

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Martina Dobáková

Risk management a ochrana spotřebitele ve finančních službách

Katedra: *Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky*

Studijní program: *Matematika*

Vedoucí diplomové práce: *Mgr. Petr Jaroš, Dr.*

Studijní obor: *Finanční a pojistná matematika*

Ďakujem vedúcemu mojej diplomovej práce pánovi Mgr. Jarošovi za podporu a cenné rady poskytnuté pri konzultáciach. Ďalej by som chcela poďakovať Mgr. Jane Čerbákovej a RNDr. Pavlovi Bourkovi za poskytnuté dáta a praktické pripomienky. Veľká vďaka patrí aj mojej rodine a priateľom, ktorí ma podporovali v priebehu celého štúdia.

Prehlasujem, že som svoju diplomovú prácu napísala samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov. Súhlasím so zapožičiavaním práce.



V Prahe dňa 10.8.2007

Martina Dobáková

Obsah

1	Úvod	5
2	Základné pojmy	7
2.1	Finančné deriváty	7
2.2	Základy finančnej matematiky	10
3	Banky a finančné riziká	11
3.1	Delenie finančných rizík	11
3.2	Úrokové riziko	12
3.3	Riadenie úrokového rizika	15
3.3.1	Gap analýza	15
3.3.2	Simulácie a VaR	15
3.3.3	Hedging	17
3.3.4	Asset and Liability Management	19
4	Spotrebiteľský úver	20
4.1	Základná charakteristika	20
4.2	Spotrebiteľský úver a legislatíva	21
5	Chovanie sa spotrebiteľov a riziko predčasného splatenia	24
5.1	Vznik rizika predčasného splatenia	24
5.2	Modelovanie rizika predčasného splatenia	27
5.3	Opcia predčasného splatenia z hľadiska spotrebiteľa	27
6	Modely úrokových sadziieb	29
6.1	Rovnovážne modely	29
6.2	Bezarbitrážne modely a Hull-Whiteov model	30
6.3	Implementácia modelu pomocou trinomického stromu - prvý krok	30
6.4	Implementácia modelu pomocou trinomického stromu - druhý krok	33

7	Oceňovacie modely opcie predčasného splatenia v spotrebitel'skom úvere	34
7.1	Konštrukcia modelu	35
7.2	Praktické využitie modelu pre racionálne sa chovajúceho klienta	38
7.3	Neracionálne chovanie sa spotrebiteľov	43
7.3.1	Ocenenie opcie predčasného splatenia pomocou trinomickeho stromu	43
7.3.2	Ocenenie opcie predčasného splatenia s využitím simulácií	44
7.4	Ocenenie opcie predčasného splatenia v poole racionálne i neracionálne chovajúcich sa klientov	46
7.5	Porovnanie cien opcíí	46
8	Hedging portfólia spotrebiteľských úverov	48
9	Záver	49
A	Zákon o ochrane spotrebiteľa pri zjednávaní spotrebiteľského úveru (výňatok)	50
B	Medzinárodný účtovný štandard IAS 39 a oceňovanie objektívnou hodnotou (výňatok)	52

Název práce: *Risk management a ochrana spotřebitele ve finančních službách*

Autor: *Martina Dobáková*

Katedra: *Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky*

Vedoucí diplomové práce: *Mgr. Petr Jaroš, Dr.*

e-mail vedoucího: *pjaros@csob.cz*

Abstrakt: *Autorka sa v tejto práci venuje opcii predčasného splatenia, ktorá je súčasťou finančných produktov. Úverové kontrakty sú štruktúrované tak, že poskytujú klientovi opciu - právo predčasne splatiť úver kedykoľvek v období do dátumu splatnosti úveru. Poskytovanie tejto opcie v spotrebiteľských úveroch bez poplatkov je vynútené českou legislatívou. Poskytovateľ týchto produktov čelí riziku predčasného splatenia, a preto je nutné vedieť toto riziko správne oceniť. Autorka analyzuje tieto produkty, popisuje riziko predčasného splatenia spolu s racionálnym a neracionálnym chovaním spotrebiteľov pri uplatňovaní tejto opcie. V modeli, kde sa predpokladá racionálne chovanie klientov, môže klient splatiť zostatok úveru podľa hodnoty aktuálnych úrokových sadzieb kedykoľvek do dátumu splatnosti úveru. Naopak, v modeli s neracionálnym chovaním klientov, hodnota opcie predčasného splatenia nezávisí na vývoji úrokových sadzieb. V poslednom modeli berie autorka do úvahy racionálne i neracionálne chovanie klientov.*

Klíčová slova: *opcia predčasného splatenia, riziko predčasného splatenia, spotrebiteľský úver, racionálne a neracionálne chovanie spotrebiteľov*

Title: *Risk management and the Customer Protection in Financial Service*

Author: *Martina Dobáková*

Department: *Department of Probability and Mathematical Statistics*

Supervisor: *Mgr. Petr Jaroš, Dr.*

Supervisor's e-mail address: *pjaros@csob.cz*

Abstract: *In this paper author deals with prepayment options embedded in financial products. Loan contracts are structured to provide a borrower the option to prepay the loan at any time prior to the maturity of the loan. Granting of a prepayment option in consumer loans without penalty is enforced by Czech legislative. A lender of such a loan faces prepayment risk so there is a need to value this risk. The author analyses such products, deals with a prepayment option, rational and non rational exercise of this prepayment option. The core of the work is a practical implementation of models used to value the prepayment risk considering both the rational and non rational exercise policy. In a model with rational exercise policy, the borrower can repay the loan for the balance outstanding regardless of current interest rates at any time during the term of the loan. A non rational exercise policy model does not depend on the evolution of interest rates. The last model is a combination of both already mentioned models.*

Keywords: *prepayment option, prepayment risk, consumer loan, rational and non rational exercise policy*

Kapitola 1

Úvod

Finančné inštitúcie ponúkajú svojim klientom širokú škálu finančných produktov a súčasťou mnohých produktov býva opcia - inak povedané právo, ktoré spotrebiteľ môže uplatniť počas životnosti produktu. Takýmito opciami zvyčajne býva opcia predčasného splatenia úveru (spotrebiteľského, v niektorých krajinách aj hypotekárneho), možnosť mimoriadnej splátky, právo na predčasný výber termínovaných vkladov a mnohé ďalšie podľa typu produktu. Banky, poisťovne a iné finančné inštitúcie sú tak vystavené opčnému riziku a spolu s riadením ostatných finančných rizík je ich úlohou eliminovať toto riziko a hľadať metódy riadenia rizík tak, aby bol ich dopad na celkovú výnosnosť inštitúcie čo najmenší. Do tohto procesu mnohokrát vstupuje legislatíva prijatím zákonov týkajúcich sa ochrany spotrebiteľov, ktorá takto klientom zabezpečuje bezplatné využívanie vnorených opcií vo finančných produktoch.

V tejto práci sa zaoberáme hlavne opciami zahrnutými v spotrebiteľských úveroch. Tieto opcie poskytujú klientom možnosť splatiť úver pred dátumom splatnosti. Poskytovateľ úverových produktov čelí riziku predčasného splatenia v prípade, že je klientovi táto možnosť poskytnutá bezplatne. Táto opcia je Americká call opcia držaná spotrebiteľom a jej hodnota predstavuje rozdiel medzi hodnotou úveru v čase predčasného splatenia a hodnotou úveru za pôvodných podmienok. Opciu je výhodné uplatniť pri poklese úrokových sadzieb, kedy je aktuálna hodnota úveru vyššia než hodnota úveru za platnosti pôvodných podmienok. Túto opciu uplatnia iba klienti racionálne uvažujúci a tento predpoklad využijeme v prvom modeli. Druhý model je založený na neracionálnom chovaní klienta, kedy na vývoji úrokových sadzieb nezávisí ani rozhodovanie klienta a ani cena opcie. V poslednom modeli budeme brať do úvahy racionálne i neracionálne chovanie klientov. Všetky modely si vyžadujú modelovanie budúceho vývoja úrokových sadzieb.

Druhá kapitola je venovaná základným pojmom vyskytujúcim sa v práci. Popisu finančných rizík, metódam ich kvantifikácie a riadenia je venovaná tretia kapitola. Štvrtá kapitola je venovaná charakteristike spotrebiteľských úverov a popisu zákona o ochrane spotrebiteľa. V piatej kapitole popisujeme racionálne i neracionálne chovanie sa spotrebiteľov a riziko predčasného splatenia úveru. Problematike vývoja budúcich sadzieb sme venovali celú šiestu kapitolu, kde sme popísali spôsob konštrukcie trinomického stromu. V siedmej kapitole konkrétne popisujeme modely oceňovania opcie predčasného splatenia.

Kapitola 2

Základné pojmy

2.1 Finančné deriváty

Finančný derivát je kontrakt, ktorého cena závisí na hodnote podkladového aktíva. Podkladovým aktívom môžu byť akcie, dlhopisy, rôzne meny, úrokové sadzby, ale aj iné deriváty. Medzi najznámejšie deriváty patria forwardy, futures, opcie a swapy. Ďalej uvedieme iba stručnú definíciu niektorých derivátov a ďalšie podrobnosti môžete nájsť v [1].

Forward je finančný derivát, ktorý zaväzuje predávajúceho a kupujúceho prediť a kúpiť v budúcnosti podkladové aktívum za vopred dohodnutých podmienok (termín, cena, objem, druh aktíva).

Future je štandardizovaný forwardový kontrakt, ktorý umožňuje obchodovať s futures vo veľkom merítke. Štandardizovaný je druh aktíva, množstvo, termín a cena, ale zachováva sa záväzok kupujúceho a predávajúceho obchod realizovať.

Opcia je finančný derivát, ktorého vlastník má právo (nie povinnosť) kúpiť alebo prediť niekedy v budúcnosti iný cenný papier za vopred stanovenú cenu. Deň, kedy dochádza k realizácii obchodu voláme deň splatnosti (angl. maturity day). V prípade kúpnej opcie hovoríme o call opcii a v prípade predajnej o put opcii. Držiteľ opcie (či už kúpnej alebo predajnej) je v tzv. voľnej pozícii (angl. long position) a svoje právo môže alebo nemusí uplatniť podľa aktuálnych tržných podmienok. Naopak, vypisovateľ opcie sa nachádza v tzv. krátkej pozícii (angl. short position) a keď dôjde k uplatneniu opcie druhou stranou, musí obchod realizovať za vopred dohodnutú cenu (angl. strike price, exercise price).

Opcia môže byť uplatnená buď v deň splatnosti opcie, vtedy hovoríme o Európskej opcii, alebo kedykoľvek do dátumu splatnosti opcie, vtedy hovoríme o Americkej opcii.

Pri uzavretí opčného kontraktu strana vo voľnej pozícii platí predávajúcemu za svoje právo. Zisk kupca call v deň splatnosti opcie, čo zároveň predstavuje stratu predajcu call opcie, je:

$$Z = \max(0, S - X) - c,$$

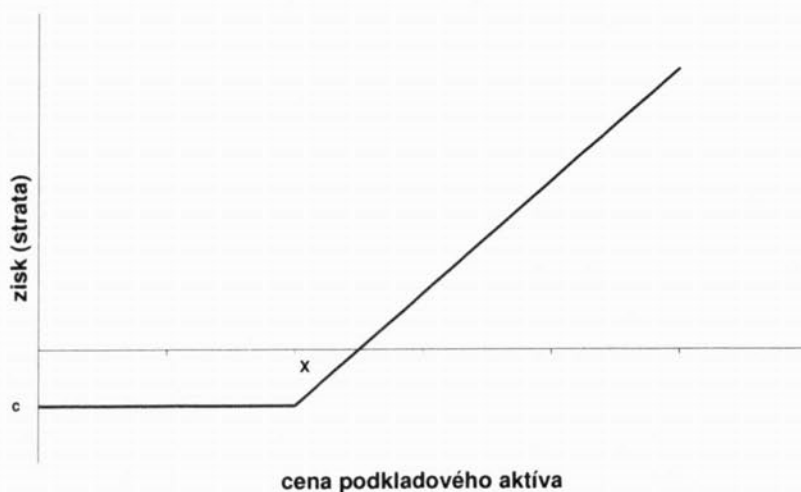
kde

Z zisk kupca call opcie (strata predajcu call opcie),

S cena podkladového aktíva,

X realizačná cena podkladového aktíva,

c cena call opcie.



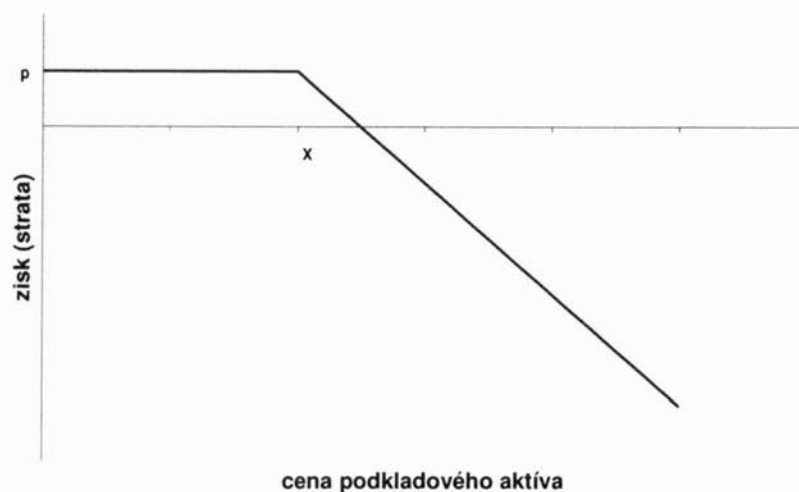
Obrázok 2.1: Zisk (strata) kupca (predajcu) call v deň splatnosti

Zisk kupca put opcie (strata predajcu put opcie) v deň splatnosti opcie je:

$$Z = \max(0, X - S) - p,$$

kde

- Z zisk kupca put opcie (strata predajcu put opcie),
- S cena podkladového aktíva,
- X realizačná cena podkladového aktíva,
- p cena put opcie.



Obrázok 2.2: Zisk (strata) kupca (predajcu) put v deň splatnosti

Opcia je *in-the-money*, keď je realizačná cena podkladového aktíva nad tržnou hodnotou v prípade call opcie a pod tržnou hodnotou v prípade put opcie. V opačnom prípade hovoríme, že je opcia *out-of-the-money*.

Cap a *floor* sú deriváty, ktorých podkladovým aktívom je úroková sadzba. *Cap* poskytuje držiteľovi ochranu proti rastu úrokových sadzieb. *Floor* naopak poskytuje držiteľovi ochranu proti poklesu úrokových sadzieb.

Swap je finančný derivát, v ktorom je zmluvne dohodnutá výmena cash flow medzi dvoma (prípadne viacerými) stranami. Podľa charakteru cash flow sa rozlišuje niekoľko druhov swapov:

- pri *úrokovom swape* dochádza k výmene úrokových platieb v rovnakej mene odvodených od rovnakej nominálnej hodnoty,

- pri *menovom swape* si protistrany vymieňajú cash flow v rôznych menách.

Delenie úrokových a menových swapov viď v [3].

2.2 Základy finančnej matematiky

Pojmy sú definované v [2].

Cash flow je tok platieb v časových okamihoch. Označme $\mathbf{CF} = (CF_0, \dots, CF_T)^T$ cash flow v diskretných časových okamihoch $0, \dots, T$. Nech i je úroková sadzba a $v = \frac{1}{(1+i)}$ príslušný diskontný faktor. Potom definujeme:

- *súčasnú hodnotu* ako diskontované cash flow

$$PV(\mathbf{CF}, v) = \sum_{t=0}^T \frac{CF_t}{(1+i)^t},$$

- *duráciu* ako časovo vážený priemer diskontovaných platieb ako je uvedené v [2, 29]

$$D(\mathbf{CF}, v) = \frac{\sum_{t=0}^T tCF_tv^t}{\sum_{t=0}^T CF_tv^t},$$

- *konveritu* ako mieru senzitivity cash flow vzhľadom na úrokovú sadzbu

$$D(\mathbf{CF}, v) = \frac{\sum_{t=0}^T t(t+1)CF_tv^t}{\sum_{t=0}^T CF_tv^t}.$$

Kapitola 3

Banky a finančné riziká

Bankové subjekty sú vystavené rôznym druhom finančných rizík pri poskytovaní finančných služieb. Vzhľadom k tomu, že sa snažia z dlhodobého hľadiska maximalizovať svoj zisk, musia určité riziká podstupovať, pretože činnosť smerujúca k úplnému vylúčeniu rizika, by sa mohla prejavíť v nedostatočnej ziskovosti bánk. Pri hľadaní ziskových príležitostí musí management banky hľadať vhodnú kombináciu ziskovosti a rizikovosti.

Banky sú v súčasnej dobe veľmi komplexné organizácie, ktoré poskytujú celú škálu finančných služieb, a preto je potrebné urobiť mnoho finančných rozhodnutí. Všetky rozhodnutia sú však úzko späté a nie je možné prijímať opatrenia na odstránenie jedného rizika a pritom nehľadieť na ostatné.

3.1 Delenie finančných rizík

Za základné delenie finančných rizík môžeme považovať delenie na riziká:

- úverové,
- tržné (úrokové, menové, akciové),
- likviditné,
- operačné.

Úverové riziko je jedným z hlavných rizík, ktoré podstupuje finančná inštitúcia. Toto riziko vzniká, keď klient nedodrží dohodnuté podmienky a banke vzniká strata. Riziko vyplýva z platobnej neschopnosti subjektu, alebo z toho, že daný subjekt nechce, respektíve nemôže splatiť svoje záväzky.

Druhým najvýznamnejším rizikom je tržné riziko. Jedná sa o riziko strát spôsobených zmenou tržných cien, alebo zmenou hodnôt finančných nástrojov v dôsledku nepriaznivého vývoja tržných podmienok (nepriaznivého vývoja úrokových sadzieb, cien akcií, menového kurzu). Podľa toho na aké zmeny tržných podmienok príslušné finančné nástroje reagujú, hovoríme o *menovom riziku*, ktoré je rizikom ujmy na zisku vplyvom zmeny kurzov cudzích mien voči mene, v ktorej sú vykazované účty; *úrokovom riziku*, ktoré je rizikom zníženia čistého úrokového príjmu vplyvom zmeny úrokových sadzieb na finančných trhoch a *akciom riziku*, ktoré plynie zo zmeny cien akcií. Niekedy sa uvádza, že úverové riziko je rizikom vrátenia peňazí a tržné riziko je rizikom výnosu peňazí.

Ďalším rizikom je *riziko likvidity*. Likvidita banky znamená jej schopnosť vyplatiť v každom okamihu svoje splatné záväzky. Ide o riziko toho, že banka nebude schopná vyplatiť svoje záväzky tak, aby bola zisková, pretože nebude mať potrebnú hotovosť, ani dostatok aktív, ktoré môže ihneď premeniť na peňažnú formu.

Posledným dôležitým rizikom je *operačné riziko*. Toto riziko vzniká v súvislosti s ľudskými chybami, nedodržaním postupov, podvodom, alebo nedostatkom informačných systémov, ako sú chyby v počítačových programoch, chyby v matematických vzťahoch modelov, nesprávne a oneskorené podávanie informácií, chyby prenosu dát, a podobne.

3.2 Úrokové riziko

Úrokové riziko pre banku vzniká zmenou tržných úrokových sadzieb a prejavuje sa negatívnym dopadom na

- čisté úrokové výnosy (akruálny prístup - amortizované ziskovacie ceny),
- súčasnú hodnotu finančných inštrumentov (fair value prístup).

Za zdroje úrokového rizika považujeme rozdiely v synchronizácii zmien úrokových sadzieb a cash flow, zmenu spreadu výnosových kriviek a zmenu výnosovej krivky ako aj vnorených opcií v bankových produktoch citlivých na zmenu úrokovej sadzby.

Úrokové riziko delíme podľa vyššie uvedených zdrojov do štyroch kategórií:

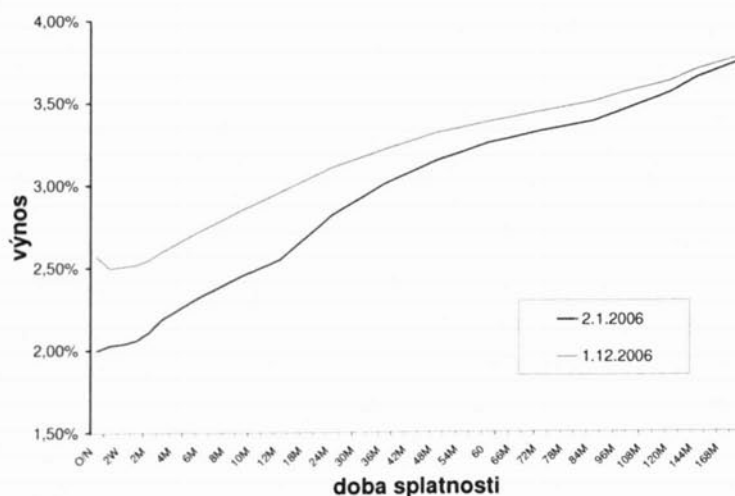
- riziko precenenia,

- riziko bázy,
- riziko výnosovej krivky,
- opčné riziko.

Riziko precenenia je spôsobené časovým nesúlalom v splatnosti aktív a pasív s pevnou úrokovou sadzbou. V prípade, že máme aktíva s dlhšou dobou precenenia než pasíva, čistý úrokový výnos sa zvýši po poklese úrokových sadzieb, pretože poklesom úrokových sadzieb získame lacnejšie zdroje na financovanie bankových aktív.

Riziko bázy je spôsobené zmenou tržných sadzieb v rôznych časových okamihoch alebo zmenou tržných sadzieb o rozdielne hodnoty pre rôzne finančné inštrumenty. Zmena úrokových sadzieb ovplyvní čistý úrokový výnos na základe zmien v prijatých a platených úrokoch príslušných inštrumentov, ktoré preceňujeme.

Riziko výnosovej krivky predstavuje zmena krátkodobých a dlhodobých úrokových sadzieb. Zmenu úrokových sadzieb indikuje zmena tvaru výnosovej krivky. Ilustrácia na obrázku 3.1



Obrázok 3.1: Zmena tvaru výnosovej krivky IRS CZ

Opčné riziko predstavuje právo banky alebo spotrebiteľa na zmenu budúcich cash flow banky. Držiteľ opcie má právo kúpiť alebo predať finančný inštrument za vopred dohodnutú cenu a v dohodnutom termíne v prípade, že sa jedná o európsku opciu a kedykoľvek do dátumu splatnosti opcie v prípade americkej opcie. Vypisovateľ opcie má povinnosť plniť záväzok plynúci z uzavretého kontraktu, ak sa držiteľ opcie rozhodne svoje právo uplatniť. Z charakteru opcie vyplýva, že držiteľ opcie uplatní svoje právo, keď je to pre neho ekonomicky výhodné. Ak je banka vypisovateľom opcií, v prípade nepriaznivého vývoja úrokových sadzieb, môže utrpieť výnosové straty, a to ako na strane aktív, tak aj na strane pasív.

Na strane aktív je banka vystavená opčnému riziku z existencie vnorených opcií v mnohých retailových produktoch. Najbežnejšou opciou je opcia predčasného splatenia. Opcia predčasného splatenia býva súčasťou spotrebiteľských a v niektorých krajinách aj hypotekárnych úverov. Mnohokrát je zmluvne povolené predčasne splatiť úver bez účtovania poplatku za predčasné splatenie. Opcia predčasného splatenia je vlastne call opcia držaná spotrebiteľom. V prípade poklesu úrokových sadzieb je pre spotrebiteľa výhodné opciu uplatniť a splatiť úver pred zmluvne dohodnutou maturitou, a tak refinancovať úver nižšou úrokovou sadzbou.

Na strane pasív banka poskytuje klientovi možnosť predčasného výberu depozít. Z pohľadu finančného inštrumentu hovoríme o put opcii na depozitá držanú spotrebiteľom. Pri raste úrokových sadzieb klesá hodnota depozít pre spotrebiteľa. Vzhľadom k opcii, ktorú vlastní, môže vybrať svoje vklady a uložiť ich za výhodnejšiu úrokovú sadzbu.

Produkty poskytované bankou obsahujúce caps a floors sú ďalším zdrojom opčného rizika. Tieto produkty zvyčajne predstavujú úvery a majú značný vplyv na vystavenie sa úrokovému riziku. Úverový cap znamená pre banku predanú put opciu na aktívum s fixnou úrokovou sadzbou a floor predstavuje call opciu na rovnaké aktívum držanú bankou. Keď tržné úrokové sadzby prevýšia cap úrokovú sadzbu, opcia držaná spotrebiteľom sa dostáva in-the-money, pretože spotrebiteľ platí úroky za nižšiu úrokovú sadzbu než je tržná. Avšak keď úrokové sadzby klesnú pod floor sadzbu, opcia držaná bankou sa dostáva in-the-money, pretože prijaté úroky prevyšujú úroky, ktoré by boli prijímané na základe tržných sadzieb.

3.3 Riadenie úrokového rizika

Predpokladom pre analýzu a riadenie úrokového rizika je jeho kvantitatívne vyjadrenie. Preto banky používajú mnoho rôznych techník na meranie úrokového rizika, ako napríklad rôzne simulácie a metódu Value at Risk (VaR). Banka môže riadiť úrokové riziko pomocou gap managementu a imunizácie portfólia v prípade, že portfólio bankových aktív a pasív je vytvorené nástrojmi s fixným výnosom. V prípade nelineárnych nástrojov musí banka siahnuť na komplexnejšie metódy riadenia úrokového rizika a to na delta hedging alebo simulácie.

3.3.1 Gap analýza

Gap analýza sa bežne používa na určenie výšky a riadenie úrokového rizika. Vyjadruje vplyv zmeny úrokových sadziieb na čistý úrokový výnos banky. Pri gap analýze sa rozdeľujú aktíva a pasíva banky do časových košov podľa najbližšieho dátumu preценenia alebo dátumu splatnosti. Mnohé banky rozdeľujú do časových košov iba úrokovo citlivé aktíva a pasíva. Za úrokovo citlivé aktíva alebo pasíva považujeme tie, pri ktorých sa za isté časové obdobie mení alebo môže zmeniť úroková sadzba, alebo ktoré môžeme preценiť v závislosti na zmene úrokových sadziieb. Ďalším dôležitým krokom je určenie správneho počtu časových košov a zároveň ich dĺžky. Rozdelením aktív a pasív do časových košov môžeme dospieť k pozitívnemu, neutrálnemu a negatívnemu gapu. Pozitívny gap získame, keď budeme mať v príslušnom časovom koši viac aktív než pasív. Banka bude z takého časového koša profitovať pri raste úrokových sadziieb, pretože tu bude preценených viac aktív než pasív. Naopak negatívny gap získame, keď budeme mať v časovom koši viac pasív než aktív a banka bude profitovať v prípade poklesu úrokových sadziieb.

3.3.2 Simulácie a VaR

Simulačné modely simulujú alebo projektujú vystavenie banky úrokovému riziku na základe rôznych predpokladov a scenárov, aby banka dokázala určiť zdroje a kvantifikovať jednotlivé typy rizika. Aby sme získali dôveryhodné výsledky, je potrebné urobiť celú radu simulácií na základe rôznych predpokladov a scenárov. Pri meraní úrokového rizika sa snažíme predpovedať budúce cash flow banky pri rôznych vývojoch úrokových sadziieb. Za relevantné informácie, ktoré vstupujú do modelov, pokladáme informácie o súčasnom stave banky, budúce úrokové sadzby a stavy bilancie banky. Avšak tieto ve-

ličiny je potrebné predpovedať. Výsledky simulácie pomáhajú identifikovať možný rozsah a pravdepodobný efekt zmien úrokových sadzieb na čistý úrokový výnos a aj tržnú hodnotu banky.

Výhodou simulácie je, že táto metóda merania rizika umožňuje pracovať s pravdepodobným vývojom štruktúry bilancie banky. Môžeme ľahko sledovať ako zmena vstupných údajov ovplyvní výsledky banky. Musíme však spomenúť aj nevýhody tejto metódy. Mnoho vstupných údajov je predpovedaných alebo odhadovaných, a to sa môže negatívne odraziť na výsledkoch simulácie. Musíme brať do úvahy aj fakt, že s dlhším časovým horizontom sa znižuje presnosť predpovedí a preto sa dlhodobé simulácie môžu značne líšiť od reality.

VaR patrí medzi všeobecné modely merania rizík. Definícia VaR hovorí o maximálnej hodnote, ktoré môže portfólio stratiť za dané obdobie s danou pravdepodobnosťou. Výpočet rozloženia ziskov a strát sa skladá z dvoch krokov. Najskôr sa odhadne pravdepodobnostné rozloženie rizikových faktorov, v našom prípade úrokovej sadzby. Potom sa určí pravdepodobnostné rozloženie ziskov a strát portfólia a jeho citlivosť na rizikový faktor. Jednou z metód je historická simulácia, kde sa používajú historické dáta. Tu treba dbať na vhodnú voľbu časového horizontu, z ktorého dáta berieme, pretože historické dáta často vykazujú systematické zmeny. Iné metódy VaR predpokladajú normálne rozloženie ziskov a strát portfólia a lineárnu závislosť výnosnosti portfólia na rizikových faktoroch. Na základe týchto predpokladov môže byť hodnota VaR kalkulovaná priamo zo strednej hodnoty a smerodatnej odchýlky.

Hlavnou prednosťou merania úrokového rizika pomocou historických dát je, že sa berie do úvahy volatilita úrokových sadzieb a prostredníctvom korelácie odhadovanej z historických dát berie do úvahy aj nerovnaké posuny výnosových kriviek. Nevýhodou je, že tento prístup je úspešný iba vtedy, keď sa podmienky charakteristické pre minulosť budú zhodovať s podmienkami pre budúcnosť.

Banka môže zvoliť dva prístupy k riadeniu úrokového rizika. Predpokladom aktívneho riadenia úrokového rizika gap managementom je spoľahlivé predpovedanie budúceho pohybu úrokových sadzieb. Ak banka predpokladá nárast úrokových sadzieb, jej cieľom je, aby úrokovovo citlivé aktíva prevyšovali úrokovovo citlivé pasíva. Tu však nastáva problém s predpoveďou budúcich úrokových sadzieb. Gap analýza má isté obmedzenia. Napríklad nie všetky aktíva a pasíva sú rovnako citlivé na zmenu úrokovej sadzby a zároveň je

problém s párovaním aktív a pasív podľa platieb a príjmu úrokov do identických období. Pri pasívnom spôsobe riadenia úrokového rizika sa banka snaží neutralizovať gap riadením aktív a pasív.

3.3.3 Hedging

Bankové portfólio je veľmi rôznorodé, a preto je pri riadení rizík nutné rozlišovať dve kategórie finančných inštrumentov - a to lineárne a nelineárne, aby k nim boli vhodne zvolené zaistovacie nástroje. Cieľom hedgingu je zaistiť, aby zmena ceny jedného finančného inštrumentu bola kompenzovaná zmenami v cene druhého inštrumentu, prípadne viacerých inštrumentov. Pri micro hedgingu zaistujeme proti finančnému riziku iba jeden finančný inštrument, zatiaľ čo pri macro hedgingu zaistujeme celé portfólio.

V prípade, že bankové portfólio obsahuje nelineárne nástroje, akými sú deriváty, je vhodné, aby sa pre zaistenie hodnoty portfólia využili deriváty samotné. Deriváty sú nelineárne nástroje, pretože ich cena sa nemení v rovnakom pomere ako cena podkladového aktíva. Ak sa zabezpečujeme len proti zmene ceny derivátu vzhľadom na podkladové aktívum, ide o delta hedging. Ak nás zaujíma aj zabezpečenie proti zmene delty opcie alebo portfólia, čiže snažíme sa zmeniť rýchlosť s akou sa delta mení, ide o gamma hedging. Bližšie popíšeme ako funguje delta hedging a aké hodnoty sa pri hedgingu zvyčajne sledujú. Spomenieme hlavne ukazovatele delta, theta a gamma, ktoré definujeme pre celé portfólio. Pre samostatný finančný derivát by bola definícia analogická.

Deltu portfólia definujeme ako mieru zmeny ceny portfólia vzhľadom na zmenu ceny podkladového aktíva. Označme:

- Π ako cenu portfólia ,
- S ako cenu podkladového aktíva,

potom delta portfólia je vyjadrená vzťahom:

$$\Delta = \frac{\partial \Pi}{\partial S}.$$

Bezrizikové portfólio môžeme vytvoriť tak, že predáme derivát hodnoty c a kúpime Δ hodnoty podkladového aktíva S . Pretože sa Δ derivátu mení v priebehu času zmenou tržnej ceny podkladového aktíva, zaistenie sa musí v priebehu času korigovať. V takomto prípade hovoríme o dynamickom hedgingu, ktorý je opakom statického hedgingu, kedy je hedging nastavený iba

raz a už nie je upravovaný. K hedgingu úrokového rizika sa využívajú základné deriváty, akými sú napríklad opcie na futures, opcie na dlhopisy alebo úrokové swapy. Časom sa na trhu objavili produkty, ktoré kombinujú základné deriváty do komplexnejších nástrojov. Príkladom sú swaptions - opcia na swap, alebo caps a floors.

Gamma portfólia je definovaná ako zmena delty portfólia v závislosti na zmene ceny podkladového aktíva. Označme:

Γ ako hodnotu portfólia,
 S ako cenu podkladového aktíva,

potom gamma portfólia je vyjadrená vzťahom:

$$\Gamma = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2}.$$

Od hodnoty gamma závisí frekvencia korekcie delta hedgingu.

Theta portfólia je definovaná ako zmena hodnoty portfólia v závislosti na čase. Označme:

Π ako hodnotu portfólia,
 S ako cenu podkladového aktíva,

potom theta portfólia je vyjadrená vzťahom:

$$\Theta = \frac{\partial \Pi}{\partial t}.$$

V praxi nemá veľký zmysel sledovať vplyv priebehu času na hodnotu portfólia, ale theta je dobrou aproximáciou gammy portfólia, čo plynie z nasledujúceho odvodenia.

Nech hodnota portfólia Π spĺňa diferenciálnu rovnicu Black-Scholes-Mertona (odvodenie tejto rovnice sa nachádza v [4, strana 291-292]):

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + rS \frac{\partial \Pi}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2} = r\Pi.$$

Kedže

$$\Theta = \frac{\partial \Pi}{\partial t}, \quad \Delta = \frac{\partial \Pi}{\partial S}, \quad \Gamma = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2},$$

potom platí

$$\Theta + rS\Delta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\Gamma = r\Pi.$$

Pre delta-neutrálne portfólio, teda pre $\Delta = 0$ platí:

$$\Theta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\Gamma = r\Pi.$$

Z posledného vzťahu vidíme, že gamma je aproximovaná funkciou thety.

3.3.4 Asset and Liability Management

Uvedené metódy na kvantifikáciu rizík používajú pracovníci útvaru riadenia aktív a pasív (Asset and Liability Management - ALM). Riadenie úrokového rizika predstavuje činnosť, ktorej cieľom je minimalizovať úrokové riziko tak, aby bol zároveň zabezpečený dostatočný výnos.

Niektoré banky centralizujú riadenie úrokového rizika do jedného útvaru a to použitím systému Funds Transfer Pricing (FTP). Funds Transfer Pricing umožňuje banke presunúť vplyv zmien úrokových sadzieb na výnosy jednotlivých útvarov do jedného útvaru. Základným princípom FTP je, že útvary, ktorý je zodpovedný za riadenie úrokového rizika, nakupuje pasíva za ceny ním určenými (vnútornými sadzbami) a zároveň zaisťuje financovanie aktív vnútornými sadzbami. Vnútorné sadzby sú stanovené tak, aby zabezpečili jednotlivým útvarom stabilné marže. FTP systém zabezpečuje, že všetky zisky a straty vznikajúce z nesúladu úrokovovo citlivých aktív a pasív sa prenášajú na centrálnu jednotku, ktorá je ďalej zodpovedná za riadenie vzniknutého rizika už hore uvedenými spôsobmi.

Kapitola 4

Spotrebiteľský úver

4.1 Základná charakteristika

Spotrebiteľský úver poskytujú klientom finančné inštitúcie (bankové i nebankové) v rôznych podobách na riešenie ich neočakávanej finančnej situácie. Ide o pôžičky fyzickým osobám na financovanie ich nepodnikateľských potrieb. Slúžia predovšetkým na nákup spotrebného tovaru, na financovanie rôznych služieb a môžu slúžiť aj na financovanie nákupu či rekonštrukciu nehnuteľností.

Spotrebiteľské úvery môžeme rozdeliť do širokej škály kategórií podľa rôznych hľadísk:

1. Podľa účelovosti:

- účelové úvery - sú poskytnuté priamo na konkrétny, vopred stanovený účel (napr. nákup spotrebného tovaru, automobilu, na zlepšenie bývania, atď.),
- bezúčelové (neúčelové) úvery - záleží na klientovi, na čo poskytnutý úver použije.

2. Podľa typu výplaty:

- hotovostné úvery - poskytnuté finančné prostriedky sú vyplatené v hotovosti,
- bezhotovostné úvery - peniaze sú zaslané klientovi na jeho bankový účet.

3. Podľa zaistenia:

- zaistené úvery - banka vyžaduje zaistenie vecou hnutelňou (napr. automobilom) či nehnuteľnosťou,
- nezaistené úvery - spoločnosti ich poskytujú iba svojim najlepším klientom.

4. Podľa doby splatnosti:

- krátkodobé úvery - do jedného roka,
- strednodobé úvery - 2 - 5 rokov,
- dlhodobé úvery - 5 a viac rokov.

Ďalej sa samozrejme dajú úvery deliť aj podľa ďalších hľadísk napr. podľa čerpania (jednorazové, postupné), podľa frekvencie splácania (mesačné, štvrtročné, ...), podľa spôsobu splácania (anuitné, lineárne, ...) Tieto všetky kategórie sa môžu medzi sebou navzájom kombinovať. Podľa týchto kritérií sú potom jednotlivým typom úverov priradené rôzne vysoké úrokové sadzby a aj rôzne požiadavky na zaistenie úveru. Pri oceňovaní spotrebiteľských úverov hrá najväčšiu rolu práve spôsob splácania úveru, spôsob čerpania úveru a doba splatnosti úveru, teda časová štruktúra cash flow.

4.2 Spotrebiteľský úver a legislatíva

Dňom 1. januára 2002 nadobudol účinnosť Zákon č. 321/2001 Sb., o niektorých podmínkach sjednávania spotrebiteľského úveru a o zmene zákona č. 64/1986 Sb., ktorý upravuje špecifické podmienky pri vybavovaní spotrebiteľského úveru. Pre spotrebiteľa predstavuje táto právna úprava výrazný pozitívny posun v oblasti jeho ochrany. Vytvorením jednotného a prehľadného právneho prostredia v oblasti úverovania na spotrebiteľskom trhu zákon výrazne zlepšuje pozíciu spotrebiteľov a uľahčuje orientáciu v ponuke spotrebiteľských úverov. Zavedenie ukazovateľa ročnej percentuálnej sadzby nákladov na spotrebiteľský úver umožňuje spotrebiteľom kvalifikované a objektívne porovnanie úrovne jednotlivých spotrebiteľských úverov ponúkaných na trhu. Zákon predstavuje zjednotenie českej právnej úpravy s právom členských štátov Európskej únie. Dozor nad dodržiavaním podmienok stanovených týmto zákonom vykonáva Česká obchodná inšpekcia.

Zákonom je vymedzená presná definícia spotrebiteľského úveru, resp. je v ňom uvedené aké finančné produkty sú z ochrany tohto zákona vylúčené. Zoznam týchto produktov je uvedený v dodatku A.

Ako je uvedené v [9], spotrebiteľ je v zmysle zákona chránený tým, že pri ponúkaní spotrebiteľských úverov alebo sprostredkovaní zmlúv, v ktorých sa zjednáva spotrebiteľský úver (reklamou, ponukou tovaru alebo inej služby obsahujúcej úrokovú sadzbu alebo akýkoľvek údaj týkajúci sa nákladov na úver), musí byť uvedená ročná percentuálna sadzba nákladov na spotrebiteľský úver alebo príklad jej výpočtu. Táto sadzba predstavuje percentuálnu čiastku, ktorú náklady úveru predstavujú vo vzťahu k základnej úverovej čiastke. Výška tejto čiastky musí byť vypočítaná v súlade so zákonom. Spôsob jej výpočtu je uvedený taktiež v dodatku A.

Zákon stanovuje i ďalšie požiadavky, ktoré majú slúžiť na ochranu spotrebiteľa. Zmluva musí mať písomnú formu a v prípade, že bola uzavretá ústne, je neplatná. Zmluva musí okrem stanovenia ročnej percentuálnej sadzby nákladov obsahovať:

- stanovenie podmienok, za ktorých sa môže táto sadzba upraviť - tie nesmú byť závislé iba na vôli veriteľa,
- stanovenie maximálnej výšky úveru, výšky jednotlivých splátok, ich počtu a presného časového rozvrhnutia,
- stanovenie jednotlivých platieb, vrátane vedľajších platieb, ktoré majú byť platené spolu s úverom; pokiaľ ich nie je možné presne stanoviť, musí byť uvedený spôsob ich výpočtu,
- záväzok veriteľa informovať spotrebiteľa behom plnenia zmluvy o všetkých zmenách ročnej percentuálnej sadzby nákladov na úver,
- u leasingových zmlúv musí byť uvedená výška úveru,
- ustanovenie o práve spotrebiteľa splatiť úver pred stanovenou lehotou,
- podmienky, za ktorých sa dá predčasne ukončiť zmluvný vzťah,
- spôsob platenia.

Zmluva môže povoliť zmenu ročnej percentuálnej sadzby nákladov a v prípade, že nie je možné stanoviť ročnú percentuálnu sadzbu, musí byť uvedená maximálna výška úveru, výška platieb s úverom súvisiacich a podmienky, za ktorých sa tieto platby môžu meniť.

V súvislosti s poskytnutím úveru na nákup tovaru alebo služieb nesmú byť obmedzené práva spotrebiteľa vyplývajúce z občianskeho zákonníka (právo

na odstúpenie od zmluvy, právo zodpovednosti za závady a podobne).

Ako posledné uvediem právo spotrebiteľa na predčasné splatenie úveru. Spotrebiteľ je oprávnený splatiť spotrebiteľský úver pred dobou stanovenou v zmluve.

Ďalšie práva a povinnosti týkajúce sa spotrebiteľov je možné nájsť v [9].

Kapitola 5

Chovanie sa spotrebiteľov a riziko predčasného splatenia

V tejto kapitole uvidíme ako vzniká riziko predčasného splatenia a aké ťažkosti spôsobuje veriteľom pri pokuse o jeho elimináciu. Do úvahy budeme brať iba úvery s fixnou úrokovou sadzbou.

5.1 Vznik rizika predčasného splatenia

Poskytnutie finančných prostriedkov na pevne stanovenú dobu a za fixný úrok môže viesť k vzniku úrokového a likviditného rizika. Úrokové riziko vzniká v prípade, ak sa úroková sadzba za prijaté financovanie môže v priebehu času meniť, zatiaľ čo úroková sadzba poskytovaná klientom je nemenná. Likviditné riziko vzniká, keď sú zdroje poskytnuté na financovanie úveru viazané na kratší časový interval ako je splatnosť úveru poskytnutého spotrebiteľovi. Tieto riziká môžu byť eliminované dvoma spôsobmi:

- veriteľ môže financovať úver zapožičaním finančných prostriedkov za fixnú úrokovú sadzbu a s vopred dohodnutou dobou splatnosti. Takto dochádza k zníženiu úrokového i likviditného rizika,
- eliminovať úrokové riziko je možné využitím dohôd o budúcej úrokovej miere (angl. Forward Rate Agreement - FRA) a swapov, pričom v tomto prípade dochádza iba k eliminácii úrokového rizika.

Podľa voľby financovania úverov a techniky riadenia rizík je veriteľ nútený zabezpečiť zdroje na financovanie úverov za fixnú úrokovú sadzbu a splatné za pevne stanovenú dobu. V prípade predčasného splatenia úveru v dobe platnosti fixného úroku musí veriteľ vhodne investovať uvoľnené zdroje, predčasne splatiť svoje financovanie, či rozviazať zaistovacie deriváty. Ak majú

úrokové sadzby rastúcu tendenciu, veriteľ môže nadobudnuté finančné zdroje opäť investovať s profitom, prípadne uzavrieť dohodu o budúcej úrokovej sadzbe. V opačnom prípade veriteľ utrpí stratu, pretože prijaté finančné zdroje môže na trhu investovať za nižšiu úrokovú sadzbu aká bola platná pri poskytnutí úveru, pričom sadzba za prijaté financovanie ostala nemenná. Rizikom predčasného splatenia rozumieme práve stratu, ktorá vznikne poklesom úrokových sadzieb.

V nasledujúcom príklade popíšeme ako vplýva zmena úrokových sadzieb na čistý úrokový výnos inštitúcií poskytujúcich úverové kontrakty. Uvažujme, že je bankou poskytnutý úver so splatnosťou jeden rok s fixnou úrokovou sadzbou. Tento úver je financovaný zdrojmi viazanými na pol roka a potom ďalšími zdrojmi na zbytok doby do splatnosti úveru. Ďalej uvažujme, že sa úrokové sadzby o pol roka zvýšia o 100bp a v druhom prípade znížia o 100bp vzhľadom k pôvodným úrokovým sadzbám. Počiatočné podmienky sú zhrnuté v tabuľke 5.1. Budeme sledovať aký vplyv má zvyšovanie, resp. znižovanie úrokových sadzieb na úrokový výnos banky po uplynutí jedného roka.

Banka poskytne klientovi úver vo výške 100000 CZK za fixnú ročnú úrokovú sadzbu desať percent, ktorý je financovaný zdrojmi s fixnou úrokovou sadzbou osem percent s dátumom splatnosti o pol roka. Predpokladajme, že sa úrokové sadzby po pol roku nezmenia a získame zdroje na financovanie úveru opäť za osem percent. Potom budeme predpokladať, že úrokové sadzby narastú a v poslednom prípade poklesnú počas prvého polroka.

	Nom. hodnota v CZK	Úroková miera	Splatnosť
Aktíva	100000	10 % p.a. Fix	1Y
Pasíva	100000	8 % p.a. Fix	1/2 Y
Pasíva	100000	8 % p.a. Fix	1/2 Y
Posun výnosovej krivky o 100bp smerom hore			
Aktíva	100000	10 % p.a. Fix	1Y
Pasíva	100000	8 % p.a. Fix	1/2 Y
Pasíva	100000	9 % p.a. Fix	1/2 Y
Posun výnosovej krivky o 100bp smerom dole			
Aktíva	100000	10 % p.a. Fix	1Y
Pasíva	100000	8 % p.a. Fix	1/2 Y
Pasíva	100000	7 % p.a. Fix	1/2 Y

Tabuľka 5.1: Vstupné dáta

Čas	0	1/2 Y	1Y
Aktíva	100000	0	$100000 * (1 + 0.10) =$ $= 110000$
Pasíva	100000	$-(100000 * (1 + \frac{0.80}{2})) =$ $= - 104000$	0
Pasíva	0	104000	$-(104000 * (1 + \frac{0.80}{2})) =$ $= - 108160$
PV výnosu	1673		

Posun výnosovej krivky o 100bp smerom hore

Aktíva	100000	0	$100000 * (1 + 0.10) =$ $= 110000$
Pasíva	100000	$-(100000 * (1 + \frac{0.80}{2})) =$ $= - 104000$	0
Pasíva	0	104000	$-(104000 * (1 + \frac{0.90}{2})) =$ $= - 108680$
PV výnosu	1200		

Posun výnosovej krivky o 100bp smerom hore

Aktíva	100000	0	$100000 * (1 + 0.10) =$ $= 110 000$
Pasíva	100000	$-(100000 * (1 + \frac{0.80}{2})) =$ $= - 104000$	0
Pasíva	0	104000	$-(104000 * (1 + \frac{0.70}{2})) =$ $= - 107640$
PV výnosu	2145		

Tabuľka 5.2: Úrokový výnos po jednotlivých obdobiach

Nesúlady durácie aktív a pasív pri poskytovaní úverov má za následok vystavenie sa úrokovému riziku. V našom príklade je gap medzi duráciou aktív a pasív pol roka a to spôsobuje nárast, resp. pokles úrokového výnosu ako je vidieť v tabuľke 5.2. Keď sme predpokladali, že sa úrokové sadzby po pol roku nezmenia, súčasná hodnota úrokového výnosu po splatnosti úveru bola 1673 CZK. Po náraste úrokových sadzieb sa táto hodnota znížila na 1200 CZK a po poklese sadzieb sa naopak zvýšila na 2145 CZK.

Portfólio aktív a pasív finančných inštitúcií je prevažne zložené z aktív s väčšou duráciou ako je durácia pasív. Fluktuácia úrokových sadzieb má za následok vystavenie sa úrokovému riziku, a preto je potrebné toto riziko nejakým spôsobom eliminovať. Na tento účel sa používajú finančné deriváty. Definíciu finančných derivátov ako aj definíciu základných typov derivátov uvádzame

v druhej kapitole.

5.2 Modelovanie rizika predčasného splatenia

V mnohých finančných kontraktoch sú spotrebiteľia držiteľmi opcie predčasného splatenia. Túto opciu môžu spotrebiteľia uplatniť z viacerých dôvodov, pričom sa pri konštrukcii finančných modelov berú do úvahy dva typy predčasného splatenia:

- racionálne predčasné splatenia sú tie, keď k predčasnému splateniu dochádza vplyvom zmien úrokových sadzieb a je racionálne refinancovať úver z pohľadu úrokových nákladov,
- neracionálne predčasné splatenia nastanú nezávisle na pohybe úrokových sadzieb, na základe zmien v živote spotrebiteľa ako napríklad rozvod, dedičstvo, smrť, výhra, zmena zamestnania...

Najväčší vplyv na predčasné splatenia má pohyb úrokových sadzieb, pričom väčšina modelov predpokladá, že sa spotrebiteľia chovajú racionálne a od modelovania neracionálneho chovania sa prevažne upúšťa. V našich modeloch budeme brať do úvahy obe možnosti klientského chovania.

5.3 Opcia predčasného splatenia z hľadiska spotrebiteľa

Zákon o ochrane spotrebiteľa hovorí o možnosti predčasného splatenia spotrebiteľského úveru bez poplatku. Otázkou je, či táto možnosť poskytuje spotrebiteľovi nejakú výhodu, alebo je skôr príťažou a ako túto opciu správne oceniť na strane veriteľa. Pre správne ocenenie opcie predčasného splatenia musíme najskôr správne pochopiť klientské správanie pri predčasnom splácaní.

Predčasné splácanie poskytuje spotrebiteľovi možnosť flexibilne reinvestovať finančné prostriedky v prípade zmien na finančnom trhu. Súčasťou mnohých finančných produktov je vnorená opcia, ktorej musia čeliť hlavne poskytovatelia týchto produktov. Vo väčšine prípadov poplatok za predčasné splatenie úveru predstavuje cenu call opcie v čase uzavretia kontraktu. Táto call opcia

sa dá porovnať s call opciou, ktorú má emitent v prípade niektorých dlhopisov - *vypovedateľných dlhopisov (zvolateľných dlhopisov)*. Presná definícia zvolateľných dlhopisov je uvedená v [1, strana 102]. V Českej republike zákon nepovoľuje bankám, aby spotrebiteľ platil za svoje právo predčasne splatiť spotrebiteľský úver.

Ukončenie úverového kontraktu môže nastať z dvoch príčin, a to z dôvodu predčasného splatenia alebo defaultu. Default predstavuje extrémny prípad a my sa ďalej budeme zaoberať iba modelovaním predčasného splatenia bez zahrnutia možnosti defaultu.

Racionálnym cieľom spotrebiteľa je optimalizovať hodnotu svojich finančných prostriedkov. V prípade poklesu úrokových sadzieb je pre spotrebiteľa racionálne refinancovať starý kontrakt novým úverom. Preto sa finančné faktory považujú za primárne faktory vedúce k predčasnému splateniu. V skutočnosti nie všetci spotrebiteľia uplatnia svoje právo refinancovať. Niekedy sú spotrebiteľia zdráhaví uplatniť opciu, ktorá je in-the-money, pretože by si mohli zhoršiť vzťah so svojou bankou. Predčasné splatenie by mohlo spotrebiteľovi priniesť menší zisk než by boli náklady na získanie nového úveru. Uvedieme hlavné bariéry, ktoré zabraňujú klientom predčasne splatiť úver v prípade priaznivých tržných podmienok:

- poplatky za schválenie nového úveru a čas strávený pri jeho vybavovaní,
- klient môže mať úver u inej banky a z toho dôvodu mu ďalší úver nemôže byť schválený,
- zhoršenie kreditnej situácie klienta - klient mohol v minulosti splňať podmienky na schválenie úveru, ale aktuálne podmienky môžu klásť na jeho finančnú situáciu ďaleko väčšie požiadavky.

Predčasné splatenie môže byť indikované aj nefinančnými faktormi. Jedným z fenoménov klientského chovania je, keď spotrebiteľia refinancujú po tom, čo úrokové sadzby stúpili. Takéto predčasné splatenie považujeme za neracionálne a hovoríme, že došlo k uplatneniu opcie, ktorá bola out-of-the-money. Za nefinančné faktory, ktoré vplývajú na predčasné splácanie úverov, považujeme napríklad rozvod, smrť, dedičstvo, výhru, zmenu zamestnania. Tieto faktory sa menia v čase nepredvídateľným spôsobom, a to spôsobuje ťažkosti pri charakterizovaní klientského chovania predčasného splácania úverov.

Kapitola 6

Modely úrokových sadziieb

Pri oceňovaní opcie predčasného splatenia potrebujeme vedieť ako sa budú vyvíjať budúce úrokové sadzby. Modely popisujúce vývoj budúcich sadziieb delíme na dva základné typy, a to rovnovážne a bezarbitrážne modely. Pri rovnovážnych modeloch je súčasná časová štruktúra úrokových sadziieb výstupom, zatiaľ čo pri bezarbitrážnych modeloch je súčasná časová štruktúra úrokových sadziieb vstupom pre modelovanie budúceho vývoja úrokových sadziieb. Označme krátkodobú úrokovú sadzbu r , ktorá prislúcha infinitezimálne krátkemu časovému okamihu v čase t . Nasledujúce modely popisujú vývoj tejto úrokovej sadzby r , ktorá platí v takzvanom rizikovo-neutrálnom svete. Dá sa odvodiť, že úroková sadzba v ľubovoľnom čase sa dá vyjadriť pomocou krátkodobej úrokovej sadzby platnej v rizikovo-neutrálnom svete, viď [4, strany 649-650]. Preto nám stačí popísať procesy pre krátkodobú úrokovú mieru r .

6.1 Rovnovážne modely

Jednofaktorové rovnovážne modely, ktoré popisujú vývoj r závisia iba na jednom zdroji neistoty a proces vývoja je popísaný Itôovým procesom tvaru (Itôov proces nájdete definovaný v [4, strana 269]):

$$dr = m(r)dt + s(r)dz,$$

kde m predstavuje drift a s štandardnú odchýlku r a dz je Wienerov proces¹. Obe veličiny sú závislé na r a nezávisia na čase. V nasledujúcej tabuľke uvádzame tri najznámejšie jednofaktorové rovnovážne modely:

¹je to Markovský stochastický proces s nulovou strednou hodnotou a rozptylom rovným jednej, viď [4, strana 265]

Rendleman a Bartterov model	$m(r) = \mu r; s(r) = \sigma r,$
Vašíčkov model	$m(r) = a(b - r); s(r) = \sigma,$
Cox, Ingersoll a Rossov model	$m(r) = a(b - r), s(r) = \sigma\sqrt{r}.$

Ich bližší popis nájdete v [4].

6.2 Bezarbitrážne modely a Hull-Whiteov model

Ako sme už spomenuli, súčasná výnosová krivka je vstupom pre bezarbitrážny model. Konkrétne popíšeme jednofaktorový Hull-Whiteov model, ktorého výstup budeme používať pri ďalšom modelovaní.

Podľa [4] je vlastne Hull-Whiteov model rozšíreným Vašíčkovým modelom² s parametrami a a σ konštantnými. Jedným z možných vyjadrení rozšíreného Vašíčkovho modelu je

$$dr = [\theta(t) - ar]dt + \sigma dz.$$

Funkcia $\theta(t)$ sa spočíta z počiatkovej časovej štruktúry úrokových mier

$$\theta(t) = F_t(0, t) + aF(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}).$$

Zanedbaním posledného člena, táto rovnica implikuje, že sklon procesu v čase t je $F_t(0, t) + a[F(0, t) - r]$. To znamená, že proces r má rovnaký sklon ako počiatková forwardová výnosová krivka.

6.3 Implementácia modelu pomocou trinomickeho stromu - prvý krok

Hull-Whiteov model pre okamžitú úrokovú mieru r so spojitým úročením sa riadi stochastickou diferenciálnou rovnicou tvaru:

$$dr = [\theta(t) - ar]dt + \sigma dz, \tag{6.1}$$

²viď v podkapitole rovnovážne modely

kde σ je štandardná odchýlka úrokovej sadzby r , ktorá je konštantná a $\theta(t)$ je zvolené tak, aby model odpovedal súčasnej časovej štruktúre úrokových sadzieb. Parameter a predstavuje hodnotu mean-reversion.

Predpokladáme, že časový krok v trinomickom strome bude nemenný o veľkosti Δt . Ďalej predpokladáme, že sa úroková sadzba R prislúchajúca časovému kroku Δt riadi rovnakým procesom ako okamžitá úroková miera r :

$$dR = [\theta(t) - aR]dt + \sigma dz. \quad (6.2)$$

Tento predpoklad je obzvlášť rozumný pre Δt limitne blížiacie sa k nule.

V prvom kroku budovania trinomického stromu skonštruujeme strom pre premennú R^* s počiatočnou podmienkou rovnou 0, ktorá sa riadi procesom

$$dR^* = -aR^*dt + \sigma dz. \quad (6.3)$$

Proces R^* je symetrický okolo 0, očakávaná hodnota premennej $R^*(t + \Delta t) - R^*(t) = -aR^*(t)\Delta t$ a rozptyl $R^*(t + \Delta t) - R^*(t)$ je rovný $\sigma^2\Delta t$.

Definujeme ΔR^3 ako vertikálnu vzdialenosť medzi úrokovými sadzbami v strome a z dôvodu minimalizácie chyby

$$\Delta R = \sigma\sqrt{3\Delta t}$$

Nasledujúcim krokom je výpočet pravdepodobností vetvenia. V každom uzle trinomického stromu sa musíme rozhodnúť ako bude ďalej pokračovať vetviaci proces.

Definujeme (i, j) ako uzol, kde $t = i\Delta t$ a $R^* = j\Delta R$. Pravdepodobnosti vetvenia sú určené tak, aby zodpovedali očakávanej zmene a rozptylu hodnoty R^* za časový interval Δt . Pravdepodobnosti vetvenia musia vyhovovať nasledujúcim trom rovniciam:

$$\begin{aligned} p_u\Delta R - p_d\Delta R &= -aj\Delta R\Delta t, \\ p_u\Delta R^2 + p_d\Delta R^2 &= \sigma^2\Delta t + a^2j^2\Delta R^2\Delta t^2, \\ p_u + p_m + p_d &= 1. \end{aligned}$$

³z numerického hľadiska je možné voliť ľubovoľné n v $\Delta R = \sigma\sqrt{n\Delta t}$, pre $n = 3$ dosahujeme najlepšie výsledky

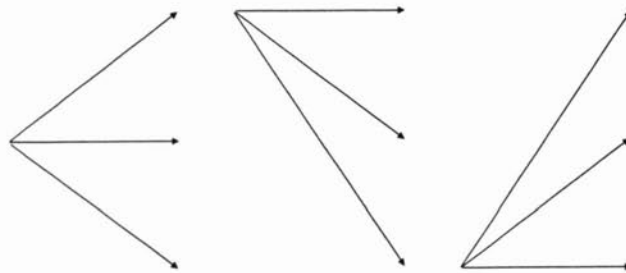
Riešením hore uvedenej sústavy a dosadením za $\Delta R = \sigma\sqrt{3\Delta t}$ získavame nasledujúce riešenie pre pravdepodobnosti vetvenia p_u, p_m, p_d v uzle (i, j)

$$p_u = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(a^2 j^2 \Delta t^2 - aj\Delta t),$$

$$p_m = \frac{2}{3} - a^2 j^2 \Delta t^2,$$

$$p_d = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(a^2 j^2 \Delta t^2 + aj\Delta t).$$

Zmena vo vetvení procesu nastane ak sa prekročí hodnota j_{max} , respektíve dôjde k poklesu hodnoty pod j_{min} , pričom j_{max} je definované ako najmenšie celé číslo väčšie než $0, 184/(a\Delta t)$ a j_{min} je rovné $-j_{max}$. Obrázok 6.1 ilustruje možnosti vetvenia procesu v poradí do stredu, hore a nadol.



Obrázok 6.1: Možnosti vetvenia procesu

Vzťahy pre výpočet pravdepodobností vetvenia smerom nahor sú nasledovné

$$p_u = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(a^2 j^2 \Delta t^2 + aj\Delta t),$$

$$p_m = -\frac{1}{3} - a^2 j^2 \Delta t^2 - 2aj\Delta t,$$

$$p_d = \frac{7}{6} + \frac{1}{2}(a^2 j^2 \Delta t^2 + 3aj\Delta t).$$

A nakoniec, vzťahy pre vetvenie smerom nadol sú

$$p_u = \frac{7}{6} + \frac{1}{2}(a^2 j^2 \Delta t^2 - 3aj\Delta t),$$

$$p_m = -\frac{1}{3} - a^2 j^2 \Delta t^2 + 2aj\Delta t,$$

$$p_d = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(a^2 j^2 \Delta t^2 - aj\Delta t).$$

6.4 Implementácia modelu pomocou trinomickeho stromu - druhý krok

Výsledkom prvého kroku implementácie modelu je proces definovaný vzťahom (6.3). Nasleduje konverzia R^* -stromu na R -strom tak, aby nastala zhoda s počiatočnou časovou štruktúrou mier, a to docielime iteratívnym výpočtom α , definovaným

$$\alpha(t) = R(t) - R^*(t).$$

Definujme α_i ako $\alpha(i\Delta t)$, čo predstavuje hodnotu R v čase $i\Delta t$ v R -strome mínus príslušnú hodnotu R^* v čase $i\Delta t$. Ďalej definujme $Q_{i,j}$ ako súčasnú hodnotu výplaty o hodnote 1 v uzle (i, j) a v každom ďalšom bode je hodnota výplaty v uzle rovná 0.

Predpokladajme, že máme hodnotu $Q_{i,j}$ pre $i \leq m$ ($m \geq 0$). V ďalšom kroku určíme α_m tak, že úrokový strom správne ocení zero-kupónový dlhopis s dátumom splatnosti v $(m+1)\Delta t$. Úroková sadzba v uzle $(m+1)\Delta t$ je $\alpha_m + j\Delta R$, takže cena zero-kupónového dlhopisu splatného v čase $(m+1)\Delta t$ je daná vzťahom

$$P_{m+1} = \sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j} \exp[-(\alpha_m + j\Delta R)\Delta t],$$

kde n_m je počet uzlov na každej strane od centrálného uzla v čase $m\Delta t$. Riešením rovnice je:

$$\alpha_m = \frac{\ln \sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j} e^{-j\Delta R\Delta t} - \ln P_{m+1}}{\Delta t}.$$

Po výpočte hodnoty α_m , $Q_{i,j}$ pre $i = m+1$ získame použitím vzťahu

$$Q_{m+1,j} = \sum_k Q_{m,k} q(k, j) \exp[-(\alpha_m + k\Delta R)\Delta t],$$

kde $q(k, j)$ je pravdepodobnosť prechodu z uzla (m, k) do uzla $(m+1, j)$.

Kapitola 7

Oceňovacie modely opcie predčasného splatenia v spotrebiteľskom úvere

Pri oceňovaní opcie prečasného splatenia budeme vychádzať z nasledujúcich úvah a predpokladov:

- Na úverový kontrakt sa budeme pozerať ako na úver s fixnou úrokovou sadzbou počas celej doby platnosti úveru s možnosťou predčasne splatiť úver v plnej výške kedykoľvek až do doby splatnosti kontraktu.
- Opciu predčasného splatenia oceňujeme ako Americkú call opciu. Majiteľom tejto opcie je klient.
- Budúce úrokové sadzby modeluje modelom Hull-Whitea pomocou konštrukcie trinomického stromu.
- Modelujeme cenu opcie predčasného splatenia pre racionálnych i neracionálnych klientov:
 - v trinomickom strome oceňujeme opciu podľa aktuálnych úrokových sadzieb pre racionálneho klienta. V tom prípade hodota opcie v príslušnom uzle predstavuje rozdiel medzi hodnotou úveru za podmienok platných v čase predsplatenia (táto hodnota predstavuje súčasnú hodnotu budúcich splátok od príslušného uzla) a hodnotou úveru platného za pôvodných podmienok (je to hodnota zostatku úveru v príslušnom uzle),

- pri neracionálnom chovaní klienta predpokladáme, že sa klient pri predčasnom splácaní nechová podľa výšky aktuálnych úrokových sadziieb. Výška úrokových sadziieb v jednotlivých uzloch trinomického stromu bude ale ovplyvňovať celkovú hodnotu opcie predčasného splatenia.
- Celkovú hodnotu opcie predčasného splatenia dostaneme diskontovaním hodnôt opcie predčasného splatenia obdržanú v jednotlivých uzloch trinomického stromu, a to ako pri racionálnom klientovi, tak pri neracionálnom klientovi.

Ako sme už uviedli, v Českej republike je legislatívne zakázané účtovať klientovi poplatok za možnosť predčasne splatiť úver. Preto je zaujímavé skúmať akú stratu utrpí banka v prípade, že je opcia predčasného splatenia správne ocenená a banka túto opciu nezaistila pre prípad nepriaznivého vývoja úrokových sadziieb.

7.1 Konštrukcia modelu

Pri konštrukcii modelu vychádzame zo základného princípu oceňovania Americkej opcie. Prvým krokom je zvolenie vhodného modelu pre získanie časovej štruktúry úrokových sadziieb. Zvolili sme bezarbitrážny model Hull-Whitea, podrobnejší popis modelu okrem šiestej kapitoly venovanej tejto problematike nájdete v [4, 5, 6], ktorý modelujeme pomocou trinomického stromu. Model bol zvolený vzhľadom k jeho transparentnosti, dobrej interpretácii a grafickému zobrazeniu výsledkov. Je nutné spomenúť, že v prípade vysokej volatility úrokových mier môže model poskytnúť nereálne záporné úrokové sadzby. Trinomický strom budúcich úrokových sadziieb konštruujeme v dvoch krokoch, ktoré sú popísané v predchádzajúcej kapitole a v [7]. Dáta potrebné k modelovaniu sú - aktuálna výnosová krivka, odhad volatility úrokových sadziieb σ a hodnota mean-reversion a . Volatilita úrokových sadziieb a hodnota mean reversion sú výsledkom kalibračného modelu. V ďalšom odstavci ukážeme postup ako odhadnúť volatilitu úrokových sadziieb na základe ich historického vývoja.

Odhad volatility úrokových sadziieb

Volatilitu úrokovej sadzby budeme odhadovať na základe postupu uvedeného v [4], kde definujeme
a označme

- $n + 1$ počet pozorovaní,
 S_i úroková sadzba na konci i -teho obdobia pre $i = 0, 1, \dots, n$,
 τ dĺžka časového intervalu v rokoch,

$$u_i = \ln \left(\frac{S_i}{S_{i-1}} \right) = \ln S_i - \ln S_{i-1}$$

pre $i = 1, 2, \dots, n$.

Odhad s , smerodatnej odchýlky u_i je daný vzťahom

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2},$$

kde \bar{u} je priemer hodnôt u_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Týmto spôsobom dostaneme dennú volatilitu, ktorú musíme prepočítať na ročnú bázu. Ročnú volatilitu získame zo vzťahu:

$$\text{Volatilita ročná} = \text{Volatilita denná} * \sqrt{\text{Počet dní v roku}}$$

Voľba vhodnej hodnoty n nie je jednoduchá. Rozumné je zvoliť akýsi kompromis, ako napríklad zvoliť denné dáta za obdobie posledných 90 až 180 dní. Literatúra ďalej uvádza, že je vhodné zvoliť n také, aby odpovedalo počtu dní, na ktoré sa volatilita vzťahuje.

Zavedieme nasledujúce značenie, pričom časť značenia preberáme z konštrukcie časovej štruktúry úrokových mier:

Hodnoty $c(t, i)$, teda úverové cash flow, spočítame podľa parametrov spotrebiteľského úveru. Toto cash flow závisí od typu úveru. Teda, či sa jedná o úver s anuitným splácaním, alebo o bullet - úver, kde klient spláca počas životnosti úveru iba úroky a nominálna hodnota je splatená až v deň splatnosti úveru. Hodnoty cash flow sa líšia pre jednotlivé časové okamihy a sú konštantné pre všetky hodnoty i .

Hodnoty úveru $v(t, i)$ predstavujú súčasnú hodnotu úveru v uzle (t, i) , ktorá je váženým pravdepodobnostným priemerom hodnôt úveru $v(t, i)$ vychádzajúcich z uzla (t, i) vynásobeným diskontným faktorom pre tento uzol. Tieto hodnoty sú určené spätnou rekurzívnou metódou popísanou nasledujúcim algoritmom. Inicializácia pre

$$i = -n \text{ do } n$$

- n celkový počet časových intervalov do konca splatnosti úveru, resp. počet časových krokov v modeli Hull-White,
- (t, i) označenie uzla v trinomickom strome Hull-Whitea; t predstavuje časový okamih a i stav,
- pu pravdepodobnosť vetvenia smerom hore z uzla (t, i) ,
- pm pravdepodobnosť vetvenia na stred z uzla (t, i) ,
- pd pravdepodobnosť vetvenia smerom dole z uzla (t, i) ,
- $p(t, i)$ diskontný faktor príslušný časovému intervalu príslušnému k uzlu (t, i) ; tieto hodnoty získame z modelu Hull-Whitea,
- $c(t, i)$ cash flow plynúce z úveru pre uzol (t, i) , ktoré predstavuje výšku splátky úveru vrátane nabehnutého úroku v čase t ; toto cash flow je rovnaké pre všetky stavy i v čase t ,
- $v(t, i)$ hodnota úveru pre uzol (t, i) , ktorú dostaneme diskontovaním hodnôt z uzlov vychádzajúcich z uzla (t, i) ,
- $b(t, i)$ hodnota nesplateného úveru v uzle (t, i) v čase predčasného splatenia,
- $o(t, i)$ cash flow predčasného splatenia v uzle (t, i) podľa uplatnenia optimálnej stratégie,
- $ov(t, i)$ hodnota opcie predčasného splatenia v uzle (t, i) , ktorá predstavuje súčasnú hodnotu opcie predčasného splatenia v príslušnom uzle.

$$v(n, i) = 0$$

a rekurzívne vypočítame hodnoty $v(t, i)$ pre

$$t = n - 1 \text{ do } 0$$

$$i = -t \text{ do } t$$

$$\begin{aligned} v(t, i) = & pu \left(v(t+1, i+1) + c(t+1, i+1) \right) p(t, i) + \\ & + pm \left(v(t+1, i) + c(t+1, i) \right) p(t, i) + \\ & + pd \left(v(t+1, i-1) + c(t+1, i-1) \right) p(t, i) \end{aligned}$$

V ďalšom kroku je nutné určiť hodnoty zostatkov úverov spočítané za podmienok platných pri uzavretí kontraktu. Tieto hodnoty predstavujú realizačné ceny opcie predčasného splatenia. Keďže tieto hodnoty nezávisia na vývoji úrokových sadzieb, zostávajú nemenné pre rôzne hodnoty i .

Cash flow opcie predčasného splatenia predstavuje rozdiel medzi súčasnou hodnotou úveru a zostatku úveru v príslušnom uzle. Všeobecne vyjadrené vzťahom pre všetky hodnoty t a i platí

$$o(t, i) = \text{maximum}(v(t, i) - b(t, i), 0)$$

Je zrejmé, že pre nižšie hodnoty úrokových sadzieb bude opcia viac in-the-money. Pretože sa jedná o Americkú opciu je nutné v každom uzle skontrolovať, či je výhodné opciu uplatniť alebo jej uplatnenie odložiť.

Hodnotu opcie predčasného splatenia získame opäť pomocou spätnej rekurzíe cez mriežku cash flow predčasného splatenia, pričom sa počíta s možnosťou, že hodnota opcie predčasného splatenia môže byť vyššia, keď sa opcia uplatní v budúcnosti. Hodnotu opcie predčasného splatenia predstavuje hodnota $ov(0, 0)$. Pre výpočet tejto hodnoty sme použili nasledovný algoritmus. Inicializačné hodnoty pre všetky i sú

$$ov(n, i) = 0$$

a ostatné hodnoty sú vypočítané rekurzívne pre

$$t = n - 1 \text{ do } 0$$

$$i = -t \text{ do } t$$

$$\begin{aligned} ov(t, i) = & pu(ov(t + 1, i + 1))p(t, i) + \\ & + pm(ov(t + 1, i))p(t, i) + \\ & + pd(ov(t + 1, i - 1))p(t, i) \end{aligned}$$

Ak je hodnota $o(t, i) > ov(t, i)$, potom $ov(t, i) = o(t, i)$. Inak povedané, ak hodnota $o(t, i)$ preyšuje hodnotu $ov(t, i)$, potom je optimálne opciu uplatniť a splatiť úver. V opačnom prípade je vhodné opciu neuplatňovať.

7.2 Praktické využitie modelu pre racionálne sa chovajúceho klienta

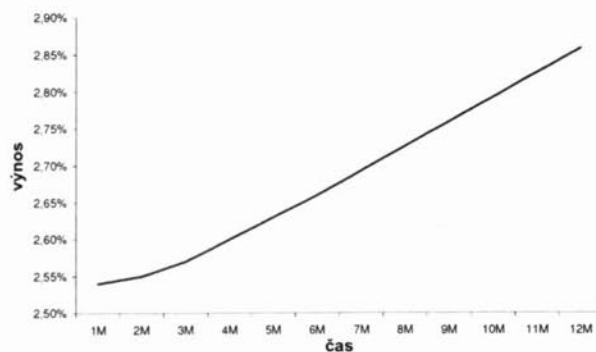
Všeobecný model popísaný v prechádzajúcej kapitole aplikujeme na ročný spotrebiteľský úver. Podotýkame, že jednoročný spotrebiteľský úver nie je

klasickým príkladom úveru poskytovaného na trhu. Avšak zvolili sme si ho pre jednoduchosť interpretácie výsledkov, pričom plne ilustruje danú problematiku. Predpokladáme, že úver bude splácaný mesačne. Modelovanie uskutočnime v dvoch krokoch. Prvý krok spočíva v modelovaní budúcich úrokových sadzieb a v druhom kroku spočítame cenu opcie predčasného splatenia, pričom predpokladáme, že klient sa bude chovať racionálne a predčasne splatí úver, keď to bude pre neho ekonomicky výhodné.

Krok 1

Vývoj budúcich úrokových sadzieb namodelujeme pomocou modelu Hull-Whitea. Model bol naprogramovaný v programovacom jazyku C++ a hlavným podkladovým materiálom, bol článok [7]. Prvotné parametre vstupujúce do výpočtu sú:

- aktuálna výnosová krivka,
- odhad volatility σ úrokových sadzieb,
- parameter mean-reversion a .



Obrázok 7.1: PRIBOR so splatnosťami do jedného roka

Na obrázku 7.1 je výnosová krivka PRIBORu so splatnosťami do jedného roka zo dňa 28.3.2007. Chýbajúce mesačné úrokové sadzby boli dopočítané lineárnou interpoláciou. Volatilita a mean-reversion boli použité rovnaké ako v [4], pretože model aplikujeme na teoretický príklad. Výstupom programu je trinomický strom budúcich úrokových sadzieb uvedený na obrázku 7.2.

t	Cash Flow plynúce z úveru c(t,i)	Cash Flow predčasného splatenia b(t,i)
0	0	100228
1	8458	91980
2	8458	83714
3	8458	75428
4	8458	67123
5	8458	58800
6	8458	50457
7	8458	42095
8	8458	33715
9	8458	25315
10	8458	16896
11	8458	8438
12	8438	0

Obrázok 7.3: Cash flow splátok $c(t,i)$ a nesplatenej bilancie $b(t,i)$

Vypočítané hodnoty $c(t, i)$ a $b(t, i)$ sú uvedené na obrázku 7.3.

V ďalšom kroku spočítame hodnoty cash flow $v(t, i)$ spätnou rekurziou. Tieto hodnoty sú váženým pravdepodobnostným priemerom hodnôt vychádzajúcich z uzla (t, i) , ktoré sú súčtom cash flow a hodnôt budúcich cash flow zdiskontované faktorom $p(t, i)$, ktorý prislúcha uzlu (t, i) . Vážené hodnoty cash flow $v(t, i)$, ktoré sú súčasnými hodnotami úveru v príslušnom časovom okamihu, zachytáva obrázok 7.4.

Cash flow predčasného splatenia predstavuje rozdiel medzi hodnotou úveru v príslušnom okamihu a výškou splátky pri predčasnom splatení. Rekurzívne spočítame hodnotu opcie tak ako pri výpočte hodnoty cash flow úveru. Na záver musíme pre každý časový okamih a stav overiť, či je ekonomické opciu uplatniť alebo odložiť jej uplatnenie do budúcnosti. Na poslednom obrázku 7.5 je ilustrované, aké hodnoty nadobúda opcia predčasného splatenia v každom uzle. Výsledná cena opcie je v uzle $(0, 0)$ a na obrázku 7.5 je vyznačená červenou farbou. Táto cena je cenou opcie predčasného splatenia pri uzavretí kontraktu, teda jej súčasná hodnota (angl. present value).

7.3 Neracionálne chovanie sa spotrebiteľov

V predchádzajúcej kapitole sme uvažovali, že sa spotrebiteľ chová pri predčasnom splácaní úveru racionálne. Z praxe vyplýva, že klienti splácajú spotrebiteľský úver aj bez ohľadu na aktuálne úrokové sadzby. V tejto kapitole sa pokúsime navrhnúť a popísať model, kde sa berie do úvahy iba neracionálne chovanie sa klientov. Uvedieme dva spôsoby ako spočítať opciu predčasného splatenia pri takomto chovaní sa klientov. Prvý spôsob využíva pre výpočet budúcich úrokových sadzieb opäť trinomický strom, druhý spôsob využíva simuláciu úrokových sadzieb. Pravdepodobnosti predčasného splácania úverov nebudú závisieť na vývoji sadzieb a Predpokladáme, že máme informácie o poole spotrebiteľských úverov, pričom všetky úvery v danom poole majú rovnaké parametre.

Budeme sa držať značenia zavedeného v predchádzajúcej kapitole, navyiac zavedieme iba symbol pre pravdepodobnosť predčasného splatenia $q(t, i)$ pre všetky stavy i a časy t pri neracionálnom chovaní sa klientov.

7.3.1 Ocenenie opcie predčasného splatenia pomocou trinomického stromu

Majme namodelovaný trinomický strom budúcich úrokových sadzieb a hodnoty $c(t, i)$, $b(t, i)$ a $v(t, i)$ napočítané z modelu pre racionálne chovanie sa klientov. Ďalej predpokladajme, že máme odhadnuté hodnoty pravdepodobností predčasného splatenia $q(t, i)$ pre každé t a i (hodnoty $q(t, i)$ sú rovnaké pre všetky stavy i v čase t). V našom príklade budeme predpokladať, že hodnoty $q(t, i)$ sú konštantné pre každé t . Potom cash flow z opcie predčasného splatenia $o(t, i)$ pre každé t a i dostaneme zo vzťahu

$$o(t, i) = q(t, i)(v(t, i) - b(t, i)).$$

Vidíme, že $o(t, i)$ môže nadobudnúť aj záporné hodnoty, preto aj výsledná hodnota opcie predčasného splatenia môže byť záporná, čo závisí na trende súčasnej výnosovej krivke a kalibrácie modelu pre vývoj budúcich úrokových sadzieb. Keď máme rastúcu výnosovú krivku, očakávame, že aj budúci vývoj úrokových sadzieb bude mať rastúci trend. Pre našu vstupnú výnosovú krivku dostávame hodnoty $o(t, i)$ ako sú uvedené na obrázku 7.6.

Súčasná hodnota opcie predčasného splatenia je hodnota v uzle $ov(0, 0)$, na obrázku 7.7. je označená červenou farbou. Túto hodnotu dostaneme rekurentným diskontovaním cash flow opcie predčasného splatenia postupom podobným ako pri racionálnom chovaní klientov.

nálnom chovaní sa klientov sme modelovali budúce úrokové sadzby pomocou trinomického stromu. Teraz budeme modelovať budúce sadzby ako náhodnú veličinu s normálnym rozdelením. Označme si ročnú úrokovú sadzbu symbolom

$$r(t) \text{ pre } t = 0, \dots, T,$$

kde T je splatnosť úverov v poole v rokoch. Súčasná úroková sadzba je označená $r(0)$ a generujeme budúce úrokové sadzby podľa vzťahu:

$$r(t) = r(t-1) + \sigma_T \sqrt{h} e(t),$$

kde

$e(t)$ je náhodná veličina so strednou hodnotou rovnou nule a rozptylom rovným jednej,

h je časový interval v rokoch,

σ_T je ročná volatilita úrokových sadzieb.

Po generovaní úrokových sadzieb je potrebné namodelovať cash flow splátok úverov, ktoré označíme $c(t)$, pre $t = 0, \dots, T$. Predpokladajme, že v poole máme úvery splatné o T rokov, splácané mesačne anuitnými splátkami. Cash flow poolu budeme diskontovať diskontným faktorom

$$d(t) = \frac{1}{(1 + r(t))^{1/12}}$$

rekurzívne pre každé t .

Nesplatené zostatky úveru, označené $b(t)$, sú počítané podľa aktuálnej úrokovej sadzby pri uzavetí zmlúv pre celý pool.

Cash flow opcie predčasného splatenia, označené ako $o(t)$ spočítame ako

$$o(t) = q(t)(v(t) - b(t)),$$

kde $q(t)$ je percento predčasne splatených zostatkov, ktoré nezávisí na výške úrokových sadzieb.

Súčasnú hodnotu opcie predčasného splatenia spočítame diskontovaním hodnot $o(t)$ podľa nasledujúceho algoritmu:

$$ov(T) = 0,$$

$$\text{pre } t = T - 1, \dots, 0$$

$$ov(t) = o(t) + ov(t+1)d(t).$$

Tento algoritmus aplikujeme na celkový počet simulácií a cenu opcie predčasného splatenia určíme ako priemer z cien opcií získaných pri každej simulácii.

7.4 Ocenenie opcie predčasného splatenia v poole racionálne i neracionálne chovajúcich sa klientov

Nasledujúci model si vyžaduje predpoklad, že poznáme, alebo máme odhadnuté pravdepodobnosti predčasného splácania klientov racionálne i neracionálne zmýšľajúcich. Označme $q_r(t, i)$ pravdepodobnosti predčasného splácania pre klientov chovajúcich sa racionálne a $q_n(t, i)$ pre klientov chovajúcich sa neracionálne. Úrokové sadzby budeme modelovať pomocou trinomického stromu a hodnoty $c(t, i)$, $b(t, i)$ a $v(t, i)$ opäť spočítame ako v prípade modelu pre racionálne sa chovajúceho klienta. Potom cash flow opcie predčasného splatenia $o(t, i)$ pre každé t a i spočítame zo nasledujúceho vzťahu:

$$o(t, i) = q_r(t, i) \text{maximum}(v(t, i) - b(t, i), 0) + q_n(t, i)(v(t, i) - b(t, i)).$$

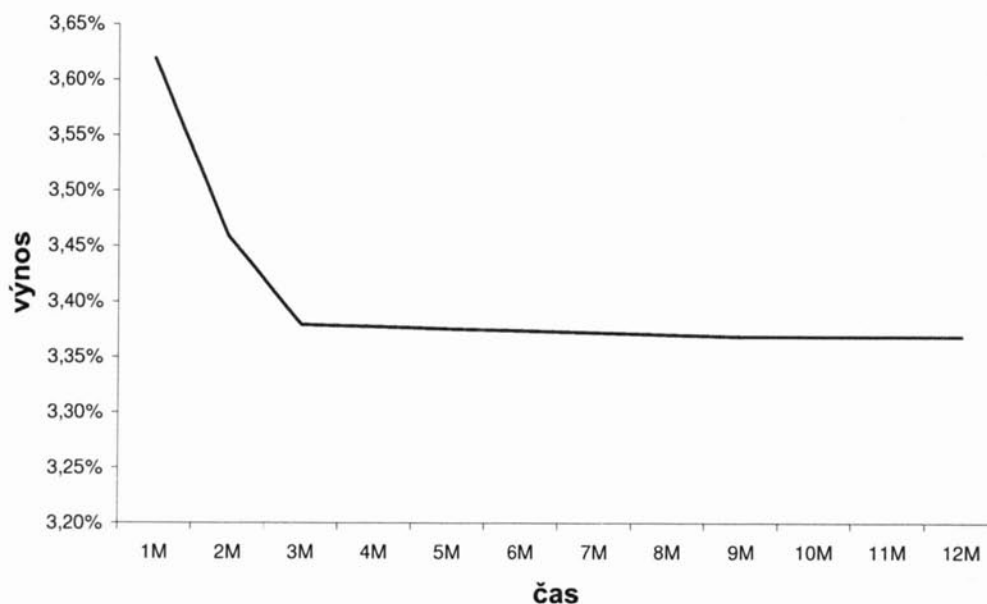
Súčasnú hodnotu opcie získame diskontovaním hodnôt z jednotlivých uzlov analogicky ako v predchádzajúcich modeloch. Pre ilustráciu uvádzame tabuľku výsledkov opcie predčasného splatenia pre rôzne kombinácie pravdepodobností predčasného splatenia, ktoré sme predpokladali konštantné.

iracionálne chovanie	racionálne chovanie		
	1%	2%	3%
1%	-18,64	-18,55	-18,47
2%	-37,35	-37,27	-37,19
3%	-56,07	-55,99	-55,91

Tabuľka 7.1: Cena opcie pri racionálnom a neracionálnom chovaní sa klientov

7.5 Porovnanie cien opcií

V prechádzajúcich kapitolách sme modelovali cenu opcie predčasného splatenia s rastúcou vstupnou výnosovou krivkou. Pre porovnanie ešte uvedieme výsledky pre inverznú výnosovú krivku. Vezmeme si výnosovú krivku zo dňa 19.7.2002, ktorú vidíme na nasledujúcom obrázku 7.8.



Obrázok 7.8: Inverzná výnosová krivka PRIBOR CZK

Spočítame cenu opcie predčasného splatenia pre klienta, ktorý sa chová racionálne a cenu opcie pre pool neracionálne chovajúcich sa klientov s predpokladom konštantnej pravdepodobnosti predčasného splatenia v priebehu roka. Výsledky sú uvedené v tabuľke 7.2.

	rastúca krivka	inverzná krivka
racionálny prístup	8,32	10,15
neracionálny prístup	-18,72	-17,96

Tabuľka 7.2: Porovnanie cien opcií pri rastúcej a inverznej výnosovej krivke

Vidíme, že cena opcií sa v oboch prípadoch zmenila. Pri racionálnom chovaní cena opcie stúpala, pretože pri inverznej výnosovej krivke sa počet uzlov s kladnými hodnotami zvýši, alebo sa zvýši hodnota opcie v jednotlivých uzloch z dôvodu väčšieho poklesu sadzieb. Hodnoty opcie v jednotlivých uzloch závisia od budúcich úrokových sadzieb, a teda vo veľkej miere aj na kalibrácii modelu pre ich modelovanie. Pri neracionálnom chovaní klientov sa počet kladných uzlov taktiež zvýši, a tak je redukovaný počet záporných uzlov, čo následne zvýši hodnotu opcie pre klienta.

Kapitola 8

Hedging portfólia spotrebiteľských úverov

Hedging portfólia spotrebiteľských úverov s opciou predčasného splatenia nie je triviálny. Ideálnym inštrumentom na zaistenie tejto opcie by bola Americká call opcia na amortizovaný swap. To znamená, že amortizácia swapu by musela korešpondovať s amortizáciou úveru s ohľadom na predčasné splatenie. Ak by sme chceli zaistiť úver, ktorého nominálna hodnota by bola splatná až pri splatnosti a inak by boli prijímané iba úrokové splátky (bullet), taký úver by bol zaistený vypovedateľným dlhopisom so splatnosťou totožnou so splatnosťou úveru. Nie vždy musí takýto inštrument existovať, a preto sa hľadajú alternatívne možnosti zaistenia týchto opcií.

Jednou z hedgingových metód by mohol byť hedging opcie predčasného splatenia s využitím imunizácie alebo dynamického hedgingu. Hedgingové inštrumenty by mali byť zvolené tak, aby sa ich durácia a konvexita zhodovala s duráciou a konvexitou opcie. To by vyžadovalo rebalancovanie portfólia hedgingových inštrumentov každý mesiac, aby bola zachovaná zhoda durácií a konvexity hedgingových nástrojov a opcií predsplatenia. Táto stratégia závisí na správnosti odhadov durácie a konvexity. Teoreticky by sa mohli ako hedginové nástroje použiť úrokovovo senzitivne deriváty, u ktorých sme schopní spočítať duráciu a konvexitu.

Možnosť zaistenia Americkou opciou by bolo možné v prípade, že by existovalo podkladové aktívum ekvivalentné úveru. Využitie Amerických opcií by vyžadovalo skonštruovať portfólio opcií, ktoré by mali rôzne podkladové aktíva. Vytvorenie takého portfólia by bolo pomerne finančne náročné.

Kapitola 9

Záver

Cieľom práce bolo popísať oceňovacie modely pre opciu predčasného splatenia v spotrebiteľskom úvere. Venovali sme sa popisu troch modelov a ich praktickej implementácii. Ako sme zistili, cena opcie predčasného splatenia závisí od správania klientov pri jej uplatňovaní. V prvom modeli sme oceňovali opciu pre individuálneho klienta a predpokladali sme, že sa bude chovať racionálne. V skutočnosti sa dá predpokladať, že sa niektorí klienti budú pri uplatňovaní opcie chovať iracionálne. Takéto chovanie klientov je spôsobené napríklad nákladmi potrebnými k získaniu nového úveru alebo v opačnom prípade to môže byť výhra, ktorá klientovi poskytne finančné zdoje na splatenie úveru, aj keď je to ekonomicky nevýhodné. V druhom modeli sme preto oceňovali opciu pre klientov, ktorí sa chovajú iracionálne. Je dôležité spomenúť, že táto opcia predstavuje pre poskytovateľa úveru kladnú hodnotu. V poslednom modeli sme brali do úvahy klientov, ktorí sa chovajú racionálne i neracionálne. Tento model ilustroval ako klienti s neracionálnym splácaním úveru redukujú hodnotu opcie klientov, ktorí sa chovajú racionálne. Základom spomenutých modelov bol vývoj budúcich úrokových sadzieb a správnosť výsledkov do veľkej miery závisí od kalibrácie tohto modelu.

Dodatok A

Zákon o ochrane spotrebiteľa pri zjednávaní spotrebiteľského úveru (výňatok)

Spotrebiteľským úverom sa nerozumie:

1. úver na kúpu, výstavbu, opravu alebo údržbu nehnuteľností,
2. úver na nájom nezaručujúci po určitej dobe prevod vlastníckeho práva alebo práva obsahovo obdobného vlastníckemu právu,
3. pôžička bez úroku alebo akejkoľvek úplaty,
4. úver na priebežné poskytovanie služieb, za ktoré spotrebiteľ môže platiť v priebehu ich poskytovania formou splátok,
5. úver na čiastky nižšie ako 5 000 Kč alebo vyššie ako 800 000 Kč (u viac úverových zmlúv jedného subjektu sa čiastky sčítajú),
6. úver, ktorého splatnosť nepresahuje 3 mesiace alebo je splatný najviac v štyroch splátkach v lehote nepresahujúcej 12 mesiacov.

Ročná percentná sadzba nákladov na spotrebiteľský úver sa vypočíta podľa nasledujúceho vzorca:

$$\sum_{k=1}^m \frac{A_k}{(1+i)^{t_k}} = \sum_{k'=1}^{m'} \frac{A'_{k'}}{(1+i)^{t_{k'}}},$$

kde

- A_k je výška úveru, ktorého poradové číslo je k ,
- $A'_{k'}$ je výška splátky úveru, ktorého poradové číslo je k' ,
- m je počet poskytnutých úverov,
- m' je počet splátok,
- t_k je doba (v rokoch a v zlomkoch roka odo dňa prvého úveru), kedy bol k -ty úver poskytnutý,
- $t_{k'}$ je doba (v rokoch a v zlomkoch roka odo dňa prvého úveru), kedy bol k' -ty poplatok zaplatený.

Dodatok B

Medzinárodný účtovný štandard IAS 39 a oceňovanie objektívnou hodnotou (výňatok)

IAS 39 stanovuje štandardy pre vykazovanie, oceňovanie a zverejňovanie informácií o podnikovom finančnom majetku a finančných záväzkoch, vrátane účtovania hedgingových transakcií.

Tento štandard zavádza rozsiahlejšie používanie objektívnej hodnoty pre finančné nástroje. Mení bežné postupy vyžadovaním používať objektívnu hodnotu pre:

- takmer všetky derivátové aktíva a záväzky,
- všetky úverové cenné papiere, majetkové cenné papiere, a ostatný finančný majetok, držaný pre obchodovanie,
- všetky úverové cenné papiere, majetkové cenné papiere, a ostatný finančný majetok, ktoré nie sú držané pre obchodovanie, ale napriek tomu sú k dispozícii na predaj,
- niektoré derivátové nástroje, ktoré nie sú priamo zaradené ako derivátové,
- nederivátové nástroje, obsahujúce vlastnosti derivátových, ktoré nemožno spoľahlivo oddeliť od nederivátových nástrojov,

- nederivátové aktíva a záväzky, ktorých vystavenia sa riziku objektívnej hodnoty sú zabezpečené derivátovými nástrojmi,
- investície s fixnou dobou splatnosti, ktoré podnik neoznačuje ako držané do splatnosti,
- úvery a pohľadávky, ktoré podnik neoznačuje ako držané do splatnosti.

Podľa tohto štandardu by mali byť všetok majetok a finančné záväzky vrátane všetkých derivátových vykázané v súvahe a mali by byť prvotne ocenené objektívnou hodnotou. Následne po prvotnom vykázaní by mal podnik oceňovať finančný majetok, vrátane derivátových nástrojov v ich objektívnych hodnotách, s výnimkou nasledovných kategórií finančného majetku:

- pôžičky a pohľadávky vytvorené v podniku a nedržané pre obchodovanie,
- investície držané do splatnosti,
- každý finančný nástroj, ktorý nemá zaznamenanú trhovú cenu na aktívnom trhu, a ktorého objektívna hodnota nemôže byť spoľahlivo ocenená.

Po prvotnom vykazovaní by mali byť všetky finančné záväzky, iné ako záväzky držané pre obchodovanie a derivátové nástroje, ktoré sú záväzkami, v odpisovaných nákladoch. Finančné záväzky držané pre obchodovanie a derivátové nástroje by mali byť ocenené v objektívnej hodnote.

Účtovanie hedgingu je podľa tohto štandardu povolené za predpokladu, že je hedgingový vzťah jasne definovaný, oceneľný a platný. Potom rozoznávame tri typy hedgingu:

- hedging objektívnej hodnoty,
- hedging peňažných tokov,
- čistej investície do zahraničnej jednotky.

Literatúra

- [1] Cipra T. (1995) Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou. HZ Praha, Praha.
- [2] Dupačová J., Hurt J., Štěpán J (2002): Stochastic Modeling in Economics and Finance. Kluwer Academic Publishers, Praha.
- [3] Fraňek P., Janečková H. (2003): Finanční matematika I., Praha.
- [4] Hull J. C. (2006): Options, Futures, and Other Derivatives. Pearson Education, New Jersey.
- [5] Hull J. C., White A. (Fall 1994): Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models I: Single-Factor Models. The Journal of Derivatives.
- [6] Hull J. C. (Spring 1996): Using Hull-White Interest Rate Trees. The Journal of Derivatives.
Complete Prepayment Models for Mortgage-Backed Securities.
- [7] Li J. H. (2002): A C++ Encoded Hull-White Interest Rate Tree-Builder.
- [8] Sherris Michael: Pricing and Hedging Loan Prepayment Risk.
- [9] Zákon č. 321/2001 Sb., o některých podmínkách sjednávání spotřebitel-
ského úvěru a o změně zákona č.64/1986 Sb.