. Pak $g(x) \diamond_{D_2} g(y) = f(x) \diamond_{D_2} f(y) = f(x \diamond_{D_1} y) = g(x \diamond_{D_1} y)$, neboť $x \diamond_{D_1} y \in I$.

Nechť nyní $x \notin I$, $y \notin I$. Nejprve si uvědomme, že z maximality kvaziideálu I v D_1 a z Tvrzení 2.14 plyne, že $x^{\perp_{D_1}} \in I$, $y^{\perp_{D_1}} \in I$. Tedy i $x^{\perp_{D_1}} \diamond_{D_1} y^{\perp_{D_1}} \in I$. Ale podle Tvrzení 2.7 (e) je $x^{\perp_{D_1}} \diamond_{D_1} y^{\perp_{D_1}} = x \diamond_{D_1} y$. Potom $g(x) \diamond_{D_2} g(y) = (f(x^{\perp_{D_1}}))^{\perp_{D_2}} \diamond_{D_2} (f(y^{\perp_{D_1}}))^{\perp_{D_2}} = f(x^{\perp_{D_1}}) \diamond_{D_2} \mathbf{1}_{D_2} \diamond_{D_2} f(y^{\perp_{D_1}}) \diamond_{D_2} \mathbf{1}_{D_2} = f(x^{\perp_{D_1}}) \diamond_{D_2} f(y^{\perp_{D_1}}) \diamond_{D_2} (\mathbf{1}_{D_2} \diamond_{D_2} \mathbf{1}_{D_2}) = f(x^{\perp_{D_1}}) \diamond_{D_2} f(y^{\perp_{D_1}}) \diamond_{D_2} \mathbf{0}_{D_2} = f(x^{\perp_{D_1}} \diamond_{D_1} y^{\perp_{D_1}}) = f(x \diamond_{D_1} y) = g(x \diamond_{D_1} y)$.

Uvažujme třetí případ, kdy $x \in I$, $y \notin I$ (případ $x \notin I$, $y \in I$ je symetrický). Pak $y^{\perp_{D_1}} \in I$ a tedy i $x \diamond_{D_1} y^{\perp_{D_1}} \in I$. Připomeňme ještě, že $x \diamond_{D_1} y^{\perp_{D_1}} = (x \diamond_{D_1} y)^{\perp_{D_1}}$ dle Tvrzení 2.7 (d). Z toho též plyne, že $x \diamond_{D_1} y \notin I$. Nyní $g(x) \diamond_{D_2} g(y) = f(x) \diamond_{D_2} (f(y^{\perp_{D_1}}))^{\perp_{D_2}} = f(x) \diamond_{D_2} f(y^{\perp_{D_1}}) \diamond_{D_2} \mathbf{1}_{D_2} = f(x \diamond_{D_1} y^{\perp_{D_1}}) \diamond_{D_2} \mathbf{1}_{D_2} = (f(x \diamond_{D_1} y)^{\perp_{D_1}})^{\perp_{D_2}} = g(x \diamond_{D_1} y)$, neboť $x \diamond_{D_1} y \notin I$.

Dokažme konečně, že je-li f prosté zobrazení a množina $f(I)$ je maximální vlastní kvaziideál v D_2, pak g je izomorfismus algebry D_1 na D_2. Stačí tedy ukázat, že g je bijekce. Z uvedených předpokladů je jasné, že $f : I \to D_2$ je vzájemně jednoznačné zobrazení množin I a $f(I)$. Buď nyní $x \notin I$. Pak $g(x) = (f(x^{\perp_{D_1}}))^{\perp_{D_2}}$ je složení tří bijektivních zobrazení (bijektivnost ${}^{\perp_{D_1}}, {}^{\perp_{D_2}}$ plyne z maximality ideálů $I, f(I)$), tudíž i zobrazení g je bijektivní. □

Tvrzení 2.19. *Buďte D_1, D_2 DA, přičemž $|D_1| = |D_2|$. Pak algebry D_1, D_2 jsou izomorfní.*

Důkaz Zvolme maximální vlastní kvaziideály I, J v D_1, D_2. Pak $|I| = |J|$. Dále, algebry $(I, \diamond_{D_1}, \mathbf{0}_{D_1})$, $(J, \diamond_{D_2}, \mathbf{0}_{D_2})$ jsou komutativní grupy, v nichž každý prvek má řád 2. Přitom teorie komutativních grup, jejichž každý prvek má řád p, kde $p > 1$ je prvočíslo, je kategorická v každé mohutnosti (viz Věta 1.22). Existuje tudíž izomorfismus f grupy $(I, \diamond_{D_1}, \mathbf{0}_{D_1})$ na grupu $(J, \diamond_{D_2}, \mathbf{0}_{D_2})$. Podle předchozího tvrzení lze zobrazení f rozšířit do izomorfismu algeber D_1 a D_2. □

Důsledek 2.20. *Třída $\mathcal{DA}$ je kategorická v každé mohutnosti.*

Tvrzení 2.21. *Je-li D netriviální konečná DA, pak je izomorfní s kartézskou mocninou dvouprvkové diferenční algebry.*

Důkaz Nechť D je konečná diferenční algebra. Její nosič musí mít (dle Tvrzení 2.4) 2^n prvků. Můžeme tedy vytvořit kartézský součin n exemplářů dvouprvkové DA, čímž získáme množinu mající 2^n prvků. Operaci $\diamond$ na této množině pak dodefinujeme po složkách, tím vznikne diferenční algebra E . Konkrétně tedy, každý prvek algebry E bude reprezentován jako uspořádaná n-tice nul a jedniček. Symetrická diference na jednotlivých složkách pak bude definována jako sčítání modulo 2, tedy $0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0$, $1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1$. Při této definici jsou splněny podmínky (d_1) – (d_4) z Definice diferenční algebry, jelikož operace $\oplus$ je asociativní, nula je vůči ní neutrální prvek a $0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0$.

Zkonstruovali jsme tedy diferenční algebru, jejíž nosič má stejnou mohutnost jako nosič dané algebry D. Podle Tvrzení 2.19 jsou už spolu tyto algebry izomorfní. □

Tvrzení 2.22. *Třída $\mathcal{DA}$ je kvazivarieta.*

Důkaz Podle Definice 1.8 si stačí uvědomit, že jsme třídu $\mathcal{DA}$ definovali pomocí kvaziidentit. Podmínky (d_1) – (d_3) jsou atomické formule, a tudíž kvaziidentity. Podmínka (d_4) je potom s využitím kontrapozice implikace ekvivalentní formuli $(\mathbf{1} = \mathbf{0} \Rightarrow \forall x : x = \mathbf{0})$, přičemž po vynechání obecného kvantifikátoru získáme formuli: $(\mathbf{1} = \mathbf{0} \Rightarrow x = \mathbf{0})$, která už je kvaziidentitou. □

Věta 2.23. *Každou alespoň dvouprvkovou diferenční algebru lze vnořit do kartézské mocniny dvouprvkové diferenční algebry.*

Důkaz Nechť D je diferenční algebra. Pokud je D konečná, použijeme předchozí Tvrzení. Nechť je tedy D nekonečná, její mohutnost označme κ. Vezměme κ exemplářů dvouprvkové diferenční algebry a vytvořme jejich kartézský součin. Tím jsme získali diferenční algebru mohutnosti 2^κ, označme ji C. To, že C je diferenční algebra plyne z toho, že dle předchozího tvrzení je třída $\mathcal{DA}$ kvazivarieta a ta je podle Věty 1.11 uzavřena na kartézské součiny. Uvažme nějakou podmožinu $A \subset \dot{C}$ mohutnosti κ, obsahující prvky $\mathbf{0}_C, \mathbf{1}_C$. V dalším kroku vytvořme množinu $B = A \cup \{x \diamond y; x, y \in A\}$. B je podalgebra algebry C (uzavřenost na operaci $\diamond$ jsme zajistili rozšířením množiny A). Zbývá ukázat, že má mohutnost κ. To ale plyne z toho, že jsme do množiny A přidali nejvýše $\kappa \cdot \kappa$ nových prvků a ze vztahů $\kappa \cdot \kappa = \kappa + \kappa = \kappa$ platících pro každý nekonečný kardinál.

Nyní již můžeme podle Tvrzení 2.19 izomorfně zobrazit D na B, příslušné zobrazení je tudíž vnoření D do C. □

Tvrzení 2.24. *Třída $\mathcal{DA}$ je minimální kvazivarieta obsahující netriviální algebru.*

Důkaz Buď $\mathcal{K}$ kvazivarieta, která obsahuje netriviální algebru. Tato algebra musí být alespoň dvouprvková, označme ji A. Dvouprvková DA je tedy její podalgebrou. Vzhledem k uzavřenosti kvazivariet na kartézské součiny musí být ve třídě $\mathcal{K}$ všechny kartézské mocniny algebry A. Podle předchozí věty jde ovšem každou diferenční algebru vnořit do kartézské mocniny dvouprvkové diferenční algebry, tudíž ji lze vnořit i do nějaké kartézské mocniny algebry A. Tedy $\mathcal{DA} \subseteq \mathcal{K}$. $\square$

3. Ortokomlementární diferenční svazy

V této kapitole se budeme věnovat studiu operace symetrické diference s doplňující svazovou strukturou. Za tuto strukturu byly zvoleny ortokomplementární svazy (viz Definice 1.23), kterým je v posledních letech (především v souvislosti s kvantovou logikou) věnována značná pozornost. Stejný postup je použit i v článku [16]. Jak se ukazuje, je tato struktura zvolena vhodně, protože přítomnost operace symetrické diference si vynucuje ortomodularitu příslušného svazu (viz Tvrzení 3.5), a dají se tak použít některé algebraické metody vyvinuté ke studiu ortomodulárních svazů. Zároveň si můžeme klást přirozené otázky, zda tvrzení platná pro třídu $\mathcal{OML}$ platí i pro takto vytvořenou třídu (pro niž budeme používat označení $\mathcal{ODL}$), případně jak upravit jejich znění takovým způsobem, aby i pro ortokomplementární diferenční svazy platila.

Tento přístup ke studiu symetrické diference v ortomodulárních svazech je poměrně nový (poprvé se objevuje ve výše citovaném článku), ostatní autoři se při studiu této problematiky omezili na jazyk $(\wedge, \vee, ^{\perp})$. Rozšířením signatury o symbol $\triangle$ pro operátor symetrické diference (mající vlastnosti popsané v předchozí kapitole) dostaneme zcela novou třídu algeber (která mimochodem obsahuje třídu $\mathcal{BA}$).

Poznamenejme ještě, že jako doplňující struktura by mohla být zvolena i nějaká třída posetů, například ortokomplementární posety (viz příslušná podkapitola). Tento přístup zvolili Prof. Pták a RNDr. Matoušek v připravovaném článku. Dospěli tak k obecnějším strukturám, jejichž studium je (stejně jako studium třídy $\mathcal{ODL}$) teprve v počátcích.

Definice 3.1. Buď $L = (X, \wedge, \vee, ^{\perp}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \triangle)$, kde $(X, \wedge, \vee, ^{\perp}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ je OCL a $\triangle : X^2 \to X$ je binární operace. Pak L nazýváme *ortokomplementární diferenční svaz* (zkr. ODL), jestliže pro libovolná $x, y, z \in X$ platí následující podmínky:
(D_1) $x \triangle (y \triangle z) = (x \triangle y) \triangle z$,
(D_2) $x \triangle \mathbf{1} = x^{\perp}$, $\mathbf{1} \triangle x = x^{\perp}$,
(D_3) $x \triangle y \leq x \vee y$.
Třídu všech ortokomplementárních diferenčních svazů budeme značit $\mathcal{ODL}$.

Buď $L = (X, \wedge, \vee, ^{\perp}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \triangle)$ ODL. Pak OCL $(X, \wedge, \vee, ^{\perp}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ budeme značit L_{supp} a nazývat jej *supportem* L. ODL L pak budeme často ztotožňovat s dvojicí $(L_{\mathrm{supp}}, \triangle)$. Přijměme úmluvu, že operace $\triangle$ má přednost před operacemi $\wedge$, $\vee$; tedy např. $x \wedge y \triangle z$ znamená $x \wedge (y \triangle z)$.

Tvrzení 3.2. *Buď $L = (X, \wedge, \vee, ^{\perp}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \triangle)$ ODL. Pak algebra $D_L = (X, \triangle, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ je diferenční algebra. Navíc, pro $x \in L$ je $x^{\perp_{D_L}} = x^{\perp_L}$.*

Důkaz Především si uvědomme, že z vlastnosti (D_2) plyne $\mathbf{1} \triangle \mathbf{1} = \mathbf{1}^{\perp} = \mathbf{0}$. Nyní dokážeme vlastnosti (d_2) a (d_3) z Def. 2.1. Buď tedy $x \in L$.
(d_2) $x \triangle \mathbf{0} = x \triangle (\mathbf{1} \triangle \mathbf{1}) = (x \triangle \mathbf{1}) \triangle \mathbf{1} = x^{\perp} \triangle \mathbf{1} = (x^{\perp})^{\perp} = x$.
(d_3) Nejprve ukažme, že $x^{\perp} \triangle x^{\perp} = x \triangle x$:

$$x^{\perp} \triangle x^{\perp} = (x \triangle \mathbf{1}) \triangle (\mathbf{1} \triangle x) = x \triangle (\mathbf{1} \triangle \mathbf{1}) \triangle x = x \triangle \mathbf{0} \triangle x = x \triangle x.$$

Nyní platí jednak $x \triangle x \leq x \vee x = x$, jednak $x \triangle x = x^{\perp} \triangle x^{\perp} \leq x^{\perp} \vee x^{\perp} = x^{\perp}$. Tedy $x \triangle x \leq x \wedge x^{\perp} = \mathbf{0}$.

Konečně $x^{\perp_{D_L}} = x \triangle_{D_L} \mathbf{1} = x \triangle_L \mathbf{1} = x^{\perp_L}$. □

Důsledek 3.3. *Buď L konečný ODL. Pak L má 2^n prvků.*

Důkaz Plyne z Tvrzení 3.2 a Tvrzení 2.4. $\square$

Tvrzení 3.4. *Buď L ODL, $x, y \in L$. Pak*
$$(x \wedge y^\perp) \vee (y \wedge x^\perp) \leq x \triangle y \leq (x \vee y) \wedge (x \wedge y)^\perp.$$

Důkaz V následujících úvahách využijeme podmínku (D_3) a Tvrzení 2.7, (d), (e): $x \triangle y \leq x \vee y$, $x \triangle y = x^\perp \triangle y^\perp \leq x^\perp \vee y^\perp = (x \wedge y)^\perp$, tudíž $x \triangle y \leq (x \vee y) \wedge (x \wedge y)^\perp$. Dále $(x \triangle y)^\perp = x^\perp \triangle y \leq x^\perp \vee y = (x \wedge y^\perp)^\perp$, z čehož plyne $x \wedge y^\perp \leq x \triangle y$ díky podmínce (OC_3) z definice OCL. Analogicky se dokáže $x^\perp \wedge y \leq x \triangle y$, a tedy $(x \wedge y^\perp) \vee (y \wedge x^\perp) \leq x \triangle y$. $\square$

Tvrzení 3.5. *Buď L ODL. Pak jeho support L_{supp} je OML.*

Důkaz Buďte $x, y \in L$, $x \leq y$, $y \wedge x^\perp = \mathbf{0}$. Dokážeme, že pak $y = x$.

Protože $x \leq y$, platí $(x \wedge y^\perp) \vee (y \wedge x^\perp) = y \wedge x^\perp$, $(x \vee y) \wedge (x \wedge y)^\perp = y \wedge x^\perp$. Podle Tvrzení 3.4 to znamená, že $y \wedge x^\perp \leq x \triangle y \leq y \wedge x^\perp$, a musí tudíž být $x \triangle y = y \wedge x^\perp$. Podle předpokladu tedy $x \triangle y = \mathbf{0}$. To ale dle Tvrzení 2.7, (j), znamená, že $x = y$. $\square$

Nyní všechny pojmy definované pro ortomodulární svazy, resp. pro diferenční algebry, lze uvažovat pro libovolný ODL L tím způsobem, že je vztáhneme k jeho supportu L_{supp}, resp. k diferenční algebře D_L.

Tedy např., je-li L ODL, $x, y \in L$, pak řekneme, že prvky x, y *komutují* (v L), jestliže komutují v OML L_{supp}. Je-li $X \subseteq L$, pak řekneme, že X je *nezávislá množina* v L, je-li X nezávislá množina v diferenční algebře D_L (viz Definice 2.9).

Tvrzení 3.6. *Buď L ODL, $x, y \in L$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*
(a) $x \, C \, y$;
(b) $x \triangle y = (x \wedge y^\perp) \vee (y \wedge x^\perp)$;
(c) $x \triangle y = (x \vee y) \wedge (x \wedge y)^\perp$;
(d) $x \, C \, x \triangle y$.

Důkaz (a)⇒(b), (a)⇒(c) Nechť tedy $x \, C \, y$. Pak prvky x a y leží v téže Booleově podalgebře svazu L a tudíž $(x \wedge y^\perp) \vee (y \wedge x^\perp) = (x \vee y) \wedge (x \wedge y)^\perp$, a rovnosti $x \triangle y = (x \wedge y^\perp) \vee (y \wedge x^\perp) = (x \vee y) \wedge (x \wedge y)^\perp$ plynou přímo z Tvrzení 3.4.
(b)⇒(d), (c)⇒(d) Nechť např. $x \triangle y = (x \wedge y^\perp) \vee (y \wedge x^\perp)$. Protože $x \, C \, x \wedge y^\perp$, $x \, C \, y \wedge x^\perp$, platí $x \, C \, (x \wedge y^\perp) \vee (y \wedge x^\perp)$, a tedy $x \, C \, x \triangle y$.
(d)⇒(a) Nechť $x \, C \, x \triangle y$. Z implikace (a)⇒(d) máme $x C x \triangle (x \triangle y)$; přitom $x \triangle (x \triangle y) = y$. $\square$

Ukažme nyní dva jednoduché příklady ortokomplementárních diferenčních svazů.

Tvrzení 3.7. *Buď B BA. Pak existuje právě jedno zobrazení $\triangle : \dot{B} \times \dot{B} \to \dot{B}$ splňující všechny podmínky* (D_1), (D_2) *a* (D_3) *z Definice 3.1.*

Důkaz Pro důkaz existence definujme zobrazení $\triangle$ jakožto standardní symetrickou diferenci v Booleově algebře, tj. $x \triangle y = (x \wedge y^{\perp}) \vee (y \wedge x^{\perp})$. Vlastnosti ($\mathrm{D}_1$), ($\mathrm{D}_2$) a ($\mathrm{D}_3$) jsou pak samozřejmě splněny.

Dokažme jednoznačnost. Buď tedy $\triangle_1 : \dot{B} \times \dot{B} \to \dot{B}$ zobrazení též splňující podmínky (D_1), (D_2) a (D_3), tj. dvojice $(B, \triangle_1)$ je ODL. Jsou-li nyní $x, y \in B$, pak $x\ C\ y$, a dle Tvrzení 3.6 platí $x \triangle_1 y = (x \wedge y^{\perp}) \vee (y \wedge x^{\perp}) = x \triangle y$. □

Každou Booleovu algebru B budeme chápat též jako ODL s jednoznačně definovanou operací $\triangle$.

Příklad 3.8. Buď $L = \mathrm{MO}_3$ s prvky $\{0, 1, x, x^{\perp}, y, y^{\perp}, z, z^{\perp}\}$. Pak existuje právě jedno zobrazení $\triangle : \dot{L} \times \dot{L} \to \dot{L}$ takové, že $x \triangle y = z$ a $(L, \triangle)$ je ODL. Vzniklý ODL budeme opět značit MO_3.

Následující věta zodpovídá otázku, proč v obecném OML L nelze definovat operaci $\triangle$ tak, že bychom položili $x \triangle y = (x \wedge y^{\perp}) \vee (y \wedge x^{\perp})$, resp. $x \triangle y = (x \vee y) \wedge (x \wedge y)^{\perp}$:

Tvrzení 3.9. *Buď L OML. Pro $x, y \in L$ položme $x \Delta_1 y = (x \wedge y^{\perp}) \vee (y \wedge x^{\perp})$, $x \Delta_2 y = (x \vee y) \wedge (x \wedge y)^{\perp}$. Buď $i \in \{1, 2\}$. Pak platí:*
operace Δ_i je asociativní právě když L je Booleova algebra.

Důkaz Je-li L Booleova algebra, pak samozřejmě pro libovolné prvky $x, y \in L$ platí $x \Delta_1 y = x \Delta_2 y$ a operace Δ_1 je asociativní.

Obráceně, nechť např. operace Δ_1 je asociativní, tj. splňuje podmínku (D_1). Podmínky (D_2) a (D_3) splňuje samozřejmě vždy. Tedy dvojice (L, Δ_1) je ODL. Z Tvrzení 3.6 nyní plyne, že pro každé $x, y \in L$ platí $x\ C\ y$, tj. L je BA. □

Poznamenejme, že Tvrzení 3.9 je též dokázáno přímo (tj. bez použití pojmu ODL) v knize [1], strana 272.

Pokračujme nyní ve studiu vztahu mezi operací $\triangle$ a komutativností v ODL.

Tvrzení 3.10. *Buď L ODL, $x, y \in L$. Pak*
$x \leq y \Leftrightarrow x \triangle y = y \wedge x^{\perp}$;
$x \perp y \Leftrightarrow x \triangle y = x \vee y$.

Důkaz Nechť nejprve $x \leq y$. Pak platí $x\ C\ y$, $x \wedge y^{\perp} = \mathbf{0}$, a tedy podle Tvrzení 3.6 platí $x \triangle y = (x \wedge y^{\perp}) \vee (y \wedge x^{\perp}) = y \wedge x^{\perp}$. Obráceně, nechť $x \triangle y = y \wedge x^{\perp}$. Pak $x = (x \triangle y) \triangle y \leq (x \triangle y) \vee y = (y \wedge x^{\perp}) \vee y = y$.
Druhou ekvivalenci dokážeme s využitím první takto:
$x \perp y \Leftrightarrow x \leq y^{\perp} \Leftrightarrow x \triangle y^{\perp} = y^{\perp} \wedge x^{\perp} \Leftrightarrow (x \triangle y^{\perp})^{\perp} = (y^{\perp} \wedge x^{\perp})^{\perp} \Leftrightarrow x \triangle y = y \vee x$,
neboť $(x \triangle y^{\perp})^{\perp} = x \triangle y^{\perp\perp} = x \triangle y$. □

Lemma 3.11. *Buď L OML, buďte $x, y, x_1, x_2 \in L$, přičemž $y = x_1 \vee x_2$, $x_1 \leq x$, $x_2 \leq x^{\perp}$. Pak $x\ C\ y$, $x_1 = y \wedge x$, $x_2 = y \wedge x^{\perp}$.*

Důkaz Protože $x_1 \leq x$, $x_2 \leq x^\perp$, je $x \; C \; x_1$, $x \; C \; x_2$. Odtud i $x \; C \; x_1 \vee x_2$, tj. $x \; C \; y$.

Protože $x_2 \leq x^\perp$, platí $x \leq x_2^\perp$. Protože dále $x_1 \leq x$, platí $x_1 \leq x_2^\perp$, a tudíž $x_1 \; C \; x_2$. Tedy prvky x_1, x_2, x po dvou komutují. Podle Tvrzení 1.45 pak platí

$y \wedge x = (x_1 \vee x_2) \wedge x = (x_1 \wedge x) \vee (x_2 \wedge x) = x_1 \vee \mathbf{0} = x_1,$

$y \wedge x^\perp = (x_1 \vee x_2) \wedge x^\perp = (x_1 \wedge x^\perp) \vee (x_2 \wedge x^\perp) = \mathbf{0} \vee x_2 = x_2.$ □

Tvrzení 3.12. *Buď L ODL, $x, y, z \in L$, $x \; C \; y$, $x \; C \; z$. Pak $x \; C \; y \bigtriangleup z$ a $x \wedge y \bigtriangleup z = (x \wedge y) \bigtriangleup (x \wedge z)$.*

Důkaz Z komutativnosti plyne, že $y = (y \wedge x) \vee (y \wedge x^\perp)$, $z = (z \wedge x) \vee (z \wedge x^\perp)$. Protože $(y \wedge x) \perp (y \wedge x^\perp)$, $(z \wedge x) \perp (z \wedge x^\perp)$, z Tvrzení 3.10 plyne, že

$y = (y \wedge x) \bigtriangleup (y \wedge x^\perp)$, $z = (z \wedge x) \bigtriangleup (z \wedge x^\perp)$.

Nyní

$y \bigtriangleup z = [(y \wedge x) \bigtriangleup (y \wedge x^\perp)] \bigtriangleup [(z \wedge x) \bigtriangleup (z \wedge x^\perp)] = [(y \wedge x) \bigtriangleup (z \wedge x)] \bigtriangleup [(y \wedge x^\perp) \bigtriangleup (z \wedge x^\perp)].$

Přitom $(y \wedge x) \bigtriangleup (z \wedge x) \leq (y \wedge x) \vee (z \wedge x) \leq x$. Analogicky $(y \wedge x^\perp) \bigtriangleup (z \wedge x^\perp) \leq x^\perp$. Je tedy $[(y \wedge x) \bigtriangleup (z \wedge x)] \perp [(y \wedge x^\perp) \bigtriangleup (z \wedge x^\perp)]$. Dle Tvrzení 3.10 tedy

$y \bigtriangleup z = [(y \wedge x) \bigtriangleup (z \wedge x)] \vee [(y \wedge x^\perp) \bigtriangleup (z \wedge x^\perp)].$

Konečně, protože $(y \wedge x) \bigtriangleup (z \wedge x) \leq x$, $(y \wedge x^\perp) \bigtriangleup (z \wedge x^\perp) \leq x^\perp$, tvrzení plyne z Lemma 3.11. □

Tvrzení 3.13. *Buď L ODL, $x \in L$. Pak množina $C(x)$ (viz Definice 1.31) je podalgebra v L.*

Důkaz Podle Tvrzení 1.44 je množina $C(x)$ podalgebra v L_{supp}. Uzavřenost na operaci $\bigtriangleup$ plyne z Tvrzení 3.12. □

Tvrzení 3.14. *Buď L, $x, y \in L$. Pak*
(a) $x \vee x \bigtriangleup y = x \vee y$;
(b) $x \wedge x \bigtriangleup y = x \wedge y^\perp$.

Důkaz (a) Platí $(x \vee x \bigtriangleup y) \; C \; x$, $(x \vee x \bigtriangleup y) \; C \; (x \bigtriangleup y)$, a tudíž podle Tvrzení 3.12 též $(x \vee x \bigtriangleup y) \; C \; (x \bigtriangleup (x \bigtriangleup y))$. Protože ale $x \bigtriangleup (x \bigtriangleup y) = y$, dokázali jsme, že $(x \vee x \bigtriangleup y) \; C \; y$. Odtud pak

$x \vee x \bigtriangleup y = [(x \vee x \bigtriangleup y) \vee y] \wedge [(x \vee x \bigtriangleup y) \vee y^\perp] = (x \vee y) \wedge [(x \vee y^\perp) \vee x \bigtriangleup y].$

Konečně $(x \vee y^\perp) \vee x \bigtriangleup y \geq (x \bigtriangleup y^\perp) \vee x \bigtriangleup y = (x \bigtriangleup y)^\perp \vee x \bigtriangleup y = \mathbf{1}$. Musí tedy přímo být $(x \vee y^\perp) \vee x \bigtriangleup y = \mathbf{1}$. To tedy znamená, že

$x \vee x \bigtriangleup y = (x \vee y) \wedge [(x \vee y^\perp) \vee x \bigtriangleup y] = (x \vee y) \wedge \mathbf{1} = x \vee y..$

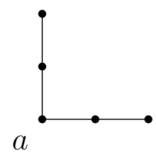
(b) Platí $x \wedge x \bigtriangleup y = (x \wedge x \bigtriangleup y)^{\perp\perp} = (x^\perp \vee x^\perp \bigtriangleup y)^\perp = (x^\perp \vee y)^\perp = x \wedge y^\perp$. □

Poznamenejme, že bod (a) předchozího tvrzení je zesílením podmínky (D_3) z definice ODL.

Tvrzení 3.15. *Buď L ODL, $x \in L$. Pak buď x leží v právě jednom bloku, nebo aspoň ve třech blocích.*

Důkaz Sporem. Nechť x leží v právě dvou blocích B_1, B_2. Pak existují prvky $y \in B_1$, $z \in B_2$ takové, že y, z nekomutují. Protože $x\ C\ y$, $x\ C\ z$, podle Tvrzení 3.12 též $x\ C\ (y \triangle z)$. Musí tedy být buď $y \triangle z \in B_1$, nebo $y \triangle z \in B_2$. Vzhledem k symetrii můžeme předpokládat, že $y \triangle z \in B_1$. Protože též $y \in B_1$, platí $y\ C\ (y \triangle z)$. Podle Tvrzení 3.6 pak $y\ C\ z$, což je spor. $\square$

Poznamenejme, že má-li OML L 2^n prvků, pak ještě nemusí být supportem pro nějaký ODL K. Za L stačí vzít např. horizontální sumu OML s následujícím Greechieho diagramem:



a dvou exemplářů čtyřprvkové Booleovy algebry. V OML L pak prvek a leží v právě dvou blocích. Podle Tvrzení 3.15 pak L nemůže být supportem pro žádný ODL.

Právě sestrojený OML L má 16 ($= 2^4$) prvků. Poznamenejme ještě, že L má nejmenší možný počet prvků. (Přesněji: číslo 4 je nejmenší přirozené číslo n takové, že existuje OML L s 2^n prvky jež není supportem pro žádný ODL.) Je-li totiž K OML s osmi prvky, pak buď K je Booleova algebra, nebo K je MO_3. Jiným příkladem OML, který není ze stejného důvodu supportem pro nějaký ODL je Dilworthův svaz, jehož diagram je v podkapitole věnované Greechieho diagramům na Obrázku 2 vpravo.

Tvrzení 3.16. *Buď L ODL, $c \in C(L)$. Pak algebra L^c je opět ODL. Navíc, $(L^c)_{\text{supp}} = (L_{\text{supp}})^c$.*

Důkaz Podle Lemmatu 1.51 je L^c OML. Stačí tedy ukázat, že jsou splněny podmínky (D_1), (D_2) a (D_3) z Definice 3.1. Přitom platnost podmínek (D_1) a (D_3) se nahlédne lehce, neboť se uvedené vlastnosti přenesou ze svazu L na podsvaz L^c. Zbývá tedy pouze ověřit podmínku (D_2). Buď tedy $x \in [\mathbf{0}_L, c]$. Pak $x \triangle_{L^c} \mathbf{1}_{L^c} = x \triangle c = c \wedge x^\perp = x^{\perp_c}$. Rovnost $\mathbf{1}_{L^c} \triangle_{L^c} x = x^{\perp_c}$ plyne z komutativity operace $\triangle$.

Konečně, rovnost $(L^c)_{\text{supp}} = (L_{\text{supp}})^c$ je zřejmá. $\square$

3.1. Množinová reprezentovatelnost ODL

Další z mnoha zajímavých otázek týkající se třídy $\mathcal{ODL}$ je problém množinové reprezentovatelnosti svazů z této třídy. V článku [16] je věnována této tématice kapitola 6, kde je ukázáno, že třída množinově reprezentovatelných ODL tvoří varietu. Shrňme zde výsledky formulované v tomto článku.

Definice 3.17. Buď X nějaká množina, nechť $\Omega \subseteq \mathcal{P}(X)$ (kde $\mathcal{P}(X)$ je množina podmnožin X). Pak dvojici (X, Ω) nazveme *D-okruh*, jestliže

$X \in \Omega$,

$\forall A, B \in \Omega : A \Delta B \in \Omega$ (kde Δ je symetrická diference množin).

Tvrzení 3.18. *Nechť* (X, Ω) *je D-okruh. Pak*
(a) $\emptyset \in \Omega$,
(b) $\forall A \in \Omega : A^c \in \Omega$ *(where* $A^c = \{x \in X; x \notin A\}$*),*
(c) $\forall A, B \in \Omega : A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cup B \in \Omega$.

Důkaz (a) Jelikož $X \in \Omega$, musí i $X \Delta X = \emptyset \in \Omega$
(b) Buď $A \in \Omega$. Pak $X \Delta A = A^c \in \Omega$.
(c) Když $A, B \in \Omega : A \cap B = \emptyset$, tak $A \cup B = A \Delta B \in \Omega$. □

Definice 3.19. Nechť L je ODL. Řekneme, že L je *množinově reprezentovatelný ODL*, jestliže existuje D-okruh (X, Ω) takový, že $(\dot{L}, \leq, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \triangle) \cong (\Omega, \subseteq, \emptyset, X, \Delta)$. Svaz $(\Omega, \subseteq, \emptyset, X, \Delta)$ budeme označovat $\mathcal{L}_{(X,\Omega)}$.

V souladu s anglickým pojmenováním budeme pro množinově reprezentovatelný ODL používat zkratku SRODL (set representable ODL), třídu všech množinově reprezentovatelných ODL pak označíme $\mathcal{SRODL}$.

Tvrzení 3.20. *Buď L ODL. Pak L je množinově reprezentovatelný právě tehdy, když existuje množina M a zobrazení* $f : L \to \mathcal{P}(M)$ *takové, že platí následující podmínky:*
$\forall x, y \in L : x \leq y \Leftrightarrow f(x) \subseteq f(y)$,
$\forall x, y \in L : f(x \triangle_L y) = f(x) \Delta f(y)$.

Důkaz Když L je množinově reprezentovatelný, uvážíme D-okruh (X, Ω), za zobrazení f vezmeme příslušný izomorfismus a uvedené podmínky samozřejmě platí. Stačí tedy dokázat, že uvedené dvě podmínky jsou postačující.

Označme $X = f(\mathbf{1}) \subseteq M$, $\Omega = f(L) = \{f(x); x \in L\}$. Pak z druhé podmínky plyne, že dvojice (X, Ω) je D-okruh. Dále, z první podmínky plyne, že f je izomorfismus posetu $(L, \leq)$ na poset $(\Omega, \subseteq)$. Konečně platí:

$f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0}\Delta_L\mathbf{0}) = f(\mathbf{0})\Delta f(\mathbf{0}) = \emptyset$,

$f(x^\perp) = f(x\Delta_L\mathbf{1}) = f(x)\Delta f(\mathbf{1}) = f(x)\Delta X = (f(x))^c$.

Tedy f je hledaný izomorfismus. □

Definujme nyní ještě některé pojmy, které budeme v následujících tvrzeních potřebovat. Nejprve připomeneme definici ideálu pro ortomodulární svazy a pak zavedeme pojem d-ideálu pro třídu $\mathcal{ODL}$. Pojem ideál (i k němu duální pojem – filtr) by šlo obecněji definovat i pro posety, jelikož jsou ale v centru našeho zájmu především horizontální sumy Booleových algeber (které už jsou ortomodulárními svazy), budeme všechny definice a tvrzení uvádět pro svazové struktury.

Definice 3.21. Buď L $\{0, 1\}$-svaz, $I \subseteq L$, $F \subseteq L$.
Řekneme, že I je *ideál* v L, jestliže jsou splněny následující podmínky (pro každé $x, y \in L$) :

(a) $\mathbf{0}_L \in I$,

(b) $x \in I,\ y \leq x \Rightarrow y \in I$,

(c) $x,\ y \in I \Rightarrow x \vee y \in I$.

Ideál I se nazývá *vlastní*, jestliže $\mathbf{1}_L \notin I$ (nebo ekvivalentně: $I \neq \dot{L}$).

Definice 3.22. Buď L OML, $I \subseteq L$, $F \subseteq L$.
Řekneme, že I je *prvoideál* v L, jestliže
(a) I je ideál v L,
(b) $\forall x \in L$: buď $x \in I$ nebo $x^{\perp} \in I$.

Definice 3.23. Buď L ODL, $I \subseteq L$.
(A) Řekneme, že I je *d-ideál* v L, jestliže jsou splněny následující podmínky (pro každé $x, y \in L$) :
(a) $\mathbf{0}_L \in I$,
(b) $x \in I,\ y \leq x \Rightarrow y \in I$,
(c) $x,\ y \in I \Rightarrow x \bigtriangleup y \in I$.
(B) Řekneme, že I je *d-prvoideál* v L, jestliže platí :
(a) I je d-ideál v L,
(b) $\forall x \in L$: buď $x \in I$ nebo $x^{\perp} \in I$.

Ukažme si, v jakém vzájemném vztahu jsou pojmy ideál a d-ideál.

Tvrzení 3.24. *Buď L ODL. Pak každý ideál v L je rovněž d-ideálem v L.*

Důkaz Buď I ideál v L. Ověřme platnost podmínky (c) z Def. 3.23. Buďte $x, y \in I$. Pak (protože I je ideál) je i $x \vee y \in I$. Jelikož $x \bigtriangleup y \leq x \vee y$, musí též $x \bigtriangleup y \in I$. □

Tvrzení 3.25. *Buď B Booleova algebra, $I \subseteq B$. Pak I je d-ideál v B právě když I je ideál v B.*

Důkaz Jestliže I je ideál v B, pak podle předchozího tvrzení je I rovněž d-ideál. Obráceně, nechť I je d-ideál v B. Buďte $x, y \in I$. Protože B je BA, platí $x \vee y = x \bigtriangleup (y \wedge x^{\perp})$. (S využitím distributivnosti v Booleových algebrách musí totiž být: $x \bigtriangleup (y \wedge x^{\perp}) = (x \wedge (y \wedge x^{\perp})^{\perp}) \vee (x^{\perp} \wedge (y \wedge x^{\perp})) = x \vee (y \wedge x^{\perp}) = (x \vee x^{\perp}) \wedge (x \vee y) = x \vee y$.) Jelikož $y \wedge x^{\perp} \leq y$ a $y \in I$, vidíme, že $y \wedge x^{\perp} \in I$. Podmínka (c) z Def. 3.23 nyní implikuje, že $x \bigtriangleup (y \wedge x^{\perp}) \in I$. To znamená, že $x \vee y \in I$. □

Poznamenejme, že obecně d-ideály nejsou ideály. Např. v ODL MO_3 (viz Obrázek 1) je množina $I = \{\mathbf{0}, x, y, z\}$ d-ideál (dokonce d-prvoideál), ale I není ideál (neobsahuje totiž prvek $x \vee y = \mathbf{0}$.

V článku [16] je dokázána následující charakterizační věta, kterou budeme od této chvíle často využívat. K jejímu důkazu je rozpracována technika využívající ohodnocení příslušného ortokomplementárního diferenčního svazu, kterou zde rovněž ukážeme.

Definice 3.26. Buď L ODL, $e : L \to \{0, 1\}$. Pak e nazveme *ODL-ohodnocení* (zkráceně *ohodnocení* nebo *evaluace*) na L, jestliže jsou splněny následující podmínky pro libovolné $x, y \in L$:
(E_1) $e(\mathbf{1}_L) = 1$,
(E_2) $x \leq y \Rightarrow e(x) \leq e(y)$,
(E_3) $e(x \Delta y) = e(x) \oplus e(y)$.
Označme $\mathcal{E}(L)$ množinu všech ohodnocení na L.

Tvrzení 3.27. *Buď L ODL. Pak L je množinově reprezentovatelný ODL právě tehdy, když platí:*

$$\forall a, b \in L, a \not\leq b \; \exists e \in \mathcal{E}(L) : e(a) = 1, e(b) = 0.$$

Důkaz ($\Rightarrow$) Nechť $L = \mathcal{L}_{(X,\Omega)}$, kde (X, Ω) je svazově uspořádaný D-okruh. Pro $x \in X$ definujme zobrazení $e_x : \Omega \to \{0, 1\}$ takto:

je-li $A \in \Omega$, pak $e_x(A) = 1$ pokud $x \in A$, $e_x(A) = 0$ pokud $x \notin A$.

Dokažme, že takto definované zobrazení e_x je evaluace na L. Pro $A, B \in \Omega$ platí:

$e_x(\mathbf{1}_L) = e_x(X) = 1$;

je-li $A \leq_L B$, pak $A \subseteq B$, a tudíž $e_x(A) \leq e_x(B)$;

k důkazu rovnosti $e_x(A\Delta B) = e_x(A) \oplus e_x(B)$ stačí rozlišit čtyři případy $x \in A$, $x \notin A$ a $x \in B$, $x \notin B$:

Když $x \in A$, $x \in B$, tak $x \notin A\Delta B$, tedy $e_x(A\Delta B) = 0$, $e_x(A) = 1$, $e_x(B) = 1$ a platí $e_x(A\Delta B) = e_x(A) \oplus e_x(B)$.

Když $x \in A$, $x \notin B$, tak $x \in A\Delta B$, tedy $e_x(A\Delta B) = 1$, $e_x(A) = 1$, $e_x(B) = 0$ a opět platí výše uvedená rovnost.

V případě $x \notin A$, $x \in B$ je $x \in A\Delta B$, tedy $e_x(A\Delta B) = 1$ a zároveň $e_x(A) = 0$, $e_x(B) = 1$ a opět platí $e_x(A\Delta B) = e_x(A) \oplus e_x(B)$.

V posledním případě $x \notin A$, $x \notin B$ platí $x \notin A\Delta B$, tudíž $e_x(A\Delta B) = 0$, $e_x(A) = 0$, $e_x(B) = 0$, a proto $e_x(A\Delta B) = e_x(A) \oplus e_x(B)$.

Buďte nyní $A, B \in \Omega$, $A \not\subseteq B$. Pak existuje prvek $x \in A$ takový, že $x \notin B$. Pro tento prvek x platí $e_x(A) = 1$, $e_x(B) = 0$.

($\Leftarrow$) Obráceně, nechť platí podmínka z pravé strany ekvivalence. Pro $x \in L$ označme $f(x) = \{e \in \mathcal{E}(L); e(x) = 1\}$. Ukážeme, že takto definované zobrazení $f : L \to \mathcal{P}(\mathcal{E}(L))$ splňuje obě podmínky z Tvrzení 3.20:

(a) Nechť nejprve $x \leq y$. Nechť $e \in f(x)$, tj. $e(x) = 1$. Podle (E_2) pak $e(x) \leq e(y)$; musí tudíž být $e(y) = 1$ a tedy $e \in f(y)$. Dokázali jsme, že $f(x) \subseteq f(y)$.

Obráceně, nechť $x \not\leq y$. Pak podle našeho předpokladu existuje $e \in \mathcal{E}(L)$ tak, že $e(a) = 1$, $e(b) = 0$. Tudíž $f(x) \not\subseteq f(y)$.

(b) $f(x\Delta_L y) = \{e \in \mathcal{E}(L); e(x\Delta_L y) = 1\} = \{e \in \mathcal{E}(L); e(x) \oplus e(y) = 1\} =$
$= \{e \in \mathcal{E}(L); (e(x) = 1 \text{ .a. } e(y) = 0) \text{ .nebo. } (e(x) = 0 \text{ .a. } e(y) = 1)\} = f(x)\Delta f(y)$. $\square$

Tvrzení 3.28. *Nechť L je ODL.*
(1) Je-li e evaluace na L, pak množina $I_e = \{x \in L;\ e(x) = 0\}$ je d-prvoideál v L.
(2) Obráceně, je-li I d-prvoideál v L, pak zobrazení e_I definované takto:

$e_I(x) = 0$ *pro* $x \in I$, $e_I(x) = 1$ *pro* $x \in L \setminus I$

je evaluace na L.

Důkaz (1) Buď L ODL, e evaluace na L. Ověřme, že $I_e = \{x \in L;\ e(x) = 0\}$ je d-prvoideál v L, nejprve ukažme, že se jedná o d-ideál: Splněnost podmínky $\mathbf{0}_L \in I_e$ plyne z toho, že $e(\mathbf{0}_L) = e(\mathbf{1}_L \bigtriangleup \mathbf{1}_L) = e(\mathbf{1}_L) \oplus e(\mathbf{1}_L) = 1 \oplus 1 = 0$. Podmínka $x \in I_e,\ y \leq x \Rightarrow y \in I_e$ je splněna díky podmínce (E_2) z definice ohodnocení, a konečně podmínka $x,\ y \in I_e \Rightarrow x \bigtriangleup y \in I_e$ platí díky následující úvaze: je-li $x,\ y \in I_e$, pak $e(x) = 0$, $e(y) = 0$ a s využitím podmínky (E_3) musí platit $e(x \bigtriangleup y) = e(x) \oplus e(y) = 0 \oplus 0 = 0$, a tedy $x \bigtriangleup y \in I_e$.

Zbývá ukázat, že I_e je d-prvoideál. Zvolme libovolný prvek $x \in L$, chceme dospět k následujícímu tvrzení: buď $x \in I_e$ nebo $x^\perp \in I_e$. Kdyby $x \in I_e$ a zároveň $x^\perp \in I_e$, tak i $x \triangle x^\perp = \mathbf{1}_L \in I_e$, tedy $e(\mathbf{1}_L) = 0$, což je spor. Pro spor nyní předpokládejme, že $x \notin I_e$, $x^\perp \notin I_e$. Pak ale $e(x) = 1$, $e(x^\perp) = 1$, a tedy $e(x \triangle x^\perp) = e(x) \oplus e(x^\perp) = 1 \oplus 1 = 0$. Potom ale opět $e(\mathbf{1}_L) = 0$, zase jsme dospěli ke sporu. Tudíž právě jeden z prvků x, $x^\perp$ leží v ideálu I_e.

2) Buď I d-prvoideál v L. Ověřme, že výše definované zobrazení e_I je ohodnocení na L. Nejprve splněnost podmínky (E_1): Z toho, že I je d-prvoideál a z faktu $\mathbf{0}_L \in I$ plyne, že $\mathbf{1}_L \notin I$, a tedy $e_I(\mathbf{1}_L) = 1$. Podmínka (E_2): Buď $x \leq y$. Pokud $e_I(y) = 1$, není co dokazovat a platí $e_I(x) \leq e_I(y)$. Když $e_I(y) = 0$, tak $y \in I$ a podle (b) v definici d-ideálu $y \in I,\ x \leq y \Rightarrow x \in I$ a tedy $e_I(x) = 0$. Kvůli podmínce (E_3) $e(x\Delta y) = e(x) \oplus e(y)$ rozlišme čtyři případy:
Když $x \in I$, $y \in I$, tak $x\Delta y \in I$, tedy $e(x\Delta y) = 0$, $e(x) = 0$, $e(y) = 0$ a platí $e(x\Delta y) = e(x) \oplus e(y)$.
V případě $x \in I$, $y \notin I$ díky tomu, že I je d-prvoideál platí $y^\perp \in I$, a tudíž $x\Delta y^\perp \in I$. Ovšem $x\Delta y^\perp = (x\Delta y)^\perp$, tedy $e((x\Delta y)^\perp) = 0$ a $e(x\Delta y) = 1$. Celkem tedy $e(x) = 0$, $e(y) = 1$ a platí $e(x\Delta y) = e(x) \oplus e(y)$.

Zbylé dva případy ($x \notin I$, $y \in I$ a $x \notin I$, $y \notin I$) se dokáží analogicky:
Jestliže $x \notin I$, $y \in I$, pak $x^\perp \in I$, a tudíž $x^\perp\Delta y = (x\Delta y)^\perp \in I$. Tedy $e((x\Delta y)^\perp) = 0$ a $e(x\Delta y) = 1$. Celkem tedy $e(x) = 1$, $e(y) = 0$ a $e(x\Delta y) = e(x) \oplus e(y)$.
V posledním případě $x \notin I$, $y \notin I$, tak $x^\perp\Delta y^\perp = x\Delta y \in I$, tedy $e(x\Delta y) = 0$, $e(x) = 0$, $e(y) = 0$, opět platí $e(x\Delta y) = e(x) \oplus e(y)$. $\square$

Věta 3.29. *Buď L ODL. Pak L je množinově reprezentovatelný ODL právě tehdy, když platí:*

$$\forall x, y \in L, x^\perp \not\leq y : \textit{existuje d-prvoideál } I \textit{ v } L \textit{ takový, že } x, y \in I.$$

Důkaz K důkazu využijeme předchozích dvou tvrzení. Podle prvního z nich pro každé $x, y \in L, x^\perp \not\leq y$ existuje ohodnocení $e \in \mathcal{E}(L)$ takové, že $e(x^\perp) = 1, e(y) = 0$. Díky druhému tvrzení pak můžeme podle tohoto ohodnocení definovat d-prvoideál I v L tak, že $x^\perp \in I$, $y \in I$. Jelikož I je d-prvoideál, musí už platit $x \in I$. $\square$

3.2. Horizontální suma BA

V této podkapitole se seznámíme se zajímavou podtřídou třídy $\mathcal{ODL}$. Bude se jednat o ty ortokomplementární svazy se symetrickou diferencí, které jsou horizontální sumou Booleových algeber. Nejprve si ale uvědomme následující fakt:

Tvrzení 3.30. *Horizontální suma Booleových algeber je ortomodulárním svazem.*

Důkaz Podle Tvrzení 1.55 je každá Booleova algebra ortomodulárním svazem. Horizontální suma ortomodulárních svazů je pak dle 1.30 opět OML. $\square$

Definice 3.31. Označme $\mathcal{HOR}$ třídu všech ODL L takových, že jejich support L_{supp} je horizontální sumou svých bloků.
Tedy $L \in \mathcal{HOR}$ právě když platí tyto dvě podmínky:
L je netriviální ODL, tedy $\mathbf{0}_L \neq \mathbf{1}_L$,
$\forall B_1, B_2 \in \mathrm{Bl}(L) : B_1 \neq B_2 \Rightarrow B_1 \cap B_2 = \{\mathbf{0}_L, \mathbf{1}_L\}$.

Definice 3.32. Buď L horizontální suma BA. Nechť B je nějaký blok v L. Řekneme, že prvek $a \in B$ je *vlastní* prvek bloku B, jestliže $a \neq \mathbf{0}$ .a. $a \neq \mathbf{1}$.

Nabízí se otázka, zda každý OML L, který je horizontální sumou Booleových algeber a $|L| = 2^n$ pro nějaké přirozené číslo n už je supportem pro nějaký ODL M. Obecně tomu tak být nemusí, jak ukáže následující příklad. Před ním uveďme ale ještě pomocné tvrzení:

Tvrzení 3.33. *Nechť $L \in \mathcal{HOR}$, který je tvořen k bloky $B_1, ..., B_k$. Nechť $x \in B_i, y \in B_j, i \neq j$, $1 \leq i, j \leq k$, $x, y \neq \mathbf{0}$, $x, y \neq \mathbf{1}$ (tj. x, y jsou vlastní prvky z různých bloků). Pak prvek $x \triangle y \notin B_i$, $x \triangle y \notin B_j$.*

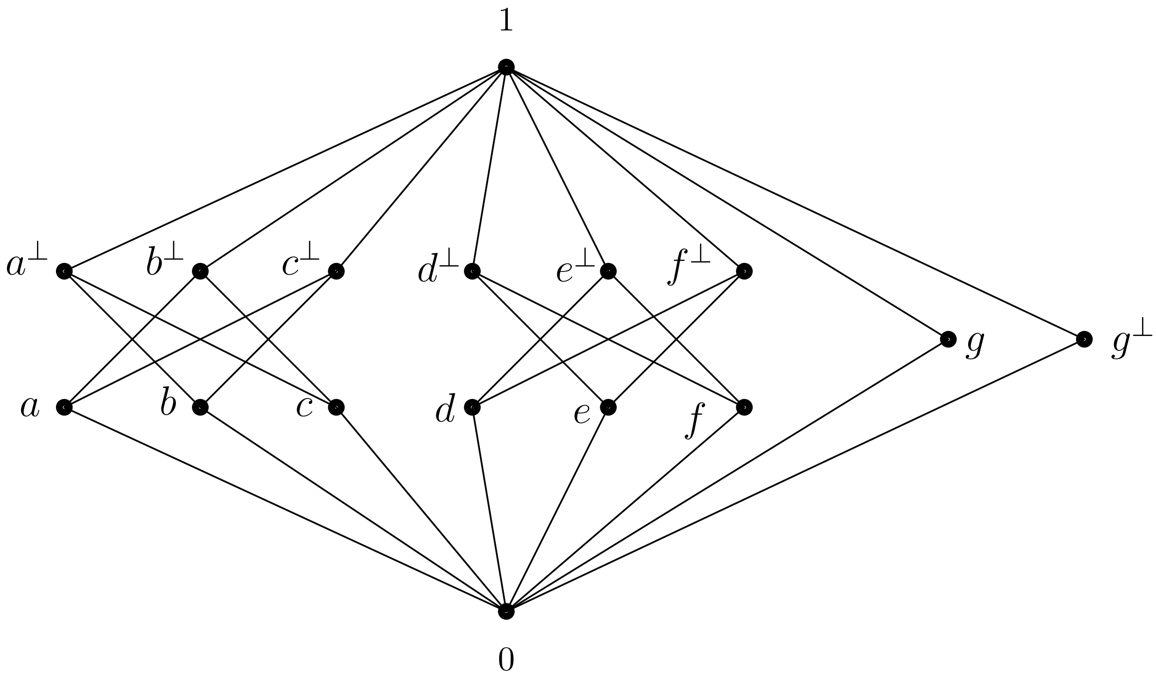
Důkaz Nechť $x \triangle y = z$. Podle bodu (g) Tvrzení 2.7 platí $x \triangle z = y$. Kdyby $z \in B_i$, tak by vzhledem k uzavřenosti Booleových algeber na symetrickou diferenci muselo platit $y = x \triangle z \in B_i$, což je spor. K obdobnému sporu dospějeme, pokud $z \in B_j$, pak totiž $x = y \triangle z \in B_j$. $\square$

Příklad 3.34. Buď L horizontální suma dvou osmiprvkových Booleových algeber a jedné čtyřprvkové Booleovy algebry. Pak L není supportem pro žádný ODL.

Důkaz Uvažme výše uvedený OML L, bloky odpovídající osmiprvkovým Booleovým algebrám označme B_1, B_2, blok odpovídající čtyřprvkové BA označme B_3. Uvědomme si, že L má 16 prvků ($\mathbf{0}_L$, $\mathbf{1}_L$, 6 vlastních prvků z bloku B_1, 6 vlastních prvků z bloku B_2, 2 vlastní prvky z bloku B_3). Zvolme nyní libovolně 3 různé vlastní prvky x, y, z z bloku B_1 a vlastní prvek u z bloku B_2. Vlastní prvky bloku B_3 označme v a $v^\perp$.

Nechť $\triangle$ je operace činící z L ODL. Zaměřme svoji pozornost k prvkům $x \triangle u$, $y \triangle u$, $z \triangle u$. Podle Tvrzení 3.33 nemůže být žádný z těchto prvků v bloku B_1 ani B_2. Jediným zbývajícím blokem ve svazu L je B_3, všechny tyto prvky tedy leží v něm. Žádný ze trojice prvků $x \triangle u$, $y \triangle u$, $z \triangle u$ navíc nemůže být roven $\mathbf{0}_L$ či $\mathbf{1}_L$, protože $\mathbf{0}_L \in B_1$, $\mathbf{1}_L \in B_1$. Alespoň 2 prvky z $x \triangle u$, $y \triangle u$, $z \triangle u$ jsou tedy rovny jednomu z prvků v, $v^\perp$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že např. $x \triangle u = v$, $y \triangle u = v$. Potom ale $x \triangle u = y \triangle u$, a dle Tvrzení 2.7 (h) (s využitím komutativity operace $\triangle$) $x = y$. To je ale spor s tím, že jsme prvky x, y, z volili různé. $\square$

Zaveďme nyní pojmy HBA-posloupnost a ODL-posloupnost, které popisují ortomodulární svazy vytvořené jako horizontální sumu Booleových algeber. Jednotlivé prvky posloupnosti popisují počet prvků v Booleových algebrách, jejichž horizontální suma tvoří výsledný ortomodulární svaz. Omezíme se na konečné horizontální sumy, vystačíme tedy s konečnými posloupnostmi.



Obrázek 5: Horizontální suma BA, která není supportem pro žádný ODL.

Definice 3.35. *HBA-posloupností* nazveme posloupnost $2^{k_1}, ..., 2^{k_m}$ takovou, že

$$\sum_{i=1}^{m} (2^{k_i} - 2) = 2^n - 2.$$

ODL-posloupnost bude taková HBA-posloupnost, že OML, který popisuje, je už supportem pro nějaký ODL.

Jelikož u OML, který je horizontální sumou Booleových algeber, nezáleží na pořadí jednotlivých bloků, budeme vždy předpokládat, že v HBA-posloupnosti jsou její prvky uspořádány sestupně, tj. je-li $2^{k_1}, ..., 2^{k_m}$ HBA-posloupnost, pak $2^{k_1} \geq 2^{k_2} \geq ... \geq 2^{k_m}$.

Tvrzení 3.36. *Každá HBA-posloupnost musí mít lichý počet prvků.*

Důkaz Buď $2^{k_1}, ..., 2^{k_m}$ HBA-posloupnost. Ze vzorce definujícího HBA-posloupnost plyne:

$$2^{k_1} + ... + 2^{k_m} = 2^n - 2 + 2 \cdot m,$$

tedy

$$2^{k_1} + ... + 2^{k_m} = 2^n + 2(m - 1).$$

Po vydělení obou stran rovnosti dvěma dostaneme

$$2^{k_1 - 1} + ... + 2^{k_m - 1} = 2^{n-1} + (m - 1).$$

Jelikož $2^{k_1-1} + ... + 2^{k_m-1}$ je sudé a 2^{n-1} je rovněž sudé, musí být sudé i $(m - 1)$, a tedy m je liché. $\square$

Jak je na základě výše uvedeného příkladu zřejmé, ne každá HBA-posloupnost je zároveň ODL-posloupností. Ve zmíněném případě problém spočíval v tom, že v příslušném

OML byly 2 velké bloky a pouze jeden zbývající malý, do nějž se nemohly vtěsnat symetrické diference dvojic prvků z velkých bloků tak, aby zůstaly v platnosti všechny charakteristické vlastnosti operace $\triangle$. Můžeme vyslovit následující obecnější tvrzení:

Tvrzení 3.37. *Buď $H = 2^{k_1}, ..., 2^{k_m}$ HBA-posloupnost, $m \geq 3$. Pokud $2^{k_1} - 2 > \sum_{i=3}^{m} (2^{k_i} - 2)$, tak H není ODL-posloupností.*

Důkaz Buď L OML odpovídající HBA-posloupnosti H. Nechť B_1 je blok odpovídající prvnímu členu posloupnosti, je to blok maximální velikosti v L (vzhledem k tomu, že každá HBA-posloupnost je uspořádána sestupně) a má $2^{k_1} - 2$ vlastních prvků. Druhému členu posloupnosti nechť odpovídá blok B_2. Zvolme nějaký vlastní prvek $a \in B_2$ libovolně. Pak pro každý vlastní prvek $x \in B_1$, $x \triangle a \notin B_1$, $x \triangle a \notin B_2$. Pokud zvolíme různé vlastní prvky $x, y \in B_1$, podle Tvrzení 2.7 (h) musejí být různé i prvky $x \triangle a$, $y \triangle a$. Těchto prvků je $2^{k_1} - 2$ a musejí se (podle Tvrzení 3.33) rovnat různým vlastním prvkům bloků $B_3, ..., B_m$. Pokud je tedy $2^{k_1} - 2 > \sum_{i=3}^{m} (2^{k_i} - 2)$, nelze na daném OML dodefinovat operaci symetrické diference. $\square$

Ukažme si nyní jednu metodu konstrukce svazů ze třídy $\mathcal{HOR}$.

Definice 3.38. Buď B netriviální BA, $\mathcal{B} \subseteq \mathrm{Sub}(B)$. Řekneme, že $\mathcal{B}$ je *rozklad* algebry B, platí-li:
$\cup\mathcal{B} = B$,
$\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} : B_1 \neq B_2 \Rightarrow B_1 \cap B_2 = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$,
jestliže $|B| \geq 4$, pak $\forall B_1 \in \mathcal{B} : |B_1| \geq 4$.

Tvrzení 3.39. *Buď B BA, $\mathcal{B}$ rozklad algebry B. Nechť OML K je horizontální sumou všech algeber ze systému $\mathcal{B}$. Pro $x, y \in \dot{K}$ $(= \dot{B})$ položme $x \triangle y = x \triangle_B y$. Pak dvojice $L_{\mathcal{B}} = (K, \triangle)$ je ODL.*

Důkaz Podmínky (D_1) a (D_2) jsou zřejmé, jelikož operace $\triangle$ i operace $^\perp$ se realizují v B i v $L_{\mathcal{B}}$ stejně. Dokážeme tedy zbývající podmínku (D_3) :

Buďte $x, y \in \dot{B}$. Existuje-li $B_1 \in \mathcal{B}$ tak, že $x, y \in B_1$, pak $x \vee_K y = x \vee_B y$, a tedy $x \triangle y = x \triangle_B y \leq x \vee_B y = x \vee_K y$. jestliže takový blok B_1 neexistuje, pak $x \vee_K y = \mathbf{1}$, a nerovnost $x \triangle y \leq x \vee_K y$ platí automaticky. $\square$

Příklad 3.40. Buď B Booleova algebra taková, že $|B| = 32$. Pak B lze rozložit pomocí výše popsané konstrukce tak, že výsledným ODL je horizontální suma pěti osmiprvkových Booleových algeber.

Důkaz K tomu, aby šla B uvedeným způsobem rozložit stačí ukázat, že na ní existuje vhodný rozklad $\mathcal{B}$. Uvažme proto následující podalgebry B_1, B_2, B_3, B_4 a B_5, které budou hledaný rozklad tvořit. Použijeme množinovou reprezentaci Booleových algeber, kde atomy v algebře B budou označeny $1, 2, 3, 4, 5$. Nejmenším prvkem B bude $\emptyset = \mathbf{0}_B$, největším pak $\{1, 2, 3, 4, 5\} = \mathbf{1}_B$ (což budeme zkráceně zapisovat 12345, analogické zkrácení použijeme i pro ostatní prvky algebry B).

- $B_1 = \{\mathbf{0}_B, \mathbf{1}_B, 1, 24, 35, 124, 135, 2345\}$
- $B_2 = \{\mathbf{0}_B, \mathbf{1}_B, 2, 13, 45, 123, 245, 1345\}$
- $B_3 = \{\mathbf{0}_B, \mathbf{1}_B, 3, 14, 25, 134, 235, 1245\}$
- $B_4 = \{\mathbf{0}_B, \mathbf{1}_B, 4, 15, 23, 145, 234, 1235\}$
- $B_5 = \{\mathbf{0}_B, \mathbf{1}_B, 5, 12, 34, 125, 345, 1234\}$

Je zřejmé, že průnikem každých dvou různých podalgeber z rozkladu $\mathcal{B}$ jsou pouze prvky $\{\mathbf{0}_B, \mathbf{1}_B\}$, a tudíž horizontální suma pěti osmiprvkových BA tvoří ODL. Diagram této Booleovy algebry, na kterém jsou jednotlivé podalgebry B_1 až B_5 barevně odlišeny, se nachází jako barevná příloha na konci práce. $\square$

Nyní uveďme některé jednoduché vlastnosti horizontální sumy Booleových algeber, které budeme potřebovat dále:

Tvrzení 3.41. *Buď $L \in \mathcal{HOR}$.*
(a) Buďte $x, y \in L$, $y \leq x$ a nechť $x \in B \in \mathrm{Bl}(L)$. Pak též $y \in B$.
(b) Je-li $x \in L$, $x \notin \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, pak prvek x leží v právě jednom bloku z $\mathrm{Bl}(L)$.
(c) Nechť $n \geq 2$, $x_1, \ldots, x_n \in L$ přičemž $x_i |_L x_j$ pro každé $i \neq j$. Pak každý z prvků $x_1, \ldots, x_n$ leží v právě jednom bloku ze systému $\mathrm{Bl}(L)$.

Důkaz Tvrzení (a): Jelikož $y \leq x$, platí $y \, C \, x$ a prvky x, y musí ležet ve stejném bloku.
Tvrzení (b): Jelikož $L \in \mathcal{HOR}$, jsou jedinými společnými prvky jednotlivých bloků $\mathbf{0}, \mathbf{1}$. Protože prvek x není roven $\mathbf{0}$ ani $\mathbf{1}$, musí ležet v právě jednom bloku.
Tvrzení (c): Z předpokladu "$x_i |_L x_j$ pro každé $i \neq j$" plyne, že žádný z prvků $x_1, \ldots, x_n$ nemůže být roven $\mathbf{0}$ nebo $\mathbf{1}$. Nyní stačí užít bod (b). $\square$

Nabízí se otázka, zda každý konečný ODL, který je horizontální sumou Booleových algeber, musel už vzniknout výše popsanou konstrukcí. Formálněji řečeno, zda ke každému ODL $L \in \mathcal{HOR}$ majícímu 2^n prvků už existuje Booleova algebra B mající rovněž 2^n prvků a její rozklad $\mathcal{B}$ takový, že bloky v L odpovídají podalgebrám v B tvořícím $\mathcal{B}$. Odpověď na ni bohužel není zatím známa. Toto tvrzení je určitě pravdivé pro ty HOR, jejichž mohutnost je menší nebo rovna 32 (jak je ukázáno v závěru této podkapitoly). Domníváme se ovšem, že uvedené tvrzení platí pro každý konečný HOR.

Uveďme ještě jedno tvrzení týkající se svazů ze třídy $\mathcal{HOR}$.

Tvrzení 3.42. *Buď $L \in \mathcal{HOR}$, $|L| = 2^n$ pro nějaké přirozené číslo n. Jestliže existuje blok B_1 v L takový, že $|B_1| = 2^{n-1}$, tak všechny ostatní bloky v L musejí mít velikost 4.*

Důkaz Kdyby existoval v L nějaký blok $B_2 \neq B_1$ takový, že $|B_2| > 4$, tak už podle Tvrzení 3.37 není posloupnost příslušející svazu L ODL-posloupností. To je ale spor s tím, že L je ODL. $\square$

Tvrzení 3.43. *Buď $L \in \mathcal{HOR}$, $|L| \leq 32$. Pak L vznikl rozložením z Booleovy algebry.*

Důkaz Buď tedy $L \in \mathcal{HOR}$, rozlišme následující případy:
(1) $|L| = 1$, $|L| = 2$, $|L| = 4$: ve všech těchto případech je L přímo Booleova algebra a není co dokazovat.
(2) $|L| = 8$, pak je L buď BA, nebo je to svaz MO_3, který vzniknul rozložením osmiprvkové BA podle rozkladu tvořeného třemi čyřprvkovými podalgebrami osmiprvkové BA.
(3) $|L| = 16$, pak je opět L buď BA, nebo je to svaz MO_7, který vzniknul rozložením šestnáctiprvkové BA podle rozkladu tvořeného sedmi čyřprvkovými podalgebrami, nebo se jedná o horizontální sumu jedné osmiprvkové BA se čtyřmi čtyřprvkovými BA (jiná možnost – horizontální suma dvou osmiprvkových BA a jedné čtyřprvkové – nemůže kvůli předchozímu tvrzení nastat, viz také příklad na Obrázku 5). Ve všech těchto případech lze najít v šestnáctiprvkové BA podalgebry odpovídající blokům v L.
(4) $|L| = 32$, opět může být L (a) BA (v tom případě není co dokazovat), nebo je to (b) horizontální suma šestnáctiprvkové BA s osmi čtyřprvkovými BA – díky předchozímu tvrzení jsou tímto vyčerpány všechny možnosti, kdy je součástí horizontální sumy šestnáctiprvková BA, nebo je to (c) horizontální suma několika (nejvýše však pěti) osmiprvkových Booleových algeber, přičemž zbývající prvky L (jsou-li nějaké) leží ve čtyřprvkových BA, či (d) L je MO_15. Ve všech těchto případech existuje rozklad na BA takový, že podalgebry rozkladu odpovídají blokům v L, bod (c) je podrobně popsán v Příkladu 6, příslušný diagram této BA lze pak nalézt v barevné obrazové příloze. $\square$

3.3. Množinově reprezentovatelné HOR

V této podkapitole vztáhneme výsledky týkající se množinové reprezentovatelnosti ortokomplementárních diferenčních svazů na třídu $\mathcal{HOR}$. Jak je ukázáno v článku [16], některé svazy ze třídy $\mathcal{HOR}$ jsou množinově reprezentovatelné, jiné nikoli. Příklad HOR, který není množinově reprezentovatelný, je ukázán ve výše citovaném článku na straně 21 jako Example 8.14. V této podkapitole se ale budeme věnovat především svazům ze třídy $\mathcal{HOR} \cap \mathcal{SRODL}$. Nejprve vyslovme následující charakterizační větu:

Tvrzení 3.44. *Buď $L \in \mathcal{HOR}$. Pak L je SRODL právě když platí následující podmínka:*
$\forall x, y \in L$: jestliže $x|_L y$, pak existuje d-prvoideál I v L takový, že $x, y \in I$.

Důkaz ($\Rightarrow$) Nechť tedy L je SRODL. Buďte $x, y \in L$, $x|_L y$. Pak nemůže být $x^\perp \leq y$ (jinak by $y\, C\, x$). Existuje proto (podle Věty) d-prvoideál I v L takový, že $x, y \in I$.
($\Leftarrow$) Obráceně, nechť platí daná podmínka. Ukažme nejprve, že pak platí:
$\forall x \in L, x \neq \mathbf{1}$: existuje d-prvoideál I v L takový, že $x \in I$.
Buď tedy $x \in L$, $x \neq \mathbf{1}$. Rozlišme dva případy:
(a) L je BA – pak je tvrzení zřejmé.
(b) L není BA

Buď B blok v L takový, že $x \in B$. Protože L není BA, existuje dále nějaký blok $B' \neq B$. Zvolme $y \in B'$, $y \notin \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$. Prvek $x' \in B$ zvolme tak, aby $x' \in B \setminus \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, $x \leq x'$ (je-li $x \neq \mathbf{0}$, můžeme vzít přímo $x' = x$). Pak $x'|_L y$ a dle našeho předpokladu existuje d-prvoideál I v L takový, že $x', y \in I$. Protože $x \leq x'$, je též $x \in I$.

Nyní dokončíme důkaz, že L je množinově reprezentovatelný. Buďte $x, y \in L$, $x^\perp \nleq y$. Ukážeme, že pak existuje d-prvoideál I v L takový, že $x, y \in I$. Jestliže $x|_L y$, pak existence prvoideálu I plyne přímo z našeho předpokladu. Nechť tedy $x\ C\ y$. Buď B blok v L takový, že $x, y \in B$. Protože $x^\perp \nleq y$, je $x \vee y < \mathbf{1}$. Z předchozího nyní plyne, že existuje d-prvoideál I v L takový, že $x \vee y \in I$. Pak ovšem samozřejmě též $x \in I$, $y \in I$. □

Uveďme do souvislosti ještě pojem kvaziideálu (který byl definován ve druhé kapitole) s pojmy d-ideál, případně d-prvoideál.

Tvrzení 3.45. *Buď $L \in \mathcal{HOR}$, $I \subseteq L$. Pak platí:*
I je d-ideál v L právě když
(1) I je kvaziideál v L (tj. I je kvaziideál v diferenční algebře D_L),
(2) $\forall B \in \mathrm{Bl}(L)\ \forall x, y \in B : x \in I\ .a.\ y \leq x \Rightarrow y \in I$.

Důkaz Je-li I d-ideál v L, pak podmínky (1) a (2) samozřejmě platí. Obráceně, nechť tedy platí podmínky (1) a (2). Jelikož I je kvaziideál, stačí ověřit podmínku (b) z definice d-ideálu: Buďte $x, y \in L$, $x \in I$, $y \leq x$. Buď $B \in \mathrm{Bl}(L)$ blok takový, že $x \in B$. Z Tvrzení 3.41 (a) plyne, že též $y \in B$. Díky podmínce (2) pak už $y \in I$. □

Tvrzení 3.46. *Buď $L \in \mathcal{HOR}$, $I \subseteq L$. Pak platí:*
I je d-prvoideál v L právě když
(1) I je maximální vlastní kvaziideál v L,
(2) $\forall B \in \mathrm{Bl}(L)\ \forall x, y \in B : x \in I\ .a.\ y \leq x \Rightarrow y \in I$.

Důkaz Je-li I d-prvoideál v L, pak podmínky (1), (2) opět platí. Obráceně, platí-li (1), (2), pak z předchozího tvrzení plyne, že I je d-ideál v L. Jelikož I je maximální vlastní kvaziideál v L, díky Tvrzení 2.14 má selektivní vlastnost, tj. je zároveň d-prvoideál v L. □

V článku [16] je ukázáno, že je-li $L \in \mathcal{HOR}$ takový, že obsahuje nejvýše jeden blok, jehož velikost je větší než 4, tak už je množinově reprezentovatelný. Ve zbytku této podkapitoly tuto konstrukci zobecníme pro svazy ze třídy $\mathcal{HOR}$ obsahující dva bloky velikosti větší než 4. K tomu ale budeme potřebovat následující pomocná tvrzení:

Tvrzení 3.47. *Buď $L \in \mathcal{HOR}$, B_1, B_2 nechť jsou bloky v L, I_1 nechť je prvoideál v B_1, I_2 prvoideál v B_2. Nechť J je nezávislá množina v L taková, že $I_1 \subseteq J$, $I_2 \subseteq J$. Pak existuje d-prvoideál I v L takový, že $J \subseteq I$.*

Důkaz Zvolme nějaký maximální vlastní kvaziideál I v diferenční algebře D_L takový, že $J \subseteq I$ (ten určitě existuje díky Tvrzení 2.12). Ukážeme, že už je to d-prvoideál. Podle předchozího tvrzení stačí ukázat, že $\forall B \in \mathrm{Bl}(L)\ \forall x, y \in B : x \in I$ .a. $y \leq x \Rightarrow y \in I$. Buď tedy B nějaký blok v L. Ukážeme, že $B \cap I$ je ideál v Booleově algebře B. Rozlišme tři případy:
(1) $|B| = 2$, pak ale i $|L| = 2$ a tvrzení triviálně platí.
(2) $|B| = 4$, potom $B = \{\mathbf{0}, a, a^\perp, \mathbf{1}\}$, Jelikož I má selektivní vlastnost, platí buď $B \cap I =$

$\{\mathbf{0}, a\}$ nebo $B \cap I = \{\mathbf{0}, a^\perp\}$. V obou případech je $B \cap I$ ideál v B.
(3) $|B| > 4$, pak $B = B_1$ nebo $B = B_2$. Ukážeme, že $B_i \cap I = I_i$ pro $i = 1, 2$. Inkluze $I_i \subseteq B_i \cap I$ pro $i = 1, 2$ je zřejmá, neboť $I_i \subseteq J \subseteq I$. Předpokládejme pro spor, že existuje prvek $x_i \in B_i \cap I$ pro $i = 1, 2$ takový, že $x_i \notin I_i$. Jelikož I_i je prvoideál v B_i pro $i = 1, 2$, musí platit $x_i^\perp \in I_i$ pro $i = 1, 2$. Nyní $x_i \in I$, $x_i^\perp \in I_i \subseteq I$, což je spor s tím, že I je vlastní kvaziideál. Tedy takové prvky x_i pro $i = 1, 2$ neexistují a obrácená inkluze je dokázána. □

Uveďme ještě tvrzení, které nám zaručí, že sjednocením dvou vlastních prvoideálů z různých bloků vznikne nezávislá množina.

Tvrzení 3.48. *Buď $L \in \mathcal{HOR}$, B_1, B_2 nechť jsou bloky v L, I_1 nechť je prvoideál v B_1, I_2 prvoideál v B_2. Pak $I_1 \cup I_2$ je nezávislá množina v L.*

Důkaz Předpokládejme pro spor, že množina $I_1 \cup I_2$ není nezávislá. Tedy existuje nějaká k-tice $x_1, ..., x_k$ prvků z I_1 a n-tice $y_1, ..., y_n$ prvků z I_2 $(k, n \geq 1)$ tak, že $x_1 \triangle ... \triangle x_k \triangle y_1 ... \triangle y_n = \mathbf{1}$. Jelikož prvoideály I_1 a I_2 jsou uzavřeny na symetrickou diferenci, existují prvky $x_1 \triangle ... \triangle x_k = x \in I_1$, $y_1 \triangle ... \triangle y_k = y \in I_2$. Uvědomme si ještě, že $x, y \neq \mathbf{1}$, protože $\mathbf{1} \notin I_1 \cup I_2$. Nyní by mělo platit $x \triangle y = \mathbf{1}$. Potom ale musí být $x = y^\perp$, což je spor s tím, že prvky x, y jsou z různých bloků. □

Věta 3.49. *Buď $L \in \mathcal{HOR}$, nechť existují bloky $B_1, B_2 \in Bl(L)$ takové, že $|B| = 4$ pro každý blok v L různý od B_1 i B_2. Pak L je množinově reprezentovatelný.*

Důkaz K důkazu využijeme úvodní tvrzení této podkapitoly. Chceme tedy ukázat, že $\forall x, y \in L$: jestliže $x|_L y$, pak existuje d-prvoideál I v L takový, že $x, y \in I$.

Zvolme tedy nějaké prvky $x, y \in L$, $x|_L y$. Potom (specielně) $x, y \neq \mathbf{1}$. Jelikož spolu prvky nekomutují, musejí ležet v různých blocích svazu L, nechť $x \in B_k$, $y \in B_l$. Zvolme nějaký prvoideál $I_k \subseteq B_k$ tak, aby $x \in I_k$. Obdobně zvolme prvoideál $I_l \subseteq B_l$ takový, že $y \in I_l$ (existence příslušných prvoideálů plyne z toho, že $x, y \neq \mathbf{1}$). Podle Tvrzení 3.48 je nyní $I_1 \cup I_2$ nezávislá množina v L. Nyní jsou splněny předpoklady pro použití Tvrzení 3.47, podle nějž existuje d-prvoideál I v L takový, že $I_k \cup I_l \subseteq I$. Potom ale též $x, y \in I$. □

4. Volný ODL se dvěma generátory

V následující části práce se budu zabývat konstrukcí ortokomplementárního svazu se symetrickou diferencí, který bude mít dvouprvkovou množinu generátorů. Obdobná konstrukce je předveda pro třídu ortomodulárních svazů v knize [1] na stranách 74-86. Tam je zkonstruován volný OML se dvěma generátory mající 96 prvků. Námi konstruovaný volný ODL bude mít (díky přítomnosti operace symetrické diference) 128 prvků. Nejprve si ale definujme potřebné pojmy. Připomeňme ještě Označení 1.54 z úvodní kapitoly, podle kterého L^c je intervalová algebra vymezená prvky $\mathbf{0}_L$ a c.

Definice 4.1. Nechť K je třída algeber signatury $\mathcal{L}$. Nechť A je nějaká algebra z K a nechť X je podmnožina množiny A. Algebra A se nazývá *volná algebra nad množinou K generovaná množinou X* právě tehdy, když splňuje následující podmínky:
(a) X je množina generátorů pro A
(b) Je-li dána nějaká algebra B ze třídy K a libovolné zobrazení $g : X \to B$, pak existuje morfismus $h : A \to B$ rozšiřující zobrazení g.

Pokud K je třída Booleových algeber, budeme používat označení *volná Booleova algebra*, analogicky pro třídu $\mathcal{OML}$, resp. $\mathcal{ODL}$ použijeme označení *volný OML*, resp. *volný ODL*.

Definice 4.2. *ODL-morfismem* nazveme zobrazení f mezi dvěma ODL, které je morfismem.

Lemma 4.3. *Buď L ODL a nechť c je prvek L, který komutuje se všemi prvky L. Pak zobrazení $f : L \to L^c$ definované předpisem $f(x) = x \wedge c$ je ODL-morfismus.*

Důkaz $(f(x))^\perp = (x \wedge c)^\perp = (x \wedge c)^{\perp_{L^c}} = x^\perp \wedge c = f(x^\perp)$
$f(x \wedge y) = x \wedge y \wedge c = (x \wedge c) \wedge (y \wedge c) = f(x) \wedge f(y)$
$f(x \vee y) = (x \vee y) \wedge c = (x \wedge c) \vee (y \wedge c) = (x \wedge c) \vee (y \wedge c) = f(x) \vee f(y)$
$f(x \triangle y) = (x \triangle y) \wedge c = (x \wedge c) \triangle (y \wedge c) = f(x) \triangle f(y)$

V předchozích rovnostech byla využita Foulisova-Hollandova věta a Tvrzení 3.12. □

Lemma 4.4. *Nechť L je ODL a nechť c je prvek L, který komutuje se všemi prvky L. Pak zobrazení $h : L \to L^c \times L^{c^\perp}$ definované předpisem $h(x) = (x \wedge c, x \wedge c^\perp)$ je izomorfismus mezi L a $L^c \times L^{c^\perp}$.*

Důkaz Ukážeme nejprve, že zobrazení h a zobrazení g, kde g je definováno pomocí předpisu $g(x, y) = (x \vee y)$, jsou bijekce. Buď tedy x libovolný prvek z L. Pak $(h \circ g)(x) = g(h(x)) = g([x \wedge c, x \wedge c^\perp]) = (x \wedge c) \vee (x \wedge c^\perp) = x$, neboť prvek c dle předpokladu komutuje se všemi prvky, tedy i s prvkem x.

Obráceně, nechť je nyní $x \in L^c, y \in L^{c^\perp}$. Pak $(g \circ h)([x, y]) = h(g([x, y])) = h(x \vee y) = [(x \vee y) \wedge c, (x \vee y) \wedge c^\perp]$. Podle Foulisovy-Hollandovy věty ale nyní platí, že $(x \vee y) \wedge c = (x \wedge c) \vee (y \wedge c)$. Ovšem $x \wedge c = x$, neboť $x \leq c$; $y \wedge c = \mathbf{0}$, protože $y \leq c^\perp$. Podobně $(x \vee y) \wedge c^\perp = (x \wedge c^\perp) \vee (y \wedge c^\perp) = \mathbf{0} \vee y = y$. Celkem tedy $[(x \vee y) \wedge c, (x \vee y) \wedge c^\perp] = [x, y]$.

Ukážeme ještě, že zobrazení h je morfismus. Nechť jsou x, y libovolné prvky z L. Potom $h(x) \wedge h(y) = ([x \wedge c, x \wedge c^\perp]) \wedge ([y \wedge c, y \wedge c^\perp]) = [x \wedge y \wedge c, x \wedge y \wedge c^\perp] = h(x \wedge y)$.

$h(x \vee y) = [(x \vee y) \wedge c, (x \vee y) \wedge c^{\perp}] = ([x \wedge c, x \wedge c^{\perp}]) \wedge ([y \wedge c, y \wedge c^{\perp}]) = [(x \wedge c) \vee (y \wedge c), (x \wedge c^{\perp}) \vee (y \wedge c^{\perp})] = [(x \wedge c), (x \wedge c^{\perp})] \vee [(y \wedge c), (y \wedge c^{\perp})] = h(x) \vee h(y)$, opět s použitím Foulisovy-Hollandovy věty.
$(h(x))^{\perp} = [x \wedge c, x \wedge c^{\perp}]^{\perp} = [(x \wedge c)^{\perp_{L^c}}, (x \wedge c^{\perp})^{\perp_{L^{c^{\perp}}}}] = [x^{\perp} \wedge c, x^{\perp} \wedge c^{\perp}] = h(x^{\perp})$
$h(x \bigtriangleup_L y) = ((x \bigtriangleup_L y) \wedge c, (x \bigtriangleup_L y) \wedge c^{\perp_L}) = ((x \wedge c) \bigtriangleup_L (y \wedge c), (x \wedge c^{\perp_L}) \bigtriangleup_L (y \wedge c^{\perp_L})) =$
$= ((x \wedge c) \bigtriangleup_{L^c} (y \wedge c), (x \wedge c^{\perp_L}) \bigtriangleup_{L^{c^{\perp}}} (y \wedge c^{\perp_L})) = (x \wedge c, x \wedge c^{\perp_L}) \bigtriangleup_{L^c \times L^{c^{\perp}}} (y \wedge c, y \wedge c^{\perp_L}) =$
$= h(x) \bigtriangleup_{L^c \times L^{c^{\perp}}} h(y)$.

$\square$

Důsledek 4.5. *Když L je ODL a c je jeho centrální prvek, pak $L \cong L^c \times L^{c^{\perp}}$.*

Lemma 4.6. *Buď T ODL s generátory s, t. Označme $\overline{c} = (s \vee t) \wedge (s \vee t^{\perp}) \wedge (s^{\perp} \vee t) \wedge (s^{\perp} \vee t^{\perp})$. Nechť MO_3 je ODL s generátory x_1, x_2. Pak existuje ODL-morfismus $h_1 : MO_3 \to T^{\overline{c}}$ takový, že:*
(i) $h_1(x_1) = s \wedge \overline{c} = s \wedge (s^{\perp} \vee t) \wedge (s^{\perp} \vee t^{\perp})$
(ii) $h_1(y_1) = t \wedge \overline{c} = t \wedge (s \vee t^{\perp}) \wedge (s^{\perp} \vee t^{\perp})$.

Důkaz Prvek $\overline{c}$ komutuje se všemi prvky – viz podkapitola o komutativitě ve třídě ortomodulárních svazů. Rozlišme 2 případy:

1) Pokud spolu prvky s a t komutují, je $\overline{c}$ rovno $\mathbf{0}$. Svaz $T^{\overline{c}}$ je tedy triviální a zobrazení h_1 zobrazí všechny prvky svazu MO_3 na jediný prvek svazu $T^{\overline{c}}$. Toto zobrazení samozřejmě zachovává operace $\wedge$, $\vee$, $^{\perp}$ a $\bigtriangleup$, je tudíž hledaným ODL-morfismem.

2) Nechť tedy spolu prvky s a t nekomutují. Podle Lemmatu 4.3 existuje ODL-morfismus $f_1 : T \to T^{\overline{c}}$ definovaný předpisem: $f_1(x) = x \wedge \overline{c}$. Tudíž ortokomplementární diferenční svaz $T^{\overline{c}}$ musí mít $f_1(s)$ a $f_1(t)$ jako své generátory. (Podrobněji: svaz $T^{\overline{c}}$ nemůže mít větší množinu generátorů, protože je podsvazem svazu generovaného dvěma prvky. Prvky s a t se nemohou zobrazit do jednoho bodu, protože v tom případě by spolu komutovaly, což je spor s Lemmatem 1.53. Do obdobného sporu bychom se dostali i v případech, kdy $f_1(s) = f_1(t^{\perp})$, $f_1(t) = f_1(s^{\perp})$.)

Přitom:
$f_1(s) = s \wedge (s \vee t) \wedge (s \vee t^{\perp}) \wedge (s^{\perp} \vee t) \wedge (s^{\perp} \vee t^{\perp}) = s \wedge (s^{\perp} \vee t) \wedge (s^{\perp} \vee t^{\perp})$
$f_1(t) = t \wedge (s \vee t) \wedge (s \vee t^{\perp}) \wedge (s^{\perp} \vee t) \wedge (s^{\perp} \vee t^{\perp}) = t \wedge (s \vee t^{\perp}) \wedge (s^{\perp} \vee t^{\perp})$

Jelikož prvek $\overline{c}$ komutuje se všemi prvky T, můžeme v následujících úvahách využívat Foulisovu-Hollandovu větu.
$f_1(s) \vee f_1(t) = (s \wedge \overline{c}) \vee (t \wedge \overline{c}) = (s \vee t) \wedge \overline{c} = \overline{c}$
$f_1(s) \vee f_1(t^{\perp}) = (s \wedge \overline{c}) \vee (t^{\perp} \wedge \overline{c}) = (s \vee t^{\perp}) \wedge \overline{c} = \overline{c}$
$f_1(s^{\perp}) \vee f_1(t) = (s^{\perp} \wedge \overline{c}) \vee (t \wedge \overline{c}) = (s^{\perp} \vee t) \wedge \overline{c} = \overline{c}$
$f_1(s^{\perp}) \vee f_1(t^{\perp}) = (s^{\perp} \wedge \overline{c}) \vee (t^{\perp} \wedge \overline{c}) = (s^{\perp} \vee t^{\perp}) \wedge \overline{c} = \overline{c}$
Podobně:
$f_1(s) \wedge f_1(t) = s \wedge \overline{c} \wedge t \wedge \overline{c} = (s \wedge t) \wedge \overline{c} = (s \wedge t) \wedge (s \wedge t)^{\perp} \wedge (s \vee t) \wedge (s^{\perp} \vee t) \wedge (s \vee t^{\perp}) = \mathbf{0}$
$f_1(s) \wedge f_1(t^{\perp}) = s \wedge \overline{c} \wedge t^{\perp} \wedge \overline{c} = (s \wedge t^{\perp}) \wedge \overline{c} = (s \wedge t^{\perp}) \wedge (s \wedge t^{\perp})^{\perp} \wedge (s \vee t) \wedge (s \vee t^{\perp}) \wedge (s^{\perp} \vee t^{\perp}) = \mathbf{0}$
$f_1(s^{\perp}) \wedge f_1(t) = s^{\perp} \wedge \overline{c} \wedge t \wedge \overline{c} = (s^{\perp} \wedge t) \wedge \overline{c} = (s^{\perp} \wedge t) \wedge (s^{\perp} \wedge t)^{\perp} \wedge (s \vee t) \wedge (s^{\perp} \vee t) \wedge (s^{\perp} \vee t^{\perp}) = \mathbf{0}$
$f_1(s^{\perp}) \wedge f_1(t^{\perp}) = s^{\perp} \wedge \overline{c} \wedge t^{\perp} \wedge \overline{c} = (s^{\perp} \wedge t^{\perp}) \wedge \overline{c} = (s^{\perp} \wedge t^{\perp}) \wedge (s^{\perp} \wedge t^{\perp})^{\perp} \wedge (s^{\perp} \vee t) \wedge (s \vee t^{\perp}) \wedge (s^{\perp} \vee t^{\perp}) = \mathbf{0}$

Zbývá ukázat, že prvky $f_1(s) \bigtriangleup f_1(t)$ a $(f_1(s) \bigtriangleup f_1(t))^\perp$ jsou různé od prvků $f_1(s)$, $f_1(t)$, $f_1(s^\perp)$, $f_1(t^\perp)$, $\mathbf{0}$, $\overline{c}$. Když poté dokážeme, že průsek prvku $f_1(s) \bigtriangleup f_1(t)$ (resp. $(f_1(s) \bigtriangleup f_1(t))^\perp$) s kterýmkoliv prvkem kromě $\overline{c}$ je roven $\mathbf{0}$ a že spojení téhož prvku (respektive prvku $(f_1(s) \bigtriangleup f_1(t))^\perp$) s kterýmkoliv prvkem kromě $\mathbf{0}$ je rovno $\overline{c}$, budeme s důkazem hotovi. Výsledný svaz bude mít 8 prvků ($\mathbf{0}$, $f_1(s) \bigtriangleup f_1(t)$, $(f_1(s) \bigtriangleup f_1(t))^\perp$, $f_1(s)$, $f_1(t)$, $f_1(s^\perp)$, $f_1(t^\perp)$, $\overline{c}$) a bude izomorfní se svazem MO_3. Poznamenejme ještě, že roli prvku $\mathbf{1}$ pro nás bude hrát prvek $\overline{c}$ jakožto největší prvek intervalové algebry $T^{\overline{c}}$.

Důkaz dokončíme následujícími dvěma lemmaty:

Lemma 4.7. *Když L je ODL s generátory x, y, které spolu nekomutují, pak $x \bigtriangleup y$ a $(x \bigtriangleup y)^\perp$ jsou různé od prvků x, y, $x^\perp$, $y^\perp$, $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$.*

Důkaz Před vlastním důkazem si ještě uvědomme, že žádný z prvků x, y nemůže být roven $\mathbf{0}$ ani $\mathbf{1}$, v tom případě by totiž byl porušen předpoklad o tom, že spolu dané prvky nekomutují.

$x \bigtriangleup y \neq \mathbf{0}$, protože kdyby $x \bigtriangleup y = \mathbf{0}$, pak $x = y$ dle (i) Tvrzení 2.7, spor s nekomutativitou prvků x a y

$x \bigtriangleup y \neq \mathbf{1}$, protože kdyby $x \bigtriangleup y = \mathbf{1}$, pak $x = y^\perp$ dle (j) Tvrzení 2.7, spor.

$x \bigtriangleup y \neq x$, protože kdyby $x \bigtriangleup y = x$, pak $x \bigtriangleup x = y$ podle (g) Tvrzení 2.7, ale $x \bigtriangleup x = \mathbf{0}$.

$x \bigtriangleup y \neq y$, protože kdyby $x \bigtriangleup y = y$, pak $y \bigtriangleup y = x$ podle (g) Tvrzení 2.7, ale $y \bigtriangleup y = \mathbf{0}$.

$x \bigtriangleup y \neq x^\perp$, protože kdyby $x \bigtriangleup y = x^\perp$, pak $x \bigtriangleup x^\perp = y$ dle (g) Tvrzení 2.7, ale $x \bigtriangleup x^\perp = \mathbf{1}$.

$x \bigtriangleup y \neq y^\perp$, protože kdyby $x \bigtriangleup y = y^\perp$, pak $y \bigtriangleup y^\perp = x$ dle (g) Tvrzení 2.7, ale $y \bigtriangleup y^\perp = \mathbf{1}$.

Analogické důvody platí i pro prvek $(x \bigtriangleup y)^\perp$, stačí si uvědomit, že dle (d) tvrzení 2.7 je roven $x \bigtriangleup y^\perp$. Potom platí:

$x \bigtriangleup y^\perp \neq \mathbf{0}$, protože kdyby $x \bigtriangleup y^\perp = \mathbf{0}$, pak $x = y^\perp$, spor.

$x \bigtriangleup y^\perp \neq \mathbf{1}$, protože kdyby $x \bigtriangleup y^\perp = \mathbf{1}$, pak $x = (y^\perp)^\perp$ dle (j) Tvrzení 2.7, což je spor s nekomutativitou prvků x, y.

$x \bigtriangleup y \neq x$, protože kdyby $x \bigtriangleup y = x$, pak $x \bigtriangleup x = y$ dle (g) Tvrzení 2.7, ale $x \bigtriangleup x = \mathbf{0}$.

$x \bigtriangleup y \neq y$, protože kdyby $x \bigtriangleup y = y$, pak $y \bigtriangleup y = x$ dle (g) Tvrzení 2.7, ale $y \bigtriangleup y = \mathbf{0}$.

$x \bigtriangleup y \neq x^\perp$, protože kdyby $x \bigtriangleup y = x^\perp$, pak $x \bigtriangleup x^\perp = y$ dle (g) Tvrzení 2.7, ale $x \bigtriangleup x^\perp = \mathbf{1}$.

$x \bigtriangleup y \neq y^\perp$, protože kdyby $x \bigtriangleup y = y^\perp$, pak $y \bigtriangleup x^\perp = x$ opět podle (g) Tvrzení 2.7, ale $y \bigtriangleup y^\perp = \mathbf{1}$.

$\square$

Lemma 4.8. *Buď L ODL s generátory x, y, které spolu nekomutují. Nechť $x \wedge y = x \wedge y^\perp = x^\perp \wedge y = x^\perp \wedge y^\perp = \mathbf{0}$, $x \vee y = x \vee y^\perp = x^\perp \vee y = x^\perp \vee y^\perp = \mathbf{1}$. Pak platí i:*

(i) $x \bigtriangleup y \wedge y = x \bigtriangleup y \wedge y^\perp = x \bigtriangleup y \wedge x = x \bigtriangleup y \wedge x^\perp = \mathbf{0}$

(ii) $x \bigtriangleup y \vee y = x \bigtriangleup y \vee y^\perp = x \bigtriangleup y \vee x = x \bigtriangleup y \vee x^\perp = \mathbf{1}$.

Důkaz Z kapitoly o ortokomplementárních diferenčních svazech víme, že $x \bigtriangleup y \wedge x = x \wedge y^\perp$ a $x \bigtriangleup y \vee x = x \vee y$ – viz Tvrzení 3.14. Proto: $x \bigtriangleup y \wedge y = y \bigtriangleup x \wedge y = y \wedge x^\perp = \mathbf{0}$ Analogicky $x \bigtriangleup y \wedge x = x \wedge y^\perp = \mathbf{0}$, $x \bigtriangleup y \wedge x^\perp = x^\perp \bigtriangleup y^\perp \wedge x^\perp = x^\perp \wedge y = \mathbf{0}$, $x \bigtriangleup y \wedge y = y \bigtriangleup x \wedge y^\perp = x^\perp \bigtriangleup y^\perp \wedge y^\perp = x \wedge y^\perp = \mathbf{0}$. Obdobně: $x \bigtriangleup y \vee x = x \vee y = \mathbf{1}$, $x \bigtriangleup y \vee y = y \vee x = \mathbf{1}$, $x \bigtriangleup y \vee x^\perp = x^\perp \bigtriangleup y^\perp \vee x^\perp = x^\perp \vee y^\perp = \mathbf{1}$, $x \bigtriangleup y \vee y^\perp = x^\perp \bigtriangleup y^\perp \vee y^\perp = x^\perp \vee y^\perp = \mathbf{1}$. $\square$

□

Důsledek 4.9. *Když T je ODL s generátory s,t a když $\overline{c} = (s \vee t) \wedge (s \vee t^{\perp}) \wedge (s^{\perp} \vee t) \wedge (s^{\perp} \vee t^{\perp})$, pak buď $T^{\overline{c}} \cong MO_3$ nebo je triviálním ODL.*

Lemma 4.10. *Buď T ODL s generátory s,t a buď $\underline{c} = (s \wedge t) \vee (s \wedge t^{\perp}) \vee (s^{\perp} \wedge t) \vee (s^{\perp} \wedge t^{\perp})$. Nechť x_2 a y_2 jsou generátory Booleovy algebry $B = 2^4$. Pak existuje ODL-morfismus $h_2 : B \to T^{\underline{c}}$ takový, že:*
$h_2(x_2) = s \wedge \underline{c} = (s \wedge t) \vee (s \wedge t^{\perp})$
$h_2(y_2) = t \wedge \underline{c} = (s \wedge t) \vee (s^{\perp} \wedge t)$.

Důkaz Podle Lemmatu 4.3 existuje ODL-morfismus $f_2 : T \to T^{\underline{c}}$ definovaný předpisem: $f_2(x) = x \wedge \underline{c}$, protože prvek $\underline{c}$ komutuje se všemi prvky svazu $T^{\underline{c}}$. Tudíž ortokomplementární diferenční svaz $T^{\underline{c}}$ musí mít $f_2(s)$ a $f_2(t)$ jako své generátory. S využitím Foulisovy-Hollandovy věty dostaneme: $f_2(s) = s \wedge \underline{c} = s \wedge [(s \wedge t) \vee (s \wedge t^{\perp}) \vee (s^{\perp} \wedge t) \vee (s^{\perp} \wedge t^{\perp})] = (s \wedge s \wedge t) \vee (s \wedge s \wedge t^{\perp}) \vee (s \wedge s^{\perp} \wedge t) \vee (s \wedge s^{\perp} \wedge t^{\perp}) = (s \wedge t) \vee (s \wedge t^{\perp})$

$f_2(t) = t \wedge \underline{c} = t \wedge [(s \wedge t) \vee (s \wedge t^{\perp}) \vee (s^{\perp} \wedge t) \vee (s^{\perp} \wedge t^{\perp})] = (t \wedge s \wedge t) \vee (t \wedge s \wedge t^{\perp}) \vee (t \wedge s^{\perp} \wedge t) \vee (t \wedge s^{\perp} \wedge t^{\perp}) = (s \wedge t) \vee (s^{\perp} \wedge t)$.

Tyto dva prvky spolu komutují (viz kapitola o komutativitě), proto musí být algebra jimi generovaná Booleovou algebrou. Jelikož 2^4 je volná Booleova algebra nad dvouprvkovou množinou generátorů, musí existovat ODL-morfismus h_2 splňující výše uvedené podmínky. □

Důsledek 4.11. *Nechť T je ODL s generátory s,t. Nechť $\underline{c} = (s \wedge t) \vee (s \wedge t^{\perp}) \vee (s^{\perp} \wedge t) \vee (s^{\perp} \wedge t^{\perp})$. Pak $T^{\underline{c}}$ je Booleova algebra mající nejvýše 16 prvků, jejímiž generátory jsou $(s \wedge t) \vee (s \wedge t^{\perp})$ a $(s \wedge t) \vee (s^{\perp} \wedge t)$.*

Lemma 4.12. *Buď T ODL s generátory s,t, které spolu nekomutují. Nechť B je BA generovaná prvky $m = (s \wedge t) \vee (s \wedge t^{\perp})$ a $n = (s \wedge t) \vee (s^{\perp} \wedge t)$. Pak má B právě 16 prvků.*

Důkaz Když s,t spolu nekomutují, pak $com(s,t) \neq \mathbf{0}$. Tedy $(s \vee t) \wedge (s \vee t^{\perp}) \wedge (s^{\perp} \vee t) \wedge (s^{\perp} \vee t^{\perp}) \neq \mathbf{0}$. Jelikož je podle předpokladů B generována prvky m a n, můžeme uvážit i množinu generátorů $m^{\perp}$ a $n^{\perp}$. Přitom $m^{\perp} = (s^{\perp} \vee t^{\perp}) \wedge (s^{\perp} \vee t)$, $n^{\perp} = (s^{\perp} \vee t^{\perp}) \wedge (s \vee t^{\perp})$. Protože $com(s,t) > \mathbf{0}$, musí být i $m^{\perp} \wedge n^{\perp} = (s \vee t^{\perp}) \wedge (s^{\perp} \vee t) \wedge (s^{\perp} \vee t^{\perp}) > \mathbf{0}$. Tudíž také $m \vee n < \mathbf{1}$. Algebra B tedy obsahuje řetězec délky 5, proto už musí mít právě 16 prvků. □

Věta 4.13. *Buď T ODL s generátory s,t, které spolu nekomutují. Pak $T \cong MO_3 \times BA_4$.*

Důkaz Podle Lemmatu 4.4 je $T \cong T^c \times T^{c^{\perp}}$. Jako prvek c nyní vezmeme $\underline{c}$, prvkem $c^{\perp}$ tedy bude $\overline{c}$. Podle Důsledku 4.11 je algebra $T^{\underline{c}}$ homomorfním obrazem Booleovy algebry BA_4, $T^{\overline{c}}$ je dle Důsledku 4.9 homomorfním obrazem MO_3. Jelikož nenastanou patologické případy (že se několik prvků příslušným ODL-morfismem zobrazí do jednoho bodu - jsou vyloučeny tím, že spolu prvky s a t nekomutují a Lemmatem 4.12), je tedy $T \cong MO_3 \times BA_4$.

□

ODL, který jsme touto konstrukcí získali, je volným ortokomplementárním diferenčním svazem se dvěma generátory, jak ukazuje následující tvrzení.

Tvrzení 4.14. *Buď T ODL s generátory s, t. Pak T je volný ODL s dvouprvkovou množinou generátorů.*

Důkaz K ověření uvedeného tvrzení musí být splněny obě podmínky z Definice volné algebry (4.1) formulované pro třídu $\mathcal{ODL}$, tedy
(a) $\{s, t\}$ je množina generátorů pro T
(b) Je-li dán nějaký svaz L ze třídy $\mathcal{ODL}$ a libovolné zobrazení $g : \{s, t\} \to L$, pak existuje morfismus $h : T \to L$ rozšiřující zobrazení g.

Podmínka (a) je předpokladem tvrzení. Dokažme tedy (b). Buď L nějaký ODL a $g : \{s, t\} \to L$ předpokládané zobrazení. Morfismus h rozšiřující g definujeme induktivně. Buď nyní $x \in T$. Tento prvek se dá napsat jako term v jazyce $(\wedge, \vee, ^\perp, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \triangle)$, kde jedinými proměnnými jsou s a t. Uvažme příslušný term, který označme $term(x)$. Podle tvaru termu $term(x)$ definujme následující případy $(x, y \in T)$.
$h(x) = g(x)$, jestliže $term(x) = s$ nebo $term(x) = t$
$h(x^\perp) = (h(x))^\perp$
$h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y)$
$h(x \vee y) = h(x) \vee h(y)$
$h(x \triangle y) = h(x) \triangle h(y)$

Tedy například $h(s \wedge t) = h(s) \wedge h(t) = g(s) \wedge g(t)$. Takto definované zobrazení je morfismem rozšiřující zobrazení g. $\square$

V následující kapitole je uveden seznam prvků volného ODL se dvěma generátory. Je zvolen stejný způsob zápisu jako v knize [1], v levém sloupci je uvedena reprezentace daného prvku pomocí termu s proměnnými s a t, v pravém sloupci pak reprezentace téhož prvku ve svazu $MO_3 \times 2^4$. Grafickou podobu tohoto svazu pak může čtenář nalézt v příloze, prvky jsou indexovány přirozenými čísly 1-128 stejným způsobem jako v uvedené tabulce. Pro větší přehlednost byla tabulka rozdělena do čtyř částí po 32 prvcích.

Můžeme si například ověřit, že $p_{93} \wedge p_{57} = p_3$, $p_{93} \vee p_{57} = p_{128}$ a $p_{93} \triangle p_{57} = p_{110}$ jak podle obou uvedených reprezentací, tak podle obrázku v příloze (i když u operace $\triangle$ uvedený obrázek příliš názorný není).
$p_{93} \wedge p_{57} = (t^\perp \vee (t \wedge s)) \wedge (s \triangle t) = (t^\perp \wedge (s^\perp \triangle t^\perp)) \vee ((t \wedge s) \wedge (s \triangle t)) = (s \wedge t^\perp) \vee (t \wedge s \wedge t^\perp) = (s \wedge t^\perp) \vee \mathbf{0} = s \wedge t^\perp = p_3$
$p_{93} \vee p_{57} = t^\perp \vee (t \wedge s) \vee (s \triangle t) = t^\perp \vee (t \wedge s) \vee (s^\perp \triangle t^\perp) = (t \wedge s) \vee (s^\perp \vee t^\perp) = (t \wedge s) \vee (t \wedge s)^\perp = \mathbf{1} = p_{128}$
$p_{93} \triangle p_{57} = (t^\perp \vee (t \wedge s)) \triangle (s \triangle t) = (t^\perp \vee (t \wedge s)) \triangle (s^\perp \triangle t^\perp) = ((t^\perp \vee (t \wedge s)) \triangle t^\perp) \triangle s^\perp = ((t^\perp \vee (t \wedge s)) \wedge t) \triangle s^\perp = ((t^\perp \wedge t) \vee ((t \wedge s) \wedge t)) \triangle s^\perp = (\mathbf{0} \vee (t \wedge s)) \triangle s^\perp = s^\perp \triangle (s \wedge t) = s^\perp \vee (s \wedge t) = p_{110}$

Poznamenejme, že pro výpočet symetrické diference daných prvků jsme využili obě části z Tvrzení 3.10. Nejprve jsme využili fakt, že $(t^\perp \vee (t \wedge s)) \geq t^\perp$, a proto $(t^\perp \vee (t \wedge s)) \triangle t^\perp = (t^\perp \vee (t \wedge s)) \wedge t$, v poslední rovnosti potom díky $s^\perp \leq (s \wedge t)^\perp$ platí $s^\perp \triangle (s \wedge t) = s^\perp \vee (s \wedge t)$. Kromě toho jsme také (jako jeden ze základních nástrojů) používali Foulisovu-Hollandovu větu.

Výpočet s využitím reprezentace v $MO_3 \times 2^4$ je názornější, neboť operace můžeme provádět po jednotlivých složkách:
$p_{93} \wedge p_{57} = (b^{\perp}, 1, 1, 0, 1) \wedge (a \triangle b, 0, 1, 1, 0) = (0, 0, 1, 0, 0) = p_3$
$p_{93} \vee p_{57} = (b^{\perp}, 1, 1, 0, 1) \vee (a \triangle b, 0, 1, 1, 0) = (1, 1, 1, 1, 1) = p_{128}$
$p_{93} \triangle p_{57} = (b^{\perp}, 1, 1, 0, 1) \triangle (a \triangle b, 0, 1, 1, 0) = (b^{\perp}, 1, 1, 0, 1) \triangle (a^{\perp} \triangle b^{\perp}, 0, 1, 1, 0) = (a^{\perp}, 1, 0, 1, 1) = p_{110}$

Pro snadnější orientaci v přiloženém obrázku zaveďme ještě následující pojem:

Definice 4.15. Buď P poset, $x, y \in P$. Řekneme, že prvek x *pokrývá* y nebo že y *je pokryt* x, jestliže $y < x$ a neexistuje prvek $c \in P$ takový, že $y < c$ .a. $c < x$.

Prvky $p_1 - p_{16}$, $p_{17} - p_{32}$, $p_{33} - p_{48}$, $p_{49} - p_{64}$, $p_{65} - p_{80}$, $p_{81} - p_{96}$, $p_{97} - p_{112}$ a $p_{113} - p_{128}$ tvoří Booleovy algebry B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7 a B_8, jejichž uspořádání je patrné z obrázku. Jsou-li dány dva prvky p_i a p_j z různých Booleových algeber B_m a B_n, tak p_j pokrývá p_i právě tehdy, když buď
(1) $p_i \in B_1$ a $p_j \in B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5 \cup B_6 \cup B_7$ a $j = i + 16k$ pro nějaké $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ nebo
(2) $p_j \in B_8$ a $p_i \in B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5 \cup B_6 \cup B_7$ a $j = i + 16l$ pro nějaké $l \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

5. Seznam prvků volně genervaného ODL se dvěma generátory

Reprezentace v:

L	$MO_3 \times 2^4$
$p_1 = \mathbf{0}$	$(0,0,0,0,0) = (0, b_1)$
$p_2 = s \wedge t$	$(0,1,0,0,0) = (0, b_2)$
$p_3 = s \wedge t^\perp$	$(0,0,1,0,0) = (0, b_3)$
$p_4 = s^\perp \wedge t$	$(0,0,0,1,0) = (0, b_4)$
$p_5 = s^\perp \wedge t^\perp$	$(0,0,0,0,1) = (0, b_5)$
$p_6 = (s \wedge t) \vee (s \wedge t^\perp)$	$(0,1,1,0,0) = (0, b_6)$
$p_7 = (s \wedge t) \vee (s^\perp \wedge t)$	$(0,1,0,1,0) = (0, b_7)$
$p_8 = (s \wedge t) \vee (s^\perp \wedge t^\perp)$	$(0,1,0,0,1) = (0, b_8)$
$p_9 = (s \wedge t^\perp) \vee (s^\perp \wedge t)$	$(0,0,1,1,0) = (0, b_9)$
$p_{10} = (s^\perp \wedge t^\perp) \vee (s \wedge t^\perp)$	$(0,0,1,0,1) = (0, b_{10})$
$p_{11} = (s^\perp \wedge t^\perp) \vee (s^\perp \wedge t)$	$(0,0,0,1,1) = (0, b_{11})$
$p_{12} = (s \wedge t) \vee (s \wedge t^\perp) \vee (s^\perp \wedge t)$	$(0,1,1,1,0) = (0, b_{12})$
$p_{13} = (s \wedge t) \vee (s \wedge t^\perp) \vee (s^\perp \wedge t^\perp)$	$(0,1,1,0,1) = (0, b_{13})$
$p_{14} = (s^\perp \wedge t^\perp) \vee (s^\perp \wedge t) \vee (s \wedge t)$	$(0,1,0,1,1) = (0, b_{14})$
$p_{15} = (s^\perp \wedge t^\perp) \vee (s^\perp \wedge t) \vee (s \wedge t^\perp)$	$(0,0,1,1,1) = (0, b_{15})$
$p_{16} = (s \wedge t) \vee (s \wedge t^\perp) \vee (s^\perp \wedge t) \vee (s^\perp \wedge t^\perp)$	$(0,1,1,1,1) = (0, b_{16})$
$p_{17} = s \wedge (s^\perp \vee t) \wedge (s^\perp \vee t^\perp)$	$(a,0,0,0,0) = (a, b_1)$
$p_{18} = s \wedge (s^\perp \vee t)$	$(a,1,0,0,0) = (a, b_2)$
$p_{19} = s \wedge (s^\perp \vee t^\perp)$	$(a,0,1,0,0) = (a, b_3)$
$p_{20} = (s^\perp \wedge t) \vee [s \wedge (s^\perp \vee t^\perp) \wedge (s^\perp \vee t)]$	$(a,0,0,1,0) = (a, b_4)$
$p_{21} = (s^\perp \wedge t^\perp) \vee [s \wedge (s^\perp \vee t^\perp) \wedge (s^\perp \vee t)]$	$(a,0,0,0,1) = (a, b_5)$
$p_{22} = s$	$(a,1,1,0,0) = (a, b_6)$
$p_{23} = (s^\perp \vee t) \wedge [s \vee (s^\perp \wedge t)]$	$(a,1,0,1,0) = (a, b_7)$
$p_{24} = (s^\perp \vee t) \wedge [s \vee (s^\perp \wedge t^\perp)]$	$(a,1,0,0,1) = (a, b_8)$
$p_{25} = (s^\perp \vee t^\perp) \wedge [s \vee (s^\perp \wedge t)]$	$(a,0,1,1,0) = (a, b_9)$
$p_{26} = (s^\perp \vee t^\perp) \wedge [s \vee (s^\perp \wedge t^\perp)]$	$(a,0,1,0,1) = (a, b_{10})$
$p_{27} = (s^\perp \vee t^\perp) \wedge (s^\perp \vee t) \wedge [s \vee (s^\perp \wedge t^\perp) \vee (s^\perp \wedge t)]$	$(a,0,0,1,1) = (a, b_{11})$
$p_{28} = s \vee (s^\perp \wedge t)$	$(a,1,1,1,0) = (a, b_{12})$
$p_{29} = s \vee (s^\perp \wedge t^\perp)$	$(a,1,1,0,1) = (a, b_{13})$
$p_{30} = (s^\perp \vee t) \wedge [s \vee (s^\perp \wedge t^\perp) \vee (s^\perp \wedge t)]$	$(a,1,0,1,1) = (a, b_{14})$
$p_{31} = (s^\perp \vee t^\perp) \wedge [s \vee (s^\perp \wedge t^\perp) \vee (s^\perp \wedge t)]$	$(a,0,1,1,1) = (a, b_{15})$
$p_{32} = s \vee (s^\perp \wedge t^\perp) \vee (s^\perp \wedge t)$	$(a,1,1,1,1) = (a, b_{16})$

Reprezentace v:

L	$MO_3 \times 2^4$
$p_{33} = t \wedge (t^\perp \vee s) \wedge (t^\perp \vee s^\perp)$	$(b,0,0,0,0) = (b,b_1)$
$p_{34} = t \wedge (t^\perp \vee s)$	$(b,1,0,0,0) = (b,b_2)$
$p_{35} = (t^\perp \wedge s) \vee [t \wedge (t^\perp \vee s^\perp) \wedge (t^\perp \vee s)]$	$(b,0,1,0,0) = (b,b_3)$
$p_{36} = t \wedge (t^\perp \vee s^\perp)$	$(b,0,0,1,0) = (b,b_4)$
$p_{37} = (s^\perp \wedge t^\perp) \vee [t \wedge (t^\perp \vee s^\perp) \wedge (t^\perp \vee s^\perp)]$	$(b,0,0,0,1) = (b,b_5)$
$p_{38} = (s \vee t^\perp) \wedge [t \vee (t^\perp \wedge s)]$	$(b,1,1,0,0) = (b,b_6)$
$p_{39} = t$	$(b,1,0,1,0) = (b,b_7)$
$p_{40} = (s \vee t^\perp) \wedge [t \vee (t^\perp \wedge s^\perp)]$	$(b,1,0,0,1) = (b,b_8)$
$p_{41} = (s^\perp \vee t^\perp) \wedge [t \vee (t^\perp \wedge s^\perp)]$	$(b,0,1,1,0) = (b,b_9)$
$p_{42} = (s^\perp \vee t^\perp) \wedge (s \vee t^\perp) \wedge [t \vee (s^\perp \wedge t^\perp) \vee (s \wedge t^\perp)]$	$(b,0,1,0,1) = (b,b_{10})$
$p_{43} = (s^\perp \vee t^\perp) \wedge [t \vee (t^\perp \wedge s^\perp)]$	$(b,0,0,1,1) = (b,b_{11})$
$p_{44} = t \vee (t^\perp \wedge s)$	$(b,1,1,1,0) = (b,b_{12})$
$p_{45} = (s \vee t^\perp) \wedge [t \vee (s^\perp \wedge t^\perp) \vee (t^\perp \wedge s)]$	$(b,1,1,0,1) = (b,b_{13})$
$p_{46} = t \vee (t^\perp \wedge s^\perp)$	$(b,1,0,1,1) = (b,b_{14})$
$p_{47} = (s^\perp \vee t^\perp) \wedge [t \vee (t^\perp \wedge s) \vee (t^\perp \wedge s^\perp)]$	$(b,0,1,1,1) = (b,b_{15})$
$p_{48} = t \vee (t^\perp \wedge s) \vee (t^\perp \wedge s^\perp)$	$(b,1,1,1,1) = (b,b_{16})$
$p_{49} = (s \triangle t) \wedge (s^\perp \vee t) \wedge (s \vee t^\perp)$	$(a \triangle b,0,0,0,0) = (a \triangle b,b_1)$
$p_{50} = (s^\perp \vee t) \wedge (s \vee t^\perp) \wedge [(s \triangle t) \vee (s^\perp \wedge t)]$	$(a \triangle b,1,0,0,0) = (a \triangle b,b_2)$
$p_{51} = (s \triangle t) \wedge (s^\perp \vee t)$	$(a \triangle b,0,1,0,0) = (a \triangle b,b_3)$
$p_{52} = (s \triangle t) \wedge (s \vee t^\perp)$	$(a \triangle b,0,0,1,0) = (a \triangle b,b_4)$
$p_{53} = (s^\perp \vee t) \wedge (s \vee t^\perp) \wedge [(s \triangle t) \vee (s \wedge t^\perp)]$	$(a \triangle b,0,0,0,1) = (a \triangle b,b_5)$
$p_{54} = (s^\perp \vee t) \wedge [(s \triangle t) \vee (s^\perp \wedge t)]$	$(a \triangle b,1,1,0,0) = (a \triangle b,b_6)$
$p_{55} = (s \vee t^\perp) \wedge [(s \triangle t) \vee (s^\perp \wedge t)]$	$(a \triangle b,1,0,1,0) = (a \triangle b,b_7)$
$p_{56} = (s^\perp \vee t) \wedge (s \vee t^\perp) \wedge [(s \triangle t) \vee (s^\perp \wedge t) \vee (s \wedge t^\perp)]$	$(a \triangle b,1,0,0,1) = (a \triangle b,b_8)$
$p_{57} = (s \triangle t)$	$(a \triangle b,0,1,1,0) = (a \triangle b,b_9)$
$p_{58} = (s^\perp \vee t) \wedge [(s \triangle t) \vee (s \wedge t^\perp)]$	$(a \triangle b,0,1,0,1) = (a \triangle b,b_{10})$
$p_{59} = (s \vee t^\perp) \wedge [(s \triangle t) \vee (s \wedge t^\perp)]$	$(a \triangle b,0,0,1,1) = (a \triangle b,b_{11})$
$p_{60} = (s \triangle t) \vee (s^\perp \wedge t)$	$(a \triangle b,1,1,1,0) = (a \triangle b,b_{12})$
$p_{61} = (s^\perp \vee t) \wedge [(s \triangle t) \vee (s^\perp \wedge t) \vee (s \wedge t^\perp)]$	$(a \triangle b,1,1,0,1) = (a \triangle b,b_{13})$
$p_{62} = (s \vee t^\perp) \wedge [(s \triangle t) \vee (s^\perp \wedge t) \vee (s \wedge t^\perp)]$	$(a \triangle b,1,0,1,1) = (a \triangle b,b_{14})$
$p_{63} = (s \triangle t) \vee (s \wedge t^\perp)$	$(a \triangle b,0,1,1,1) = (a \triangle b,b_{15})$
$p_{64} = (s \triangle t) \vee (s^\perp \wedge t) \vee (s \wedge t^\perp)$	$(a \triangle b,1,1,1,1) = (a \triangle b,b_{16})$

Reprezentace v:

L	$MO_3 \times 2^4$
$p_{65} = (s^\perp \triangle t) \wedge (s \vee t) \wedge (s^\perp \vee t^\perp)$	$(a \triangle b^\perp, 0,0,0,0) = (a \triangle b^\perp, b_1)$
$p_{66} = (s^\perp \triangle t) \wedge (s \vee t)$	$(a \triangle b^\perp, 1,0,0,0) = (a \triangle b^\perp, b_2)$
$p_{67} = (s \vee t) \wedge (s^\perp \vee t^\perp) \wedge [(s^\perp \triangle t) \vee (s \wedge t)]$	$(a \triangle b^\perp, 0,1,0,0) = (a \triangle b^\perp, b_3)$
$p_{68} = (s \vee t) \wedge (s^\perp \vee t^\perp) \wedge [(s^\perp \triangle t) \vee (s^\perp \wedge t^\perp)]$	$(a \triangle b^\perp, 0,0,1,0) = (a \triangle b^\perp, b_4)$
$p_{69} = (s^\perp \triangle t) \wedge (s^\perp \vee t^\perp)$	$(a \triangle b^\perp, 0,0,0,1) = (a \triangle b^\perp, b_5)$
$p_{70} = (s \vee t) \wedge [(s^\perp \triangle t) \vee (s \wedge t)]$	$(a \triangle b^\perp, 1,1,0,0) = (a \triangle b^\perp, b_6)$
$p_{71} = (s \vee t) \wedge [(s^\perp \triangle t) \vee (s^\perp \wedge t^\perp)]$	$(a \triangle b^\perp, 1,0,1,0) = (a \triangle b^\perp, b_7)$
$p_{72} = s^\perp \triangle t$	$(a \triangle b^\perp, 1,0,0,1) = (a \triangle b^\perp, b_8)$
$p_{73} = (s \vee t) \wedge (s^\perp \vee t^\perp) \wedge [(s^\perp \triangle t) \vee (s \wedge t) \vee (s^\perp \wedge t^\perp)]$	$(a \triangle b^\perp, 0,1,1,0) = (a \triangle b^\perp, b_9)$
$p_{74} = (s^\perp \vee t^\perp) \wedge [(s^\perp \triangle t) \vee (s \wedge t)]$	$(a \triangle b^\perp, 0,1,0,1) = (a \triangle b^\perp, b_{10})$
$p_{75} = (s^\perp \vee t^\perp) \wedge [(s^\perp \triangle t) \vee (s^\perp \wedge t^\perp)]$	$(a \triangle b^\perp, 0,0,1,1) = (a \triangle b^\perp, b_{11})$
$p_{76} = (s \vee t) \wedge [(s^\perp \triangle t) \vee (s \wedge t) \vee (s^\perp \wedge t^\perp)]$	$(a \triangle b^\perp, 1,1,1,0) = (a \triangle b^\perp, b_{12})$
$p_{77} = (s^\perp \triangle t) \vee (s \wedge t)$	$(a \triangle b^\perp, 1,1,0,1) = (a \triangle b^\perp, b_{13})$
$p_{78} = (s^\perp \triangle t) \vee (s^\perp \wedge t^\perp)$	$(a \triangle b^\perp, 1,0,1,1) = (a \triangle b^\perp, b_{14})$
$p_{79} = (s^\perp \vee t^\perp) \wedge [(s^\perp \triangle t) \vee (s \wedge t) \vee (s^\perp \wedge t^\perp)]$	$(a \triangle b^\perp, 0,1,1,1) = (a \triangle b^\perp, b_{15})$
$p_{80} = (s^\perp \triangle t) \vee (s \wedge t) \vee (s^\perp \wedge t^\perp)$	$(a \triangle b^\perp, 1,1,1,1) = (a \triangle b^\perp, b_{16})$
$p_{81} = t^\perp \wedge (t \vee s^\perp) \wedge (t \vee s)$	$(b^\perp, 0,0,0,0) = (b^\perp, b_1)$
$p_{82} = (s \wedge t) \vee [t^\perp \wedge (t \vee s^\perp) \wedge (t \vee s)]$	$(b^\perp, 1,0,0,0) = (b^\perp, b_2)$
$p_{83} = t^\perp \wedge (t \vee s)$	$(b^\perp, 0,1,0,0) = (b^\perp, b_3)$
$p_{84} = (s^\perp \wedge t) \vee [t^\perp \wedge (t \vee s) \wedge (t \vee s^\perp)]$	$(b^\perp, 0,0,1,0) = (b^\perp, b_4)$
$p_{85} = t^\perp \wedge (t \vee s^\perp)$	$(b^\perp, 0,0,0,1) = (b^\perp, b_5)$
$p_{86} = (s \vee t) \wedge [t^\perp \vee (t \wedge s)]$	$(b^\perp, 1,1,0,0) = (b^\perp, b_6)$
$p_{87} = (s \vee t) \wedge (s^\perp \vee t) \wedge [t^\perp \vee (t \wedge s) \vee (t^\perp \wedge s)]$	$(b^\perp, 1,0,1,0) = (b^\perp, b_7)$
$p_{88} = (s^\perp \vee t) \wedge [t^\perp \vee (t \wedge s)]$	$(b^\perp, 1,0,0,1) = (b^\perp, b_8)$
$p_{89} = (s \vee t) \wedge [t^\perp \vee (t \wedge s^\perp)]$	$(b^\perp, 0,1,1,0) = (b^\perp, b_9)$
$p_{90} = t^\perp$	$(b^\perp, 0,1,0,1) = (b^\perp, b_{10})$
$p_{91} = (s^\perp \vee t) \wedge [t^\perp \vee (t \wedge s^\perp)]$	$(b^\perp, 0,0,1,1) = (b^\perp, b_{11})$
$p_{92} = (s \vee t) \wedge [t^\perp \vee (t \wedge s^\perp) \vee (t \wedge s)]$	$(b^\perp, 1,1,1,0) = (b^\perp, b_{12})$
$p_{93} = t^\perp \vee (t \wedge s)$	$(b^\perp, 1,1,0,1) = (b^\perp, b_{13})$
$p_{94} = (s^\perp \vee t) \wedge [t^\perp \vee (t \wedge s^\perp) \vee (t \wedge s)]$	$(b^\perp, 1,0,1,1) = (b^\perp, b_{14})$
$p_{95} = t^\perp \vee (t \wedge s^\perp)$	$(b^\perp, 0,1,1,1) = (b^\perp, b_{15})$
$p_{96} = t^\perp \vee (t \wedge s^\perp) \vee (t \wedge s)$	$(b^\perp, 1,1,1,1) = (b^\perp, b_{16})$

Reprezentace v:

L	$MO_3 \times 2^4$
$p_{97} = s^{\perp} \wedge (s \vee t^{\perp}) \wedge (s \vee t)$	$(a^{\perp}, 0, 0, 0, 0) = (a^{\perp}, b_1)$
$p_{98} = (s \wedge t) \vee [s^{\perp} \wedge (s \vee t^{\perp}) \wedge (s \vee t)]$	$(a^{\perp}, 1, 0, 0, 0) = (a^{\perp}, b_2)$
$p_{99} = (s \wedge t^{\perp}) \vee [s^{\perp} \wedge (s \vee t^{\perp}) \wedge (s \vee t)]$	$(a^{\perp}, 0, 1, 0, 0) = (a^{\perp}, b_3)$
$p_{100} = s^{\perp} \wedge (s \vee t)$	$(a^{\perp}, 0, 0, 1, 0) = (a^{\perp}, b_4)$
$p_{101} = s^{\perp} \wedge (s \vee t^{\perp})$	$(a^{\perp}, 0, 0, 0, 1) = (a^{\perp}, b_5)$
$p_{102} = (s \vee t) \wedge (s \vee t^{\perp}) \wedge [s^{\perp} \vee (s \wedge t) \vee (s \wedge t^{\perp})]$	$(a^{\perp}, 1, 1, 0, 0) = (a^{\perp}, b_6)$
$p_{103} = (s \vee t) \wedge [s^{\perp} \vee (s \wedge t)]$	$(a^{\perp}, 1, 0, 1, 0) = (a^{\perp}, b_7)$
$p_{104} = (s \vee t^{\perp}) \wedge [s^{\perp} \vee (s \wedge t)]$	$(a^{\perp}, 1, 0, 0, 1) = (a^{\perp}, b_8)$
$p_{105} = (s \vee t) \wedge [s^{\perp} \vee (s \wedge t^{\perp})]$	$(a^{\perp}, 0, 1, 1, 0) = (a^{\perp}, b_9)$
$p_{106} = (s \vee t^{\perp}) \wedge [s^{\perp} \vee (s \wedge t^{\perp})]$	$(a^{\perp}, 0, 1, 0, 1) = (a^{\perp}, b_{10})$
$p_{107} = s^{\perp}$	$(a^{\perp}, 0, 0, 1, 1) = (a^{\perp}, b_{11})$
$p_{108} = (s \vee t) \wedge [s^{\perp} \vee (s \wedge t^{\perp}) \vee (s \wedge t)]$	$(a^{\perp}, 1, 1, 1, 0) = (a^{\perp}, b_{12})$
$p_{109} = (s \vee t^{\perp}) \wedge [s^{\perp} \vee (s \wedge t^{\perp}) \vee (s \wedge t)]$	$(a^{\perp}, 1, 1, 0, 1) = (a^{\perp}, b_{13})$
$p_{110} = s^{\perp} \vee (s \wedge t)$	$(a^{\perp}, 1, 0, 1, 1) = (a^{\perp}, b_{14})$
$p_{111} = s^{\perp} \vee (s \wedge t^{\perp})$	$(a^{\perp}, 0, 1, 1, 1) = (a^{\perp}, b_{15})$
$p_{112} = s^{\perp} \vee (s \wedge t^{\perp}) \vee (s \wedge t)$	$(a^{\perp}, 1, 1, 1, 1) = (a^{\perp}, b_{16})$
$p_{113} = (s \vee t) \wedge (s \vee t^{\perp}) \wedge (s^{\perp} \vee t) \wedge (s^{\perp} \vee t^{\perp})$	$(1, 0, 0, 0, 0) = (1, b_1)$
$p_{114} = (s \vee t) \wedge (s \vee t^{\perp}) \wedge (s^{\perp} \vee t)$	$(1, 1, 0, 0, 0) = (1, b_2)$
$p_{115} = (s \vee t) \wedge (s \vee t^{\perp}) \wedge (s^{\perp} \vee t^{\perp})$	$(1, 0, 1, 0, 0) = (1, b_3)$
$p_{116} = (s \vee t) \wedge (s^{\perp} \vee t) \wedge (s^{\perp} \vee t^{\perp})$	$(1, 0, 0, 1, 0) = (1, b_4)$
$p_{117} = (s \vee t^{\perp}) \wedge (s^{\perp} \vee t) \wedge (s^{\perp} \vee t^{\perp})$	$(1, 0, 0, 0, 1) = (1, b_5)$
$p_{118} = (s \vee t) \wedge (s \vee t^{\perp})$	$(1, 1, 1, 0, 0) = (1, b_6)$
$p_{119} = (s \vee t) \wedge (s^{\perp} \vee t)$	$(1, 1, 0, 1, 0) = (1, b_7)$
$p_{120} = (s \vee t^{\perp}) \wedge (s^{\perp} \vee t)$	$(1, 1, 0, 0, 1) = (1, b_8)$
$p_{121} = (s \vee t) \wedge (s^{\perp} \vee t^{\perp})$	$(1, 0, 1, 1, 0) = (1, b_9)$
$p_{122} = (s \vee t^{\perp}) \wedge (s^{\perp} \vee t^{\perp})$	$(1, 0, 1, 0, 1) = (1, b_{10})$
$p_{123} = (s^{\perp} \vee t) \wedge (s^{\perp} \vee t^{\perp})$	$(1, 0, 0, 1, 1) = (1, b_{11})$
$p_{124} = s \vee t$	$(1, 1, 1, 1, 0) = (1, b_{12})$
$p_{125} = s \vee t^{\perp}$	$(1, 1, 1, 0, 1) = (1, b_{13})$
$p_{126} = s^{\perp} \vee t$	$(1, 1, 0, 1, 1) = (1, b_{14})$
$p_{127} = s^{\perp} \vee t^{\perp}$	$(1, 0, 1, 1, 1) = (1, b_{15})$
$p_{128} = \mathbf{1}$	$(1, 1, 1, 1, 1) = (1, b_{16})$

6. Závěr

V práci byly předvedeny některé výsledky studia třídy diferenčních algeber a třídy $\mathcal{ODL}$. U ortokomplementárních diferenčních svazů byla zvýšená pozornost věnována těm z nich, které jsou horizontální sumou Booleových algeber a zmíněna byla i problematika množinové reprezentovatelnosti těchto svazů. Dále byla ukázána konstrukce volného ODL s dvouprvkovou množinou generátorů a dvě různé reprezentace tohoto svazu.

Jedná se spíše o vybrané problémy studia symetrické diference v ortomodulárních svazech, mnoho otázek týkajících se této problematiky zůstává zatím nezodpovězených. Uveďme zde některé z nich (první dvě otázky jsou převzaty z článku [16]), i když tento seznam není zdaleka vyčerpávající:

- Dá se každý OML K vnořit do nějakého OML L_{supp} takového, že L_{supp} je supportem pro nějaký ODL L?
- Je varieta $\mathcal{SRODL}$ konečně bazírovaná?
- Je třída $\mathcal{HOR} \cap \mathcal{SRODL}$ konečně axiomatizovatelná?
- Dá se každý konečný svaz ze třídy $\mathcal{HOR}$ získat rozložením BA?
- Uvažme třídu $\mathcal{ODP}$ takovou, že doplňující strukturou k operaci symetrické diference nebudou ortokomplementární svazy, ale ortokomplementární posety. Která tvrzení o třídě $\mathcal{ODL}$ platí i pro třídu $\mathcal{ODP}$? Jakým způsobem přeformulovat ta tvrzení, která neplatí?

Naznačenými směry by se mohlo ubírat další zkoumání třídy $\mathcal{ODL}$ (případně $\mathcal{ODP}$).

7. Použitá literatura

Reference

[1] Beran L., *Orthomodular Lattices, Algebraic Approach*, D. Reidel, Dordrecht, 1985.

[2] Bruns G., Greechie R., *Blocks and Commutators in Orthomodular Lattices*, Algebra Universalis, Vol. **27**(1990), 1-9.

[3] Bruns G., Harding J., *Algebraic aspects of orthomodular lattices*, in Coecke B., Moore D. and Wilce A. eds. Current Research in Operational Quantum Logic, 2000, 37-65.

[4] Bruns G., Roddy M., *Projective orthomodular lattices*, Canad. Math. Bull. Vol. **37** (2), 1994, 145-153.

[5] Bruns G., Roddy M., *Projective orthomodular lattices II*, Algebra Universalis Vol. **37**(1997), 143-153.

[6] Burris S., Sankappanavar H.P., *A Course in Universal Algebra*, Springer-Verlag, Springer-Verlag, 1981. (online: http://www.thoralf.uwaterloo.ca/htdocs/ualg.html)

[7] Chang C.C., Keisler H.J., *Model Theory*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, London, 1973.

[8] Chevalier G., *Commutators and Decompositions of Orthomodular Lattices*, Order **6**: 181-194, 1989.

[9] d'Andrea A.B., Pulmannová S., *Boolean quotiens of orthomodular lattices*, Algebra Universalis Vol. **34** (1995), 485-495.

[10] Gudder S.P., *Stochastic Methods in Quantum Mechanics*, Amsterdam 1979.

[11] Harding J., *Lectures on orthomodular lattices*, Prague 1997.

[12] Kalmbach G., *Orthomodular Lattices*, Academic Press, London, 1983.

[13] Katushima N., *Algebraic Structures of Operational Logics in Physicals and Automata Experiments*, diplomová práce 1999, online: http://www.jaist.ac.jp/library/thesis/is-master-1999/paper/katusima/paper.pdf

[14] MacLane S., Birkhoff G., *Algebra (Third Edition)*, AMS Chelsea Publishing Company, Providence, 1999.

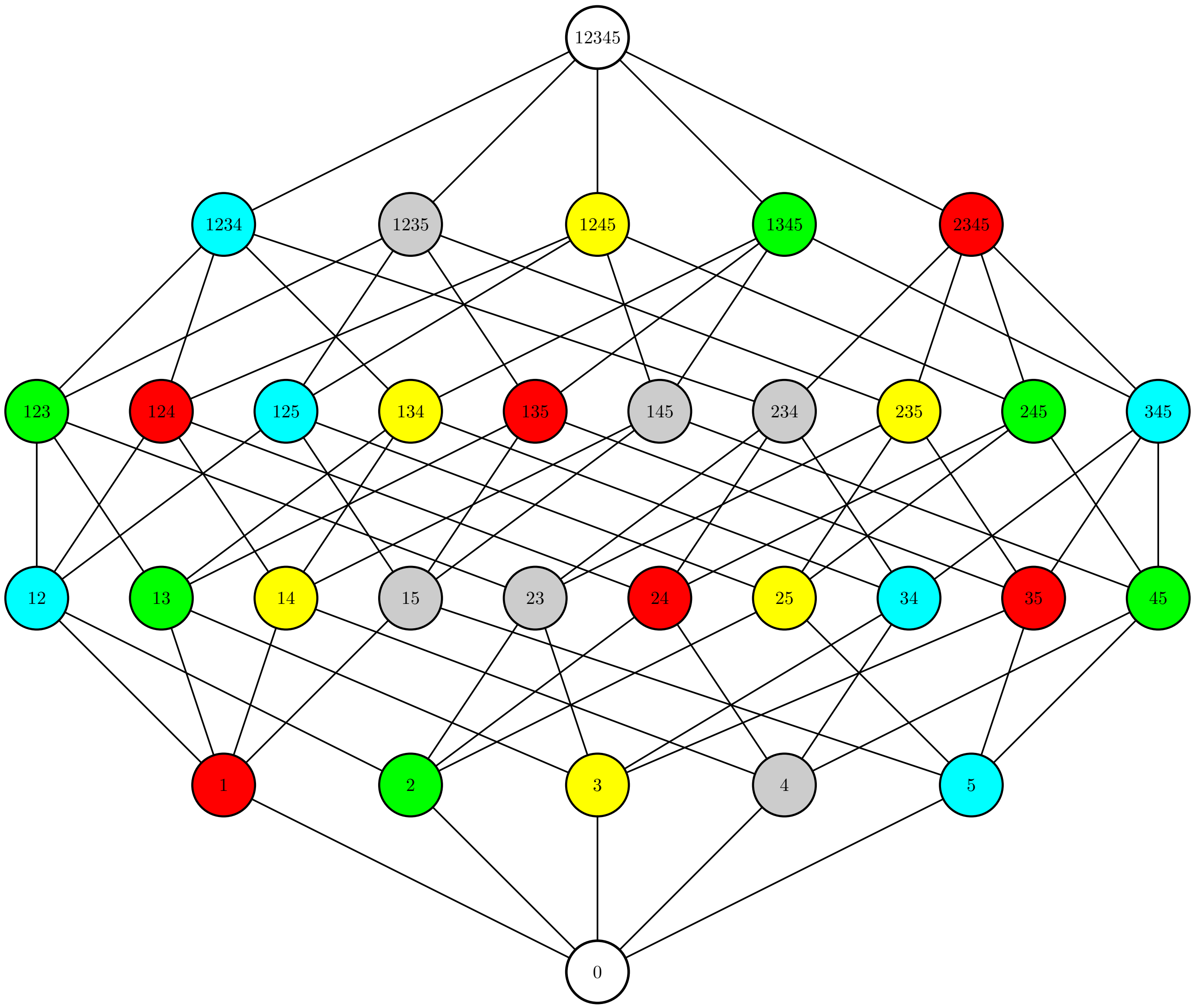
[15] Maeda, Maeda, *Symmetric Lattices*, Academic Press, London, 1983.

[16] Matoušek M., *Orthocomplemented lattices with a symmetric difference*, zasláno do Algebra Universalis.

[17] Matoušek M., *Úvod do teorie modelů*, učební text ke kurzu Logika III, nepublikováno.

[18] Pták P., Pulmannová S., *Orthomodular Structures as Quantum Logics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1991.

8. Přílohy



Obrázek 6: Rozklad BA o 32 prvcích na 5 podalgeber.