Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Martin Holeček

Zobecněné Stokesovy systémy studované z pohledu teoretické analýzy

Matematický ústav Univerzity Karlovy

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Josef Málek, CSc.
Konzultant: Mgr. Miroslav Bulíček, Ph.D.
Studijní program: Matematika,
Matematické a počítačové modelování ve vědě a technice

Chtěl bych poděkovat panu docentovi RNDr. Josefu Málkovi, CSc., za odborné vedení práce a cenné připomínky. Také bych mu chtěl poděkovat za trpělivost a vstřícnost, po celou dobu psaní této práce. Mé díky též patří Mgr. Miroslavu Bulíčkovi, Ph.D., za čas, který tomu věnoval, a za všechny dobré rady a komentáře, které mi poskytl.

V neposlední řadě bych chtěl také poděkovat svým rodičům za zázemí a podporu po celou dobu mého studia.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne Martin Holeček

Obsah

Abstrakt

Název práce: Zobecněné Stokesovy systémy studované z pohledu teoretické analýzy

Autor: Martin Holeček
Katedra (ústav): Matematický ústav Univerzity Karlovy
Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Josef Málek, CSc.
e-mail vedoucího práce: malek@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Uvažujeme stacionární proudění homogenní nestlačitelné tekutiny, popsané zobecněným Stokesovým systémem. Studujeme postupně dva modely, první s vazkostí závislou na velikosti Euklidovské normy symetrické části gradientu rychlosti, zobecňující rychlost smyku, a druhý s vazkostí závislou na tlaku a zobecněné rychlosti smyku. Zkoumáme proudění, v omezených oblastech, přičemž uvažujeme Navierovy podmínky na hranici. Nejprve dokážeme existenci a jednoznačnost řešení obou systémů rovnic pro zdůraznění rozdílů mezi nimi. Potom ukážeme, za jakých předpokladů lze s úlohou závislou i na tlaku přejít od Navierových okrajových podmínek k Dirichletovým (tzv. nulový skluz) okrajovým podmínkám a okrajovým podmínkám popisujícím dokonalý skluz. Na závěr ukážeme pro tutéž úlohu, ale s periodickými okrajovými podmínkami, důkaz regularity řešení (ve smyslu integrovatelnosti druhých derivací rychlosti a prvních derivací tlaku).

Klíčová slova: zobecněné Stokesovy systémy, vazkost závislá na tlaku a zobecněné rychlosti smyku, existence a jednoznačnost řešení, vyšší diferencovatelnost, Navierovy okrajové podmínky.

Title: Generalized Stokes systems - theoretical analysis approach

Author: Martin Holeček
Department: Mathematical Institute of Charles University
Supervisor: doc. RNDr. Josef Málek, CSc.
Supervisor's e-mail address: malek@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: We consider steady flows of homogenous incompressible fluid described by generalized Stokes system. We study two models, first with shear-rate dependent viskosity and second with pressure and shear-rate dependent viskosity. We investigate internal flows in bounded domains subject to Navier's boundary condition. First, to show the difference, we present proofs of existence and uniqueness of solutions for both systems. Then we investigate, what are the assumptions allowing to take the fluid mechanics limit, as Navier's boundary conditions approximate first no-slip and then (perfect) slip boundary conditions. Finally, we consider for simplicity specially periodic problem and show regularity result (integrability of the second derivatives of the velocity and the first derivatives of the pressure).

Keywords: generalized Stokes systems, pressure and shear-rate dependent viscosity, existence and uniqueness of solution, higher differentiability, Navier's boundary condition.

Užité značení - souhrn

Pro zjednodušení čtení této práce zde předem uveďme, co myslíme užitými matematickými symboly. Užívejme následující značení pro přirozená čísla (bez nuly), přirozená čísla, celá čísla, reálná kladná čísla (bez nuly) a reálná čísla:

$$\mathbb{N}, \quad \mathbb{N}_0, \quad \mathbb{Z}, \quad \mathbb{R}_+ \quad \text{a} \quad \mathbb{R}.$$

V práci budeme v nemalé míře užívat skaláry, vektory a tenzory. Skaláry a skalární funkce značíme obyčejnými písmeny (C_{poi}, c_d, ν_0, p, ...), vektory malými tučnými písmeny ($\mathbf{x}$, $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\varphi}$,...) a tenzory velkými tučnými písmeny ($\mathbf{A}$, $\mathbf{D}$,...). Zde poznamenejme, že budeme užívat značení $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^d$ pro ‚vektorovou nulu', $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ pro ‚jednotkový tenzor' a $\mathbf{I}_0 \in \mathbb{R}^{d\times d}$ pro ‚nulový tenzor' (písmeno d bude v celé práci znamenat *dimenzi* prostoru):

$$\mathbf{0} := (0, 0, \dots, 0) \quad , \quad (\mathbf{I})_{i,j} = \delta^i_j \quad \text{a} \quad \mathbf{I}_0 = 0\mathbf{I}$$

kde $\delta^i_j = 1$ pro $i = j$, jinak $\delta^i_j = 0$. Pro zkrácené značení delších výrazů budeme užívat kaligrafického písma, bez rozlišení, zdali je ten výraz skalár, vektor či tenzor ($\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$, $\hat{\mathcal{S}}$,...). V práci budeme užívat následující dvě konstanty (viz Youngova nerovnost (A.1) a věta o stopách A.8):

$$r' := \frac{r}{r-1} \quad \text{a} \quad r^{\#} := \frac{dr - r}{d - r}.$$

Máme-li, pro libovolné $d \in \mathbb{N}$, vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$ se složkami a_i, b_i, $\forall i \in \{1, 2, \dots, d\}$, a tenzory $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{d\times d}$, se složkami $A_{i,j}, B_{i,j}$, $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, d\}$, tak symboly

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}): \quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{d} a_i b_i \quad , \qquad (\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}): \quad (\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})_{i,j} = a_i b_j \quad ,$$

$$(\mathbf{A}:\mathbf{B}): \quad \mathbf{A}:\mathbf{B} = \sum_{i,j=1}^{d} A_{i,j} B_{i,j} \quad \text{a} \quad (\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}): \quad (\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})_{i,j,k,l} = A_{i,j} B_{k,l}$$

myslíme jejich *skalární* a *tenzorový* součin vektorů, *skalární* součin tenzorů a *tenzorový* součin tenzorů. Soustavu rovnic budeme řešit na *oblasti* (otevřená množina v Eukleidovském prostoru) $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Množina Ω má definovanou *hranici* $\partial\Omega \subset \overline{\Omega}$ (symbolem $B(\mathbf{x}, r)$ myslíme otevřenou kouli o středu v $\mathbf{x}$ a poloměru r):

$$\partial\Omega := \{\mathbf{x} \in \overline{\Omega} \;:\; \forall \epsilon > 0\,;\; B(\mathbf{x}, \epsilon) \cap \Omega \neq \emptyset \;\wedge\; B(\mathbf{x}, \epsilon) \cap (\mathbb{R}^d \backslash \Omega) \neq \emptyset\}.$$

(Banachovy prostory funkcí) Nechť X je Banachův prostor s normou $\|\cdot\|_X$. Označme symbolem X^* duální prostor k X, tedy prostor všech spojitých lineárních funkcionálů na X. Nechť $\varphi \in X^*$ a $x \in X$, potom symbolem $\langle\varphi, x\rangle_X$ značíme dualitu mezi X a X^* (V důkazové části této práce již nebudeme značení prostorů u duality psát, neboť bude zřejmé, většinou $\mathbf{W}^{1,r}(\Omega)^d$) a znamená hodnotu φ v bodě x.

Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ je posloupnost prvků z X, řekněme, že posloupnost konverguje *silně* k $x \in X$: ($x_n \to x$ v X), jestliže:

$$\|x_n - x\|_X \to 0 \quad \text{pro} \quad n \to \infty.$$

Řekněme, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ konverguje *slabě* k $x \in X$: ($x_n \rightharpoonup x$ v X), jestliže $\forall \varphi \in X^*$:

$$\langle \varphi, x_n \rangle_X \to \langle \varphi, x \rangle_X \quad \text{pro} \quad n \to \infty.$$

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory, řekněme, že prostor X je *(spojitě) vnořen* do Y:

$$X \hookrightarrow Y,$$

právě když $X \subset Y$ a existuje konstanta $c > 0$ tak, že pro každé $x \in X$ je $\|x\|_Y \leq c\|x\|_X$. Řekněme že prostor X je *kompaktně vnořen* do Y:

$$X \hookrightarrow\hookrightarrow Y,$$

právě když $X \hookrightarrow Y$ a identické zobrazení $I : X \to Y$ je kompaktní.

(Prostory spojitých funkcí) Označíme-li $X(\Omega)$ prostor skalárních funkcí: $a : \Omega \to \mathbb{R}$, pak prostor vektorových funkcí $\mathbf{a} : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ kde každá složka a_i, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, splňuje $a_i \in X(\Omega)$, značme symbolem $X(\Omega)^n$.

Definujme si pro každou spojitou funkci $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ ($v \in C(\overline{\Omega})$) normu:

$$\|v\|_\infty \equiv \|v\|_{C(\overline{\Omega})} := \sup_{x \in \overline{\Omega}} |v(x)|.$$

Nechť $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$, je multiindex a označme $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$. Pro funkci $v : \Omega \to \mathbb{R}$ mysleme symbolem $D^\alpha v$ parciální dervaci:

$$D^\alpha v := \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

Řekneme, že funkce f je v $\overline{\Omega}$ *spojitá* až do řádu k ($f \in C^k(\overline{\Omega})$), pro $k \in \mathbb{N}$, jestliže je $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ a jestliže je konečná norma (α je multiindex):

$$\|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_\infty.$$

Mějme $L \in \mathbb{R}_+$, nechť $\Omega = (0, L)^d$, řekneme, že funkce f je $C^\infty_{per}(\Omega)$, je-li $C^\infty(\Omega)$ a navíc platí pro každý bod $\mathbf{x} \in \Omega$ a každý směr $\mathbf{x}_i$ (jednotkový vektor báze Eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^d$):

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + L\mathbf{x}_i).$$

Označme symbolem $\mathcal{D}(\Omega)$ podprostoru $C^\infty(\overline{\Omega})$ s funkcemi s kompaktním nosičem v Ω a označme symbolem $\mathcal{D}'(\Omega)$ jeho duál. Nechť α je multiindex, řekněme že funkce $v \in \mathcal{D}'(\Omega)$ má *slabou derivaci* $D^\alpha v = w$, jestliže:

$$\langle w, \varphi \rangle_{\mathcal{D}(\Omega)} = \langle v, D^\alpha \varphi \rangle_{\mathcal{D}(\Omega)} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Pro $b \in (0, 1]$ definujme prostor *Hölderovsky spojitých funkcí* $C^{k,b}(\overline{\Omega})$:

$$C^{k,b}(\overline{\Omega}) := \{u \in C^k(\overline{\Omega}) : (\|u\|_{C^{k,b}(\overline{\Omega})} < \infty)\},$$

kde norma $\|u\|_{C^{k,b}(\overline{\Omega})}$ je definovaná následujícím způsobem (α je multiindex):

$$\|u\|_{C^{k,b}(\overline{\Omega})} := \|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} \sup_{x,y\in\overline{\Omega}} \{\frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^b}; x \neq y\}.$$

Nyní máme dostatečně silný nástroj na to, abychom byli schopni říci něco o hranici oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Řekněme, že $\partial\Omega$ je třídy $C^{k,b}$, jestliže je (d-1) rozměrnou $C^{k,b}$-varietou s Ω lokálně umístěnou pouze na jedné straně $\partial\Omega$. V této práci se bude převážně pracovat na Ω s *Lipschitzovskou hranicí.* Oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ omezená má Lipschitzovskou hranici, jestliže je $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Řekneme-li, že ‚$\Omega \in C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^d)$', myslíme tím, že $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je taková, že $\partial\Omega \in C^{k,\alpha}$. Užívejme značení operátoru stop $\mathrm{tr} : C(\overline{\Omega}) \to C(\partial\Omega)$, který má pro spojité funkce význam restrikce definičního oboru funkce. Pro funkce z prostorů $\mathbf{W}^{1,r}(\Omega)$ (viz dále) je definován *větou o operátoru stop* A.8. V úvodu bude ‚tr' znamenat taktéž stopu matice, ale dané místo je ojedinělé a patřičně označené. Rezervujme vektory $\mathbf{n}$ pro směr normálový k hranici $\partial\Omega$ a $\boldsymbol{\tau}$ pro (libovolný) směr tečný k $\partial\Omega$ (oba vektory s jednotkovou normou). Máme-li vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$, *projekcí vektoru do tečné nadroviny*, myslíme vektor $\mathbf{a}_{\boldsymbol{\tau}}$:

$$\mathbf{a}_{\boldsymbol{\tau}} := \mathbf{a} - \mathbf{n}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}).$$

(Prostory $\mathbf{L}^p$ a $\mathbf{W}^{k,p}$) Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je oblast a $p \in [1,\infty)$. Označme symbolem $\mathbf{L}^p(\Omega)$ prostor všech měřitelných funkcí $f : \Omega \to \mathbb{R}$, pro které je norma

$$\|f\|_{p,\Omega} \equiv \|f\|_p := \left(\int_\Omega |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x}\right)^{1/p}$$

konečná. Symbolem $\mathbf{W}^{k,p}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, $p \in [1,\infty)$, myslíme množinu všech měřitelných funkcí $f : \Omega \to \mathbb{R}$, které mají všechny slabé derivace až do řádu k v prostoru $\mathbf{L}^p(\Omega)$. Na prostoru $\mathbf{W}^{k,p}(\Omega)$ definujme normu:

$$\|f\|_{k,p,\Omega} \equiv \|f\|_{k,p} := \left(\sum_{\alpha:|\alpha|\leq k} \int_\Omega |\partial^\alpha f|^p d\mathbf{x}\right)^{1/p},$$

kde $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ je multiindex. Pro všechny tyto prostory budeme také používat zjednodušené značení $(\mathbf{L}^p(\Omega)^d$, $\mathbf{W}^{k,p}(\Omega)^d)$. Prostory $\mathbf{L}^p(\Omega)$, $\mathbf{L}^p(\Omega)^d$, $\mathbf{W}^{k,p}(\Omega)$ a $\mathbf{W}^{k,p}(\Omega)^d$ s příslušnými normami jsou Banachovými prostory. Dále jsou užívány (převážně v kapitole ‚o regularitě' 6) tyto prostory, pro $k \notin \mathbb{N} \geq 0$, ovšem pouze v rámci citace nastudovaných publikací, proto zde definici neuvádějme a pouze odkažme. Lze ji najít například v [34] na straně 27 v kapitole o Sobolevových prostorech. Pro $k > 0$, mluvíme-li (v kapitole 6 v úvodních citacích) o prostoru $\mathbf{W}^{-k,p}(\Omega)$, myslíme tím prostor *duální* k prostoru $\mathbf{W}^{k,p}(\Omega)$. V této práci však pro duální prostory užívejme značení $(\mathbf{W}^{k,p}(\Omega))^*$, s normou:

$$\|\cdot\|_{(k,p,\Omega)^*} \equiv \|\cdot\|_{(k,p)^*}.$$

Pro oblast $\Omega \in C^{0,1}$ a $p \in [1,\infty)$, definujme podprostory $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)^d$:

$$\mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega)^d := \overline{\left\{\mathbf{v} \in C^\infty(\Omega)^d \cap C(\overline{\Omega})^d; \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ na } \partial\Omega\right\}}^{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)^d},$$
$$\mathbf{W}_{\mathbf{n}}^{1,p}(\Omega)^d := \overline{\left\{\mathbf{v} \in C^\infty(\Omega)^d \cap C(\overline{\Omega})^d; \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = 0 \text{ na } \partial\Omega\right\}}^{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)^d},$$
$$\mathbf{W}_{\mathrm{div}}^{1,p}(\Omega)^d := \overline{\left\{\mathbf{v} \in C^\infty(\Omega)^d \cap C(\overline{\Omega})^d; \mathrm{div}\, \mathbf{v} = 0\right\}}^{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)^d},$$
$$\mathbf{W}_{per}^{1,p}(\Omega)^d := \overline{\left\{\mathbf{v} \in C_{per}^\infty(\Omega)^d \cap C(\overline{\Omega})^d; \int_\Omega \mathbf{v} d\mathbf{x} = \mathbf{0}\right\}}^{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)^d}.$$

Kde symbolem $\overline{\{\cdot\}}^{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)^d}$ myslíme uzávěr množiny $\{\cdot\}$ v normě prostoru $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)^d$. Píšeme-li v textu prostor s dvěma spodními indexy, například $\mathbf{W}_{\mathbf{n},\mathrm{div}}^{1,r}(\Omega)^d$, myslíme tím $\mathbf{W}_{\mathbf{n}}^{1,r}(\Omega)^d \cap \mathbf{W}_{\mathrm{div}}^{1,r}(\Omega)^d$.

(Faktorprostor $\mathbf{L}^p(\Omega)/_{\mathbb{R}}$) Pro $p \in [1,\infty)$ definujme prostor $\mathbf{L}^p(\Omega)/_{\mathbb{R}}$ jako prostor všech tříd funkcí $[f]$, kde:

$$[f] := \{f + c; \forall c \in \mathbb{R}\} \quad , \quad f \in \mathbf{L}^p(\Omega) \quad \text{a} \quad \|[f]\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)/_{\mathbb{R}}} \equiv \|f\|_p.$$

(Bochnerovy prostory) Funkcemi z Bochnerových prostorů se v této práci nebudeme zabývat, neboť budeme studovat pouze stacionární úlohy. V podkapitolách věnovaných již existujícím publikacím se ale vyskytují a tak zde alespoň uveďme odkaz. Lze je najít například v knize [34] na straně 34.

(Poznámka k derivacím) Symbolem $\nabla(\cdot)$ myslíme v celé práci gradient funkce (slabý, je-li funkce z prostoru se slabými derivacemi). Symbolem $\mathbf{D}(\cdot)$ symetrickou část gradientu:

$$\mathbf{D}(\cdot) := (1/2)[\nabla(\cdot) + \nabla^T(\cdot)].$$

(Symbolem $\cdot^T$ myslíme algebraické transponování) Symbolem div $\cdot$ myslíme operátor divergence (nechť $\mathbf{v}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ a $\mathbf{A}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ jsou (slabě) diferencovatelné):

$$\mathrm{div}\, \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial v_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_i} \quad a \quad (\mathrm{div}\, \mathbf{A}(\mathbf{x}))_j = \sum_{i=1}^d \frac{\partial A_{i,j}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_i}.$$

A symbolem ‚$\cdot_{,t}$', myslíme (slabou) časovou derivaci $\frac{\partial\cdot}{\partial t}$.

1 Úvod

Cílem této práce je popsat, co jsou zobecněné Stokesovy systémy a dát čtenáři ucelený přehled výsledků, kterých již bylo při zkoumání těchto systémů dosaženo. Dále je naším cílem ukázat užití technik, vhodných pro studia těchto systémů na konkrétním případě. V této práci se nemalou měrou opíráme, o výsledky v oblasti Navier-Stokesových rovnic, kterými se ve světě proslavila česká škola, založená J. Nečasem.

Úvodní kapitolu začněme krátkým rozborem, založeným na poznatcích z mechaniky kontinua, kterým si přibližme, co je to Stokesův systém a v čem se liší od populárních Navier-Stokesových systémů. Dále ukažme, co myslíme tím ‚zobecněním', mluvíme-li o zobecněném Stokesově systému. Na závěr této kapitoly diskutujme různé druhy okrajových podmínek, také Navierovy podmínky, které dále užívejme v našem modelu.

1.1 Zobecněný Stokesův systém

1.1.1 Stokesův systém z pohledu mechaniky kontinua

Náplní této práce je studium rovnic popisujících proudění tekutin nástroji matematické analýzy. Omezme se proto pouze na minimum informací o mechanice kontinua, nezbytné k nastínění fyzikálního pozadí studovaného problému.

Mějme abstraktní těleso $\mathcal{B}$ a zobrazení $\mathcal{K} : \mathcal{B} \mapsto \Omega \subset \mathcal{E}$ (Euklidovský d-dimenzionální prostor). $\mathcal{K}(\mathcal{B})$ je tedy konfigurací (umístěním) tělesa v prostoru. Samozřejmě $\mathcal{K}$ nechť je prosté a na. Pohybem a deformací tělesa $\mathcal{B}$ myslíme uspořádanou množinu $\mathcal{K}_t(\mathcal{B})$ konfigurací tělesa $\mathcal{B}$ v jednotlivých momentech sledovaného časového intervalu. Zvolme $\widetilde{\mathcal{K}}(\mathcal{B})$ referenční konfiguraci tělesa $\mathcal{B}$ a popišme pohyb a deformaci tělesa jako zobrazení $\chi : \widetilde{\mathcal{K}}(\mathcal{B}) \times I \mapsto \mathcal{K}_t(\mathcal{B})$ pro načasový interval $I = (0, T)$ ve smyslu:

$$x = \chi(X, t),\ X \in \widetilde{\mathcal{K}}(\mathcal{B}),\ t \in I.$$

Definujme *rychlost a zrychlení* materiálového bodu a *deformační gradient*:

$$\mathbf{v}(X,t) := \frac{\partial \chi(X,t)}{\partial t} \quad , \quad \mathbf{a}(X,t) := \frac{\partial^2 \chi(X,t)}{\partial t^2} \quad \text{a} \quad \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}_{i,j} := \frac{\partial \chi_i(X,t)}{\partial X_j}.$$

Při odvozování modelů popisujících proudění tekutin vycházejme z bilančních zákonů (hmoty, hybnosti, momentu hybnosti, vnitřní energie a entropie) zapsaných ve formě diferenciálních rovnic.

$$
\begin{aligned}
\rho_{,t} + \text{div}\ \rho \mathbf{v} &= 0,\\
(\rho \mathbf{v})_{,t} + \text{div}\ (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) &= \text{div}\ \mathbf{T} + \rho \mathbf{f},\\
\mathbf{T} &= \mathbf{T}^T,\\
\left(\rho(e + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2})\right)_{,t} + \text{div}\ \left[\rho\left((e + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2})\mathbf{v}\right)\right] &= \text{div}\ (\mathbf{T}\mathbf{v}) - \text{div}\ \mathbf{q} + \rho r + \rho \mathbf{f}\cdot\mathbf{v},\\
(\rho\eta)_{,t} + \text{div}\ (\rho\eta) - \text{div}\ \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta}\right) + \frac{\rho r}{\theta} &= \xi \geq 0.
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Symboly v těchto rovnicích mají následující fyzikální význam:

$\mathbf{v}$	...	rychlostní pole	p	...	tlak
ρ	...	hustota	$\mathbf{f}$	...	vnější síly
$\mathbf{T}$	...	Cauchyho tenzor napětí	e	...	vnitřní specifická energie
$\mathbf{q}$	...	tepelný tok	r	...	radiace energie
θ	...	teplota	η	...	entropie
ξ	...	produkce entropie			

Námi studovaná podtřída, Stokesovy systémy, je definovaná dodatečnými předpoklady: *nestlačitelnost, homogenita, isothermální proudění, stacionarita a pomalé změny rychlosti toku.*

Začněme požadavkem nestlačitelnosti, který se dá zapsat například takto:

$$
\int_{\Omega_0} dV = \int_{\Omega_t} dv.
$$

Napíšeme-li si vztah mezi dV a dv, vyplývající z mechaniky kontinua, dá se nestlačitelnost vyjádřit vztahem div $\mathbf{F} = 1$ nebo také $\forall t \in I : \rho(t, \chi(X,t)) = \rho(0, X)$. Požadavek homogenity materiálu se dá obecně vyjádřit vztahem:

$$
\forall t \in I\ ,\ \forall x, \tilde{x} \in \Omega_t\ :\ \rho(t,x) = \rho(t,\tilde{x}).
$$

Dohromady s nestlačitelností to tedy znamená:

$$
\forall t \in I\ ,\ \forall x \in \Omega_t\ :\ \rho(t,x) = \rho^* \in \mathbb{R}.
$$

Dosaďme tato fakta do soustavy rovnic (1.1) a zohledněme isothermalitu proudění:

$$
\begin{aligned}
\text{div}\ \mathbf{v} &= 0,\\
\mathbf{v}_{,t} + \text{div}\ (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) &= \text{div}\ \frac{\mathbf{T}}{\rho^*} + \mathbf{f},\\
\mathbf{T} &= \mathbf{T}^T
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

(Navíc jsme podělili druhou rovnici ρ^*. Dále značme $\mathbf{T} := \frac{\mathbf{T}}{\rho^*}$.) a doplníme-li definici $\mathbf{T}$ pro nestlačitelné Navier-Stokesovy tekutiny

$$\mathbf{T} = -p(\mathbf{x})\mathbf{I} + \nu_0 \mathbf{D}(\mathbf{v}(\mathbf{x})), \tag{1.3}$$

kde $\nu_0 \in \mathbb{R}_+$ je konstanta, dostáváme Navier-Stokesův systém, ze kterého vychází většina prací v kapitole 2. Požadavek stacionarity úlohy znamená, že úloha je nezávislá na čase:

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ : \mathcal{K}_t = \widetilde{\mathcal{K}} \quad \text{a} \quad \mathbf{v}_{,t} = \mathbf{0}$$

a všechny proměnné v úloze dále nejsou závislé na t. Užitím těchto informací na soustavu rovnic (1.2) a po aplikaci požadavku pomalých změn rychlosti toku $\operatorname{div} \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} = \mathbf{0}$ dostáváme následující:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad , \quad \operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}^T. \tag{1.4}$$

Dodáme-li ještě definici $\mathbf{T}$ pro nestlačitelné Navier-Stokesovy tekutiny (1.3), dostáváme klasický Stokesův systém.

1.1.2 Modely z pohledu volby vazkosti - zobecnění Stokesova modelu

‚Tvar' funkce vazkosti ν, se s každým modelem liší v závislosti na modelovaném materiálu. Jeho tvar také předepisují možnosti nepřesností, které daná úloha dovoluje. Uveďme několik základních vazkostí, kterými se, jak experimentálně, tak z pohledu matematiky v minulosti věděcká společnost zabývala.

(Model $\nu := \nu_0$). Základním modelem pro popis proudění tekutin je ‚klasický' Navier-Stokesův model, jehož původ lze vystopovat až k práci Newtona [40] (1687) který první upozorňuje na lineární závislost mezi ‚odporem souvisejícím s potřebou kluzkosti v jednotlivých částech tekutiny' a ‚rychlostí s kterou jsou od sebe části tekutiny oddělovány'.

(Newtonovský Model). Newtonovskými tekutinami (stlačitelnými (1) a následně i nestlačitelnými (2)) myslíme právě takové tekutiny, jejichž tenzor napětí lze popsat vztahem (‚klasické' Navier-Stokesovy modely):

$$\begin{aligned} &(1) \quad \mathbf{T} := -p(\rho)\mathbf{I} + \lambda(\rho)(\mathrm{tr}\mathbf{D}(\mathbf{v}))\mathbf{I} + \nu(\rho)\mathbf{D}(\mathbf{v}), \\ &(2) \quad \mathbf{T} := -p\mathbf{I} + \nu_0\mathbf{D}(\mathbf{v}), \quad \mathrm{tr}\mathbf{D}(\mathbf{v}) = 0, \end{aligned}$$

pro $\nu_0 \in \mathbb{R}_+$ konstantní.

(Model $\nu := \nu(p)$). Již Stokes (rok 1845), který se taktéž zabýval Navier-Stokesovým modelem, ve své práci [44] připouští, že by vazkost mohla záviset i na tlaku $\nu := \nu(p)$. Klasickým příkladem takové tekutiny je třeba elastohydrodynamické mazadlo, pracující ve velmi malých oblastech pod vysokým tlakem. Další, kdo se podobnými modely zabýval, byl například Bridgman (rok 1931), který ve své práci [3] studuje (experimentálně pozorované) tekutiny, jejichž vazkost lze popsat následujícím vztahem:

$$\nu := \nu_0 \rho^{\frac{1}{2}} \exp\{(p + A\rho^2)\frac{B}{\theta}\},$$

kde ν_0, A a B jsou konstanty (různé pro každou pozorovanou tekutinu). Důležitou třídou, zahrnutou v tomto modelu jsou například tekutiny, které jsou (i za vysokých tlaků) téměř nestlačitelné (jejich hustota je téměř konstantní $\rho := \rho_0$), ale jejichž vazkost se s tlakem mění velmi výrazně (exponenciálně). Takovéto tekutiny byly experimentálně pozorovány a popsány například v pracích [21], [22] a [23].

(Model $\nu := \nu(\rho, \mathbf{D}(\mathbf{v}))$). Dalším odchýlením od klasického Navier-Stokesova modelu, o kterém se Stokes v práci [44] zmiňuje, jsou takzvané Stokesovy tekutiny. V tomto případě předpokládá model, kde vazkost závisí na hustotě ρ a symetrické části gradientu rychlosti $\mathbf{D}(\mathbf{v})$, na které závisí prostřednictvím jejích invariantů:

$$\mathbb{I}_{1,\mathbf{D}} := \mathrm{tr}\mathbf{D}(\mathbf{v}) \quad , \quad \mathbb{I}_{2,\mathbf{D}} := \frac{1}{2}[(\mathrm{tr}\mathbf{D}(\mathbf{v}))^2 + \mathrm{tr}(\mathbf{D}(\mathbf{v})^2)] \quad \text{a} \quad \mathbb{I}_{3,\mathbf{D}} := \det \mathbf{D}(\mathbf{v}).$$

Operátorem ‚tr' zde myslíme stopu matice a operátorem ‚det' myslíme determinant.

(Námi uvažovaný model). Zobecněným Stokesovým modelem myslíme právě takový model, popsaný soustavou rovnic (1.4) a (1.3), kde vazkostí ν nemyslíme konstantu $\nu := \nu_0$, jak je tomu u ‚klasického' Stokesova modelu, ale nějakou předem danou funkci. V této práci se budeme zabývat modelem zahrnujícím obě zobecnění z předchozích dvou odstavců (nicméně stále nestlačitelným, tedy závislým na p a $\mathbf{D}(\mathbf{v})$). Konkrétně nás budou zajímat následující dvě podtřídy:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \nu(|\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2)\mathbf{D}(\mathbf{v}) \quad \text{a} \quad \mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \nu(p, |\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2)\mathbf{D}(\mathbf{v}),$$

kde $|\mathbf{D}(\mathbf{v})|$ je norma ve smyslu stopy, tedy $|\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2 = \mathrm{tr}(\mathbf{D}(\mathbf{v})^2) = -2\mathbb{I}_{2,\mathbf{D}}$ (operátorem ‚tr' myslíme opět stopu matice). Jde o modely, spadající do třídy s nenewtonovským chováním (více o takových modelech například v [32]). Konkrétně o modely se zesílením (či zeslabením) rychlosti smyku, které jsou specifické právě tím, že jejich vztah mezi tenzorem deformace $\mathbf{T}$ a rychlostí smyku $\mathbf{D}(\mathbf{v})$ není lineární.

1.2 Oblast Ω a okrajové podmínky

Definice 1.1. *Vhodnou* oblastí Ω myslíme $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $\Omega \in C^{0,1}(\mathbb{R}^d)$, otevřenou, omezenou, souvislou, $d \geq 2$.

V důkazové části této práce pracujeme na vhodné oblasti Ω, představující nějaký uzavřený objem tekutiny. Předpokládejme, že tato tekutina je v blíže neurčené nádobě nebo trubce z nepropustného materiálu, tedy že pro každé $\mathbf{x} \in \partial\Omega$:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Klasickým, ale velmi specifickým a proto ne vždy vhodným, druhem okrajových podmínek (my je užijeme v úloze v kapitole 6) jsou *periodické okrajové podmínky* (ve směru $\mathbf{x}_i$), odpovídající například situaci s tekutinou v rovné nekonečné trubce (podél osy $\mathbf{x}_i$) bez vířivých jevů. Lze najít délku $L \in \mathbb{R}_+$ tak, že pro každé $\mathbf{x} \in \Omega$ je

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x} + L\mathbf{x}_i).$$

Na hranici oblasti je potom rozumné předpokládat (na rychlost $\mathbf{v}$) jedny z následujících okrajových podmínek. *Dirichletovy podmínky* (nulový skluz) představují situaci, ve které tekutina na hranici ulpívá tedy situaci, kdy pro $\forall \mathbf{x} \in \partial\Omega$:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x})_{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{0},$$

tyto podmínky jsou zvláštním případem obecnějších podmínek kdy víme, jakou rychlostí tekutina po hranici ‚klouže', například máme-li na takové části hranice čidlo:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x})_{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}),$$

pro nějakou známou funkci $\mathbf{v}_0$. *Dokonale kluzké* podmínky na druhou stranu představují situaci, při které tekutina na hranici neulpívá ani nejmenší měrou, vyjadřují se obvykle ve tvaru $\forall \mathbf{x} \in \partial\Omega$:

$$(\mathbf{Tn})_{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{0}.$$

Jedním z cílů, které jsme si určili při formulování zadání této práce je však vliv *Navierových okrajových podmínek*, které jsou přechodem mezi dokonalým skluzem a nulovým skluzem. V různých publikacích je lze najít například ve tvaru:

$$\lambda \mathbf{v}(\mathbf{x})_{\boldsymbol{\tau}} + (1-\lambda)(\mathbf{Tn})_{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{0} \quad , \quad \text{kde } \lambda \in (0,1)$$

je pevně zvolená konstanta, my však budeme užívat tvar:

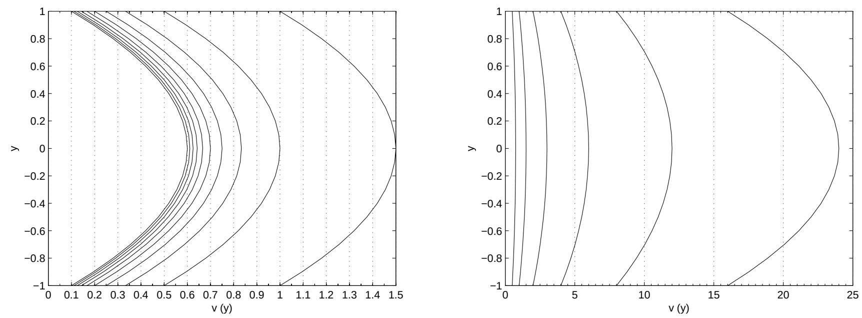
$$k\mathbf{v}(\mathbf{x})_{\boldsymbol{\tau}} + (\mathbf{Tn})_{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{0} \quad , \quad \text{kde } k := \frac{\lambda}{1-\lambda} \in (0,\infty).$$

Povšimněme si, že pro $k \to 0$ konvergují tyto podmínky k podmínce dokonalého skluzu a pro $k \to \infty$ konvergují k nulovému skluzu. Platí-li totéž o řešeních Stokesových systémů, studujeme v kapitole 5.

Vzhledem k tomu, že tlak často umíme určit pouze ‚až na konstantu' (jako prvek faktorprostoru), tak potřebujeme přidat vhodnou podmínku, která jednoznačnost řešení zaručí. Logickou, fyzikálně opodstatněnou variantou by bylo fixovat tlak p v nějakém konkrétním bodě. Tento postup však dává řešení pouze pro hladké funkce. Z matematického hlediska se jeví výhodnější přidat podmínku normovanosti tlaku, tedy:

$$\int_\Omega p(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 0, \qquad \left((*) \quad \int_\Omega p(\mathbf{x})d\mathbf{x} = p_0 \in \mathbb{R}_+ \right),$$

což je zvláštní případ podmínky $(*)$. Fyzikální smysl této podmínky je však, zvláště u úlohy, kde vazkost závisí i na tlaku, diskutabilní.



Obrázek 1: Graf funkce **(a)** $v(y)$ pro $C_1 = -1$. V levo řešíme úlohu pro $\nu_0 = 1$ a $k \in \{1, 2, \dots, 10\}$. V pravo potom pro $k = 1$ a $\nu_0 = 2^{\nu_1}$ pro $\nu_1 \in \{-4, -3, \dots, 1\}$.

1.3 Navierovy podmínky na jednoduchých úlohách

Navierovy okrajové podmínky jsou často ‚skutečnosti blíže', než Dirichletovy podmínky. Bohužel, řešení úloh s Navierovými okrajovými podmínkami jsou, na druhou stranu, v obecnějších prostorech funkcí. Demonstrujme tuto skutečnost a vliv užití Navierových podmínek na následujících jednoduchých úlohách pro $d = 2$. Mějme soustavu rovnic:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{T} &= \mathbf{0} \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{v } \Omega,$$

$$k\, \mathbf{v}_{\boldsymbol{\tau}} + (\mathbf{T}\mathbf{n})_{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{0} \quad \text{na } \Gamma.$$

Kde tenzor $T := -p\mathbf{I} + \nu\mathbf{D}(\mathbf{v})$ a oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je ‚nekonečná' obdélníková oblast omezená shora a zdola hranicí Γ pro $y = \pm 1$. Řešení hledejme ve tvaru $p(x, y) := p_1(x)p_2(y)$ a $\mathbf{v}(x, y) := (v(y), 0)$. Jednotlivé úlohy se liší volbou funkce ν.

a) Úloha $\nu := \nu_0$: Řešení existuje ve tvaru:

$$p(x, y) := C_1 x + C_p \quad \text{a} \quad v(y) := \frac{C_1}{\nu_0}\left(y^2 - \frac{k+2}{k}\right).$$

Řešení $v(y)$ pro různé parametry je ilustrováno na obrázku 1.

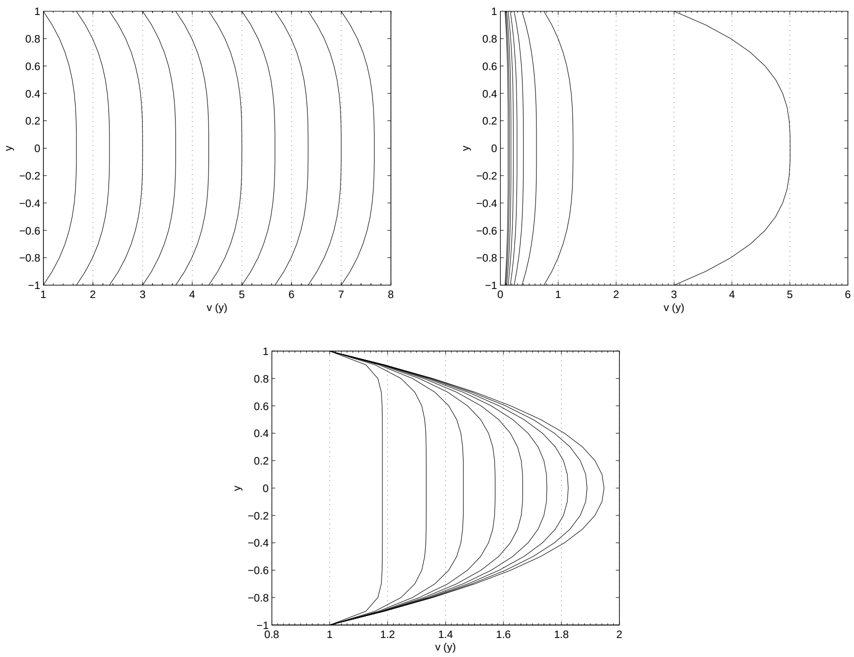
b) Úloha $\nu := \nu_0 p$: Řešení, kdyby existovalo, by mělo mít tvar:

$$p(x, y) := C_p \exp\left\{C_1 \frac{\sinh \frac{C_1}{\nu_0} y}{\cosh \frac{C_1}{\nu_0} y}\right\} \exp\{C_1 x\} \quad \text{a} \quad v(y) := \frac{1}{\nu_0} \ln\left\{\cosh \frac{C_1 y}{\nu_0}\right\} + C_u.$$

Komplikace nastávají v momentě, kdy se pokoušíme splnit okrajovou podmínku:

$$k v(y) + \operatorname{sgn}(y) \nu_0 p(x, y) \frac{\partial v(y)}{\partial y} = 0.$$

Pro $y = \pm 1$, zjistíme, že jediné splňující řešení je triviální řešení.



Obrázek 2: Graf funkce **(c)** $v(y)$ pro $C_1 = -1$. V levo řešíme úlohu pro $\nu_0 = 1$, $r = 1.5$ a $k \in \{1, 2, \ldots, 10\}$. V pravo pro $k = 1$, $r = 1.5$ a $\nu_0 = \log \nu_1$ pro $\nu_1 \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ a dole pro $k = 1$, $\nu_0 = 1$ a $r = 1 + (r_1/10)$ pro $r_1 \in \{1, 2, \ldots, 9\}$.

c) Úloha $\nu := \nu_0 |\mathbf{D}(\mathbf{v})|^{r-2}\mathbf{D}(\mathbf{v})$: Řešení existuje ve tvaru:

$$p(x, y) := C_1 x + C_p \quad \text{a} \quad v(y) := \frac{2\nu_0^{-r'}}{r' C_1} \left(|C_1 y|\right)^{r'} + d,$$

kde pro $C_1 = -1$ je $d = \nu_0^{-r'} \frac{r' - 2k}{r'}$. Řešení $v(y)$ je ilustrováno na obrázku 2.

d) Úloha $\nu := \nu_0 p |\mathbf{D}(\mathbf{v})|^{r-2}\mathbf{D}(\mathbf{v})$: Řešení existuje ve tvaru:

$$p(x, y) := C_2(y) \exp C_1 x$$

$$\text{a} \quad v(y) := \nu_0^{-rr'} \operatorname{sgn}\Big(y + \frac{\ln C_3}{C_1}\Big)^{\frac{r-1}{2-r}} \int \left(\frac{C_3 \exp C_1 y - 1}{C_3 \exp C_1 y + 1} \right)^{\frac{1}{2-r}} dy,$$

nicméně při snaze splnit okrajovou podmínku, nastanou stejné komplikace jako v případě s vazkostí $\nu := \nu_0 p$.

1.4 Osnova práce

V první části, tedy v kapitole 2, seznámíme čtenáře s existujícími výsledky v oblasti existence řešení Navier-Stokesových rovnic a jejich zobecnění (ve smyslu volby obecnějších tvarů vazkosti). Dále se zabývejme následujícím systémem rovnic, jejichž fyzikální původ byl popsán v úvodu:

Řešme ve vhodné oblasti (splňující definici 1.1), zobecněný Stokesův systém s Navierovými okrajovými podmínkami ($k > 0$):

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{T} = \mathbf{f} \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \end{aligned}\right\} \text{ v } \Omega \quad , \quad \int_\Omega p \, d\mathbf{x} = 0 \quad \text{a} \quad \left.\begin{aligned} k\mathbf{v}_{\boldsymbol{\tau}} + (\mathbf{Tn})_{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{0} \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \end{aligned}\right\} \text{ na } \partial\Omega. \tag{1.5}$$

Tenzor $\mathbf{T}$ předpokládejme ve tvaru

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \nu\mathbf{D}(\mathbf{v}),$$

kde konkrétní podoba funkce ν, $\nu := \nu(|\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2)$ a $\nu := \nu(p, |\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2)$, bude specifikována pro jednotlivé úlohy v kapitolách 3.1 a 4.1.

V kapitole 3 ukážeme důkaz existence a jednoznačnosti úlohy $(\mathcal{P}_k)$, tedy soustavy rovnic (1.5) s vazkostí $\nu := \nu(|\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2)$ zavedenou v definici 3.2. Cílem kapitoly je seznámit čtenáře s metodami monotonních operátorů užívaných v této práci.

V následující kapitole, začínáme s matematickou teorií modelu, který je ústředním motivem práce, mluvíme o úloze $(\mathcal{Q}_k)$, tedy soustavě rovnic (1.5) s vazkostí $\nu := \nu(p, |\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2)$ zavedenou v definici 4.2. V této kapitole dokážeme existenci a jednoznačnost řešení.

V kapitole 5 ukážeme, za jakých podmínek lze projít limitou pro konstantu k (z okrajových podmínek, tedy z rovnice$(1.5)_4$) k nule a k nekonečnu. (Což odpovídá Dirichletovým okrajovým podmínkám a podmínkám popisující dokonalý skluz, viz kapitola 1.2)

Nakonec v kapitole 6 budeme zkoumat regularitu pro periodické okrajové podmínky ve smyslu vyšší diferencovatelnosti $\mathbf{v}$.

2 Publikované výsledky - Existenční teorie

Prvním cílem této práce bylo nastudovat dostupné materiály a vytvořit přehled dosažených výsledků v oblasti analýzy Navier-Stokesových rovnic a jejich zobecnění. Do přehledu výsledků jsem, pro snazší orientaci, zavedl určitý systém. Díky rozsáhlému množství materiálů, které bylo třeba nastudovat, bylo poměrně obtížné, tento systém vytvořit. Nejvýraznější pomocí v tomto směru byly rady zkušenějších kolegů a článek sepsaný J.Málkem a K. R. Rajagopalem [32] obsahující, mimo jiné, rámcový přehled výsledků o tekutinách s vazkostí závislou na zobecněné rychlosti smyku.

Zahrnuté modely

Chceme-li logicky utřídit známé výsledky z oblasti Navier-Stokesových rovnic zobecněných pro námi studovaný model $\nu := \nu(p, |\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2)$, musíme zavést vhodnou kategorizaci. Hlavním kritériem třídění nechť je podtřída námi uvažovaného modelu charakterizovaná parametry, na kterých funkce ν závisí. Pomocnými vedlejšími kritérii pak bude (ne)stacionarita studované úlohy a zvolené okrajové podmínky. Uvažujme tyto čtyři hlavní kategorie:

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \nu := \nu_0 \in \mathbb{R}_+,\\
&(2) \quad \nu := \nu(p),\\
&(3) \quad \nu := \nu(|\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2),\\
&(4) \quad \nu := \nu(p, |\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2).
\end{aligned}
$$

Modely s konstantní vazkostí (1)

Modely z kategorie (1) jsou studovány již velmi dlouho. V roce 1934 ve svém článku [29] ukazuje Leray existenci slabého řešení pro libovolná data na celém prostoru $\mathbb{R}^3$ a existenci a jednoznačnost hladkých řešení pro $\mathbb{R}^2$. Dalšími autory, kteří na Leraye navázali, jsou například Hopf [19] (1951), který ukazuje existenci řešení Navier-Stokesových rovnic v omezených oblastech, s Dirichletovými podmínkami, následovaný prací Kinsleva a Ladyzhenské [27] (1954) o jednoznačnosti takových systémů.

Z novějších autorů uveďme například knihu Constantin, Foias [7] z roku 1988, ve které autoři studují stacionární Stokesovy systémy a stacionární Navier-Stokesovy rovnice na oblastech otevřených a omezených ‚ve směru' s homogenními Dirichletovými okrajovými podmínkami. Nebo knihu Galdi [14] a [15] z let 1993 a 1994 ve kterých se autor zabývá stacionárními úlohami se zobecněnou Dirichletovou podmínkou. V první z nich analyzuje Stokesovy systémy (existence, jednoznačnost) na celém prostoru, poloprostoru a na omezené oblasti, v druhé pak Navier-Stokesovy rovnice. Poslední z knih, o kterých bych se tu rád zmínil, je Temam [45] (reprint z roku 2001) ve které se autor zabývá jak stacionárními, tak následně i nestacionárními úlohami (Stacionární Stokesovy systémy a Navier-Stokesovy rovnice, Nestacionární Navier-Stokesovy rovnice pro $d \leq 4$) pro homogenní Dirichletovu okrajovou podmínku.

Modely s vazkostí závislou na tlaku (2)

Naproti tomu touto kategorií modelů se doposud zabývalo pouze málo autorů. M. Renardy ve své práci [42] z roku 1985 ukazuje (lokální v čase) existenci nestacionární Navier-Stokesovy úlohy s Dirichletovou okrajovou podmínkou a to za podmínek ,zachování elipticity' dat. Následují práce F. Gazzola z roku 1995 [17] a z roku 1997 [16], ve kterých se pokouší rozšířit výsledky i pro data porušující elipticitu a dosahuje částečných výsledků. Nakonec v práci [18] Gazzola a Secchi (rok 2001) ukazují existenci řešení takovýchto úloh pro zdola omezené vazkosti.

2.1 Modely s vazkostí závislou na gradientu rychlosti (3)

U počátku studia existenční teorie rovnic, které popisují tekutiny tohoto typu, byli Ladyzhenskaya [28] a Lions [30] (1969).

Nechť $T, L \in (0, \infty)$ jsou libovolné, ale pevné konstanty. Úlohu uvažujme na oblasti $\Omega = (0, L) \times (0, L) \times (0, L)$ a předpokládejme, že $v_i, p : [0, T] \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jsou L-periodické v každém směru x_i a splňují

$$\int_\Omega v_i \, d\mathbf{x} = 0 \quad , \quad \int_\Omega p \, d\mathbf{x} = 0, \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, 3.$$

Nechť $\mathcal{S}(\mathbf{D}(\mathbf{v})) := \nu(|\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2)\mathbf{D}(\mathbf{v})$ (kategorie (3)) a κ je 0 nebo 1. Předpokládejme:

$$\mathcal{S} : \mathbb{R}^{d\times d} \to \mathbb{R}^{d\times d} \quad , \quad \mathcal{S}(\mathbf{I}_0) = \mathbf{I}_0 \quad , \quad \mathcal{S} \in C^1(\mathbb{R}^{d\times d})^{d\times d}$$

a existují kladné konstanty c_d a c_h takové, že pro konkrétní $r \in (1, \infty)$ (na které budou kladeny ještě další požadavky) a pro všechny $\mathbf{I}_0 \neq \mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{d\times d}_{sym}$ platí :

$$c_d((\kappa + |\mathbf{B}|^{r-2})|\mathbf{A}|^2 \leq \frac{\partial \mathcal{S}(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}} : (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \leq c_h(\kappa + |\mathbf{B}|^{r-2})|\mathbf{A}|^2.$$

(Berme $\kappa = 0$ pro $r < 2$) Uvažujme časový interval $(0, T)$, pro T pevné a uvažujme počáteční podmínku

$$\mathbf{v}(\mathbf{0}, \cdot) = \mathbf{v}_0(\cdot) \quad , \quad \text{div } \mathbf{v}_0 = 0 \quad \text{a} \quad \mathbf{v}_0 \in \mathbf{L}^2_{per}(\Omega)^d.$$

Mějme danou pravou stranu $\mathbf{f}$: $\quad \mathbf{f} \in (\mathbf{L}^r(0, T; \mathbf{W}^{1,r}_{per}(\Omega)))^*$ a řešme soustavu rovnic:

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad , \quad \mathbf{v}_{,t} + \text{div } (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) - \text{div } \mathcal{S}(\mathbf{D}(\mathbf{v})) = -\nabla p + \mathbf{f}.$$

Ladyzhenskaya ve své práci [28] za použití teorie monotonních operátorů a metody kompaktnosti dokazuje existenci slabého řešení pro $r \geq \frac{11}{5}$, $d = 3$. Úlohu řeší pro Dirichletovy okrajové podmínky bez omezení na velikost dat. Na tyto práce (Ladyzhenskaya, Lions) navázala skupina autorů, snažíce se jinými technikami docílit lepších výsledků.

(Oblasti s periodickými okrajovými podmínkami). Málek, Nečas a Růžička v práci [33] (rok 1996) technikou regularit docilují výsledků:

$$\text{pro} \quad d = 2 : \quad r > 1 \quad , \quad \text{pro} \quad d \geq 3 : \quad r \geq \frac{3d}{d+2}.$$

(Oblasti s Dirichletovými okrajovými podmínkami). Technikou regularit Kaplický v práci [24] (z roku 2005) a Málek, Nečas, Růžička v práci [35] (z roku 2001) ukazují výsledky:

$$\text{pro} \quad d = 2: \quad r > \frac{3}{2} \quad , \quad \text{pro} \quad d = 3: \quad r \geq 2.$$

A techniku $C^{1,\alpha}$-regularit aplikuje Kaplický v práci [25] (rok 2005) a dociluje výsledků:

$$\text{pro} \quad d = 2: \quad r \geq 2.$$

(Další související publikace). Frehse, Málek a Stainhauer v práci [12] (z roku 2000) z vlastností striktně monotonních operátorů a $\mathbf{L}^\infty$-seřezávacích funkcí docilují výsledků pro oblast s úplným skluzem:

$$\text{pro} \quad d = 3: \quad r > \frac{8}{5}.$$

V článcích a knihách publikovaných skupinami autorů okolo profesora Nečase v letech 1993-1996 [2] (Bellout, Bloom Nečas), [33] (Málek, Nečas, Růžička) a [34] (Málek, Nečas, Rokyta, Růžička) se snaží autoři překlenout mezeru mezi Navier-Stokesovými rovnicemi ($r = 2$) a pracemi Ladyzhenské a Lionse. Volí techniku regularit pro získání vyšší diferencovatelnosti. Výsledkem je mimo jiné také existence slabého řešení pro $r > \frac{9}{5}$.

(Stacionární úlohy). Již Lions ve své knize [30] ukazuje existenci řešení stacionárního případu takovýchto tekutin pro periodické okrajové podmínky a to pro $r > \frac{3d}{d+2}$. Pro úlohu s Dirichletovými podmínkami v roce 2003 užili Frehse, Málek, Steinhauer v čláku [13] metodu Lipschitzovských seřezávacích funkcí (v kombinaci se striktní monotonií) a ukázali výsledky pro $r > \frac{2d}{d+2}$.

2.2 Modely s vazkostí závislou na tlaku a gradientu rychlosti (4)

Nechť $\mathcal{S}_2(p, \mathbf{D}(\mathbf{v})) := \nu(p, |\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2)\mathbf{D}(\mathbf{v})$, předpokládejme $\mathcal{S}_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d\times d} \to \mathbb{R}^{d\times d}$:

$$\mathcal{S}_2(\cdot, \mathbf{I}_0) = \mathbf{I}_0 \quad , \quad \mathcal{S}_2 \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d\times d})^{d\times d}.$$

(1) Existují kladné konstanty c_d a c_h takové, že pro konkrétní $r \in (1, 2)$ a pro všechny $\mathbf{I}_0 \neq \mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{d\times d}_{sym}$ a všechna $p \in \mathbb{R}$ platí :

$$c_d((1 + |\mathbf{B}|^2)^{\frac{r-2}{2}} |\mathbf{A}|^2 \leq \frac{\partial \mathcal{S}_2(p, \mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}} : (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \leq c_h(1 + |\mathbf{B}|^2)^{\frac{r-2}{2}} |\mathbf{A}|^2.$$

(2) Pro dané $r \in (1, 2)$ existuje kladná konstanta μ_0 taková, že pro všechny symetrické matice $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{d\times d}_{sym}$ a všechna $p \in \mathbb{R}$ platí:

$$\left| \frac{\partial \nu(p, |\mathbf{B}|^2)}{\partial p} \right| |\mathbf{B}| \leq \mu_0 (1 + |\mathbf{B}|^2)^{\frac{r-2}{4}} \leq \mu_0.$$

(Evoluční úlohy). Za první studii těchto rovnic na úrovni matematické analýzy můžeme považovat práci Málek, Nečas, Rajagopal (rok 2002) [36], následovanou v roce 2003 prací Hron, Málek, Nečas, Rajagopal [20], ve kterých zkoumají existenci řešení rovnic na oblastech s periodickými okrajovými podmínkami s výsledky:

$$\text{pro} \quad d = 2: \quad r \in \left(\frac{3}{2}, 2\right) \quad , \quad \text{pro} \quad d = 3: \quad r \in \left(\frac{9}{5}, 2\right).$$

V další práci, publikované v roce 2007; Bulíček, Málek, Rajagopal [6] ukázali metodou $\mathbf{L}^\infty$-seřezávacích funkcí první výsledek v globální existenci. Úloha je řešena pro libovolná data na libovolné omezené oblasti s Navierovou okrajovou podmínkou, pro

$$d = 3 \quad \text{a} \quad r \in \left(\frac{8}{5}, 2\right).$$

(Stacionární úlohy). Klíčovou prací studující stacionární úlohu s takovouto vazkostí na libovolné oblasti s Dirichletovými okrajovými podmínkami je práce Franta, Málek, Rajagopal [11] (rok 2005), užívající metody monotonních operátorů, která ukazuje existenci:

$$\text{pro} \quad r \in \left(\frac{9}{5}, 2\right).$$

Tyto výsledky užitím metody Lipschitzovských seřezávacích funkcí posunula ve své diplomové práci [10] v roce 2007 V. Fišerová:

$$r \in \left(\frac{6}{5}, 2\right).$$

3 Úloha $(\mathcal{P}_k)$

Od kapitoly 4 dále se budeme zabývat úlohou s vazkostí závislou na tlaku a symetrické části gradientu rychlosti. Existenční teorie takové úlohy je však podmíněná nerovností, kterou musí splňovat konstanty c_d, c_h a μ_0. Ukažme zde proto podobnou úlohu ale takovou, aby na své konstanty žádnou podmínku nekladla. Veďme oba dva důkazy (existence a jednoznačnosti řešení) v obou dvou kapitolách (3 a 4) pokud možno stejnými postupy. Tak bude možno identifikovat, v čem a proč se liší.

3.1 Formulace úlohy

Řešme ve vhodné oblasti Ω (viz definice 1.1), zobecněný Stokesův systém s Navierovými okrajovými podmínkami ($k > 0$):

$$(\mathcal{P}_k) \qquad \left.\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{T} &= \mathbf{f} \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0 \end{aligned}\right\} \ \text{v } \Omega \quad , \quad \int_\Omega p \, d\mathbf{x} = 0 \quad \text{a} \quad \left.\begin{aligned} k\mathbf{v}_{\boldsymbol{\tau}} + (\mathbf{T}\mathbf{n})_{\boldsymbol{\tau}} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} &= 0 \end{aligned}\right\} \ \text{na } \partial\Omega, \tag{3.1}$$

pro vhodný tenzor $\mathbf{T}$ splňující předpoklady definice 3.2.

Definice 3.1. Nechť $\nu \in C^1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Pro všechny funkce $\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{B}(\mathbf{x}) : \Omega \to \mathbb{R}^{d \times d}$, pro které mají následující výrazy smysl, užívejme značení:

$$\mathcal{S}(\mathbf{A}(\mathbf{x})) := \nu(|\mathbf{A}(\mathbf{x})|^2)\mathbf{A}(\mathbf{x}), \tag{3.2}$$

$$\mathcal{I}(\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{B}(\mathbf{x})) := \int_\Omega \int_0^1 (1 + |\mathbf{A}(\mathbf{x}) + s(\mathbf{B}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}(\mathbf{x}))|^2)^{\frac{r-2}{2}} ds \, |\mathbf{B}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}.$$

Definice 3.2. Vhodným tenzorem $\mathbf{T}$ myslíme každý tenzor, který lze vyjádřit ve tvaru:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathcal{S}(\mathbf{D}(\mathbf{v})),$$

kde (ν z definice 3.1) $\nu \in C^1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ a platí:

(A 1) Pro dané $r \in (1, \infty)$ existují kladné konstanty c_d a c_h takové, že pro všechny symetrické matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{d \times d}_{sym}$ platí:

$$c_d(1 + |\mathbf{B}|^2)^{\frac{r-2}{2}} |\mathbf{A}|^2 \leq \frac{\partial \mathcal{S}(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}} : (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \leq c_h(1 + |\mathbf{B}|^2)^{\frac{r-2}{2}} |\mathbf{A}|^2.$$

Důsledek 3.1. *Funkce ν z Definice 3.2 splňuje pro všechny $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, $\mathbf{B}(\mathbf{x}) : \Omega \to \mathbb{R}^{d \times d}_{sym}$ symetrické funkce a všechna $r \in (1, \infty)$:*

$$A. \quad \mathcal{S}(\mathbf{B}) : \mathbf{B} \geq \frac{c_d}{2r}(|\mathbf{B}|^r - 1), \tag{3.3}$$

$$B. \quad |\mathcal{S}(\mathbf{B})| \leq \frac{c_h}{r-1}(1 + |\mathbf{B}|)^{r-1}, \tag{3.4}$$

$$C. \quad \int_\Omega \big(\nu(|\mathbf{B}|^2)\mathbf{B} - \nu(|\mathbf{A}|^2)\mathbf{A}\big) : (\mathbf{B} - \mathbf{A}) d\mathbf{x} \geq c_d \mathcal{I}(\mathbf{A}, \mathbf{B}). \tag{3.5}$$

Důkaz. Pro nerovnost (3.3) a (3.4) lze důkaz najít například v knize [34] jako lemma 5.1.19 (strana 198). Důkaz nerovnosti (3.5) je obdobný jako důkaz nerovnosti (1.18) v článku [6] (strana 56). □

Ve slabé formulaci (3.7) se vyskytuje člen, $\forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}^{1,r}(\Omega)^d$:

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dS. \tag{3.6}$$

Kde řešení $\mathbf{v}$ hledáme v podprostoru $\mathbf{W}^{1,r}(\Omega)^d$. Aby byl integrál (3.6) konečný, požadujme aby funkce splňovaly $\mathbf{v}, \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{L}^2(\partial\Omega)^d$.

Definice 3.3. Definujme prostory

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^{1,r}_{\mathbf{n}}(\Omega)^d &:= \{\mathbf{v} \in \mathbf{W}^{1,r}_{\mathbf{n}}(\Omega)^d : \mathrm{tr}\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\partial\Omega)^d\}, \\ \mathbf{V}^{1,r}_{\mathbf{n},\mathrm{div}}(\Omega)^d &:= \{\mathbf{v} \in \mathbf{W}^{1,r}_{\mathbf{n},\mathrm{div}}(\Omega)^d : \mathrm{tr}\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\partial\Omega)^d\}. \end{aligned}$$

Poznámka 3.1. $\mathbf{V}^{1,r}_{\mathbf{n}}(\Omega)^d$ splývá s $\mathbf{W}^{1,r}_{\mathbf{n}}(\Omega)^d$ pro $r \geq \frac{2d}{d+1}$ (stejně tak splývá i $\mathbf{V}^{1,r}_{\mathbf{n},\mathrm{div}}(\Omega)^d$ s $\mathbf{W}^{1,r}_{\mathbf{n},\mathrm{div}}(\Omega)^d$), což lze snadno odvodit z vnoření (A.3).

Definice 3.4. Mějme ‚vhodnou' oblast Ω (viz definice 1.1). Dvojici $(\mathbf{v},p)$, $\mathbf{v} \in \mathbf{V}^{1,r}_{\mathbf{n},\mathrm{div}}(\Omega)^d$ a $p \in \mathbf{L}^{r'}(\Omega)/_{\mathbb{R}}$, (pro $r \in (1,\infty)$) splňující pro danou $\nu(\in C^1) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ (Definice 3.2), $\mathbf{f} \in \left(\mathbf{W}^{1,r}_{\mathbf{n}}(\Omega)^d\right)^*$ a každou testovací funkci $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}^{1,r}_{\mathbf{n}}(\Omega)^d$:

$$\int_\Omega \mathcal{S}(\mathbf{D}(\mathbf{v})) : \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi}) d\mathbf{x} + k \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dS = \int_\Omega p \, \mathrm{div} \, \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x} + \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle \tag{3.7}$$

nazýváme slabým řešením úlohy $(\mathcal{P}_k)$.

Než začneme studovat řešení této soustavy rovnic, podívejme se, zdali má takto definovaná úloha smysl, tedy jestli jsou tyto integrály (a dualita) konečné. První integrál odhadněme z nerovnosti (3.4) a lemmatu A.1:

$$\int_\Omega \mathcal{S}(\mathbf{D}(\mathbf{v})) : \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi}) d\mathbf{x} \leq \frac{c_h}{r-1} \int_\Omega (1 + |\mathbf{D}(\mathbf{v})|)^{r-1} |\boldsymbol{\varphi}| d\mathbf{x} \leq \frac{c_h}{r-1} \int_\Omega (1 + |\mathbf{D}(\mathbf{v})|^{r-1}) |\boldsymbol{\varphi}| d\mathbf{x}$$

a dále z věty o integrování součtu a Hölderovy nerovnosti (A.4):

$$\int_\Omega (1 + |\mathbf{D}(\mathbf{v})|^{r-1}) |\boldsymbol{\varphi}| d\mathbf{x} \leq \|\boldsymbol{\varphi}\|_1 + \|\mathbf{D}(\mathbf{v})\|_r^{r-1} \|\boldsymbol{\varphi}\|_r.$$

Protože $\mathbf{L}^r(\Omega)^d \hookrightarrow \mathbf{L}^1(\Omega)^d$ a pro každou $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}^{1,r}_{\mathbf{n}}(\Omega)^d$, je zároveň $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{L}^r(\Omega)^d$ a také pro každou $\mathbf{v} \in \mathbf{V}^{1,r}_{\mathbf{n},\mathrm{div}}(\Omega)^d$ je $\mathbf{D}(\mathbf{v}) \in \mathbf{L}^r(\Omega)^{d \times d}$, je odhad konečný. Druhý integrál je konečný z definice prostorů $\mathbf{V}^{1,r}_{\mathbf{n}}(\Omega)^d$ a $\mathbf{V}^{1,r}_{\mathbf{n},\mathrm{div}}(\Omega)^d$ a Hölderovy nerovnosti (A.4):

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dS \leq \|\mathrm{tr}\mathbf{v}\|_{2,\partial\Omega} \|\mathrm{tr}\boldsymbol{\varphi}\|_{2,\partial\Omega}.$$

Třetí je také konečný, protože z definice prostoru pro $\forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}^{1,r}_{\mathbf{n}}(\Omega)^d$ je $\mathrm{div} \, \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{L}^r(\Omega)$ a z Hölderovy nerovnosti (A.4):

$$\int_\Omega p \, \mathrm{div} \, \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x} \leq \|p\|_{r'} \|\mathrm{div} \, \boldsymbol{\varphi}\|_r.$$

Poslední integrál je konečný přímo z definice duality a Schwarzovy nerovnosti (A.5).

3.2 Existence řešení soustavy

Věta 3.2. *Mějme ‚vhodnou' oblast* Ω *(viz definice 1.1). Pro všechna* $r \in (1,\infty)$ *a všechna* ν *splňující předpoklady (Definice 3.2) a všechna* $\mathbf{f} \in \left(\mathbf{W}^{1,r}_{\mathbf{n}}(\Omega)^d\right)^*$ *existuje slabé řešení soustavy* $(\mathcal{P}_k)$ *(Definice 3.4).*

Důkaz. Důkaz je rozdělený do několika kroků. Nejprve zaveďme pomocnou úlohu $(\mathcal{P}_k)^\epsilon$ a ukažme ‚metodou galerkinovských aproximací' (kapitola 3.2.1 a 3.2.2) popsanou například v [34], že má řešení $(\mathbf{v}^\epsilon, p^\epsilon)$ pro každé pevné $\epsilon > 0$. Nakonec ukažme stejnoměrné odhady na $(\mathbf{v}^\epsilon, p^\epsilon)$, ze kterých plyne existence limity (kapitola 3.2.3 a z Vitaliho věty A.17) $(\mathbf{v}, p)$. Ukažme, že tato dvojice je námi hledaným slabým řešením úlohy $(\mathcal{P}_k)$ (viz kapitola 3.2.4 a 3.2.5). Pro ukázání konvergence nelineárních členů vycházejme z teorie monotonních operátorů a takzvaného Mintyho triku.

3.2.1 Galerkinovské aproximace úlohy $(\mathcal{P}_k)^\epsilon$

Pro libovolné pevné $\epsilon \in \mathbb{R}_+(>0)$ zaveďme aproximovanou úlohu $(\mathcal{P}_k)^\epsilon$ splňující v Ω:

$$(\mathcal{P}_k)^\epsilon \qquad \begin{aligned} \operatorname{div}\{p^\epsilon \mathbf{I} + \mathcal{S}(\mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon))\} &= \mathbf{f}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}^\epsilon &= -\epsilon |p^\epsilon|^{r'-2} p^\epsilon \end{aligned} \tag{3.8}$$

a na hranici $\partial\Omega$ stejně jako v úloze $(\mathcal{P}_k)$:

$$\begin{aligned} k\mathbf{v}^\epsilon_{\boldsymbol{\tau}} + (\{p^\epsilon \mathbf{I} + \mathcal{S}(\mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon))\}\mathbf{n})_{\boldsymbol{\tau}} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{v}^\epsilon \cdot \mathbf{n} &= 0. \end{aligned}$$

Navíc lze vztah (3.8) také přepsat do explicitního vyjádření p^ϵ z $\mathbf{v}^\epsilon$:

$$p^\epsilon(\mathbf{v}^\epsilon) := p^\epsilon = -\epsilon^{1-r} |\operatorname{div} \mathbf{v}^\epsilon|^{r-2} \operatorname{div} \mathbf{v}^\epsilon. \tag{3.9}$$

Řešením slabé formulace této úlohy je tedy funkce $\mathbf{v}^\epsilon \in \mathbf{V}^{1,r}_{\mathbf{n}}(\Omega)^d$ (díky (3.9) již nikoliv funkce p^ϵ), která splňuje pro každou testovací funkci $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}^{1,r}_{\mathbf{n}}(\Omega)^d$:

$$\int_\Omega \mathcal{S}(\mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon)) : \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi}) d\mathbf{x} + k \int_{\partial\Omega} \mathbf{v}^\epsilon \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dS + \int_\Omega p^\epsilon(\mathbf{v}^\epsilon) \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x} = \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle . \tag{3.10}$$

Nechť $\{\boldsymbol{\omega}^i\}_{i=1}^\infty$ je báze prostoru $\mathbf{V}^{1,r}_{\mathbf{n}}(\Omega)^d$. Pro každé $\epsilon \in \mathbb{R}_+(>0)$ pevné a každé kladné $N \in \mathbb{N}$ hledáme galerkinovskou aproximaci řešení

$$\mathbf{v}^{N,\epsilon} := \sum_{i=1}^N \alpha^i \boldsymbol{\omega}^i.$$

Hledaný vektor $\boldsymbol{\alpha}_N \in \mathbb{R}^N : \boldsymbol{\alpha}_N = (\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^N)$ řeší soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \forall i \in (1,2,\ldots,N), \quad 0 = \mathbf{P}^i(\boldsymbol{\alpha}_N) := &\int_\Omega \mathcal{S}(\mathbf{D}(\mathbf{v}^{N,\epsilon}))\mathbf{D}(\boldsymbol{\omega}^i) d\mathbf{x} \\ &+ k \int_{\partial\Omega} \mathbf{v}^{N,\epsilon} \, \boldsymbol{\omega}^i \, dS - \int_\Omega p^{N,\epsilon} \operatorname{div} \boldsymbol{\omega}^i \, d\mathbf{x} - \left\langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\omega}^i \right\rangle, \end{aligned}$$

kde symbol $p^{N,\epsilon}$ zastupuje galerkinovskou aproximaci (3.9):

$$p^{N,\epsilon} := -\epsilon^{1-r}|\text{div } \mathbf{v}^{N,\epsilon}|^{r-2}\text{div } \mathbf{v}^{N,\epsilon}. \tag{3.11}$$

Postupujme podle lemmatu A.7:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}^i(\boldsymbol{\alpha}_N)\alpha^i := \int_\Omega \mathcal{S}(\mathbf{D}(\mathbf{v}^{N,\epsilon})) : \mathbf{D}(\mathbf{v}^{N,\epsilon})d\mathbf{x} + k\int_{\partial\Omega} |\mathbf{v}^{N,\epsilon}|^2 dS \\ - \int_\Omega p^{N,\epsilon}\text{div } \mathbf{v}^{N,\epsilon}\, d\mathbf{x} - \left\langle \mathbf{f}, \mathbf{v}^{N,\epsilon}\right\rangle.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Třetí integrál upravme z definice symbolu $p^{N,\epsilon}$(3.11):

$$-\int_\Omega p^{N,\epsilon}\text{div } \mathbf{v}^{N,\epsilon}\, d\mathbf{x} = \epsilon^{1-r}\|\text{div } \mathbf{v}^{N,\epsilon}\|_r^r. \tag{3.13}$$

Dále odhadněme první dva integrály. Podle definice $\mathcal{S}(\mathbf{D}(\mathbf{v}^{N,\epsilon}))$ (3.2) a z (3.3) platí:

$$\int_\Omega \mathcal{S}(\mathbf{D}(\mathbf{v}^{N,\epsilon})) : \mathbf{D}(\mathbf{v}^{N,\epsilon})\, d\mathbf{x} \geq \frac{c_d}{2r}(\|\mathbf{D}(\mathbf{v}^{N,\epsilon})\|_r^r - |\Omega|) \tag{3.14}$$

a dále platí z Kornovy nerovnosti (A.7):

$$\begin{aligned}\frac{c_d}{2r}(\|\mathbf{D}(\mathbf{v}^{N,\epsilon})\|_r^r - |\Omega|) + k\int_{\partial\Omega} |\mathbf{v}^{N,\epsilon}|^2 dS \geq \\ \geq C_{(K,1)}\min(\frac{c_d}{2r}, \frac{k}{2})\|\mathbf{v}^{N,\epsilon}\|_{1,r}^r + \frac{k}{2}\|\mathbf{v}^{N,\epsilon}\|_{2,\partial\Omega}^2 - \frac{c_d|\Omega|}{2r}.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Navíc odhadněme $\left\langle \mathbf{f}, \mathbf{v}^{N,\epsilon}\right\rangle$ z Schwarzovy nerovnosti (A.5):

$$-\left\langle \mathbf{f}, \mathbf{v}^{N,\epsilon}\right\rangle \geq -\|\mathbf{f}\|_{(1,r)^*}\|\mathbf{v}^{N,\epsilon}\|_{1,r}. \tag{3.16}$$

Celkem tedy z (3.13) - (3.16) vidíme, že

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}^i(\boldsymbol{\alpha}_N)\alpha^i \geq C_{(K,1)}\min(\frac{c_d}{2r}, k)\|\mathbf{v}^{N,\epsilon}\|_{1,r}^r + \epsilon^{1-r}\|\text{div } \mathbf{v}^{N,\epsilon}\|_r^r \\ + \frac{k}{2}\|\mathbf{v}^{N,\epsilon}\|_{2,\partial\Omega}^2 - \|\mathbf{f}\|_{(1,r)^*}\|\mathbf{v}^{N,\epsilon}\|_{1,r} - \frac{c_d|\Omega|}{2r}.\end{aligned} \tag{3.17}$$

Nyní postupujeme podle lemmatu A.7. Pro rostoucí $\|\mathbf{v}^{N,\epsilon}\|_{1,r}$ vidíme, že kladné členy rostou až s r-tou mocninou, kdežto záporné jsou konstanty, nebo rostou s první mocninou. Bude tedy existovat číslo ρ, takové, že:

$$\forall \mathbf{v}^{N,\epsilon} \in \{\mathbf{u} \in \mathbf{V}_\mathbf{n}^{1,r}(\Omega)^d \ : \ \forall i > N \ ; \ (\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}^i) = 0 \ ; \ \|\mathbf{v}^{N,\epsilon}\|_{1,r} = \rho\} \ : \ \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}^i(\boldsymbol{\alpha}_N)\alpha^i \geq 0.$$

Tedy bude pro každé $N \in \mathbb{N}$ existovat i $\boldsymbol{\alpha}_N^* = \{\hat{\alpha}^1, \hat{\alpha}^2, \ldots, \hat{\alpha}^N\}$ galerkinovská aproximace řešící soustavu rovnic:

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, N\} : \quad \mathbf{P}^i(\boldsymbol{\alpha}_N^*) = 0$$

a tedy i galerkinovská aproximace funkce $\mathbf{v}^\epsilon$, značená $\mathbf{v}^{N,\epsilon} := \sum_{i=1}^N \hat{\alpha}^i\boldsymbol{\omega}^i$.

Dále užívejme následující konstanty:

$$C_v(r,k) := \frac{1}{2}C_{(K,1)}\min(\frac{c_d}{2r},\frac{k}{2}), \tag{3.18}$$

$$C_f(r,k) := r^{-r'}(r-1)\,(C_v(r,k))^{-r'/r}\,, \tag{3.19}$$

$$C_F \equiv C_F(r,k,|\Omega|,\|\mathbf{f}\|_{(1,r)^*}) := C_f(r,k)\,\|\mathbf{f}\|^{r'}_{(1,r)^*} + \frac{c_d|\Omega|}{2r}. \tag{3.20}$$

Z Youngovy nerovnosti (A.1) vidíme, že

$$\|\mathbf{f}\|_{(1,r)^*}\|\mathbf{v}^{N,\epsilon}\|_{1,r} \le C_f(r,k)\,\|\mathbf{f}\|^{r'}_{(1,r)^*} + C_v(r,k)\,\left\|\mathbf{v}^{N,\epsilon}\right\|^r_{1,r}. \tag{3.21}$$

Celkem tedy, vezmeme-li vektor $\boldsymbol{\alpha}^*_N$, pak je i $\sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{P}^i(\boldsymbol{\alpha}^*_N)\hat{\alpha}^i_{\mathbf{v}^\epsilon} = 0$, a z nerovností (3.17) a (3.21) dostáváme *Energetický odhad*:

$$C_v(r,k)\|\mathbf{v}^{N,\epsilon}\|^r_{1,r} + \frac{k}{2}\|\mathbf{v}^{N,\epsilon}\|^2_{2,\partial\Omega} + \epsilon^{1-r}\|\mathrm{div}\,\mathbf{v}^{N,\epsilon}\|^r_r \le C_F(r,k,|\Omega|,\|\mathbf{f}\|_{(1,r)^*}). \tag{3.22}$$

Užitím Alaogluovi věty A.13 vidíme, že existují vybrané podposloupnosti (značme vybrané posloupnosti stejně) splňující:

$$\begin{aligned}
\left\{\mathbf{v}^{N,\epsilon}\right\}_{N=1}^{\infty} &\rightharpoonup \mathbf{v}^\epsilon && (\text{slabě v } \mathbf{W}^{1,r}(\Omega))^d,\\
\left\{\mathrm{tr}\mathbf{v}^{N,\epsilon}\right\}_{N=1}^{\infty} &\rightharpoonup \mathrm{tr}\mathbf{v}^\epsilon && (\text{slabě v } \mathbf{L}^2(\partial\Omega)^d),\\
\left\{\mathrm{div}\,\mathbf{v}^{N,\epsilon}\right\}_{N=1}^{\infty} &\rightharpoonup \mathrm{div}\,\mathbf{v}^\epsilon && (\text{slabě v } \mathbf{L}^r(\Omega)),\\
\left\{\mathcal{S}(\mathbf{D}(\mathbf{v}^{N,\epsilon}))\right\}_{N=1}^{\infty} &\rightharpoonup \chi_1^\epsilon && (\text{slabě v } \mathbf{L}^{r'}(\Omega)^{d\times d}),\\
\left\{p^{N,\epsilon}\right\}_{N=1}^{\infty} &\rightharpoonup \chi_2^\epsilon && (\text{slabě v } \mathbf{L}^{r'}(\Omega)).
\end{aligned}$$

Zde by bylo vhodné poznamenat, že limitou $\mathrm{tr}\mathbf{v}^{N,\epsilon}$ je skutečně stopa funkce, která je limitou $\mathbf{v}^{N,\epsilon}$. Tento důkaz je založen na Greenově větě a definici slabé konvergence.

3.2.2 Řešitelnost aproximované úlohy

Pokusme se projít limitou $N\to\infty$ v každém integrálu. Integrál přes hranici $\partial\Omega$ a člen $\langle\mathbf{f},\boldsymbol{\varphi}\rangle$ zkonvergují bez problémů. Abychom ukázali, že pro $\forall\boldsymbol{\varphi}\in\mathbf{V}^{1,r}_{\mathbf{n}}(\Omega)^d$ platí:

$$\int_\Omega \chi_1^\epsilon : \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi})d\mathbf{x} - \int_\Omega \chi_2^\epsilon \mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi}\,d\mathbf{x} = \int_\Omega \mathcal{S}(\mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon)) : \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi})d\mathbf{x} - \int_\Omega p^\epsilon(\mathbf{v}^\epsilon)\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi}\,d\mathbf{x}, \tag{3.23}$$

užijme takzvaný Mintyho trik. Napišme si slabou formulaci pro $\mathbf{v}^{N,\epsilon}$. Víme, že pro každé $N\in\mathbb{N}$ existuje $\mathbf{v}^{N,\epsilon}\in\mathbf{V}^{1,r}_{\mathbf{n}}(\Omega)^d$ splňující $\forall i\le N$:

$$\int_\Omega \mathcal{S}(\mathbf{D}(\mathbf{v}^{N,\epsilon})) : \mathbf{D}(\boldsymbol{\omega}^i)d\mathbf{x} + k\int_{\partial\Omega}\mathbf{v}^{N,\epsilon}\cdot\boldsymbol{\omega}^i\,dS - \int_\Omega p^{N,\epsilon}\mathrm{div}\,\boldsymbol{\omega}^i\,d\mathbf{x} = \left\langle\mathbf{f},\boldsymbol{\omega}^i\right\rangle \tag{3.24}$$

a každá tato rovnice konverguje pro $N\to\infty$ k rovnici:

$$\int_\Omega \chi_1^\epsilon : \mathbf{D}(\boldsymbol{\omega}^i)d\mathbf{x} + k\int_{\partial\Omega}\mathbf{v}^\epsilon\cdot\boldsymbol{\omega}^i\,dS - \int_\Omega \chi_2^\epsilon\mathrm{div}\,\boldsymbol{\omega}^i\,d\mathbf{x} = \left\langle\mathbf{f},\boldsymbol{\omega}^i\right\rangle.$$

Což platí pro všechna $i \in \mathbb{N}$, tedy to platí i pro všechna $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}^{1,r}_{\mathbf{n}}(\Omega)^d$:

$$\int_{\Omega} \chi_1^{\epsilon} : \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi}) d\mathbf{x} + k \int_{\partial\Omega} \mathbf{v}^{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dS - \int_{\Omega} \chi_2^{\epsilon} \mathrm{div} \, \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x} = \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle . \tag{3.25}$$

Užijme dále značení pro všechna $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}^{1,r}_{\mathbf{n}}(\Omega)^d$, pro která má následující výraz smysl:

$$\hat{\mathcal{S}}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) := \int_{\Omega} \mathcal{S}(\mathbf{D}(\mathbf{u})) : \mathbf{D}(\mathbf{w}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p^{\epsilon}(\mathbf{u}) \, \mathrm{div} \, \mathbf{w} \, d\mathbf{x}.$$

Z nerovnosti (3.5) a lemmat A.2 a A.4 (platí pro každou $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}^{1,r}_{\mathbf{n}}(\Omega)^d$):

$$0 \leq \hat{\mathcal{S}}(\mathbf{v}^{N,\epsilon}, \mathbf{v}^{N,\epsilon}) - \hat{\mathcal{S}}(\mathbf{v}^{N,\epsilon}, \boldsymbol{\varphi}) - \hat{\mathcal{S}}(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{v}^{N,\epsilon} - \boldsymbol{\varphi}).$$

První člen přepišme z (3.24)

$$k \int_{\partial\Omega} |\mathbf{v}^{N,\epsilon}|^2 \, dS \leq \left\langle \mathbf{f}, \mathbf{v}^{N,\epsilon} \right\rangle - \hat{\mathcal{S}}(\mathbf{v}^{N,\epsilon}, \boldsymbol{\varphi}) - \hat{\mathcal{S}}(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{v}^{N,\epsilon} - \boldsymbol{\varphi})$$

a přejděme limitou bodově ($N \to \infty$) (protože norma je slabě zdola polospojitá)

$$0 \leq \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}^{\epsilon} \rangle - k \int_{\partial\Omega} |\mathbf{v}^{\epsilon}|^2 \, dS - \int_{\Omega} \chi_1^{\epsilon} : \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \chi_2^{\epsilon} \, \mathrm{div} \, \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x} - \hat{\mathcal{S}}(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{v}^{\epsilon} - \boldsymbol{\varphi}).$$

První dva členy přepišme zpět z (3.25) pro $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{v}^{\epsilon}$:

$$0 \leq \int_{\Omega} \chi_1^{\epsilon} : \mathbf{D}(\mathbf{v}^{\epsilon} - \boldsymbol{\varphi}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \chi_2^{\epsilon} \, \mathrm{div} \, (\mathbf{v}^{\epsilon} - \boldsymbol{\varphi}) d\mathbf{x} - \hat{\mathcal{S}}(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{v}^{\epsilon} - \boldsymbol{\varphi}).$$

Nyní použijme trik. Volme postupně $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{v}^{\epsilon} \pm \lambda \mathbf{w}$, kde $\mathbf{w} \in \mathbf{V}^{1,r}_{\mathbf{n}}(\Omega)^d$ je libovolná:

$$0 \leq \pm\lambda \int_{\Omega} \chi_1^{\epsilon} : \mathbf{D}(\mathbf{w}) d\mathbf{x} \mp \lambda \int_{\Omega} \chi_2^{\epsilon} \, \mathrm{div} \, \mathbf{w} \, d\mathbf{x} \mp \lambda \hat{\mathcal{S}}(\mathbf{v}^{\epsilon} \pm \lambda \mathbf{w}, \mathbf{w}).$$

Podělme nerovnost konstantou $\pm\lambda$ a projděme limitou $\lambda \to 0$:

$$0 = \int_{\Omega} \chi_1^{\epsilon} : \mathbf{D}(\mathbf{w}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \chi_2^{\epsilon} \mathrm{div} \, \mathbf{w} \, d\mathbf{x} - \hat{\mathcal{S}}(\mathbf{v}^{\epsilon}, \mathbf{w}),$$

tudíž integrální identita (3.23) platí a galerkinovské aproximace skutečně konvergují k úloze $(\mathcal{P}_k)^{\epsilon}$.

3.2.3 Stejnoměrné odhady pro řešení aproximované úlohy

V této části důkazu ukažme slabou konvergenci $(\mathbf{v}^{\epsilon}, p^{\epsilon}) \to (\mathbf{v}, p)$, ve smyslu limity posloupnosti $\epsilon \equiv \epsilon_n$, kde $\epsilon_n \to 0$ pro $n \to \infty$. Nejprve ukažme apriorní odhady pro $\mathbf{v}^{\epsilon}$ a p^{ϵ} (ve smyslu $p^{\epsilon} \equiv p^{N,\epsilon}(\mathbf{v}^{\epsilon})$). Vezměme úlohu $(\mathcal{P}_k)^{\epsilon}$ (3.10) a testujme funkcí $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{v}^{\epsilon}$:

$$\int_{\Omega} \mathcal{S}(\mathbf{D}(\mathbf{v}^{\epsilon})) : \mathbf{D}(\mathbf{v}^{\epsilon}) d\mathbf{x} + k \int_{\partial\Omega} |\mathbf{v}^{\epsilon}|^2 dS - \int_{\Omega} p^{\epsilon} \mathrm{div} \, \mathbf{v}^{\epsilon} d\mathbf{x} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}^{\epsilon} \rangle . \tag{3.26}$$

Nyní první a druhý integrál upravme jako v (3.12) a (3.13), do třetího dosaďme z (3.9) a čtvrtý upravme jako v (3.16):

$$C_v(r,k) \|\mathbf{v}^{\epsilon}\|_{1,r}^r + \frac{k}{2} \|\mathbf{v}^{\epsilon}\|_{2,\partial\Omega}^2 + \epsilon^{1-r} \|p^{\epsilon}\|_{r'}^{r'} \leq C_F(r, k, |\Omega|, \|\mathbf{f}\|_{(1,r)^*}). \tag{3.27}$$

Získáváme tedy apriorní odhad nezávislý na ϵ pro $\|\mathbf{v}^\epsilon\|_{1,r}$ a $\|\mathbf{v}^\epsilon\|_{2,\partial\Omega}$ a chybí již jen odhad pro $\|p^\epsilon\|_{r'}$. Otestujme $(\mathcal{P}_k)^\epsilon$ (3.10) funkcí $\boldsymbol{\varphi}^\epsilon$ splňující z Bovoského věty A.14 :

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}^\epsilon &= |p^\epsilon|^{r'-2}p^\epsilon - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |p^\epsilon|^{r'-2}p^\epsilon \, d\mathbf{x},\\ \boldsymbol{\varphi}^\epsilon &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega,\\ \|\boldsymbol{\varphi}^\epsilon\|_{1,r}^r &\le C_{reg}(\Omega,r)^r\|p^\epsilon\|_{r'}^{r'}.\end{aligned}$$

Dostáváme následující rovnost:

$$\|p^\epsilon\|_{r'}^{r'} = \int_\Omega \mathcal{S}(\mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon)):\mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi}^\epsilon)d\mathbf{x} + k\int_{\partial\Omega}\mathbf{v}^\epsilon\cdot\underbrace{\boldsymbol{\varphi}^\epsilon}_{=0}dS - \langle\mathbf{f},\boldsymbol{\varphi}^\epsilon\rangle = I_1 - I_3.$$

V následujícím textu užívejme konstanty:

$$\widetilde{C}_v(r,\Omega) := \left(c_h r(r-1)^{-1/r}3^{1/r}C_{reg}(\Omega,r)\right)^{r'}, \tag{3.28}$$

$$\widetilde{C}_f(r,\Omega) := r^{-r'}(r-1)3^{r'/r}C_{reg}(\Omega,r)^{-r'}. \tag{3.29}$$

Odhadněme I_1 a I_3 z nerovnosti (3.4) a z Hölderovy (A.4), Youngovy (A.1) a Schwarzovy (A.5) nerovnosti:

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_\Omega |\mathcal{S}(\mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon))||\mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi}^\epsilon)|d\mathbf{x} &(3.30)\\ &\le \widetilde{C}_v(r,\Omega)\|1+|\mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon)|\|_r^r + \frac{1}{3}C_{reg}(\Omega,r)^{-r}\|\mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi}^\epsilon)\|_r^r\\ &\le \widetilde{C}_v(r,\Omega)\left(1+\|\mathbf{v}^\epsilon\|_{1,r}^r\right) + \frac{1}{3}\|p^\epsilon\|_{r'}^{r'},\\ -I_3 &= -\langle\mathbf{f},\boldsymbol{\varphi}^\epsilon\rangle \le \widetilde{C}_f(r,\Omega)\|\mathbf{f}\|_{(1,r)^*}^{r'} + \frac{1}{3}C_{reg}(\Omega,r)^{-r}\|\boldsymbol{\varphi}^\epsilon\|_{1,r}^r &(3.31)\\ &\le \widetilde{C}_f(r,\Omega)\|\mathbf{f}\|_{(1,r)^*}^{r'} + \frac{1}{3}\|p^\epsilon\|_{r'}^{r'}.\end{aligned}$$

Tedy celkem z (3.30) a (3.31):

$$\|p^\epsilon\|_{r'}^{r'} \le 3\left(\widetilde{C}_v(r,\Omega)\left(1+\|\mathbf{v}^\epsilon\|_{1,r}^r\right) + \widetilde{C}_f(r,\Omega)\|\mathbf{f}\|_{(1,r)^*}^{r'}\right). \tag{3.32}$$

Z nerovností (3.27) a (3.32) a z Alaogluovy věty A.13 vidíme, že existuje dvojice $(\mathbf{v},p)$ jako slabá limita $(\mathbf{v}^\epsilon,p^\epsilon)\equiv(\mathbf{v}^{\epsilon_n},p^{\epsilon_n})$ ve smyslu vybraných podposloupností:

$$\begin{aligned}\{\mathbf{v}^{\epsilon_n}\}_{n=1}^\infty &\rightharpoonup \mathbf{v} \quad (\text{slabě v } \mathbf{W}^{1,r}(\Omega)^d),\\ \{\mathrm{tr}\mathbf{v}^{\epsilon_n}\}_{n=1}^\infty &\rightharpoonup \mathrm{tr}\mathbf{v} \ (\text{slabě v } \mathbf{L}^2(\partial\Omega)^d),\\ \{p^{\epsilon_n}\}_{n=1}^\infty &\rightharpoonup p \quad (\text{slabě v } \mathbf{L}^{r'}(\Omega)),\\ \{\mathcal{S}(\mathbf{v}^{\epsilon_n})\}_{n=1}^\infty &\rightharpoonup \chi_\nu \ (\text{slabě v } \mathbf{L}^{r'}(\Omega)^{d\times d}).\end{aligned}$$

3.2.4 Řešitelnost úlohy $(\mathcal{P}_k)$

Pokusme se tedy se slabou formulací $(\mathcal{P}_k)^\epsilon$ (3.10) přejít k $(\mathcal{P}_k)$ (3.7):

$$\int_\Omega \chi_\nu : \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi})\, d\mathbf{x} + k \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\varphi}\, dS = \int_\Omega p \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}\, d\mathbf{x} + \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle .$$

Pro důkaz, že $\chi_\nu \equiv \mathcal{S}(\mathbf{v})$ ukažme, že $\mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon) \to \mathbf{D}(\mathbf{v})$ silně v $\mathbf{L}^r(\Omega)^{d\times d}$. Z lemmatu A.2 a nerovnosti (3.5) vidíme:

$$c_d C \|\mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon) - \mathbf{D}(\mathbf{v})\|_r^r \leq c_d \mathcal{I}(\mathbf{D}(\mathbf{v}), \mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon)) \leq \int_\Omega (\mathcal{S}(\mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon)) - \mathcal{S}(\mathbf{D}(\mathbf{v}))) : (\mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon) - \mathbf{D}(\mathbf{v})) d\mathbf{x}.$$

Dále rozepišme pravou stranu

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\mathcal{S}(\mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon)) - \mathcal{S}(\mathbf{D}(\mathbf{v}))) : (\mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon) - \mathbf{D}(\mathbf{v})) d\mathbf{x} &= - \int_\Omega \mathcal{S}(\mathbf{D}(\mathbf{v})) : (\mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon) - \mathbf{D}(\mathbf{v})) d\mathbf{x} \\ + \langle \mathbf{f}, (\mathbf{v}^\epsilon - \mathbf{v}) \rangle + \int_\Omega p^\epsilon \operatorname{div}\, (\mathbf{v}^\epsilon - \mathbf{v}) d\mathbf{x} - k \int_{\partial\Omega} \mathbf{v}^\epsilon \cdot (\mathbf{v}^\epsilon - \mathbf{v}) dS \end{aligned} \tag{3.33}$$

s použitím (3.11), (3.27) a (3.1_2):

$$\begin{aligned} \int_\Omega p^\epsilon \operatorname{div} \mathbf{v}^\epsilon\, d\mathbf{x} &= -\epsilon \int_\Omega |p^\epsilon|^{r'} d\mathbf{x} \leq 0, \\ -k \int_{\partial\Omega} \mathbf{v}^\epsilon \cdot (\mathbf{v}^\epsilon - \mathbf{v}) dS &= -k \|\mathbf{v}^\epsilon - \mathbf{v}\|_{2,\partial\Omega}^2 - k \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v}^\epsilon - \mathbf{v}) dS. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Navíc první dva integrály v (3.33) a poslední v (3.34) konvergují k nule pro $\epsilon \to 0$, tedy

$$\limsup_{\epsilon \to 0} \left\{ c_d C \|\mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon) - \mathbf{D}(\mathbf{v})\|_r^r + k \|\mathbf{v}^\epsilon - \mathbf{v}\|_{2,\partial\Omega}^2 \right\} = 0.$$

3.2.5 Užití Vitaliho věty

Pokusme se splňit předpoklady věty A.17. První předpoklad jsme právě splnili, protože $\mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon) \to \mathbf{D}(\mathbf{v})$ s.v. v Ω, a tudíž i $\mathcal{S}(\mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon)) \to \mathcal{S}(\mathbf{D}(\mathbf{v}))$ s.v. v Ω. K druhému předpokladu vezměme $H \subset \Omega; |H| < \delta$, z nerovnosti (3.4) a lemmatu A.1:

$$\sup_\epsilon \int_H |\mathcal{S}(\mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon))| d\mathbf{x} \leq \frac{c_h C}{r-1} \sup_\epsilon \int_H (1 + |\mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon)|^{r-1}) d\mathbf{x}$$

a dále z věty o integrování součtu, z Hölderovy nerovnosti (A.4) a odhadu (3.27):

$$\int_H (1 + |\mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon)|^{r-1}) d\mathbf{x} \leq \delta + \delta^{1/r} \|\mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon)\|_r^{r-1} \leq \delta + \delta^{1/r} \left(\frac{C_F}{C_v(r,k)} \right)^{r-1/r} .$$

Aproximovaná úloha $(\mathcal{P}_k)^\epsilon$ (3.10) tedy skutečně konverguje k úloze $(\mathcal{P}_k)$ (3.7). $\square$

3.3 Jednoznačnost řešení

Věta 3.3. *Existuje-li slabé řešení* $(p, \mathbf{v})$ *úlohy* $(\mathcal{P}_k)$ *(viz definice 3.4), pak je určeno jednoznačně.*

Důkaz. Mějme dvě různá řešení $(p_1, \mathbf{v}_1)$, $(p_2, \mathbf{v}_2)$, $p_1 \neq p_2$, $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2$, odpovídající stejným datům $(\Omega, k, r, \nu, \mathbf{f}, c_d, c_h)$. Otestujme je funkcí $\boldsymbol{\varphi} := \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$, odečtěme jejich slabé formulace a z (3.5) a lemmatu A.2 vidíme:

$$
\begin{aligned}
0 &\leq c_d C \|\mathbf{D}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)\|_r^r + k\|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1\|_{2,\partial\Omega}^2 \leq c_d \mathcal{I}(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) + k\|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1\|_{2,\partial\Omega}^2 \\
&\leq \int_\Omega \{\mathcal{S}(\mathbf{D}(\mathbf{v}_2)) - \mathcal{S}(\mathbf{D}(\mathbf{v}_1))\}(\mathbf{D}(\mathbf{v}_2) - \mathbf{D}(\mathbf{v}_1)) d\mathbf{x} + k\|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1\|_{2,\partial\Omega}^2 = 0.
\end{aligned}
$$

Pro $c_d, k \geq 0$ je tedy nutně $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$ s.v. na $\partial\Omega$ a $\mathbf{D}(\mathbf{v}_2) = \mathbf{D}(\mathbf{v}_1)$ s.v. v Ω a tudíž z Kornovy nerovnosti (A.7) je i $\nabla\mathbf{v}_2 = \nabla\mathbf{v}_1$ s.v. v Ω, tedy $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ je konstantní. Protože již $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$ s.v. na $\partial\Omega$, tak $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$ s.v. v Ω. $\square$

4 Úloha $(\mathcal{Q}_k)$

V této kapitole si formulujme problém, na němž demonstrujeme užití základních technik teorie monotonních operátorů. Důkaz existence aproximovaných řešení povedeme opět galerkinovskou metodou. Pro následnou konvergenci aproximované úlohy k námi hledanému řešení úlohy $(\mathcal{Q}_k)$ však budeme místo Mintyho triku užívat integrální odhady. Podkladem pro důkaz existence řešení této úlohy je práce Franta, Málek, Rajagopal [11] z roku 2005 upravená pro Stokesův systém a rozšířená pro Navierovy okrajové podmínky.

4.1 Formulace úlohy

Řešme ve vhodné oblasti Ω (viz definice 1.1), zobecněný Stokesův systém s Navierovými okrajovými podmínkami ($k > 0$):

$$(\mathcal{Q}_k) \qquad \left.\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{T} &= \mathbf{f} \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0 \end{aligned}\right\} \ \text{v } \Omega \quad , \quad \int_\Omega p\, d\mathbf{x} = 0 \quad \text{a} \quad \left.\begin{aligned} k\mathbf{v}_{\boldsymbol{\tau}} + (\mathbf{Tn})_{\boldsymbol{\tau}} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} &= 0 \end{aligned}\right\} \ \text{na } \partial\Omega,$$

pro vhodný tenzor $\mathbf{T}$ splňující předpoklady definice 4.2.

Definice 4.1. Nechť $\nu \in C^1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Pro všechny funkce

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{x}), \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) : \Omega \to \mathbb{R}^{d\times d}_{sym} \quad \text{a} \quad p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}) : \Omega \to \mathbb{R},$$

pro které mají následující výrazy smysl, definujme:

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{I}}(\mathbf{A}_1(\mathbf{x}), \mathbf{A}_2(\mathbf{x})) &:= |\mathbf{A}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{A}_1(\mathbf{x})|^2 \int_0^1 (1 + |\mathbf{A}_1(\mathbf{x}) + s(\mathbf{A}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{A}_1(\mathbf{x}))|^2)^{\frac{r-2}{2}} ds, \\
\mathcal{S}_2(p_1(\mathbf{x}), \mathbf{A}_1(\mathbf{x})) &:= \nu(p_1(\mathbf{x}), |\mathbf{A}_1(\mathbf{x})|^2)\mathbf{A}_1(\mathbf{x}), \\
\mathcal{J}_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}_s(\mathbf{x}), p_s(\mathbf{x})) &:= \int_0^1 \frac{\partial \mathcal{S}_2(p_s(\mathbf{x}), \mathbf{A}_s(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{A}_s(\mathbf{x})} : (\mathbf{A}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{A}_1(\mathbf{x})) \otimes (\mathbf{A}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{A}_1(\mathbf{x})) ds, \\
\mathcal{J}_p(\mathbf{A}_s(\mathbf{x}), p_s(\mathbf{x})) &:= \int_0^1 \left| \frac{\partial \mathcal{S}_2(p_s(\mathbf{x}), \mathbf{A}_s(\mathbf{x}))}{\partial p_s(\mathbf{x})} \right| |\mathbf{A}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{A}_1(\mathbf{x})||p_2(\mathbf{x}) - p_1(\mathbf{x})| ds,
\end{aligned}$$

kde funkcemi $\mathbf{A}_s$ a p_s myslíme: $f_s(\mathbf{x}) := f_1(\mathbf{x}) + s(f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x}))$.

Definice 4.2. Vhodným tenzorem $\mathbf{T}$ myslíme každý tenzor, který lze vyjádřit ve tvaru:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathcal{S}_2(p, \mathbf{D}(\mathbf{v})),$$

kde (ν z definice $\mathcal{S}_2$) $\nu \in C^1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ a platí:

(B 1) Pro dané $r \in (1, 2)$ existují kladné konstanty c_d a c_h takové, že pro všechny symetrické matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{d\times d}_{sym}$ a všechna $p \in \mathbb{R}$ platí:

$$c_d((1 + |\mathbf{B}|^2)^{\frac{r-2}{2}} |\mathbf{A}|^2 \le \frac{\partial \mathcal{S}_2(p, \mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}} : (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \le c_h(1 + |\mathbf{B}|^2)^{\frac{r-2}{2}} |\mathbf{A}|^2.$$

(B 2) Pro dané $r \in (1,2)$ existuje kladná konstanta μ_0 taková, že pro všechny symetrické matice $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{d\times d}_{sym}$ a všechna $p \in \mathbb{R}$ platí:

$$\left|\frac{\partial \nu(p, |\mathbf{B}|^2)}{\partial p}\right| |\mathbf{B}| \le \mu_0 (1 + |\mathbf{B}|^2)^{\frac{r-2}{4}} \le \mu_0.$$

Důsledek 4.1. *Funkce ν z definice 4.2 splňuje pro všechny $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{d\times d}_{sym}$ symetrické matice, všechna $r \in (1,2)$ a všechna $p, q \in \mathbb{R}$:*

$$A. \quad \mathcal{S}_2(p, \mathbf{B}) : \mathbf{B} \ge \frac{c_d}{2r}(|\mathbf{B}|^r - 1) \tag{4.1}$$

$$B. \quad |\mathcal{S}_2(p, \mathbf{B})| \le \frac{c_h}{r-1}(1 + |\mathbf{B}|)^{r-1} \tag{4.2}$$

$$C. \quad \int_\Omega \{\mathcal{S}_2(p, \mathbf{B}) - \mathcal{S}_2(q, \mathbf{A})\} : (\mathbf{B} - \mathbf{A}) d\mathbf{x} + \frac{\mu_0^2}{2c_d}\|p - q\|_2^2 \ge \frac{c_d}{2}\int_\Omega \widehat{\mathcal{I}}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) d\mathbf{x} \tag{4.3}$$

$$D. \quad |\mathcal{S}_2(p, \mathbf{B}) - \mathcal{S}_2(q, \mathbf{A})| \le \mu_0 |p - q| + c_h \widehat{\mathcal{I}}(\mathbf{A}, \mathbf{B})^{\frac{1}{2}} \tag{4.4}$$

Důkaz. Pro nerovnost (4.1) a (4.2) lze důkaz najít například v knize [34] jako lemma 5.1.19 (strana 198). Důkazy nerovností (4.3) a (4.4) jsou v článku [6] (strana 56) jako (1.18) a (1.19). □

Důsledek 4.2. *Pro všechny $\mathbf{A}_1(\mathbf{x}), \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) : \Omega \to \mathbb{R}^{d\times d}_{sym}$, a všechny $p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}) : \Omega \to \mathbb{R}$, pro které mají jednotlivé integrály smysl, platí:*

$$\int_\Omega \mathcal{J}_p(p_s, \mathbf{A}_s) d\mathbf{x} \le \mu_0 \|p_2(\mathbf{x}) - p_1(\mathbf{x})\|_2 \left(\int_\Omega \widehat{\mathcal{I}}(\mathbf{A}_1(\mathbf{x}), \mathbf{A}_2(\mathbf{x})) d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\int_\Omega \mathcal{J}_{\mathbf{A}}(p_s, \mathbf{A}_s) d\mathbf{x} \ge c_d \int_\Omega \widehat{\mathcal{I}}(\mathbf{A}_1(\mathbf{x}), \mathbf{A}_2(\mathbf{x})) d\mathbf{x}.$$

Důkaz. Vyplývá přímo z definice $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$, $\widehat{\mathcal{I}}$ a definice 4.2. □

Příklad 4.1. *Uveďme následujících pár příkladů funkcí ν splňujících výše stanovené podmínky. Pro každé $r \in (1,2)$ a konstantu $A \in (0,1]$:*

$$\textit{pro } i = 1,2: \quad \nu_i(p, |\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2) := (A + \gamma_i(p) + |\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2)^{\frac{r-2}{2}},$$

za funkci $\gamma(p)_i$ berme ($q \ge 0$):

$$\gamma_1(p) = (1 + \alpha^2 p^2)^{-q/2},$$
$$\gamma_2(p) = \begin{cases} (1 + \exp(\alpha p))^{-q} & \textit{pro } p > 0, \\ 1 & \textit{pro } p \le 0. \end{cases}$$

Pro tyto funkce ν jsou podmínky z definice 4.2 splněny pro konstanty $c_d = 2^{\frac{r-2}{2}}(r-1)$, $c_h = A^{\frac{r-2}{2}}$ a pro $\mu_0 = -\frac{r-2}{2}(\alpha q)$ (více viz [37] a [4]).

Poznámka 4.1. Z důvodů konečnosti integrálu přes hranici v rovnici (4.5) budeme užívat prostory $\mathbf{V}^{1,r}_{\mathbf{n}}(\Omega)^d$ a $\mathbf{V}^{1,r}_{\mathbf{n},\mathrm{div}}(\Omega)^d$, zavedené v definici 3.3.

Definice 4.3. Mějme $\Omega \in C^{0,1}(\mathbb{R}^d)$. Dvojici $(\mathbf{v},p)$, kde $\mathbf{v} \in \mathbf{V}^{1,r}_{\mathbf{n},\mathrm{div}}(\Omega)^d$ a $p \in \mathbf{L}^{r'}(\Omega)/\mathbb{R}$, splňující pro dané funkce ν (Definice 4.2), $\mathbf{f} \in \left(\mathbf{W}^{1,r}_{\mathbf{n}}(\Omega)^d\right)^*$ a každou $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}^{1,r}_{\mathbf{n}}(\Omega)^d$:

$$\int_\Omega \mathcal{S}_2(p, \mathbf{D}(\mathbf{v})) : \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi}) d\mathbf{x} + k \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dS = \int_\Omega p \,\mathrm{div}\, \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x} + \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle \,, \tag{4.5}$$

Nejprve diskutujme smysluplnost definice 4.3. Ukažme, že všechny integrály jsou konečné. Postup je téměř identický postupu za definicí 3.4, proto již pouze stručně. První integrál odhadněme z nerovnosti (4.2), lemmatu A.1, věty o integrování součtu a Hölderovy nerovnosti (A.4):

$$\int_\Omega \mathcal{S}_2(p, \mathbf{D}(\mathbf{v})) : \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi}) d\mathbf{x} \le \frac{c_h C}{r-1} \|\boldsymbol{\varphi}\|_1 + \|\mathbf{D}(\mathbf{v})\|_r^{r'} \|\boldsymbol{\varphi}\|_r^r.$$

Protože $\mathbf{L}^r(\Omega)^d \hookrightarrow \mathbf{L}^1(\Omega)^d$ a pro každou $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}^{1,r}_{\mathbf{n}}(\Omega)^d$, je zároveň $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{L}^r(\Omega)^d$, a také pro každou $\mathbf{v} \in \mathbf{V}^{1,r}_{\mathbf{n},\mathrm{div}}(\Omega)^d$ je $\mathbf{D}(\mathbf{v}) \in \mathbf{L}^r(\Omega)^{d\times d}$, je odhad konečný. Druhý integrál je konečný z definice prostorů $\mathbf{V}^{1,r}_{\mathbf{n}}(\Omega)^d$ a $\mathbf{V}^{1,r}_{\mathbf{n},\mathrm{div}}(\Omega)^d$ a Hölderovy nerovnosti (A.4). Třetí je konečný z Hölderovy nerovnosti (A.4), a protože pro každé $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}^{1,r}_{\mathbf{n}}(\Omega)^d$, je div $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{L}^r(\Omega)$. Poslední člen je konečný z definice duality a ze Schwarzovy nerovnosti (A.5).

4.2 Existence řešení soustavy

Věta 4.3. *Mějme vhodnou oblast Ω (viz definice 1.1). Pro všechna $r \in (1, 2)$, všechna ν splňující předpoklady (Definice 4.2) a všechna $\mathbf{f} \in \left(\mathbf{W}^{1,r}_{\mathbf{n}}(\Omega)^d\right)^*$, existuje slabé řešení $(\mathcal{Q}_k)$ (Definice 4.3), jestliže:*

$$\mu_0 < \frac{c_d}{(c_d + c_h) C_{reg}(\Omega, 2)}.$$

Důkaz. Důkaz budeme členit podobně jako v kapitole 3.2. Nejprve metodou galerkinovských aproximací ukažme, že existuje řešení úlohy $(\mathcal{Q}_k)^\epsilon$ (Viz kapitoly 4.2.1-4.2.3). Narozdíl od důkazu věty 3.2 zde nelze z definice aproximované úlohy odstranit ‚p'jako proměnnou, tedy s ní musíme od začátku nakládat podobně jako s ‚$\mathbf{v}$'. Dále ukažme, že limita galerkinovských aproximací (kapitola 4.2.3) skutečně řeší aproximovanou úlohu. Zde volme ale odlišný přístup než v předchozí kapitole, vhodnější pro tento případ. Dále v kapitolách 4.2.4- 4.2.5 ukažme, že řešení aproximovaných úloh má limitu a ta řeší právě naší úlohu $(\mathcal{Q}_k)$.

4.2.1 Galerkinovské aproximace úlohy $(\mathcal{Q}_k)^\epsilon$

Pro libovolné pevné $\epsilon \in \mathbb{R}_+(> 0)$ zaveďme k $(\mathcal{Q}_k)$ (4.5) aproximovanou úlohu která splňuje pro každou $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}^{1,r}_{\mathbf{n}}(\Omega)^d$:

$$(\mathcal{Q}_k)^\epsilon \quad \int_\Omega \mathcal{S}_2(p^\epsilon, \mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon)) : \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi}) d\mathbf{x} + k \int_{\partial\Omega} \mathbf{v}^\epsilon \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dS = \int_\Omega p^\epsilon \mathrm{div}\, \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x} + \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle \,. \tag{4.6}$$

Navíc $\frac{\partial p^\epsilon}{\partial \mathbf{n}} = 0$ na $\partial\Omega$, $\int_\Omega p^\epsilon d\mathbf{x} = 0$ a pro všechna $\psi \in \mathbf{W}^{1,2}(\Omega)$:

$$\int_\Omega (\mathrm{div}\, \mathbf{v}^\epsilon) \psi d\mathbf{x} = -\epsilon \int_\Omega \nabla p^\epsilon \cdot \nabla \psi \, d\mathbf{x}. \tag{4.7}$$

Jestliže $p^\epsilon \in \mathbf{L}^{r'}(\Omega)$ a $\nabla p^\epsilon \in \mathbf{L}^2(\Omega)^d$, budou tyto integrály existovat a budou konečné.

Pro zavedení Galerkinovské aproximace $\mathbf{v}^\epsilon$ užijme bázi $\{\boldsymbol{\omega}^i\}_{i=1}^\infty$ prostoru $\mathbf{V}_\mathbf{n}^{1,r}(\Omega)^d$. Ta nám ovšem nebude stačit. Pro aproximaci podmínky (4.7) užijme tedy bázi $\{\pi^i\}_{i=1}^\infty$ prostoru $\mathbf{W}^{1,2}(\Omega)$. Zaveďme pro každé $N \in \mathbb{N}$ funkce $p^{N,\epsilon}$ a $\mathbf{v}^{N,\epsilon}$, aproximace řešení slabé formulace $(\mathcal{Q}_k)$(4.5):

$$\mathbf{v}^{N,\epsilon} := \sum_{i=1}^N \alpha^i \boldsymbol{\omega}^i \quad , \quad p^{N,\epsilon} := \sum_{i=1}^N \beta^i \pi^i.$$

Při dokazování existence řešení každé galerkinovské aproximace volme obdobný postup jako v kapitole 3.2.1. Tentokrát ovšem pro každé $N \in \mathbb{N}$ hledejme dva vektory

$$\boldsymbol{\alpha}_N \in \mathbb{R}^N : \quad \boldsymbol{\alpha}_N = (\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^N), \quad \boldsymbol{\beta}_N \in \mathbb{R}^N : \quad \boldsymbol{\beta}_N = (\beta^1, \beta^2, \dots, \beta^N)$$

řešící soustavu eliptických rovnic:

$$\forall i \in (1, 2, \dots, N) : \mathbf{P}^i(\boldsymbol{\alpha}_N, \boldsymbol{\beta}_N) = 0 \quad \wedge \quad \mathbf{Q}^i(\boldsymbol{\alpha}_N, \boldsymbol{\beta}_N) = 0, \tag{4.8}$$

$\mathbf{P}^i(\boldsymbol{\alpha}_N, \boldsymbol{\beta}_N)$ a $\mathbf{Q}^i(\boldsymbol{\alpha}_N, \boldsymbol{\beta}_N)$, jsou Galerkinovské aproximace (4.6) a (4.7) definovány jako:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^i(\boldsymbol{\alpha}_N, \boldsymbol{\beta}_N) &:= \int_\Omega \mathcal{S}_2(p^{N,\epsilon}, \mathbf{D}(\mathbf{v}^{N,\epsilon})) : \mathbf{D}(\boldsymbol{\omega}^i) d\mathbf{x} + k \int_{\partial\Omega} \mathbf{v}^{N,\epsilon} \cdot \boldsymbol{\omega}^i dS \\
&\quad - \int_\Omega p^{N,\epsilon} \text{div}\, \boldsymbol{\omega}^i d\mathbf{x} - \left\langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\omega}^i \right\rangle, \\
\mathbf{Q}^i(\boldsymbol{\alpha}_N, \boldsymbol{\beta}_N) &:= \int_\Omega (\text{div}\, \mathbf{v}^{N,\epsilon}) \pi^i d\mathbf{x} + \epsilon \int_\Omega \nabla p^{N,\epsilon} \cdot \nabla \pi^i \, dx.
\end{aligned}$$

Nyní ukažme, že pro každé $N \in \mathbb{N}$ existuje řešení soustavy (4.8). Postupujme podle lemmatu A.7:

$$\begin{aligned}
0 = \sum_{i=1}^N \mathbf{P}^i(\boldsymbol{\alpha}_N, \boldsymbol{\beta}_N) \alpha^i &= \int_\Omega \mathcal{S}_2(p^{N,\epsilon}, \mathbf{D}(\mathbf{v}^{N,\epsilon})) : \mathbf{D}(\mathbf{v}^{N,\epsilon}) d\mathbf{x} + k \|\mathbf{v}^{N,\epsilon}\|_{2,\partial\Omega}^2 \qquad (4.9) \\
&\quad - \int_\Omega p^{N,\epsilon} \text{div}\, \mathbf{v}^{N,\epsilon} d\mathbf{x} - \left\langle \mathbf{f}, \mathbf{v}^{N,\epsilon} \right\rangle \quad \text{a}
\end{aligned}$$

$$0 = \sum_{i=1}^N \mathbf{Q}^i(\boldsymbol{\alpha}_N, \boldsymbol{\beta}_N) \beta^i = \int_\Omega p^{N,\epsilon} \text{div}\, \mathbf{v}^{N,\epsilon} d\mathbf{x} + \epsilon \int_\Omega |\nabla p^{N,\epsilon}|^2 d\mathbf{x}. \tag{4.10}$$

Z nerovnosti (4.1), definice $\mathcal{S}_2$ (definice 4.1) a z Kornovy nerovnosti (A.7) získáváme:

$$\int_\Omega \mathcal{S}_2(p^{N,\epsilon}, \mathbf{D}(\mathbf{v}^{N,\epsilon})) : \mathbf{D}(\mathbf{v}^{N,\epsilon}) d\mathbf{x} + k \|\mathbf{v}^{N,\epsilon}\|_{2,\partial\Omega}^2 \geq C_{(K,1)} \min(\frac{c_d}{2r}, k) \|\mathbf{v}^{N,\epsilon}\|_{1,r}^r - \frac{c_d |\Omega|}{2r}. \tag{4.11}$$

Tedy z (4.9) - (4.11) a Schwarzovy nerovnosti (A.5):

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{P}^i(\boldsymbol{\alpha}_N, \boldsymbol{\beta}_N) \alpha^i \geq C_{(K,1)} \min(\frac{c_d}{2r}, k) \|\mathbf{v}^{N,\epsilon}\|_{1,r}^r + \epsilon \|\nabla p^{N,\epsilon}\|_2^2 - \|\mathbf{f}\|_{(1,r)^*} \|\mathbf{v}^{N,\epsilon}\|_{1,r} - \frac{c_d |\Omega|}{2r}.$$

Tentýž odhad platí i pro $\sum_{i=1}^N \mathbf{Q}^i(\boldsymbol{\alpha}_N, \boldsymbol{\beta}_N)\beta^i$. Pro rostoucí $\|\mathbf{v}^{N,\epsilon}\|_{1,r}$ vidíme, že kladné členy rostou s r-tou nebo s druhou mocninou, kdežto záporné jsou konstanty, nebo rostou s první mocninou. Bude tedy existovat číslo ρ, takové, že:

$$
\begin{aligned}
&\forall \mathbf{v}^{N,\epsilon} \in \{\mathbf{u} \in \mathbf{V}^{1,r}_{\mathbf{n}}(\Omega)^d \ : \ \forall i > N \ ; \ (\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}^i) = 0 \ ; \ \|\mathbf{v}^{N,\epsilon}\|_{1,r} = \rho\} \\
\text{a} \quad &\forall \nabla p^{N,\epsilon} \in \{\nabla p \in \mathbf{L}^2(\Omega)^d \ : \ \forall i > N \ ; \ (\nabla p, \pi^i) = 0 \ ; \ \|\nabla p^{N,\epsilon}\|_2 = \rho\} \\
&\text{splňují příslušné koeficienty} \sum_{i=1}^N \mathbf{P}^i(\boldsymbol{\alpha}_N, \boldsymbol{\beta}_N)\alpha^i \geq 0 \quad \text{a} \quad \sum_{i=1}^N \mathbf{Q}^i(\boldsymbol{\alpha}_N, \boldsymbol{\beta}_N)\beta^i \geq 0.
\end{aligned}
$$

Tedy budou podle lemmatu A.7 (pro každé $N \in \mathbb{N}$) existovat $\boldsymbol{\alpha}^*_N = \{\hat{\alpha}^1, \hat{\alpha}^2, \ldots, \hat{\alpha}^N\}$ a $\boldsymbol{\beta}^*_N = \{\hat{\beta}^1, \hat{\beta}^2, \ldots, \hat{\beta}^N\}$ (a tedy i $\mathbf{v}^{N,\epsilon}$ a $p^{N,\epsilon}$) splňující:

$$
0 = \sum_{i=1}^N \mathbf{P}^i(\boldsymbol{\alpha}^*_N, \boldsymbol{\beta}^*_N)\hat{\alpha}^i \quad \wedge \quad 0 = \sum_{i=1}^N \mathbf{Q}^i(\boldsymbol{\alpha}_N, \boldsymbol{\beta}_N)\hat{\beta}^i.
$$

4.2.2 Energetický odhad aproximované úlohy

Dále ukažme, že jsou normy $\mathbf{v}^{N,\epsilon}$ a $p^{N,\epsilon}$ omezené a tudíž z Alaogluovy věty A.13 budou existovat slabé limity. Z Poincarého nerovnosti (A.6) vidíme, že:

$$
C_{poi}\|p^{N,\epsilon}\|^2_{1,2} \leq \left| \int_\Omega p^{N,\epsilon} d\mathbf{x} \right|^2 + \int_\Omega |\nabla p^{N,\epsilon}|^2 d\mathbf{x} = \|\nabla p^{N,\epsilon}\|^2_2. \tag{4.12}
$$

Vezmeme-li tedy koeficienty, pro které je $\sum_{i=1}^N \mathbf{P}^i(\boldsymbol{\omega}^i)\alpha^i = 0$ a $\sum_{i=1}^N \mathbf{P}^i(\boldsymbol{\omega}^i)\alpha^i_{\mathbf{v}^\epsilon} = 0$, aplikujeme odhad (4.11), (4.12) a Schwarzovu nerovnost (A.5), dostáváme energetický odhad ($C_v(r,k)$ a C_F viz (konstanty 3.18) a (3.20)):

$$
C_v(r,k) \left\| \mathbf{v}^{N,\epsilon} \right\|^r_{1,r} + \frac{k}{2}\|\mathbf{v}^{N,\epsilon}\|^2_{2,\partial\Omega} + \epsilon C_{poi}\|p^{N,\epsilon}\|^2_{1,2} \leq C_F. \tag{4.13}
$$

Navíc z (4.2) vidíme že

$$
\|\mathcal{S}_2(p^{N,\epsilon}, \mathbf{D}(\mathbf{v}^{N,\epsilon}))\|^r_{1,r} \leq \frac{c_h}{r-1}\left(1 + \left(\frac{C_F}{C_v(r,k)}\right)^{\frac{1}{r}}\right)^{r-1}.
$$

Z Alaogluovy věty A.13 tedy existují vybrané podposloupnosti (značme je stejně) splňující:

$$
\begin{aligned}
\left\{\mathbf{v}^{N,\epsilon}\right\}_{N=1}^\infty &\rightharpoonup \mathbf{v}^\epsilon \quad && (\text{slabě v } \mathbf{W}^{1,r}(\Omega)^d), \\
\left\{\mathrm{tr}\mathbf{v}^{N,\epsilon}\right\}_{N=1}^\infty &\rightharpoonup \mathrm{tr}\mathbf{v}^\epsilon \quad && (\text{slabě v } \mathbf{L}^2(\partial\Omega)^d), \\
\left\{p^{N,\epsilon}\right\}_{N=1}^\infty &\rightharpoonup p^\epsilon \quad && (\text{slabě v } \mathbf{W}^{1,2}(\Omega)) \quad \text{a} \\
\left\{\mathcal{S}_2(p^{N,\epsilon}, \mathbf{D}(\mathbf{v}^{N,\epsilon}))\right\}_{N=1}^\infty &\rightharpoonup \chi^\epsilon_\nu \quad && (\text{slabě v } \mathbf{L}^{r'}(\Omega)^{d\times d}).
\end{aligned}
$$

4.2.3 Řešitelnost aproximované úlohy

Projdeme-li limitou $N \to \infty$ vidíme, že jediná otázka kterou je třeba zodpovědět (aby celá úloha konvergovala k $(\mathcal{Q}_k)^\epsilon$: (4.6) a (4.7)), je jestli platí pro každou $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}^{1,r}_{\mathbf{n}}(\Omega)^d$:

$$\int_\Omega \chi^\epsilon_\nu : \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi}) d\mathbf{x} = \int_\Omega \mathcal{S}_2(p^\epsilon, \mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon)) : \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi}) d\mathbf{x}. \tag{4.14}$$

Stačí ukázat (pro splnění podmínek věty A.17), že $p^{N,\epsilon}$ i $\mathbf{D}(\mathbf{v}^{N,\epsilon})$ konvergují silně. Z kompaktního vnoření $\mathbf{W}^{1,2}(\Omega)$ do $\mathbf{L}^2(\Omega)$ (věta A.2) rovnou plyne silná konvergence $p^{N,\epsilon}$:

$$\left\{p^{N,\epsilon}\right\}_{N=1}^{\infty} \to p^\epsilon \text{ (silně v } \mathbf{L}^2(\Omega)).$$

Vidíme, že přejdeme-li k limitě $N \to \infty$:

$$\int_\Omega \chi^\epsilon_\nu : \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi}) d\mathbf{x} + k \int_{\partial\Omega} \mathbf{v}^\epsilon \cdot \boldsymbol{\varphi}\, dS = \int_\Omega p^\epsilon \text{div}\, \boldsymbol{\varphi}\, d\mathbf{x} + \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}^\epsilon \rangle \quad \text{ pro } \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}^{1,r}_{\mathbf{n}}(\Omega)^d, \tag{4.15}$$

$$\int_\Omega \psi \text{div}\, \mathbf{v}^\epsilon d\mathbf{x} = -\epsilon \int_\Omega \nabla\psi \cdot \nabla p^\epsilon d\mathbf{x} \quad \text{ pro } \forall \psi \in \mathbf{W}^{1,2}(\Omega). \tag{4.16}$$

Z lemmatu A.2 a nerovnosti (4.3) vidíme, že existuje konstanta $C > 0$ taková, že:

$$\begin{aligned} C\|\mathbf{D}(\mathbf{v}^{N,\epsilon}) - \mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon)\|_r^r \le & \int_\Omega \mathcal{S}_2(p^{N,\epsilon}, \mathbf{v}^{N,\epsilon}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}^{N,\epsilon}) d\mathbf{x} - \int_\Omega \mathcal{S}_2(p^{N,\epsilon}, \mathbf{v}^{N,\epsilon}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon) d\mathbf{x} \\ & - \int_\Omega \mathcal{S}_2(p^\epsilon, \mathbf{v}^\epsilon) : (\mathbf{D}(\mathbf{v}^{N,\epsilon}) - \mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon)) d\mathbf{x} + \frac{\nu_0^2}{2c_d}\|p^{N,\epsilon} - p^\epsilon\|_2^2. \end{aligned} \tag{4.17}$$

První integrál přepišme z (4.15):

$$\int_\Omega \mathcal{S}_2(p^{N,\epsilon}, \mathbf{v}^{N,\epsilon}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}^{N,\epsilon}) d\mathbf{x} = \left\langle \mathbf{f}, \mathbf{v}^{N,\epsilon} \right\rangle - \epsilon\|\nabla p^{N,\epsilon}\|_2^2 - k\|\mathbf{v}^{N,\epsilon}\|_{2,\partial\Omega}^2$$

a z vlastností normy plyne:

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} \|\nabla p^{N,\epsilon}\|_2 \ge \liminf_{N\to\infty} \|\nabla p^{N,\epsilon}\|_2 \ge \|\nabla p^\epsilon\|_2, \\ \lim_{N\to\infty} \|\mathbf{v}^{N,\epsilon}\|_{2,\partial\Omega} \ge \liminf_{N\to\infty} \|\mathbf{v}^{N,\epsilon}\|_{2,\partial\Omega} \ge \|\mathbf{v}^\epsilon\|_{2,\partial\Omega}. \end{aligned}$$

Z (4.17) (neboť třetí integrál konverguje k nule, a $p^{N,\epsilon}$ konvergují silně) máme nerovnost:

$$C\|\mathbf{D}(\mathbf{v}^{N,\epsilon}) - \mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon)\|_r^r \le \mathcal{L}(N) \overset{N\to\infty}{\to} \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}^\epsilon \rangle - \int_\Omega \chi^\epsilon_\nu : \mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon) d\mathbf{x} - \epsilon\|\nabla p^\epsilon\|_2^2 - k\|\mathbf{v}^\epsilon\|_{2,\partial\Omega}^2.$$

(funkcí $\mathcal{L}(N)$ myslíme pravou stranu v nerovnosti (4.17)). Otestujeme-li (4.15) funkcí $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{v}^\epsilon$ a (4.16) funkcí $\psi = p^\epsilon$ a dosadíme je do sebe, vidíme, že

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{v}^\epsilon \rangle - \int_\Omega \chi^\epsilon_\nu : \mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon) d\mathbf{x} - \epsilon\|\nabla p^\epsilon\|_2^2 - k\|\mathbf{v}^\epsilon\|_{2,\partial\Omega}^2 = 0,$$

tedy $\|\mathbf{D}(\mathbf{v}^{N,\epsilon}) - \mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon)\|_r$ splňuje předpoklady věty A.17 a tudíž $\mathbf{D}(\mathbf{v}^{N,\epsilon})$ konverguje silně.

4.2.4 Stejnoměrné odhady pro řešení aproximované úlohy

Zbývá nám ukázat, že řešení $(\mathbf{v}^\epsilon, p^\epsilon)$ úlohy $(\mathcal{Q}_k)^\epsilon$ má limitu $(\mathbf{v}, p)$ a že tou limitou je právě řešení úlohy $(\mathcal{Q}_k)$. Pro ukázání existence limity postupujme jako v kapitole 4.2.2. Zaveďme značení $\epsilon_n \to 0$ pro $n \to \infty$. Pro rovnice (4.6) a (4.7) a testovací funkce $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{v}^\epsilon$ a $\psi = p^\epsilon$ dostáváme odhad:

$$C_v(r,k)\|\mathbf{v}^\epsilon\|_{1,r}^r + \frac{k}{2}\|\mathbf{v}^\epsilon\|_{2,\partial\Omega}^2 + \epsilon C_{poi}\|p^\epsilon\|_{1,2}^2 \le C_F, \tag{4.18}$$

což stačí pro slabou konvergenci $\mathbf{v}^\epsilon$. Ukažme i slabou konvergenci $p^\epsilon \rightharpoonup p$ (potřebujeme odhad normy p^ϵ nezávislý na ϵ pro splnění požadavků Alaogluovy věty A.13). Otestujme slabou formulaci pro $(\mathcal{Q}_k)^\epsilon$ (rovnice (4.6)) funkcí $\boldsymbol{\varphi}^\epsilon \in \mathbf{W}^{1,r}(\Omega)^d$, splňující z Bogovského věty A.14 pro $f = |p^\epsilon|^{r'-2}p^\epsilon - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |p^\epsilon|^{r'-2}p^\epsilon \, d\mathbf{x}$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}^\epsilon &= |p^\epsilon|^{r'-2}p^\epsilon - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |p^\epsilon|^{r'-2}p^\epsilon \, d\mathbf{x}, \\
\boldsymbol{\varphi}^\epsilon &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega, \\
\|\boldsymbol{\varphi}^\epsilon\|_{1,r}^r &\le C_{reg}(\Omega, r)^r \|p^\epsilon\|_{r'}^{r'}.
\end{aligned}$$

Dostáváme následující rovnost:

$$\|p^\epsilon\|_{r'}^{r'} = \int_\Omega \mathcal{S}_2(p^\epsilon, \mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon)) : \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi}^\epsilon) d\mathbf{x} + k\int_{\partial\Omega} \mathbf{v}^\epsilon \cdot \underbrace{\boldsymbol{\varphi}^\epsilon}_{=0} dS - \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}^\epsilon \rangle = I_1 - I_3. \tag{4.19}$$

Odhadněme I_1 a I_3 ze vztahu (4.2) a Hölderovy (A.4), Youngovy (A.1) a Schwarzovy (A.5) nerovnosti:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_\Omega |\nu(|\mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon)|^2)\mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon)||\mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi}^\epsilon)| d\mathbf{x} \qquad (4.20)\\
&\le \widetilde{C}_v(r,\Omega)\|1 + |\mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon)|\|_r^r + \frac{C_{reg}(\Omega,r)^r}{3}\|\mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi}^\epsilon)\|_r^r \\
&\le \widetilde{C}_v(r,\Omega)\left(1 + \|\mathbf{v}^\epsilon\|_{1,r}^r\right) + \frac{1}{3}\|p^\epsilon\|_{r'}^{r'}, \\
-I_3 &= -\langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}^\epsilon \rangle \le \widetilde{C}_f(r,\Omega)\|\mathbf{f}\|_{(1,r)^*}^{r'} + \frac{C_{reg}(\Omega,r)^r}{3}\|\boldsymbol{\varphi}^\epsilon\|_{1,r}^r \qquad (4.21)\\
&\le \widetilde{C}_f(r,\Omega)\|\mathbf{f}\|_{(1,r)^*}^{r'} + \frac{1}{3}\|p^\epsilon\|_{r'}^{r'}.
\end{aligned}$$

($\widetilde{C}_v(r,\Omega)$ a $\widetilde{C}_f(r,\Omega)\|\mathbf{f}\|_{(1,r)^*}^{r'}$ viz (3.28) a (3.29)) Tedy celkem z (4.19) - (4.21):

$$\|p^\epsilon\|_{r'}^{r'} \le 3\left(\widetilde{C}_v(r,\Omega)\left(1 + \|\mathbf{v}^\epsilon\|_{1,r}^r\right) + \widetilde{C}_f(r,\Omega)\|\mathbf{f}\|_{(1,r)^*}^{r'}\right) \tag{4.22}$$

a protože normu $\mathbf{v}^\epsilon$ již máme odhadnutou (4.18), vidíme že existuje konstanta $C_\epsilon > 0$:

$$\|p^\epsilon\|_{r'}^{r'} \le C_\epsilon. \tag{4.23}$$

Z nerovností (4.18) a (4.23) a z Alaogluovy věty A.13 tedy vidíme, že existuje dvojice $(\mathbf{v}, p)$ jako slabá limita $(\mathbf{v}^\epsilon, p^\epsilon) \equiv (\mathbf{v}^{\epsilon_n}, p^{\epsilon_n})$ ve smyslu vybraných podposloupností:

$$\begin{aligned}
\{\mathbf{v}^{\epsilon_n}\}_{n=1}^{\infty} &\rightharpoonup \mathbf{v} \quad \text{(slabě v } \mathbf{W}^{1,r}(\Omega)^d\text{)},\\
\{\mathrm{tr}\mathbf{v}^{\epsilon_n}\}_{n=1}^{\infty} &\rightharpoonup \mathrm{tr}\mathbf{v} \ \text{(slabě v } \mathbf{L}^2(\partial\Omega)^d\text{)},\\
\{p^{\epsilon_n}\}_{n=1}^{\infty} &\rightharpoonup p \quad \text{(slabě v } \mathbf{L}^{r'}(\Omega)\text{)} \quad \text{a}\\
\{\mathcal{S}_2(p^{\epsilon_n}, \mathbf{D}(\mathbf{v}^{\epsilon_n}))\}_{n=1}^{\infty} &\rightharpoonup \chi_\nu \ \text{(slabě v } \mathbf{L}^{r'}(\Omega)^{d\times d}\text{)}.
\end{aligned}$$

4.2.5 Řešitelnost úlohy $(\mathcal{Q}_k)$

Abychom ukázali, že pro $\epsilon \to 0$ konverguje

$$\int_\Omega \mathcal{S}_2(p^\epsilon, \mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon)) : \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi}) d\mathbf{x} \to \int_\Omega \mathcal{S}_2(p, \mathbf{D}(\mathbf{v})) : \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi}) d\mathbf{x}$$

pro každé $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}_{\mathbf{n}}^{1,r}(\Omega)^d$, potřebujeme ukázat, že $\mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon)$ a p^ϵ konvergují silně. Z lemmatu A.2 a (4.3) vidíme:

$$\begin{aligned}
\frac{c_d C}{2}\|\mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon) - \mathbf{D}(\mathbf{v})\|_r^r \le \frac{c_d}{2}\int_\Omega \widehat{\mathcal{I}}(\mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon), \mathbf{D}(\mathbf{v})) d\mathbf{x} &\le \frac{\mu_0^2}{2c_d}\|p^\epsilon - p\|_2^2 \qquad (4.24)\\
+ \int_\Omega \mathcal{S}_2(p^\epsilon, \mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon)) : \mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon - \mathbf{v}) d\mathbf{x} &- \int_\Omega \mathcal{S}_2(p, \mathbf{D}(\mathbf{v})) : \mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon - \mathbf{v}) d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Dále poslední integrál jde k nule pro $\epsilon \to 0$ (protože $\mathbf{v}^\epsilon \rightharpoonup \mathbf{v}$) a předposlední integrál rozepišme z rovností (4.6) pro $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{v}^\epsilon - \mathbf{v}$ a (4.7) pro $\psi = p^\epsilon$. Vidíme, že:

$$\int_\Omega \mathcal{S}_2(p^\epsilon, \mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon)) : \mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon - \mathbf{v}) d\mathbf{x} \le \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}^\epsilon - \mathbf{v}\rangle + k\int_{\partial\Omega} \mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}^\epsilon - \mathbf{v}) dS \overset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Pro odhad normy $\|p^\epsilon - p\|_2$ v (4.24) užijme definici normy:

$$\|p^\epsilon - p\|_2^2 = \int_\Omega p^\epsilon(p^\epsilon - p) d\mathbf{x} - \int_\Omega p(p^\epsilon - p) d\mathbf{x}, \tag{4.25}$$

kde druhý integrál jde k nule pro $\epsilon \to 0$, protože $p^\epsilon \rightharpoonup p$ v $\mathbf{L}^{r'}(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$. ($p^\epsilon$ je omezené v $\mathbf{L}^{r'}(\Omega)$ a tudíž podle Alaogluovy věty A.13 slabě konvergentní ve smyslu vybraných posloupností). Volme $\boldsymbol{\varphi}^\epsilon \in \mathbf{W}^{1,2}(\Omega)^d$, splňující:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}^\epsilon = p^\epsilon - p \quad , \quad \boldsymbol{\varphi}^\epsilon \rightharpoonup 0 \quad \text{pro } \epsilon \to 0 \quad \text{a}&\\
\|\boldsymbol{\varphi}^\epsilon\|_{1,2} \le C_{reg}(\Omega, 2)\|p^\epsilon - p\|_2,& \qquad (4.26)
\end{aligned}$$

která existuje podle Bogovského věty A.14 a testujme s ní $(\mathcal{Q}_k)^\epsilon$ (4.6):

$$\int_\Omega p^\epsilon(p^\epsilon - p) d\mathbf{x} = \int_\Omega \mathcal{S}_2(p^\epsilon, \mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon)) : \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi}^\epsilon) d\mathbf{x} + k\int_{\partial\Omega} \mathbf{v}^\epsilon \cdot \boldsymbol{\varphi}^\epsilon \, dS - \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}^\epsilon\rangle.$$

Platí, že $\boldsymbol{\varphi}^\epsilon \in \mathbf{L}^s(\partial\Omega)$ pro $s \in [1, 2^\#]$. Z definice indexů ale také platí že $s' \in [1, r^\#)$ a tudíž (viz vnoření (A.3)) $\mathbf{v}^\epsilon$ konvergují silně v $\mathbf{L}^{s'}(\partial\Omega)$. Poslední integrál tedy konverguje pro $\epsilon \to 0$ k nule. Navíc z volby $\boldsymbol{\varphi}^\epsilon$ konverguje k nule i $\langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}^\epsilon \rangle$. Dále si rozepišme (značme $\hat{\mathcal{S}}_2^\epsilon := \{\mathcal{S}_2(p^\epsilon, \mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon)) - \mathcal{S}_2(p, \mathbf{D}(\mathbf{v}))\}$):

$$\int_\Omega \mathcal{S}_2(p^\epsilon, \mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon)) : \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi}^\epsilon) d\mathbf{x} = \int_\Omega \hat{\mathcal{S}}_2^\epsilon : \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi}^\epsilon) d\mathbf{x} + \int_\Omega \mathcal{S}_2(p, \mathbf{D}(\mathbf{v})) : \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi}^\epsilon) d\mathbf{x},$$

kde z volby $\boldsymbol{\varphi}^\epsilon$ konverguje poslední integrál k nule a z (4.4), (4.26), Hölderovy (A.4) a Youngovy (A.1) nerovnosti:

$$\int_\Omega \hat{\mathcal{S}}_2^\epsilon : \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi}^\epsilon) d\mathbf{x} \leq C_{reg}(\Omega, 2) \left(\mu_0 \|p^\epsilon - p\|_2 + c_h \left(\int_\Omega \widehat{\mathcal{I}}(\mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon), \mathbf{D}(\mathbf{v})) d\mathbf{x} \right)^{1/2} \right) \|p^\epsilon - p\|_2.$$

Z (4.25) tedy platí, že (funkcí $\hat{f}(\epsilon)$ myslíme všechny členy od řádku (4.25) po tento odhad, konvergující pro $\epsilon \to 0$ k nule):

$$\|p^\epsilon - p\|_2^2 \leq \left(\frac{C_{reg}(\Omega, 2) c_h}{1 - C_{reg}(\Omega, 2)\mu_0} \right)^2 \int_\Omega \widehat{\mathcal{I}}(\mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon), \mathbf{D}(\mathbf{v})) d\mathbf{x} + \hat{f}(\epsilon). \tag{4.27}$$

Celkem tedy vidíme, že existuje funkce $f(\epsilon) \to 0$ pro $\epsilon \to 0$ (ve které souhrnně zahrňme všechny členy, o kterých jsme v předchozích odstavcích řekli, že konvergují k nule), že:

$$0 \leq \frac{1}{2} \left(c_d - \frac{\mu_0^2}{c_d} \left(\frac{C_{reg}(\Omega, 2) c_h}{1 - C_{reg}(\Omega, 2)\mu_0} \right)^2 \right) \int_\Omega \widehat{\mathcal{I}}(\mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon), \mathbf{D}(\mathbf{v})) d\mathbf{x} \leq f(\epsilon) \to 0.$$

První nerovnost platí pouze, je-li konstanta před integrálem kladná:

$${c_d}^2 > \mu_0^2 \left(\frac{C_{reg}(\Omega, 2) c_h}{1 - C_{reg}(\Omega, 2)\mu_0} \right)^2$$

což odpovídá podmínce ve znění věty. Z lemmatu A.2, definice $\widehat{\mathcal{I}}(\mathbf{v}^\epsilon, \mathbf{v})$ a z (4.25) tedy plynou silné konvergence $\mathbf{D}(\mathbf{v}^\epsilon)$ a p^ϵ a tudíž z Vitaliho věty A.17 je limitou $(\mathcal{Q}_k)^\epsilon$ skutečně úloha $(\mathcal{Q}_k)$ (užití věty A.17 je podrobně rozepsáno v kapitole 3.2.5). $\square$

4.3 Jednoznačnost řešení

Věta 4.4. *Slabé řešení (existuje-li) problému* $(\mathcal{Q}_k)$ *s daty* $(\Omega, r, k, \nu, \mathbf{f}, c_d, c_h, \mu_0)$ *je jednoznačné, pokud konstanty splňují následující nerovnost:*

$$\mu_0 < \frac{c_d}{(c_d + c_h) C_{reg}(\Omega, 2)}. \tag{4.28}$$

Důkaz. Mějme dvě různé dvojice řešení $(p_1, \mathbf{v}_1), (p_2, \mathbf{v}_2)$, $p_1 \neq p_2$ a $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2$, odpovídající obě stejným datům $(\Omega, r, k, \mathbf{f}, c_d, c_h, \mu_0)$, zvolme testovací funkci $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ a odečtěme slabé formulace (4.5) (pro zkrácení zápisu značme $\hat{\mathcal{S}}_2 := \mathcal{S}_2(p_2, \mathbf{D}(\mathbf{v}_2)) - \mathcal{S}_2(p_1, \mathbf{D}(\mathbf{v}_1))$):

$$\int_\Omega \hat{\mathcal{S}}_2 : \mathbf{D}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) d\mathbf{x} + k \underbrace{\int_{\partial\Omega} |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1|^2 dS}_{=\|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1\|^2_{2,\partial\Omega}} = \int_\Omega (p_2 - p_1) \underbrace{\operatorname{div} (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)}_{=0} d\mathbf{x} = 0. \tag{4.29}$$

Dále upravujme první integrál. Rozdíl funkcí $\hat{\mathcal{S}}_2$ rozepišme jako konečný integrál z derivace:

$$\int_0^1 \frac{\partial \mathcal{S}_2(p_s, \mathbf{D}(\mathbf{v}_s))}{\partial s} ds = \int_0^1 \frac{\partial \mathcal{S}_2(p_s, \mathbf{D}(\mathbf{v}_s))}{\partial p_s}(p_2 - p_1) + \frac{\partial \mathcal{S}_2(p_s, \mathbf{D}(\mathbf{v}_s))}{\partial \mathbf{D}(\mathbf{v}_s)} : \mathbf{D}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) ds$$

a jednotlivé integrály odhadněme:

$$\int_\Omega \hat{\mathcal{S}}_2 : \mathbf{D}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) d\mathbf{x} + \int_\Omega \mathcal{J}_p(p_s, \mathbf{D}(\mathbf{v}_s)) d\mathbf{x} \geq \int_\Omega \mathcal{J}_{\mathbf{D}}(p_s, \mathbf{D}(\mathbf{v}_s)) d\mathbf{x}. \tag{4.30}$$

Z rovnice (4.29), (4.30) a důsledku 4.2 máme tedy vztah

$$\begin{aligned} \textbf{(J 1)} \quad \mu_0 \|p_2 - p_1\|_2 & \left(\int_\Omega \widehat{\mathcal{I}}(\mathbf{D}(\mathbf{v}_1), \mathbf{D}(\mathbf{v}_2)) d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \geq c_d \int_\Omega \widehat{\mathcal{I}}(\mathbf{D}(\mathbf{v}_1), \mathbf{D}(\mathbf{v}_2)) d\mathbf{x} + k \|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1\|^2_{2,\partial\Omega}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Nyní, protože $\int_\Omega p_2 - p_1 \, d\mathbf{x} = 0$, volme testovací funkci $\mathbf{g}^p \in \mathbf{W}^{1,2}(\Omega)^d$ takovou, že:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{g}^p &= p_2 - p_1 \quad \text{ v } \Omega, \\ \mathbf{g}^p &= 0 \quad \text{ na } \partial\Omega \\ \|\mathbf{g}^p\|_{1,2} &\leq C_{reg}(\Omega, r) \|p_2 - p_1\|_2. \end{aligned}$$

Taková funkce existuje podle Bogovského věty A.14. Testujme s ní slabé formulace pro $(p_1, \mathbf{v}_1)$ a $(p_2, \mathbf{v}_2)$ (4.5) a odečtěme je od sebe:

$$\int_\Omega \hat{\mathcal{S}}_2 : \nabla \mathbf{g}^p \, d\mathbf{x} = \int_\Omega (p_2 - p_1) \operatorname{div} \mathbf{g}^p d\mathbf{x} = \|p_2 - p_1\|_2^2.$$

Nyní první člen odhadněme z (4.4) a z Hölderovy nerovnosti (A.4):

$$\left(\mu_0 \|p_2 - p_1\|_2 + c_h \left(\int_\Omega \widehat{\mathcal{I}}(\mathbf{D}(\mathbf{v}_2), \mathbf{D}(\mathbf{v}_1)) d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \|\nabla \mathbf{g}^p\|_2 \geq \|p_2 - p_1\|_2^2,$$

a z definice norem a věty A.14 odhadněme $\|\nabla \mathbf{g}^p\|_2 \leq C_{reg}(\Omega, 2)\|p_2 - p_1\|_2$.
Nyní $\|p_2 - p_1\|_2 > 0$. Kdyby tomu tak nebylo, tak by $p_2 = p_1$ skoro všude a z (4.31) by i $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$ s.v. Můžeme tedy podělit výrazem $\|p_2 - p_1\|_2$:

$$\textbf{(J 2)} \qquad \frac{c_h C_{reg}(\Omega, 2)}{(1 - \mu_0 C_{reg}(\Omega, 2))} \left(\int_\Omega \widehat{\mathcal{I}}(\mathbf{D}(\mathbf{v}_2), \mathbf{D}(\mathbf{v}_1)) \right)^{\frac{1}{2}} \geq \|p_2 - p_1\|_2. \tag{4.32}$$

Dosaďme (4.32) do (4.31) a z (4.28):

$$0 \geq k\|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1\|_{2,\partial\Omega}^2 + \left(c_d - \frac{\mu_0 c_h C_{reg}(\Omega, 2)}{(1 - \mu_0 C_{reg}(\Omega, 2))} \right) \int_\Omega \widehat{\mathcal{I}}(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) d\mathbf{x} \geq 0,$$

protože $\int_0^1 (1 + |\mathbf{D}(\mathbf{v}_s)|^2)^{\frac{r-2}{2}} ds > 0$. Vidíme, že za podmínky (4.28) tedy musí být nutně $\mathbf{D}(\mathbf{v}_2) = \mathbf{D}(\mathbf{v}_1)$ skoro všude, $\mathrm{tr}\mathbf{v}_2 = \mathrm{tr}\mathbf{v}_1$ s.v. a tudíž i $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$ s.v. Dále z (4.32) vidíme, že pro $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$ s.v. je i $p_2 = p_1$ s.v.

$\square$

5 Limitní úlohy pro $(\mathcal{Q}_k)$

V této kapitole se zabývejme otázkou, co se stane s řešeními úlohy $(\mathcal{Q}_k)$, jestliže s parametrem k půjdeme k nule, či k nekonečnu. Víme, co takováto limita znamená pro okrajové podmínky (viz 1.2). Jestli ale budou řešení limitních úloh $(\mathcal{Q}_0)$ a $(\mathcal{Q}_\infty)$ skutečně limitami řešení úlohy $(\mathcal{Q}_k)$ ukažme v následujících odstavcích.

5.1 Limitní přechod $k \to \infty$

Pro $k \to \infty$ se Navierova okrajová podmínka redukuje na

$$\mathbf{v} = 0 \quad \text{na} \quad \partial\Omega,$$

neboť jestliže existuje řešení $(\mathcal{Q}_k)$ $(\mathbf{v}^k, p^k)$, tak také platí, že existuje konstanta

$$C > 0: \quad \sup_k \left\{ k \int_{\partial\Omega} |\mathbf{v}^k|^2 dS \right\} \leq C.$$

(Což plyne z odhadu(5.1)) Jestliže má tedy slabé řešení úlohy $(\mathcal{Q}_k)$ limitu pro $k \to \infty$, mělo by tou limitou být slabé řešení $(p, \mathbf{v})$, $\mathbf{v} \in \mathbf{W}^{1,r}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)^d$, $p \in \mathbf{L}^{r'}(\Omega)$ splňující pro každé $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}^{1,r}_0(\Omega)^d$ homogenní Dirichletovu úlohu:

$$(\mathcal{Q}_\infty) \qquad \int_\Omega \mathcal{S}_2(p, \mathbf{D}(\mathbf{v})) : \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi}) d\mathbf{x} = \int_\Omega p \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x} + \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle .$$

Protože limitní úloha $(\mathcal{Q}_\infty)$ je testovaná funkcí z prostoru $\mathbf{W}^{1,r}_0(\Omega)^d$, stačí těmito funkcemi testovat i úlohu $(\mathcal{Q}_k)$.

Poznamenejme, že tato úloha je taktéž dobře definovaná. Existence všech integrálů vyplývá ze stejných argumentů, jako v definici 4.3.

Věta 5.1. *Posloupnost řešení $(\mathcal{Q}_k)$ $(\mathbf{v}^k, p^k)$ konverguje k $(\mathbf{v}, p)$ řešící $(\mathcal{Q}_\infty)$, jestliže:*

$$\mu_0 < \frac{c_d}{(c_d + c_h) C_{reg}(\Omega, 2)},$$

což je stejná podmínka na konstanty, jako pro existenci řešení (Věta 4.3).

Důkaz. Nejprve ukažme, že existují slabé limity $(\mathbf{v}, p)$ posloupnosti dvojic $(\mathbf{v}^k, p^k)$ a následně ukažme, že tyto limity řeší právě úlohu $(\mathcal{Q}_\infty)$.

5.1.1 Stejnoměrné odhady řešení úlohy

Testujme (4.5) testovací funkcí $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{v}^k$:

$$\int_\Omega \mathcal{S}_2(p^k, \mathbf{D}(\mathbf{v}^k)) : \mathbf{D}(\mathbf{v}^k) d\mathbf{x} + k \int_{\partial\Omega} |\mathbf{v}^k|^2 \, dS = \left\langle \mathbf{f}, \mathbf{v}^k \right\rangle .$$

Odhadujme obdobně jako pro nerovnost apriorního odhadu (4.13), První dva integrály odhadněme z definice $\mathcal{S}_2(p^k, \mathbf{D}(\mathbf{v}^k))$ (definice 4.1), z (3.3) a Kornovy nerovnosti (A.7):

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathcal{S}_2(p^k, \mathbf{D}(\mathbf{v}^k)) : \mathbf{D}(\mathbf{v}^k)\ d\mathbf{x} + k \int_{\partial\Omega} |\mathbf{v}^k|^2 dS \\ \geq C_{(K,1)} \min(\frac{c_d}{2r}, \frac{k}{2}) \|\mathbf{v}^k\|_{1,r}^r + \frac{k}{2} \|\mathbf{v}^k\|_{2,\partial\Omega}^2 - \frac{c_d|\Omega|}{2r}.\end{aligned}$$

Navíc odhadněme $\left\langle \mathbf{f}, \mathbf{v}^k \right\rangle$ z Schwarzovy nerovnosti (A.5), celkem tedy vidíme, že:

$$C_v(r,k)\|\mathbf{v}^k\|_{1,r}^r + \frac{k}{2}\|\mathbf{v}^k\|_{2,\partial\Omega}^2 + \epsilon C_{poi}\|p^k\|_{1,2}^2 \leq C_F, \tag{5.1}$$

kde konstanty $C_v(r,k)$ a C_F viz (3.18) a (3.20). Protože pro $k \to \infty$ je $\min(\frac{c_d}{2r}, \frac{k}{2}) = \frac{c_d}{2r}$, vidíme:

$$C_v(r,\infty)\|\mathbf{v}^k\|_{1,r}^r \leq C_F. \tag{5.2}$$

Dále postupujme stejně jako pro (4.22), tedy volme testovací funkci $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}^{1,r}(\Omega)^d$:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} &= |p^k|^{r'-2}p^k - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |p^k|^{r'-2}p^k\ d\mathbf{x},\\ \boldsymbol{\varphi} &= 0 \quad \text{na} \quad \partial\Omega,\\ \|\boldsymbol{\varphi}\|_{1,r}^r &\leq C_{reg}(\Omega,r)^r \|p^k\|_{r'}^{r'}.\end{aligned}$$

Ta existuje z Bogovského věty A.14. Dále z Hölderovy (A.4), Youngovy (A.1) a Schwarzovy (A.5) nerovnosti a odhadu (4.2):

$$\begin{aligned}\|p^k\|_{r'}^{r'} &= \int_\Omega \mathcal{S}(\mathbf{D}(\mathbf{v}^k)) : \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi})d\mathbf{x} + k\int_{\partial\Omega} \mathbf{v}^k \cdot \underbrace{\boldsymbol{\varphi}}_{=0} dS - \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}\rangle \\ &\leq \widetilde{C}_v(r,\Omega)\left(1 + \|\mathbf{v}^k\|_{1,r}^r\right) + \frac{1}{3}\|p^k\|_{r'}^{r'} + \widetilde{C}_f(r,\Omega)\|\mathbf{f}\|_{(1,r)^*}^{r'} + \frac{1}{3}\|p^k\|_{r'}^{r'}.\end{aligned}$$

Konstanty $\widetilde{C}_v(r,\Omega)$ a $\widetilde{C}_f(r,\Omega)$ viz (3.28) a (3.29). Díky (5.2) vidíme, že existuje konstanta $C(r, \|\mathbf{f}\|_{(1,r)^*}) > 0$, a navíc z (4.2) existuje také konstanta $C_\nu(r, |\Omega|, \|\mathbf{f}\|_{(1,r)^*}) > 0$:

$$\begin{aligned}\|p^k\|_{r'}^{r'} &\leq C(r, \|\mathbf{f}\|_{(1,r)^*}) \quad \text{a}\\ \|\mathcal{S}_2(p^k, \mathbf{D}(\mathbf{v}^k))\|_r^r &\leq C_\nu(r, |\Omega|, \|\mathbf{f}\|_{(1,r)^*}).\end{aligned}$$

Tedy jsou splněny podmínky Alaogluovy věty A.13 a slabé limity ve smylu vybraných podposloupností (z následujících posloupností funkcí) existují:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^k &\overset{k\to\infty}{\rightharpoonup} \mathbf{v} \quad \text{slabě v } \mathbf{W}^{1,r}(\Omega)^d,\\ p^k &\overset{k\to\infty}{\rightharpoonup} p \quad \text{slabě v } \mathbf{L}^{r'}(\Omega),\\ \mathcal{S}_2(p^k, \mathbf{D}(\mathbf{v}^k)) &\overset{k\to\infty}{\rightharpoonup} \Phi \quad \text{slabě v } \mathbf{L}^{r'}(\Omega)^{d\times d},\end{aligned}$$

a úloha konverguje k

$$\int_\Omega \Phi : \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi}) d\mathbf{x} = \int_\Omega p \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x} + \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle .$$

$\mathcal{S}_2(p^k, \mathbf{D}(\mathbf{v}^k)) \rightharpoonup \Phi$, což platí pro každou $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}_0^{1,r}(\Omega)^d$. Zbývá ukázat, že

$$\int_\Omega \Phi : \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi}) d\mathbf{x} = \int_\Omega \mathcal{S}_2(p, \mathbf{D}(\mathbf{v})) : \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi}) d\mathbf{x}.$$

5.1.2 Řešitelnost úlohy

Postupujme obdobně jako v kapitole 4.2.5, ukažme, že existuje konstanta C_∞ taková že:

$$0 \leq C C_\infty \|\mathbf{D}(\mathbf{v}^k) - \mathbf{D}(\mathbf{v})\|_r^r \overset{(1)}{\leq} C_\infty \int_\Omega \widehat{\mathcal{I}}(\mathbf{D}(\mathbf{v}^k), \mathbf{D}(\mathbf{v})) d\mathbf{x} \overset{(2)}{\leq} f(k) \overset{k\to\infty}{\to} 0.$$

Nerovnost $^{(1)}$ plyne z lemmatu A.2, nyní ukažme nerovnost $^{(2)}$. Protože:

$$\int_\Omega \{\mathcal{S}_2(p^k, \mathbf{D}(\mathbf{v}^k)) - \mathcal{S}_2(p, \mathbf{D}(\mathbf{v}))\} : (\mathbf{D}(\mathbf{v}^k) - \mathbf{D}(\mathbf{v})) d\mathbf{x} = \int_\Omega (p^k - p) \operatorname{div} (\mathbf{v}^k - \mathbf{v}) d\mathbf{x}$$
$$+ \left\langle \mathbf{f}, \mathbf{v}^k - \mathbf{v} \right\rangle - k \|\mathbf{v}^k - \mathbf{v}\|_{2,\partial\Omega}^2 .$$

Označme $f_1(k) := \left\langle \mathbf{f}, \mathbf{v}^k - \mathbf{v} \right\rangle$, z (4.3), vidíme, že $f_1(k) \to 0$ pro $k \to \infty$,

$$\text{a protože} \quad \operatorname{div} \mathbf{v}^k = 0 \quad a \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{platí:}$$

$$\frac{c_d}{2} \int_\Omega \widehat{\mathcal{I}}(\mathbf{D}(\mathbf{v}^k), \mathbf{D}(\mathbf{v})) d\mathbf{x} \leq -k \|\mathbf{v}^k - \mathbf{v}\|_{2,\partial\Omega}^2 + \frac{\mu_0^2}{2c_d} \|p^k - p\|_2^2 + f_1(k) \leq \frac{\mu_0^2}{2c_d} \|p^k - p\|_2^2 + f_1(k).$$

Pro odhad $\|p^k - p\|_2$ volme $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}^{1,2}(\Omega)^d$ (existuje z Bogovského věty A.14) splňující:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} = p^k - p,$$
$$\boldsymbol{\varphi} \rightharpoonup 0 \text{ pro } k \to \infty,$$
$$\|\boldsymbol{\varphi}\|_{1,2} \leq C_{reg}(\Omega, 2) \|p^k - p\|_2 .$$

Testujme touto funkcí (4.5) a dále z (4.4) a z Hölderovy nerovnosti (A.4) (stejným postupem jako pro (4.25) - (4.27)):

$$\|p^k - p\|_2^2 \leq \left(\frac{C_{reg}(\Omega, 2) c_h}{1 - C_{reg}(\Omega, 2) \mu_0} \right)^2 \int_\Omega \widehat{\mathcal{I}}(\mathbf{D}(\mathbf{v}^k), \mathbf{D}(\mathbf{v})) d\mathbf{x} + f_2(k), \tag{5.3}$$

kde $f_2(k) \to 0$ pro $k \to \infty$, z čehož již vidíme nerovnost $^{(2)}$, pro konstantu

$$C_\infty = \left(c_d - \frac{\mu_0^2}{c_d} \left(\frac{C_{reg}(\Omega, 2) c_h}{1 - C_{reg}(\Omega, 2) \mu_0} \right)^2 \right).$$

Je-li $C_\infty > 0$, získáváme silné konvergence v $\mathbf{D}(\mathbf{v}^k)$ (a z (5.3) i v p^k), a z Vitaliho věty (A.17) (Stejně jako v kapitole 3.2.5) konverguje i

$$\int_\Omega \mathcal{S}_2(p^k, \mathbf{D}(\mathbf{v}^k)) : \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi}) d\mathbf{x} \to \int_\Omega \mathcal{S}_2(p, \mathbf{D}(\mathbf{v})) : \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi}) d\mathbf{x}.$$

$\square$

5.2 Limitní přechod $k \to 0$

Pro limitu $k \to 0$ konverguje Navierova okrajová podmínka k

$$(\mathbf{Tn})_{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{0} \quad \text{na} \quad \partial\Omega.$$

Tedy limitou $(\mathbf{v}^k, p^k)$ slabého řešení úlohy $(\mathcal{Q}_k)$ pro $k \to 0$ je $(\mathbf{v}^0, p^0)$, splňující pro každou testovací funkci $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}^{1,r}_{\mathbf{n}}(\Omega)^d$:

$$(\mathcal{Q}_0) \qquad \int_\Omega \mathcal{S}_2(p^0, \mathbf{D}(\mathbf{v}^0)) : \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi}) d\mathbf{x} = \int_\Omega p^0 \mathrm{div}\, \boldsymbol{\varphi}\, d\mathbf{x} + \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle .$$

Definice 5.1. Definujme oblast *vhodnou pro Kornovu nerovnost*, jako každou oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ takovou, že existuje konstanta $C_{(K,2)} > 0$, a platí:

$$\|\mathbf{v}\|_{1,r} \leq C_{(K,2)} \|\mathbf{D}(\mathbf{v})\|_r,$$

pro každou $\mathbf{v} \in \mathbf{W}^{1,r}_{\mathbf{n},\mathrm{div}}(\Omega)^d$.

Poznámka 5.1. Poznamenejme, že oblasti, které definici 5.1 nesplňují existují. Příkladem takové oblasti je oblast s rotační symetrií, třeba v rovině mezi prvními dvěma souřadnicemi. (Lze vhodnou rotací zobecnit na libovolný směr.) Uvažujme například funkci

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \{-x_2, x_1, 0, \ldots, 0\} \in \mathbb{R}^d.$$

Snadno vidíme, že $\mathbf{v} \neq 0$ ale přesto $\mathbf{D}(\mathbf{v}) = 0$.

Věta 5.2. *Posloupnost řešení $(\mathcal{Q}_k)$ $(\mathbf{v}^k, p^k)$ konverguje k $(\mathbf{v}^0, p^0)$ řešící $(\mathcal{Q}_0)$, jestliže konstanty splňují:*

$$\mu_0 < \frac{c_d}{(c_d + c_h) C_{reg}(\Omega, 2)}$$

(což je stejná podmínka na konstanty, jako pro existenci řešení (věta 4.3) a oblast Ω navíc splňuje definici 5.1.

Důkaz. Důkaz povedeme a budeme dělit jako u limity $k \to \infty$ (kapitola 5.1). Nejprve ukažme, že existují slabé limity $(\mathbf{v}^0, p^0)$ posloupnosti dvojic $(\mathbf{v}^k, p^k)$ a následně ukažme, že tyto limity řeší právě úlohu $(\mathcal{Q}_0)$.

Existenci slabých limit $\mathbf{v}^k$ a p^k ukážeme opět z Alaogluovy věty A.13, potřebujeme tedy stejnoměrné odhady na normy těchto funkcí. V minulé kapitole jsme mohli použít postup stejný jako v kapitole 4.2.1, protože protentokrát pro $k \to \infty$ platilo, že $\min(\frac{c_d}{2r}, \frac{k}{2}) \to \frac{c_d}{2r}$ (klíčová konstanta ve stejnoměrném odhadu v kapitole 4.2.1).

Pro $k \to 0$ však konverguje $\min(\frac{c_d}{2r}, \frac{k}{2}) \to 0$ a je tedy třeba pro stejnoměrné odhady zvolit jiný postup. Vycházíme z rovnice (4.5) testované funkcí $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{v}^k$:

$$\int_\Omega \mathcal{S}_2(p^k, \mathbf{D}(\mathbf{v}^k)) : \mathbf{D}(\mathbf{v}^k) d\mathbf{x} + k \int_{\partial\Omega} |\mathbf{v}^k|^2 dS = \int_\Omega p^k \underbrace{\mathrm{div}\, \mathbf{v}^k}_{=0} d\mathbf{x} + \left\langle \mathbf{f}, \mathbf{v}^k \right\rangle .$$

Z odhadu (4.1) a Kornovy nerovnosti (5.1):

$$\int_\Omega \mathcal{S}_2(p^k, \mathbf{D}(\mathbf{v}^k)) : \mathbf{D}(\mathbf{v}^k) d\mathbf{x} \geq \frac{C_{(K,2)} c_d}{2r} \|\mathbf{v}^k\|_{1,r}^r + \frac{c_d |\Omega|}{2r}.$$

Z Youngovy (A.1) a Hölderovy (A.4) nerovnosti vidíme, že existuje konstanta $C_{f,0}(r, \|\mathbf{f}\|_{(1,r)^*})$:

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{v}^k \rangle \leq \frac{C_{(K,2)} c_d}{4r} \|\mathbf{v}^k\|_{1,r}^r + C_{f,0}(r, \|\mathbf{f}\|_{(1,r)^*}).$$

Máme tedy *energetický odhad* (kde $C_{F,0}(r, |\Omega|, \|\mathbf{f}\|_{(1,r)^*}) \equiv C_{f,0}(r, \|\mathbf{f}\|_{(1,r)^*}) + \frac{c_d|\Omega|}{2r}$):

$$\frac{C_{(K,2)} c_d}{4r} \|\mathbf{v}^k\|_{1,r}^r + k \|\mathbf{v}^k\|_{2,\partial\Omega}^2 + \leq C_F(r, |\Omega|, \|\mathbf{f}\|_{(1,r)^*}). \tag{5.4}$$

Dále stejným postupem jako pro (4.22), tedy volbou testovací funkce $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}^{1,r}(\Omega)^d$:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} &= |p^k|^{r'-2} p^k - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega |p^k|^{r'-2} p^k \, d\mathbf{x}, \\ \boldsymbol{\varphi} &= 0 \quad \text{na} \quad \partial\Omega, \\ \|\boldsymbol{\varphi}\|_{1,r}^r &\leq C_{reg}(\Omega, r)^r \|p^k\|_{r'}^{r'}. \end{aligned}$$

a odhady (4.20) a (4.21) dostáváme $((\widetilde{C}_v(r,\Omega))$ a $(\widetilde{C}_f(r,\Omega))$ viz (3.28) a (3.29):

$$\|p^k\|_{r'}^{r'} \leq 3 \left(\widetilde{C}_v(r,\Omega) \left(1 + \|\mathbf{v}^k\|_{1,r}^r\right) + \widetilde{C}_f(r,\Omega) \|\mathbf{f}\|_{(1,r)^*}^{r'} \right).$$

Díky (5.4) vidíme, že existují konstanty $C_{p,0}(r, \|\mathbf{f}\|_{(1,r)^*}) > 0$ a $C_{\nu,0}(r, |\Omega|, \|\mathbf{f}\|_{(1,r)^*}) > 0$:

$$\|p^k\|_{r'}^{r'} \leq C_{p,0}(r, \|\mathbf{f}\|_{(1,r)^*}) \quad , \quad \|\mathcal{S}_2(p^k, \mathbf{D}(\mathbf{v}^k))\|_r^r \leq C_{\nu,0}(r, |\Omega|, \|\mathbf{f}\|_{(1,r)^*}).$$

Tedy z Alaogluovy věty A.13 máme slabé konvergence:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^k &\overset{k\to 0}{\rightharpoonup} \mathbf{v}^0 \quad \text{slabě v } \mathbf{W}^{1,r}(\Omega)^d, \\ \mathrm{tr}\mathbf{v}^k &\overset{k\to 0}{\rightharpoonup} \mathrm{tr}\mathbf{v}^0 \quad \text{slabě v } \mathbf{L}^2(\partial\Omega)^d, \\ p^k &\overset{k\to 0}{\rightharpoonup} p^0 \quad \text{slabě v } \mathbf{L}^{r'}(\Omega), \\ \mathcal{S}_2(p^k, \mathbf{D}(\mathbf{v}^k)) &\overset{k\to 0}{\rightharpoonup} \Phi \quad \text{slabě v } \mathbf{L}^{r'}(\Omega)^{d\times d}. \end{aligned}$$

Zbývá ukázat, že

$$\int_\Omega \Phi : \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi}) d\mathbf{x} = \int_\Omega \mathcal{S}_2(p, \mathbf{D}(\mathbf{v})) : \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi}) d\mathbf{x}.$$

Což je, včetně závěrů, identické s kapitolou 5.1.2. $\square$

6 Regularita úlohy $(\mathcal{Q}_k)$ pro periodické okr. podmínky

Pro začátek uveďme alespoň některé výsledky z oblasti regularit Stokesových systémů a Navier-Stokesových rovnic. Galdi ve své knize věnované Stokesovým systémům [14] (o které jsme již mluvili v kapitole 2) uvedl následující výsledek:

Nechť $\Omega \in C^{m+2}(\mathbb{R}^d)$, $m \geq 0$, pro každou funkci $\mathbf{f} \in \mathbf{W}^{m,q}(\Omega)^d$ a každou $\mathbf{v}_* \in \mathbf{W}^{m+2-\frac{1}{q},q}(\partial\Omega)$ splňující $\int_{\partial\Omega} \mathbf{v}_* \cdot \mathbf{n}\, dS = 0$ existuje právě jedno slabé řešení úlohy

$$\text{div}\,(\nabla \mathbf{v}) = \nabla p + f, \quad \text{div}\,\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_* \text{ na } \partial\Omega,$$

$$\mathbf{v} \in \mathbf{W}^{m+2,q}(\Omega)^d, \quad p \in \mathbf{W}^{m+2,q}(\Omega).$$

Navíc existuje konstanta $C > 0$ taková, že

$$\|\mathbf{v}\|_{m+2,q} + \|p\|_{m+1,q,/\mathbb{R}} \leq C(\|\mathbf{f}\|_{m,q} + \|\mathbf{v}_*\|_{m+2-\frac{1}{q},q,\partial\Omega}).$$

Což je regularita ve smyslu vyšší diferencovatelnosti, pro ‚klasický' Stokesův systém na omezené oblasti v obecné dimenzi.

Pro systém z kapitoly 3, periodické okrajové podmínky a dimenzi $d = 2$ ukázali Kaplický, Málek, Stará ve své práci [26] (rok 2002) $C^{1,\alpha}$-regularitu dat, pro:

$$r \geq \frac{4}{3}.$$

Další článek ([38] z roku 2003) na poli částečné regularity takovéhoto systému publikovali Málek, Mingione a Stará. Pro dimenzi $d = 2, 3$ studovali model:

$$\text{div}\,\mathbf{v} = 0 \quad , \quad \sum_{i=1}^{d} v_i \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}_i} - \text{div}\,\{(1 + |\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2)^{(r-2)/2}\mathbf{D}(\mathbf{v})\} + \nabla p = \mathbf{f},$$

s homogenní Dirichletovou okrajovou podmínkou. Ukázali za vhodných podmínek lokální Hölderovskou spojitost $\nabla \mathbf{v}$ a p skoro všude v studované oblasti.

Ebmeyer, Liu a Steinhauer se v článku [8] z roku 2005 zabývali soustavou rovnic

$$\int_\Omega |\nabla \mathbf{v}|^{p-2} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}_i} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{x}_i} d\mathbf{x} = \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle\,,$$

pro $p > 2$, $\mathbf{f} \in \mathbf{W}^{(p-2)/(p),p'}(\Omega)$ a pro $\mathbf{v}, \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}^{1,p}_{\mathbf{0}}(\Omega)$. Ukázali, že existuje konstanta $C > 0$ závislá na datech, tak že:

$$\int_\Omega |\nabla \mathbf{v}|^{p-2} |\nabla^2 \mathbf{v}|^2 d\mathbf{x} \leq C.$$

M. Bulíček a P. Kaplický publikují uvádí ve své práci [5] regularitu pro systém, s obdobnou vazkostí, jakou zde diskutujeme my, ale pro dimenzi $d = 2$:

$$-\text{div } (\nu(p, \mathbf{D}(\mathbf{v}))\mathbf{D}(\mathbf{v})) + \nabla p = \mathbf{f}.$$

Ukazují existenci řešení v prostorech

$$\mathbf{v} \in \mathbf{W}^{2,r}(\Omega)^2 \quad \text{a} \quad p \in \mathbf{W}^{1,q}(\Omega)^2$$

a to pro všechna slabá řešení (pokud $r \in (3/2, 2])$ a nebo alespoň existenci takového řešení (pro $r \in (4/3, 3/2]$).

V této kapitole ukažme regularitu ve smyslu vyšší diferencovatelnosti pro úlohu definovanou v kapitole 4.1, pouze zjednodušenou na periodickou oblast s periodickými okrajovými podmínkami.

Uvažujme zjednodušenou, periodickou úlohu (Zobrazení $\mathcal{S}_2$ viz kapitola 4.1):

$$(\mathcal{Q}_{per}) \qquad \left.\begin{aligned} \text{div } (-p\mathbf{I} + \mathcal{S}_2(p, \mathbf{D}(\mathbf{v})) = f \\ \text{div } \mathbf{v} = 0 \end{aligned}\right\} \text{ v } \Omega. \tag{6.1}$$

Oblast Ω berme jako $d-$rozměrný hranol s rozměry a_i pro $i \in \{1, 2 \ldots d\}$ a definujme vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_d)$. Okrajové podmínky pak definujme periodicky:

$$\mathbf{v}(L\mathbf{a} + \mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \quad , \quad \forall L \in \mathbb{Z}, \text{ pro skoro všechna } \mathbf{x} \in \Omega.$$

Slabé řešení $(p, \mathbf{v})$ úlohy $(\mathcal{Q}_{per})$ pak splňuje pro každou funkci $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}^{1,r}_{per,\text{div}}(\Omega)^d$:

$$\int_\Omega \mathcal{S}_2(p, \mathbf{D}(\mathbf{v})) : \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi}) d\mathbf{x} = \int_\Omega p \text{ div } \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x} + \langle \mathbf{f}, \ \boldsymbol{\varphi} \rangle \, . \tag{6.2}$$

Smysluplnost této definice jsme už ukázali například v definici 4.3.

Definice 6.1. Mějme $h \neq 0$. Jsou-li (skalární a vektorová) funkce p a $\mathbf{v}$ definovány na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ s periodickými okrajovými podmínkami, užívejme pro každé $\mathbf{x} \in \Omega$ následující značení pro posunutí funkce v bodě x o h ve směru $\mathbf{x}_i$ (i-tá souřadnice daného d-rozměrného prostoru):

$$\delta_i^h p(\mathbf{x}) := p(\mathbf{x} + h\mathbf{x}_i) \quad , \quad \delta_i^h \mathbf{v}(\mathbf{x}) := \mathbf{v}(\mathbf{x} + h\mathbf{x}_i),$$

kde $\mathbf{x}$ se bude (v důkazu) pro zkrácení zápisu většinou vynechávat. Dále definujme diferenci funkce v bodě x o h ve směru $\mathbf{x}_i$:

$$\Delta_i^h p(\mathbf{x}) := |h|^{-1}\{p(\mathbf{x}) - \delta_i^h p(\mathbf{x})\} \quad , \quad \Delta_i^h \mathbf{v}(\mathbf{x}) := |h|^{-1}\{\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \delta_i^h \mathbf{v}(\mathbf{x})\}.$$

Dále definujme diferenční gradient jako:

$$\Delta^h p(\mathbf{x}) := \{\Delta_1^h p(\mathbf{x}), \Delta_2^h p(\mathbf{x}), \ldots, \Delta_d^h p(\mathbf{x})\} \ , \ \Delta^h \mathbf{v}(\mathbf{x}) := \{\Delta_1^h \mathbf{v}(\mathbf{x}), \Delta_2^h \mathbf{v}(\mathbf{x}), \ldots, \Delta_d^h \mathbf{v}(\mathbf{x})\}.$$

Lemma 6.1. *Pro všechny funkce* $\mathbf{v} : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{B}(\mathbf{x}) : \Omega \to \mathbb{R}^{d\times d}$, *pro které mají následující integrály či derivace smysl, platí:*

$$\text{A.} \quad \frac{\partial \Delta_i^h \mathbf{v}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_i} = \Delta_i^h \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_i},$$

$$\text{B.} \quad \int_\Omega \mathbf{A}(\mathbf{x}) : \Delta_i^{-h}\Delta_j^h \mathbf{B}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_\Omega \Delta_i^h \mathbf{A}(\mathbf{x}) : \Delta_j^h \mathbf{B}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Důkaz. První rovnost platí ihned z definice operátoru $\Delta_i^h(\cdot)$ jako lineárního operátoru a z věty o derivování součtu. Druhou rovnost nyní ukažme. Značme $A_{a,b}(\mathbf{x}), B_{a,b}(\mathbf{x})$ jednotlivé složky tenzorů $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ a $\mathbf{B}(\mathbf{x})$. Také značme $\hat{B}_{a,b}(\mathbf{x}) := \Delta_j^h B_{a,b}(\mathbf{x})$ a počítejme:

$$\int_\Omega \mathbf{A}(\mathbf{x}) : \Delta_i^{-h}\Delta_j^h \mathbf{B}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{a,b=1}^d \int_\Omega A_{a,b}(\mathbf{x}) \Delta_i^{-h} \hat{B}_{a,b}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$
$$= \frac{1}{|h|} \sum_{a,b=1}^d \left\{ \int_\Omega A_{a,b}(\mathbf{x}) \hat{B}_{a,b}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_\Omega A_{a,b}(\mathbf{x}) \delta_i^{-h} \hat{B}_{a,b}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right\}.$$

Dále na druhý integrál proveďme substituci $\mathbf{y} := \mathbf{x} - h\mathbf{x}_i$ a přeznačme zpět na $\mathbf{x}$. Mělo by se dále integrovat přes množinu Ω', která by byla posunutím množiny Ω, ale protože úloha je periodická, můžeme i nadále psát integrál přes Ω:

$$\frac{1}{|h|} \sum_{a,b=1}^d \left\{ \int_\Omega A_{a,b}(\mathbf{x}) \hat{B}_{a,b}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_\Omega \delta_i^h A_{a,b}(\mathbf{x}) \hat{B}_{a,b}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right\} = \int_\Omega \Delta_i^h \mathbf{A}(\mathbf{x}) : \Delta_j^h \mathbf{B}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

□

Lemma 6.2. *Mějme* $h > 0$, $r \in [1, \infty)$. *Pro každou funkci* $\mathbf{v} \in \mathbf{W}^{2,r}(\Omega)^d$, $\mathbf{B} \in \mathbf{W}^{1,r}(\Omega)^{d\times d}$, *a každou* $\mathbf{u} \in \mathbf{W}^{1,2}(\Omega)^d$ *kde* $\Omega \in C^{0,1}$ *je oblast s periodickými okrajovými podmínkami, existují kladné konstanty* $c_{(\Delta^1)}$, $c_{(\Delta^2)}$, $c_{(\Delta^3)}$, $C_{(\Delta^1)}$, $C_{(\Delta^2)}$, $C_{(\Delta^3)}$ *tak, že:*

$$c_{(\Delta^1)} \|\nabla^2 \mathbf{v}\|_r \le \sup_h \|\Delta^h \Delta^{-h} \mathbf{v}\|_r \le C_{(\Delta^1)} \|\nabla^2 \mathbf{v}\|_r,$$
$$c_{(\Delta^2)} \|\nabla \mathbf{B}\|_r \le \sup_h \|\Delta^h \mathbf{B}\|_r \le C_{(\Delta^2)} \|\nabla \mathbf{B}\|_r \quad a$$
$$c_{(\Delta^3)} \|\nabla \mathbf{u}\|_2 \le \sup_h \|\Delta^h \mathbf{u}\|_2 \le C_{(\Delta^3)} \|\nabla \mathbf{u}\|_2.$$

Důkaz. Obdobné důkazu Theoremu 3 v knize [9] (strana 277). □

Lemma 6.3. *Nechť* $\Omega \in C^{0,1}$, $r \in (1, 2)$ *a* $\mathbf{v} \in \mathbf{W}^{1,r}(\Omega)^d$. *(Značme* $\mathcal{I} := (1 + |\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2)$*), pak existuje konstanta* $C^* > 0$ *tak, že:*

$$\|\mathbf{D}(\mathbf{v})\|_r^2 \le C^* \int_\Omega \mathcal{I}^{\frac{r-2}{2}} |\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2 d\mathbf{x}.$$

Důkaz. Z lemmatu A.4:

$$\|\mathbf{D}(\mathbf{v})\|_r^r = \int_\Omega \left(\mathcal{I}^{\frac{r-2}{2}} |\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2\right)^{\frac{r}{2}} \left(\mathcal{I}^{\frac{r-2}{2}}\right)^{-\frac{r}{2}} d\mathbf{x} \le C \int_\Omega \left(\mathcal{I}^{\frac{r-2}{2}} |\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2 d\mathbf{x}\right)^{\frac{r}{2}}.$$

□

Věta 6.4. *Nechť existuje dvojice* $(\mathbf{v},\, p)$, $\mathbf{v} \in \mathbf{W}^{1,r}_{per,div}(\Omega)^d$, $p \in \mathbf{L}^{r'}(\Omega)/_{\mathbb{R}}$ $(r \in (1,2))$, *slabé řešení* $(\mathcal{Q}_{per})$ *(6.2). Nechť* $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^{r'}(\Omega)$, *konstanty splňují:*

$$\mu_0 < \frac{c_d}{(c_d + c_h) C_{reg}(\Omega, 2)}$$

a Ω *je taková oblast, že platí Kornova nerovnost (5.1). Pak platí, že* $\mathbf{v} \in \mathbf{W}^{2,r}(\Omega)^d$.

Důkaz. Volme testovací funkci $\boldsymbol{\varphi} = \Delta_i^{-h}\Delta_i^h \mathbf{v}$, která je díky volbě okrajových podmínek definovaná v každém bodě Ω a z (6.2):

$$\int_\Omega \mathcal{S}_2(p, \mathbf{D}(\mathbf{v})) : \mathbf{D}(\Delta_i^{-h}\Delta_j^h \mathbf{v}) d\mathbf{x} = \int_\Omega p \operatorname{div}\, (\Delta_i^{-h}\Delta_i^h \mathbf{v})\, d\mathbf{x} + \left\langle \mathbf{f},\ \Delta_i^{-h}\Delta_i^h \boldsymbol{\varphi} \right\rangle.$$

Užitím lemmatu 6.1 dostáváme:

$$\int_\Omega \Delta_i^h \mathcal{S}_2(p, \mathbf{D}(\mathbf{v})) : \Delta_i^h \mathbf{D}(\mathbf{v}) d\mathbf{x} = \int_\Omega p\, \Delta_i^{-h}\Delta_i^h (\operatorname{div} \mathbf{v})\, d\mathbf{x} + \left\langle \mathbf{f},\ \Delta_i^{-h}\Delta_i^h \boldsymbol{\varphi} \right\rangle. \tag{6.3}$$

Navíc ze zadání (6.1) vidíme, že div $\mathbf{v} = 0$. Dále upravujme první integrál. Rozepišme rozdíl:

$$\mathcal{S}_2(p(\mathbf{x}), \mathbf{D}(\mathbf{x})) - \delta_i^h \mathcal{S}_2(p(\mathbf{x}), \mathbf{D}(\mathbf{x})) = \int_0^1 \frac{\partial \mathcal{S}_2(p_s(\mathbf{x}), \mathbf{D}(\mathbf{v}_s(\mathbf{x})))}{\partial s} ds,$$

kde $p_s(\mathbf{x}) := \delta_i^h p(\mathbf{x}) + s(p(\mathbf{x}) - \delta_i^h p(\mathbf{x}))$ a $\mathbf{v}_s(\mathbf{x}) := \delta_i^h \mathbf{v}(\mathbf{x}) + s(\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \delta_i^h \mathbf{v}(\mathbf{x}))$. Derivaci podle s rozepišme na derivace podle p a $\mathbf{D}(\mathbf{v})$. Celkově tedy platí:

$$\int_\Omega \Delta_i^h \{\mathcal{S}_2(p, \mathbf{v})\} : \Delta_i^h \mathbf{D}(\mathbf{v}) d\mathbf{x} + \frac{1}{|h|^2} \int_\Omega \mathcal{J}_p(p_s, \mathbf{D}(\mathbf{v}_s)) d\mathbf{x} \geq \frac{1}{|h|^2} \int_\Omega \mathcal{J}_{\mathbf{D}}(p_s, \mathbf{D}(\mathbf{v}_s)) d\mathbf{x}.$$

kde předpisy pro $\mathcal{J}_p$ a $\mathcal{J}_{\mathbf{D}}$ jsou v definici 4.1. Užijme odhady v lemmatu 4.2:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Delta_i^h \{\mathcal{S}_2(p, \mathbf{v})\} : \Delta_i^h \mathbf{D}(\mathbf{v}) d\mathbf{x} + \frac{\mu_0}{|h|^2} \|p - \delta_i^h p\|_2 \left(\int_\Omega \widehat{\mathcal{I}}(\mathbf{D}(\mathbf{v}), \mathbf{D}(\delta_i^h \mathbf{v})) d\mathbf{x} \right)^{1/2} \\ \geq \frac{c_d}{|h|^2} \int_\Omega \widehat{\mathcal{I}}(\mathbf{D}(\mathbf{v}), \mathbf{D}(\delta_i^h \mathbf{v})) d\mathbf{x}, \end{aligned} \tag{6.4}$$

Normu $\|p - p_h\|_2$ odhadněme následujícím způsobem. Testujme (6.2) a posunutou úlohu:

$$\int_\Omega \delta_i^h \mathcal{S}_2(p, \mathbf{D}(\mathbf{v})) : \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi}) d\mathbf{x} = \int_\Omega \delta_i^h p \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}\, d\mathbf{x} + \left\langle \delta_i^h \mathbf{f},\ \boldsymbol{\varphi} \right\rangle,$$

(toto můžeme udělat, neboť Ω je periodická a tudíž budou $\delta_i^h \mathcal{S}_2$, $\delta_i^h p$ i $\delta_i^h \mathbf{f}$ existovat) funkcí $\mathbf{g}^h \in \mathbf{W}^{1,2}(\Omega)^d$ (jejíž existenci zaručuje Bogovského věta A.14) takovou, že:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{g}^h = p - \delta_i^h p \quad \text{v } \Omega \quad \text{a} \\ \|\mathbf{D}(\mathbf{g}^h)\|_2 \leq \|\nabla \mathbf{g}^h\|_2 \leq \|\mathbf{g}^h\|_{1,2} \leq C_{reg}(\Omega, 2) \|p - \delta_i^h p\, \|_2. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Odečtěme tyto dvě úlohy od sebe (značme $\hat{\mathcal{S}}_2 := \mathcal{S}_2(p, \mathbf{D}(\mathbf{v})) - \delta_i^h \mathcal{S}_2(p, \mathbf{D}(\mathbf{v}))$):

$$\int_\Omega \hat{\mathcal{S}}_2 : \mathbf{D}(\mathbf{g}^h)\, d\mathbf{x} - \left\langle \mathbf{f} - \delta_i^h \mathbf{f}, \mathbf{g}^h \right\rangle = \int_\Omega (p - \delta_i^h p) \operatorname{div} \mathbf{g}^h d\mathbf{x} = \|p - \delta_i^h p\, \|_2^2 \tag{6.6}$$

Upravujme dualitu z definice δ_i^h, Schwarzovy (A.5) nerovnosti vidíme, že:

$$\left\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}^h \right\rangle = |h| \left\langle \frac{\mathbf{f} - \delta_i^h \mathbf{f}}{|h|}, \mathbf{g}^h \right\rangle = |h| \left\langle \mathbf{f}, \Delta_i^h \mathbf{g}^h \right\rangle \leq |h| \|\mathbf{f}\|_2 \|\Delta_i^h \mathbf{g}^h\|_2. \tag{6.7}$$

Uvědomme si, že z lemmatu 6.2 navíc platí: $\|\Delta_i^h \mathbf{g}^h\|_2 \leq \|\Delta^h \mathbf{g}^h\|_2 \leq C_{(\Delta^3)} \|\nabla \mathbf{g}^h\|_2$.

Nyní první člen (6.6) odhadněme z nerovnosti (4.4) a Hölderovy nerovnosti (A.4), druhý z (6.7), a normy $\|\mathbf{D}(\mathbf{g}^h)\|_2$ a $\|\nabla \mathbf{g}^h\|_2$ z odhadu (6.5):

$$\left(\mu_0 \|p - \delta_i^h p\ \|_2 + c_h \left(\int_\Omega \widehat{\mathcal{I}}(\mathbf{D}(\mathbf{v}), \mathbf{D}(\delta_i^h \mathbf{v})) d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} + |h| C_{(\Delta^3)} \|\mathbf{f}\|_2 \right) \|\mathbf{g}^h\|_{1,2} \geq \|p - \delta_i^h p\ \|_2^2.$$

Dále vidíme, že $\|\mathbf{g}^h\|_{1,2} \leq C_{reg}(\Omega, 2) \|p_2 - p_1\|_2$ z (6.5) a podělme nerovnost členem $\|p_2 - p_1\|_2$. Předpokládáme, že $\|p - \delta_i^h p\|_2 > 0$, tedy že řešení není s konstantním tlakem:

$$\frac{C_{reg}(\Omega, 2)}{1 - \mu_0 C_{reg}(\Omega, 2)} \left(c_h \left(\int_\Omega \widehat{\mathcal{I}}(\mathbf{D}(\mathbf{v}), \mathbf{D}(\delta_i^h \mathbf{v})) d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} + |h| C_{(\Delta^3)} \|\mathbf{f}\|_2 \right) \geq \|p - \delta_i^h p\ \|^2. \tag{6.8}$$

Nyní označme

$$C_R := \frac{\mu_0 C_{reg}(\Omega, 2)}{1 - \mu_0 C_{reg}(\Omega, 2)}$$

a dosaďme do (6.4) z (6.3) a z (6.8) za $\|p - \delta_i^h p\ \|_2$. Užijme, následujícím způsobem, Youngovu nerovnost (A.1) na člen s normou $\|\mathbf{f}\|_2$. Nechť $\epsilon_1 > 0$ dostatečně malé, pevné:

$$\frac{C_R}{|h|} \|\mathbf{f}\|_2 \left(\int_\Omega \widehat{\mathcal{I}}(\mathbf{D}(\mathbf{v}), \mathbf{D}(\delta_i^h \mathbf{v})) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C_R}{2\epsilon_1} \|\mathbf{f}\|_2^2 + \frac{C_R \epsilon_1}{2|h|^2} \int_\Omega \widehat{\mathcal{I}}(\mathbf{D}(\mathbf{v}), \mathbf{D}(\delta_i^h \mathbf{v})).$$

Získáváme vztah:

$$\left\langle \mathbf{f}, \Delta_i^{-h} \Delta_i^h \mathbf{v} \right\rangle + \frac{C_R}{2\epsilon_1} \|\mathbf{f}\|_2^2 \geq \frac{1}{h^2} \left(c_d - C_R \left(c_h + \epsilon_1 \right) \right) \int_\Omega \widehat{\mathcal{I}}(\mathbf{D}(\mathbf{v}), \mathbf{D}(\delta_i^h \mathbf{v})) d\mathbf{x}.$$

Podle lemmatu 6.3 existuje konstanta $C^* > 0$ taková, že:

$$\frac{1}{|h|^2} \int_\Omega \widehat{\mathcal{I}}(\mathbf{D}(\mathbf{v}), \mathbf{D}(\delta_i^h \mathbf{v})) d\mathbf{x} \geq C^* \|\Delta_i^h \mathbf{D}(\mathbf{v})\|_r^2.$$

Užijeme-li tento vztah, Schwarzovu (A.5) a Youngovu (A.1) nerovnost, pro $\epsilon_2 > 0$ pevné:

$$\frac{\epsilon_2}{2} \|\Delta_i^{-h} \Delta_i^h \mathbf{v}\|_r^2 + \frac{1}{2\epsilon_2} \|\mathbf{f}\|_{r'}^2 + \frac{C_R}{2\epsilon_1} \|\mathbf{f}\|_2^2 \geq C^* (c_d - C_R(c_h + \epsilon_1)) \|\Delta_i^h \mathbf{D}(\mathbf{v})\|_r^2. \tag{6.9}$$

Posčítáme-li tyto nerovnosti přes všechna $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$, dostáváme:

$$\frac{\epsilon_2}{2} \|\Delta^{-h} \Delta^h \mathbf{v}\|_r^2 + \frac{1}{2\epsilon_2} \|\mathbf{f}\|_{r'}^2 + \frac{C_R}{2\epsilon_1} \|\mathbf{f}\|_2^2 \geq C^* C(r) (c_d - C_R(c_h + \epsilon_1)) \|\Delta^h \mathbf{D}(\mathbf{v})\|_r^2, \tag{6.10}$$

pro konstantu $C(r) > 0$ takovou, že:

$$\sum_{i=1}^{d} \|\Delta_i^h \mathbf{D}(\mathbf{v})\|_r^2 \leq C(r) \|\Delta^h \mathbf{D}(\mathbf{v})\|_r^2.$$

Z Kornovy nerovnosti (5.1) a lemmatu 6.2 získáváme odhady

$$\begin{aligned} \sup_h \|\Delta^h \mathbf{D}(\mathbf{v})\|_r^2 d\mathbf{x} \geq C_{(K,2)}{}^2 \sup_h \|\Delta^h (\nabla \mathbf{v})\|_r^2 \geq C_{(K,2)}{}^2 c_{(\Delta^2)}^2 \|\nabla^2 \mathbf{v}\|_r^2, \\ \sup_h \|\Delta^{-h} \Delta^h \mathbf{v}\|_r^2 \leq C_{(\Delta^1)}^2 \|\nabla^2 \mathbf{v}\|_r^2. \end{aligned}$$

Dosaďme tyto odhady do (6.10) a získáváme výsledný vztah:

$$\|\nabla^2 \mathbf{v}\|_r^2 \leq \{C^* C(r) C_{(K,2)}{}^2 C_{(\Delta^2)}^2 [c_d - C_R(c_h + \epsilon_1)]\}^{-1} \left(\frac{1}{2\epsilon_2} \|\mathbf{f}\|_{r'}^2 + \frac{C_R}{2\epsilon_1} \|\mathbf{f}\|_2^2 \right).$$

Studujme, kdy je tato konstanta kladná:

$$c_d - \mu_0 C_{reg}(\Omega, 2)(c_d + c_h + \epsilon_1) > \epsilon_1 (1 - \mu_0 C_{reg}(\Omega, 2)) \|\mathbf{f}\|_{r'}^2 + \epsilon_2 \mu_0 C_{reg}(\Omega, 2) \|\mathbf{f}\|_2^2$$

. Což pro $\epsilon_1 \to 0$ a $\epsilon_2 \to 0$ konverguje k podmínce ve znění věty (Která je mimo jiné shodná s podmínkou nutnou pro existenci řešení - věta 4.3). □

7 Závěr

Prvním cílem této práce bylo stanovit studované vlastnosti řešení Stokesových systémů. Rozhodli jsme se studovat nepříliš do hloubky vícero základních témat, spojených v logický celek volbou vazkosti (popsané detailněji v kapitole 4.1):

$$\nu := \nu(p, |\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2).$$

Studovali jsme vliv užití Navierových okrajových podmínek na existenci a jednoznačnost řešení. Dále jsme studovali konvergenci řešení systému při limitním přechodech v okrajových podmínkách.

Postupně jsme od Navierových okrajových podmínek prošli limitou k oběma hraničním případům, nulovému skluzu i dokonalému skluzu (viz kapitola 1.2). A nakonec jsme studovali regularitu ve smyslu vyšší diferencovatelnosti pro ‚zjednodušenou' úlohu.

V kapitole 2 jsme se pokusili utřídit publikované výsledky z existenční teorie Navier-Stokesových rovnic a Stokesových systémů (nestacionárních i stacionárních).

V následující kapitole, jsme se soustředili na dostatečně ‚jednoduchý' zobecněný Stokesův systém, aby bylo možno ukázat existenci a jednoznačnost jeho řešení bez dalších požadavků na určující konstanty. Navíc, aby byl co nejvíce podobný námi zvolenému systému. Vybrali jsme systém popsaný v kapitole 3.1 s vazkostí:

$$\nu := \nu(|\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2)$$

a využili jsme ho pro ‚demonstraci' užití technik monotonních operátorů.

V kapitole 4 jsme zavedli námi zvolený systém a ukázali jsme, že jestliže jeho určující konstanty splňují

$$\mu_0 < \frac{c_d}{(c_d + c_h) C_{reg}(\Omega, 2)},$$

pak řešení, na vhodné oblasti a ve vhodně zvolených prostorech existuje a je určeno jednoznačně.

V následující kapitole (5) jsme se zabývali limitními přechody v okrajových podmínkách. Ukázali jsme, že dostačující informací pro konvergenci v limitních přechodech je existence úlohy. Výjimku tvoří úloha ‚limita $k \to 0$' (kapitola 5.2), která navíc vyžaduje speciální podmínky na oblast Ω, vyplývající z Kornovy nerovnosti (5.1), nezbytné pro důkaz.

Nakonec jsme v kapitole 6 zavedli zjednodušenou ‚periodickou' úlohu a ukázali jsme, že za speciálních podmínek na Ω (ze stejných důvodů, jako pro úlohu v kapitole 5.2) a je-li konečná norma $\|\mathbf{f}\|_{r'}$ a splňují-li určující konstanty opět nerovnost:

$$\mu_0 < \frac{c_d}{(c_d + c_h) C_{reg}(\Omega, 2)},$$

je úloha lépe diferencovatelná ve smyslu, že druhé (slabé) derivace $\mathbf{v}$ jsou omezeny.

Cílem této práce bylo soustředit známé výsledky z oboru Stokesových systémů, zorientovat se v problematice, vybrat vhodné, doposud neřešené téma a na to se soustředit. V této práci jsme užívali výhradně techniky monotonních operátorů.

Z námi nastudovaných materiálů vyplývá, že Stokesovy systémy s Navierovými okrajovými podmínkami jsou doposud neřešeným tématem, zvláště pak zobecněné Stokesovy systémy, i když Navier-Stokesovy rovnice s těmito okrajovými podmínkami již zkoumané byly. Ze stejného důvodu se domnívám, že je novou, doposud nepublikovanou, informací je i chování úlohy při přechodu od Navierových okrajových podmínek k Dirichletovým podmínkám a k podmínkám popisujícím dokonalý skluz. Stejně tak i otázka regularity pro zobecněné Stokesovy systémy s periodickými okrajovými podmínkami v obecné dimenzi zde byla uveřejněná poprvé.

A Dodatek - Užitečné věty a nerovnosti

Lemma A.1. *Pro každé $r > 0$, $x \in \mathbb{R}_+$ existuje $C > 0$ taková, že $(1+x)^r \leq C(1+x^r)$.*

Důkaz. Vyšetřujme tedy průběh spojité funkce

$$f(x) := \frac{(1+x)^r}{1+x^r} \quad , \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{r(1+x)^{r-1}(1-x^{r-1})}{(1+x^r)^2}.$$

Vidíme, že tvrzení platí pro $r = 1$ a že $x = 1$ je bod podezřelý na lokální extrém funkce. Vyšetřujme derivaci v okolí podezřelého bodu. Protože

$$(1+x)^{r-1} > 0 \quad a \quad (1+x^r)^2 > 0 \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}_+, r > 0, r \neq 1,$$

bude chování derivace záležet pouze na členu $(1 - x^{r-1})$. Pro $r > 1$ vidíme, že $x = 1$ je lokální maximum a tvrzení platí, pro $r < 1$ je to lokální minimum a tudíž vyšetřujme, jak se funkce $f(x)$ chová v krajních bodech definičního oboru:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \quad a \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = 1.$$

Tudíž tvrzení platí. □

Lemma A.2. *Pro každé $p > 1$, $\mathbf{D}, \widehat{\mathbf{D}} \in \mathbb{R}^{d\times d}_{sym}$ existuje $C > 0$ taková, že*

$$C|\mathbf{D} - \widehat{\mathbf{D}}|^p \leq |\mathbf{D} - \widehat{\mathbf{D}}|^2 \int_0^1 (1 + |\widehat{\mathbf{D}} + s(\mathbf{D} - \widehat{\mathbf{D}})|^2)^{\frac{p-2}{2}} ds.$$

Důkaz. Součást důkazu lemmatu 1.19 v [34]. □

Lemma A.3. Youngova nerovnost
Pro každé $a, b \in \mathbb{R} : a \geq 0, b \geq 0$, a všechna $r \in (1, \infty)$ platí:

$$ab \leq \frac{a^r}{r} + \frac{b^{r'}}{r'}. \tag{A.1}$$

Důkaz. Pro $a = 0$ nebo $b = 0$ zřejmé, jinak počítejme díky konkavitě logaritmu:

$$\ln(ab) = \frac{1}{r}\ln(a^r) + \frac{1}{r'}\ln(b^{r'}) \leq \ln\left(\frac{a^r}{r} + \frac{b^{r'}}{r'}\right).$$

□

Lemma A.4. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, je oblast, $r \in (1, \infty)$ a nechť operátor*

$$\mathcal{I} : \mathbf{L}^r(\Omega)^{d\times d} \to \mathbf{L}^r(\Omega)^{d\times d}$$

je takový, že pro každou $\mathbf{w} \in \mathbf{L}^{r'}(\Omega)^{d\times d}$ je $\mathcal{I}(\mathbf{w}) := |\mathbf{w}|^{r-2}\mathbf{w}$. Operátor $\mathcal{I}$ je monotonní.

Důkaz. Operátor $\mathcal{I}$ je monotonní, jestliže pro všechny $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathbf{L}^r(\Omega)^{d\times d}$ platí

$$(\mathcal{I}(\mathbf{v}) - \mathcal{I}(\mathbf{w}), \mathbf{v} - \mathbf{w}) \geq 0$$

Počítejme tedy:

$$\int_\Omega (|\mathbf{v}|^{r-2}\mathbf{v} - |\mathbf{w}|^{r-2}\mathbf{w}) : (\mathbf{v} - \mathbf{w}) d\mathbf{x} \geq \int_\Omega |\mathbf{v}|^r + |\mathbf{w}|^r - (|\mathbf{v}|^{r-1}\mathbf{w} + |\mathbf{w}|^{r-1}\mathbf{v}) d\mathbf{x} \geq 0,$$

kde druhá nerovnost platí z lemmatu A.1 $\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1\right)$, protože:

$$-(|\mathbf{v}|^{r-1}\mathbf{w} + |\mathbf{w}|^{r-1}\mathbf{v}) \geq -\frac{|\mathbf{v}|^r}{r} - \frac{|\mathbf{v}|^r}{r'} - \frac{|\mathbf{w}|^r}{r} - \frac{|\mathbf{w}|^r}{r'} = -|\mathbf{v}|^r - |\mathbf{w}|^r.$$

□

Lemma A.5. *Pro $p < \infty$ existuje spočetná báze $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)^d$. Značme si ji $\{\boldsymbol{\omega}^i\}_{i=1}^\infty$.*

Důkaz. Důkaz vychází z faktu, že $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ je separabilní prostor (například v [31]). □

Věta A.6. Brouwerova věta
Nechť $\mathbf{B} := \mathbf{B}(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ je uzavřená jednotková koule a $f : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ je spojitá funkce. Pak $\exists \mathbf{C}_0 \in \mathbf{B} : f(\mathbf{C}_0) = \mathbf{C}_0$.

Důkaz. Důkaz lze najít například v [31], jako větu 23.9. na straně 192. □

Lemma A.7. *Nechť $\mathbf{P}^n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ spojitá a $\exists \rho > 0$ takové, že $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{C} > 0$ pro $\forall \mathbf{C} \in \partial\mathbf{B}(0,\rho)$. Pak $\exists \mathbf{C}^* \in \overline{\mathbf{B}(0,\rho)} : \mathbf{P}^n\mathbf{C}^* = 0$.*

Důkaz. Například v [43] na straně 17 jako lemma 2.26. □

Věta A.8. O Stopách
Nechť $\Omega(\subset \mathbb{R}^n) \in C^{0,1}$, $p < n$ a $q \in [1, p^\#]$, kde $p^\# := \frac{dp-p}{d-p}$. Pak existuje jednoznačně určené spojité zobrazení:

$$\mathcal{T} : \mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \to \mathbf{L}^q(\partial\Omega),$$

pro které platí: $\forall \mathbf{v} \in C^\infty(\overline{\Omega}) : \mathcal{T}\mathbf{v} = \mathbf{v}|_{\partial\Omega}$.

Důkaz. Lze najít například v [34] na straně 27. □

Definice A.1. Lineární zobrazení z předchozí věty nazýváme *Operátor stop.*

Věta A.9. Kompaktní vnoření do $\mathbf{L}^p(\Omega)$
Nechť $\Omega \in C^{0,1}(\mathbb{R}^d)$, $r \in [1, d)$, pak platí

$$\forall p \in [1, r] : \quad \mathbf{W}^{1,r}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega). \tag{A.2}$$

Důkaz. Viz Věta 2.17 v [34] (Strana 28). □

Věta A.10. Vnoření do $\mathbf{L}^p(\partial\Omega)$
Nechť $\Omega \in C^{0,1}(\mathbb{R}^d)$, $r < d$, pak platí

$$\forall p \in \left[1, \frac{dr-r}{d-r}\right]: \quad \mathbf{W}^{1,r}(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^p(\partial\Omega). \tag{A.3}$$

Je-li navíc $p \neq \frac{dr-r}{d-r}$, pak je vnoření kompaktní.

Důkaz. Viz [39]. □

Lemma A.11. Hölderova (Duální) nerovnost
Pro každé $v \in \mathbf{L}^p(\Omega)$ a $u \in \mathbf{L}^{p'}(\Omega)$ platí:

$$\|uv\|_{1,\Omega} \leq \|v\|_{p,\Omega} \|u\|_{p',\Omega}. \tag{A.4}$$

Důkaz. Viz [34] (Lemma 2.6, strana 25). □

Lemma A.12. Schwarzova nerovnost pro Banachovy prostory
Mějme Banachův prostor $\mathbf{X}$ a jeho duální prostor $\mathbf{X}^*$. Pro každé $v \in \mathbf{X}$ a $u \in \mathbf{X}^*$ platí:

$$\langle u, v\rangle_{\mathbf{X}} \leq \|v\|_{\mathbf{X}} \|u\|_{\mathbf{X}^*}. \tag{A.5}$$

Důkaz. Lze najít například v [31]. □

Věta A.13. Alaogluova věta
Z každé omezené posloupnosti v reflexivním Banachově prostoru lze vybrat slabě konvergentní podposloupnost.

Důkaz. Viz (4.9.) v [31]. □

Věta A.14. Bogovského operátor
Nechť $\Omega(\subset \mathbb{R}^d) \in C^{0,1}$. Pak existuje lineární operátor $\mathcal{B}_\Omega = (\mathcal{B}^1_\Omega, \dots, \mathcal{B}^d_\Omega)$ s následujícími vlastnostmi ($\overline{L^p}(\Omega) := \{f \in \mathbf{L}^p(\Omega) \ : \ \int_\Omega \mathbf{f}\, d\mathbf{x} = 0$):

$$\begin{gathered}\mathcal{B}_\Omega : \overline{L^p}(\Omega) \to (W^{1,p}_0(\Omega))^d \\ div\, \mathcal{B}_\Omega(f) = f \ \ v\ \Omega, \quad f \in \overline{L^p}(\Omega),\end{gathered}$$

$$\|\nabla \mathcal{B}_\Omega(f)\|_p \leq c(p,\Omega)\|f\|_p \quad , p \in (1,\infty).$$

Jestliže $f = div\,\mathbf{g}$, kde $\mathbf{g} \in \mathbf{W}^{q,p}_{0,div}(\Omega)$ pro $q \in (1,\infty)$ pak: $\|\mathcal{B}_\Omega(f)\|_q \leq c(q,\Omega)\|\mathbf{g}\|_q$.
Jestliže $f \in \mathcal{D}(\Omega)$, pak $\mathcal{B}_\Omega(f) \in (\mathcal{D}(\Omega))^d$.

Důkaz. Převzato z [41] str. 164 - 181. □

Věta A.15. Poincarého nerovnost
Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ omezená, souvislá oblast, $1 \leq p \leq \infty$. Pak existuje konstanta $C_{poi} > 0$:

$$\|\mathbf{v} - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \mathbf{v}\, d\mathbf{x}\|_p \leq C_{poi}\|\nabla \mathbf{v}\|_p, \quad pro\ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)^d. \tag{A.6}$$

Důkaz. Viz theorem 1 na straně 275 v [9]. □

Lemma A.16. Kornova nerovnost I
Nechť $q \in (1, \infty)$. Pak existuje kladná konstanta $C_{(K,1)}$ závislá pouze na Ω a q taková, že pro všechna $\mathbf{v} \in \mathbf{W}^{1,q}(\Omega)^d$, jejichž stopa splňuje $tr\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\partial\Omega)$, platí:

$$C_{(K,1)}\|\mathbf{v}\|_{1,q} \leq \|\mathbf{D}(\mathbf{v})\|_q + \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(\partial\Omega)}. \tag{A.7}$$

Důkaz. Převzato z [4] (Lemma B.2 na straně 78). □

Věta A.17. Vitaliho věta
Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ omezená a $f^n : \Omega \to \mathbb{R}$ je integrovatelná funkce pro každé $n \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že

$$1) \lim_{n\to\infty} f^n(y) \textit{ existuje a je konečná pro s.v. } y \in \Omega,$$

$$2) \forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0 : \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_H |f^n(y)|dy < \epsilon, \quad \forall H \subset \Omega, |H| < \delta.$$

$$\textit{Pak} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f^n(y)dy = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f^n(y)dy.$$

Důkaz. Například v [1] (Strana 63). □

Reference

[1] H.W. Alt. *Lineare Funktionalanalysis (2nd edition).* Springer-Verlag, Berlin-Hidelberg-New York, 1992.

[2] H. Bellout, F. Bloom, and J. Nečas. Young measure-valued solutions for non-Newtonian incompressible fluids. *Comm. Partial Differential Equations*, 19(11-12): 1763–1803, 1994. ISSN 0360-5302.

[3] P.W. Bridgman. *The physics of high presure.* MacMillan, New York, 1931.

[4] M. Bulíček. *Navier's slip and evolutionary Navier-Stokes systems with pressure, shear-rate and temperature dependent viscosity.* Ph.D. thesis, Faculty of Mathematics and Physics, Charles University, Czech Republic, 2006.

[5] M. Bulíček and P. Kaplický. Shear-rate and pressure dependent viscosity regularity of steady planar flows. To appear in DCDS-S on october, 2007.

[6] M. Bulíček, J. Málek, and K. R. Rajagopal. Navier's slip and evolutionary Navier-Stokes-like systems with pressure and shear-rate dependent viscosity. *Indiana Univ. Math. J.*, 56(1):51–85, 2007. ISSN 0022-2518.

[7] P. Constantin and C. Foias. *Navier-Stokes equations.* Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1988. ISBN 0-226-11548-8; 0-226-11549-6.

[8] C. Ebmeyer, W. B. Liu, and M. Steinhauer. Global regularity in fractional order Sobolev spaces for the p-Laplace equation on polyhedral domains. *Z. Anal. Anwendungen*, 24(2):353–374, 2005. ISSN 0232-2064.

[9] L.C. Evans. *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, 1998.

[10] V. Fišerová. *Lipschitz functions in analysis of PDEs.* Diploma thesis, Faculty of Mathematics and Physics, Charles University, Czech Republic, 2007.

[11] M. Franta, J. Málek, and K. R. Rajagopal. On steady flows of fluids with pressure- and shear-dependent viscosities. *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 461(2055):651–670, 2005. ISSN 1364-5021.

[12] J. Frehse, J. Málek, and M. Steinhauer. On existence results for fluids with shear dependent viscosity—unsteady flows. In *Partial differential equations (Praha, 1998)*, volume 406 of *Chapman & Hall/CRC Res. Notes Math.*, pages 121–129. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2000.

[13] J. Frehse, J. Málek, and M. Steinhauer. On analysis of steady flows of fluids with shear-dependent viscosity based on the Lipschitz truncation method. *SIAM J. Math. Anal.*, 34(5):1064–1083 (electronic), 2003. ISSN 0036-1410.

[14] G.P. Galdi. *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations. Vol. I*, volume 38 of *Springer Tracts in Natural Philosophy.* Springer-Verlag, New York, 1994. ISBN 0-387-94172-X. Linearized steady problems.

[15] G.P. Galdi. *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations. Vol. II*, volume 39 of *Springer Tracts in Natural Philosophy*. Springer-Verlag, New York, 1994. ISBN 0-387-94150-9. Nonlinear steady problems.

[16] F. Gazzola. A note on the evolution Navier-Stokes equations with a pressure-dependent viscosity. *Z. Angew. Math. Phys.*, 48(5):760–773, 1997. ISSN 0044-2275.

[17] F. Gazzola. On stationary Navier-Stokes equations with a pressure-dependent viscosity. *Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A*, 128(1):107–119 (1995), 1994. ISSN 0021-2504.

[18] F. Gazzola and P. Secchi. Some results about stationary Navier-Stokes equations with a pressure-dependent viscosity. In *Navier-Stokes equations: theory and numerical methods (Varenna, 1997)*, volume 388 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, pages 31–37. Longman, Harlow, 1998.

[19] E. Hopf. Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen. *Math. Nachr.*, 4:213–231, 1951. ISSN 0025-584X.

[20] J. Hron, J. Málek, J. Nečas, and K. R. Rajagopal. Numerical simulations and global existence of solutions of two-dimensional flows of fluids with pressure- and shear-dependent viscosities. *Math. Comput. Simulation*, 61(3-6):297–315, 2003. ISSN 0378-4754. MODELLING 2001 (Pilsen).

[21] K.L. Johnson and R. Cameron. Shear behaviour of elastohydrodynamic oil at high rolling contact pressures. *Proc. Instn. Mech. Engrs.*, 182, 1967.

[22] K.L. Johnson and J.A. Greenwood. Thermal analysis of an eyring fluid in elastohydrodynamic traction. 1980.

[23] K.L. Johnson and J.L. Tevaarkwerk. Shear behaviour of elastohydrodynamic oil films. *Proc. R. Soc. Lond.*, 1977.

[24] P. Kaplický. Some remarks to regularity of flow of generalized Newtonian fluid. In *EQUADIFF 2003*, pages 377–379. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2005.

[25] P. Kaplický. Regularity of flows of a non-Newtonian fluid subject to Dirichlet boundary conditions. *Z. Anal. Anwendungen*, 24(3):467–486, 2005. ISSN 0232-2064.

[26] P. Kaplický, J. Málek, and J. Stará. $C^{1,\alpha}$-solutions to a class of nonlinear fluids in two dimensions—stationary Dirichlet problem. *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)*, 259(Kraev. Zadachi Mat. Fiz. i Smezh. Vopr. Teor. Funkts. 30):89–121, 297, 1999. ISSN 0373-2703.

[27] A. A. Kiselev and O. A. Ladyzhenskaya. On the solution of the linearized equations of a plane unsteady flow of a viscous incompressible fluid. *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, 95:1161–1164, 1954. ISSN 0002-3264.

[28] O. A. Ladyzhenskaya. *The mathematical theory of viscous incompressible flow*. Second English edition, revised and enlarged. Translated from the Russian by Richard A. Silverman and John Chu. Mathematics and its Applications, Vol. 2. Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1969.

[29] J. Leray. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. *Acta Math.*, 63(1):193–248, 1934. ISSN 0001-5962.

[30] J.-L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires.* Dunod, 1969.

[31] J. Lukeš. *Notes on functional analysis.* Karolinum, Prague, 1998.

[32] J. Málek and K. R. Rajagopal. Mathematical issues concerning the Navier-Stokes equations and some of its generalizations. In *Evolutionary equations. Vol. II*, Handb. Differ. Equ., pages 371–459. Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2005.

[33] J. Málek, J. Nečas, and M. Růžička. On the non-Newtonian incompressible fluids. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 3(1):35–63, 1993. ISSN 0218-2025.

[34] J. Málek, J. Nečas, M. Rokyta, and M. Růžička. *Weak and measure-valued solutions to evolutionary PDEs.* Chapman & Hall, London, 1996. ISBN 0-412-57750-X.

[35] J. Málek, J. Nečas, and M. Růžička. On weak solutions to a class of non-Newtonian incompressible fluids in bounded three-dimensional domains: the case $p \geq 2$. *Adv. Differential Equations*, 6(3):257–302, 2001. ISSN 1079-9389.

[36] J. Málek, J. Nečas, and K. R. Rajagopal. Global existence of solutions for flows of fluids with pressure and shear dependent viscosities. *Appl. Math. Lett.*, 15(8): 961–967, 2002. ISSN 0893-9659.

[37] J. Málek, J. Nečas, and K.R. Rajagopal. Global analysis of the flows of fluids with presure-dependent viscosities. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 165, 2002.

[38] J. Málek, G. Mingione, and J. Stará. Fluids with pressure dependent viscosity: partial regularity of steady flows. In *EQUADIFF 2003*, pages 380–385. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2005.

[39] J. Nečas. *Les Méthodes Directes en la Théorie des Equations Eliptiques.* Academia (Masson), Prague (Paris), 1967.

[40] I. Newton. *Philosophiæ naturalis principia mathematica.* J. Societatis Regiae, ac Typis J. Streater, London, 1687.

[41] A. Novotný and I. Straškraba. *Introduction to the Mathematical Theory of Compressible Flow.* Oxford University Press, Oxford, 2004.

[42] M. Renardy. Some remarks on the Navier-Stokes equations with a pressure-dependent viscosity. *Comm. Partial Differential Equations*, 11(7):779–793, 1986. ISSN 0360-5302.

[43] M. Růžička. *Nichtlineare Funktional-analysis.* Springer, Berlin, 2004.

[44] G.G. Stokes. On the theories of internal friction of fluids in motion, and th equilibrium and motion of elastic solids. *Trans. Cambridge Phil.*, 1845.

[45] R. Temam. *Navier-Stokes equations.* AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2001. ISBN 0-8218-2737-5. Theory and numerical analysis, Reprint of the 1984 edition.