

Obsah

1	Matematické pojmy a značenia	2
2	Rovnice pohybu	7
3	Formulácia úlohy	12
3.1	Vstupné dáta úlohy	12
3.2	Rovnice pre pohyb profilu	14
3.3	ALE formulácia	15
3.4	Slabá formulácia	16
3.5	Okrajové podmienky	17
3.6	Diskrétna úloha	18
4	Existencia riešenia diskretného problému	21
5	Konštrukcia ALE zobrazenia pre izolovaný profil	25
6	Riešenie diskretného problému	27
6.1	Triangulácia oblasti	27
6.2	Voľba bázových funkcií	27
6.3	Zostavenie sústav lineárnych rovníc pre výpočet rýchlosti a tlaku	29
6.4	Riešenie lineárnych sústav	30
7	Príklady	32
8	Diskusia	36
9	Záver	37
	Zoznam literatúry	38

Kapitola 1

Matematické pojmy a značenia

V nasledujúcom texte budeme používať toto značenie:

Uvažovaný priestor bude euklidovský priestor \mathcal{E} nad vektorovým priestorom \mathcal{V} .

Pojem **tenzor** bude znamenať lineárne zobrazenie z \mathcal{V} do \mathcal{V} . Označme nasledovné množiny tenzorov:

Lin = množina všetkých tenzorov,

Lin^+ = množina všetkých tenzorov S , pre ktoré je $\det S > 0$,

Sym = množina všetkých symetrických tenzorov,

Skw = množina všetkých antisymetrických tenzorov,

Psym = množina všetkých symetrických, pozitívne definitných tenzorov,

Orth = množina všetkých ortogonálnych tenzorov,

Orth^+ = množina všetkých rotácií.

Pojem **telesa** \mathcal{B} budeme používať na popis regulárnej oblasti v \mathcal{E} a budeme naň odkazovať ako na **referenčnú konfiguráciu** \mathcal{B} . Body $\mathbf{p} \in \mathcal{B}$ nazývame **materiálovými bodmi**.

Deformáciou telesa \mathcal{B} rozumieme hladké, bijektívne zobrazenie f , ktoré zobrazuje \mathcal{B} na uzavretú oblasť v \mathcal{E} , a ktoré spĺňa $\det \nabla f > 0$. Tenzor $F(\mathbf{p}) = \nabla f(\mathbf{p})$ sa nazýva **deformačný gradient** a patrí do Lin^+ .

Nech \mathcal{B} je teleso. **Pohybom** \mathcal{B} nazveme zobrazenie

$$x : \mathcal{B} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}$$

triedy C^3 , pre ktoré je $x(\cdot, t)$ pre každý pevný čas t deformáciou \mathcal{B} . **Polohu** materiálového bodu \mathbf{p} v čase t označíme

$$\mathbf{x} = x(\mathbf{p}, t)$$

a $\mathcal{B}_t = x(\mathcal{B}, t)$ bude značiť priestor vyplnený telesom v čase t . Definujeme **trajektóriu** telesa ako množinu

$$\mathcal{T} = \{(\mathbf{x}, t) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{B}_t, t \in \mathbb{R}\}.$$

V každom čase t , $x(\cdot, t)$ má inverziu

$$p(\cdot, t) : \mathcal{B}_t \rightarrow \mathcal{B}$$

tak, že

$$x(p(\mathbf{x}, t), t) = \mathbf{x}, \quad p(x(\mathbf{p}, t), t) = \mathbf{p}.$$

Pre dané $(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{T}$, je

$$\mathbf{p} = p(\mathbf{x}, t)$$

materiálový bod, ktorý má v čase t polohu \mathbf{x} . Zobrazenie

$$p : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{B}$$

nazývame **referenčným zobrazením** pohybu.

Materiálovým poľom rozumieme zobrazenie definované na $\mathcal{B} \times \mathbb{R}$; a **priestorovým poľom** zobrazenie definované na \mathcal{T} . Môžeme transformovať materiálové pole na priestorové a naopak. Definujeme **priestorový popis** Φ_s materiálového poľa $(\mathbf{p}, t) \rightarrow \Phi(\mathbf{p}, t)$ ako

$$\Phi_s(\mathbf{x}, t) = \Phi(p(\mathbf{x}, t), t),$$

a **materiálový popis** Ω_m priestorového poľa $(\mathbf{x}, t) \rightarrow \Omega(\mathbf{x}, t)$ ako

$$\Omega_m(\mathbf{p}, t) = \Omega(x(\mathbf{p}, t), t).$$

Pre dané materiálové pole Φ značíme

$$\dot{\Phi}(\mathbf{p}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{p}, t)$$

deriváciu vzhľadom k času t pre pevný bod \mathbf{p} , a

$$\nabla \Phi(\mathbf{p}, t) = \nabla_p \Phi(\mathbf{p}, t)$$

gradient vzhľadom k \mathbf{p} pre t pevné.

Podobne, pre priestorové pole Ω značíme

$$\Omega'(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \Omega(\mathbf{x}, t)$$

deriváciu vzhľadom k času t pre pevnú polohu \mathbf{x} , a

$$\text{grad } \Omega(\mathbf{x}, t) = \nabla_x \Omega(\mathbf{x}, t)$$

značí gradient vzhľadom k \mathbf{x} pre pevné t .

Definujeme **materiálovú časovú deriváciu** $\dot{\Omega}$ priestorového poľa Ω ako

$$\dot{\Omega} = ((\Omega_m) \cdot)_s;$$

t.j.,

$$\dot{\Omega}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \Omega(x(\mathbf{p}, t), t)|_{\mathbf{p}=p(\mathbf{x}, t)}.$$

Ďalej, definujeme **priestorovú divergenciu** div ako operáciu divergencie pre priestorové pole tak, že grad je príslušný gradient. Teda, pre priestorové vektorové pole v , máme

$$\text{div } v(\mathbf{x}, t) = \text{tr grad } v(\mathbf{x}, t).$$

Rýchlosťou materiálového bodu \mathbf{p} rozumieme

$$\dot{x}(\mathbf{p}, t) = \frac{\partial}{\partial t} x(\mathbf{p}, t)$$

a $v : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{V}$ definované predpisom

$$v(\mathbf{x}, t) = \dot{x}(p(\mathbf{x}, t), t)$$

je **priestorový popis rýchlosti**. Priestorové pole

$$L = \text{grad } v$$

sa nazýva **gradientom rýchlosti**. Označíme

$$L = D + W,$$

kde D a W , značia symetrickú a antisymetrickú časť L .

Použitím predchádzajúcej definície gradientu rýchlosti sa dá ukázať, že $\dot{F} = L_m F$ je materiálová časová derivácia deformačného gradientu F .

Systémom síl pre \mathcal{B} počas pohybu (s trajektóriou \mathcal{T}), rozumieme dvojicu (s, b) zobrazení

$$s : \mathcal{N} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{V}, \quad b : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{V},$$

kde \mathcal{N} je množina všetkých jednotkových vektorov z \mathcal{V}^1 .

Podľa Cauchyho vety², existuje priestorové tenzorové pole T (nazvané **Cauchyho napätie**) tak, že

- $s(n) = Tn$ pre každý jednotkový vektor n ,
- T je symetrické,
- T spĺňa **rovniciu pohybu**

$$\operatorname{div} T + b = \rho \dot{v},$$

kde ρ je hustota pohybu.

Dynamickým procesom rozumieme dvojicu (x, T) , kde

- x je pohyb,
- T je symetrické tenzorové pole na trajektórii \mathcal{T} pohybu \mathbf{x} ,
- $T(\mathbf{x}, t)$ je hladké zobrazenie \mathbf{x} do \mathcal{B}_t .

Materiálové teleso je teleso \mathcal{B} spolu s množinou \mathcal{C} dynamických procesov. \mathcal{C} nazývame **konštitučnou triedou** telesa.

Nech x a x^* sú pohybmi telesa \mathcal{B} . Vravíme, že x a x^* sú *spojené zmenou pozorovateľ'a*, ak

$$x^*(\mathbf{p}, t) = q(t) + Q(t)[x(\mathbf{p}, t) - o] \quad (1.1)$$

pre každý materiálový bod \mathbf{p} a čas t , kde $q(t)$ je bod v priestore a $Q(t)$ je rotácia.

Pre

$$L = \operatorname{grad} v, \quad L^* = \operatorname{grad} v^*,$$

kde

$$v = (\dot{x})_s, \quad v^* = (\dot{x}^*)_s,$$

dostaneme

$$L^* = QLQ^T + \dot{Q}Q^T, \quad D^* = QDQ^T,$$

kde D a D^* sú symetrické časti L a L^* . Máme tak $\operatorname{tr} L^* = \operatorname{tr} L$.

¹Presnejšia definícia je v Gurtin [gu, s. 99].

²Vid' Gurtin [gu, s. 101].

Vravíme, že dvojica dynamických procesov (x, T) a (x^*, T^*) je spojená zmenou pozorovateľa, ak existujú C^3 zobrazenia

$$q : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}, \quad Q : \mathbb{R} \rightarrow \text{Orth}^+$$

tak, že

- (1.1) platí pre všetky $\mathbf{p} \in \mathcal{B}$ a $t \in \mathbb{R}$,
- $T^* = QTQ^T$ je trajektóriou x .

Vravíme, že **odozva materiálového telesa je nezávislá na pozorovateľovi**, ak má príslušná konštitučná trieda \mathcal{C} nasledujúcu vlastnosť: ak proces (x, T) patrí do \mathcal{C} , potom tam patrí aj každý dynamický proces spojený s (x, T) zmenou pozorovateľa.

Kapitola 2

Rovnice pohybu

V tejto práci riešime prúdenie stlačiteľnej Newtonovskej tekutiny, čo je materiál, pre ktorý je tenzor Cauchyho napätia definovaný konštitučnou rovnicou tvaru

$$T = -\pi I + C[L], \quad (2.1)$$

kde C je lineárna funkcia gradientu rýchlosti

$$L = \text{grad } v.$$

V knihe Gurtin [gu, s. 147], sa pod pojmom Newtonovská tekutina rozumie *nestlačiteľná* Newtonovská tekutina. Navier-Stokesové rovnice sú odvodené s predpokladom $\text{tr } L = 0$, ktorý znamená nestlačiteľnosť. V našom prípade potrebujeme zahrnúť efekty stlačiteľnosti a člen $\text{tr } L = \text{div } v$ nemôžeme zanedbať. Pod pojmom Newtonovská tekutina budeme rozumieť *stlačiteľnú* Newtonovskú tekutinu. Z dôvodu zjednodušenia konštitučnej rovnice definujeme **extra napätie** T_0 vzt'ahom

$$T_0 = T + \pi I = T - \frac{1}{3}(\text{tr } T)I.$$

Konštitučná rovnica (2.1) tak nadobudne jednoduchý tvar

$$T_0 = C[L]. \quad (2.2)$$

V súlade s predchádzajúcim, **Newtonovskou tekutinou** rozumieme stlačiteľné materiálové teleso spolu s nasledujúcou konštitučnou rovnicou: existuje lineárna *funkcia odozvy*

$$C : \text{Lin} \rightarrow \text{Sym}$$

tak, že konštitučná trieda \mathcal{C} je množinou všetkých dynamických procesov (x, T) spĺňajúcich konštitučnú rovnicu (2.2).

V nasledujúcej vete ukážeme, že funkcia odozvy je určená *dvoma konštantami*.

Veta¹ Nutná a postačujúca podmienka aby odozva Newtonovskej tekutiny bola nezávislá na zmene pozorovateľa je, že funkcia odozvy C má tvar

$$C[L] = 2\mu D + \lambda(\operatorname{tr} L)I \quad (2.3)$$

pre každé $L \in \operatorname{Lin}$, kde

$$D = \frac{1}{2}(L + L^T).$$

Skalárne konštanty μ a λ sú takzvané **koeficienty viskozity** tekutiny.

Dôkaz. Použijeme dôkaz uvedený v Gurtinovi s tým, že v ňom zahrnieme efekty stlačiteľnosti.

Predpokladajme, že platí (2.3). Nech (x, T) patrí do konštitučnej triedy \mathcal{C} tekutiny. Potom

$$T_0 = 2\mu D + \lambda(\operatorname{tr} L)I.$$

Nech ďalej (x^*, T^*) je spojené s (x, T) zmenou pozorovateľa. Potom

$$T^* = QTQ^T, \quad D^* = QDQ^T,$$

a

$$\operatorname{tr} T^* = \operatorname{tr}(QTQ^T) = \operatorname{tr} T.$$

Pre extra napätie T_0^* máme

$$\begin{aligned} T_0^* &= T^* - \frac{1}{3}(\operatorname{tr} T^*)I = QTQ^T - \frac{1}{3}(\operatorname{tr} T)QQ^T = QT_0Q^T \\ &= Q(2\mu D)Q^T + \lambda \operatorname{tr}(QLQ^T)I = 2\mu D^* + \lambda(\operatorname{tr} L^*)I. \end{aligned}$$

V predchádzajúcom výraze sme využili rovnosť

$$L^* = QLQ^T + \dot{Q}Q^T$$

a pretože $\dot{Q}Q^T \in \operatorname{Skw}$, máme

$$\operatorname{tr} L^* = \operatorname{tr}(QLQ^T) = \operatorname{tr} L,$$

¹Vid' Gurtin [gu, s. 149].

Teda $(x^*, T^*) \in \mathcal{C}$ a odozva je nezávislá na pozorovateľovi. Tým máme ukazané, že podmienka (2.3) je postačujúca.

Dôkaze nutnosti je založený na nasledujúcej lemme a vete o reprezentácii.

Lemma. Nech $L \in \text{Lin}$ je konštantný tenzor. Potom existuje pohyb x s gradientom rýchlosti rovným

$$\text{grad } v = L. \quad (2.4)$$

Dôkaz. Uvažujme

$$F(t) = e^{Lt}$$

kde F je jediné riešenie

$$\dot{F} = LF, \quad F(0) = I. \quad (2.5)$$

Teda

$$x(\mathbf{p}, t) = \mathbf{q} + F(t)[\mathbf{p} - \mathbf{q}]$$

definuje pohyb s deformačným gradientom F . Ďalej, (2.4) vyplýva z (2.5)₁, pretože $\dot{F} = (\text{grad } v)_m F$ a $L = L_m$. \square

Veta o reprezentácii pre izotropické tenzorové funkcie.² Lineárna funkcia

$$G : \text{Sym} \rightarrow \text{Sym}$$

je izotropická práve vtedy, keď existujú skalárne konštanty μ a λ také, že

$$G(A) = 2\mu A + \lambda(\text{tr } A)I \quad (2.6)$$

pre každé $A \in \text{Sym}$.

Vráťme sa k dôkazu predchádzajúcej vety. K ukázaniu *nutnosti* (2.3) predpokladajme, že

$$\text{odozva je nezávislá na pozorovateľovi.} \quad (2.7)$$

Nech $L \in \text{Lin}$ je ľubovoľné, nech ďalej x je pohyb zostrojený v predchádzajúcej lemme, a nech $T = T_0 = C[L]$ je konštantné pole definované rovnosťou (2.2). Je teda $(x, T) \in \mathcal{C}$. Nech (x^*, T^*) je spojené s (x, T) zmenou pozorovateľa. Potom podľa (2.7) je $(x^*, T^*) \in \mathcal{C}$ a

$$T_0^* = C[L^*]. \quad (2.8)$$

²Vid' Gurtin [gu, s. 235].

Kedže

$$T_0^* = QT_0Q^T, \quad L^* = QLQ^T + \dot{Q}Q^T;$$

zo vzťahu (2.8) máme

$$QT_0Q^T = C[QLQ^T + \dot{Q}Q^T],$$

a použitím (2.2) a (2.4) dostaneme

$$QC[L]Q^T = C[QLQ^T + \dot{Q}Q^T]. \quad (2.9)$$

Táto rovnosť platí zrejme pre každé $L \in \text{Lin}$ (definičný obor C) a pre každú hladkú funkciu $Q : \mathbb{R} \rightarrow \text{Orth}^+$ triedy C^3 . Uvažujme L pevné a definujme

$$Q(t) = e^{-Wt},$$

kde

$$W = \frac{1}{2}(L - L^T).$$

Potom, pretože W je antisymetrické, je $Q(t)$ rotácia, a

$$Q(0) = I, \quad \dot{Q}(0) = -W.$$

Využitím takto definovanej funkcie Q v rovnici (2.9) pre $t = 0$ dostaneme

$$C[L] = C[L - W] = C[D],$$

kde

$$D = \frac{1}{2}(L + L^T).$$

Teda C je kompletne definované svojou reštrikciou na Sym . Ďalej, nech Q je konštantná funkcia s hodnotami v Orth^+ . Potom z (2.9) pre $L = D$ ($D \in \text{Sym}$) dostávame

$$QC[D]Q^T = C[QDQ^T].$$

Pretože táto rovnosť platí pre každé $D \in \text{Sym}$ a každé $Q \in \text{Orth}^+$, reštrikcia C na Sym je izotropická. Z reprezentácie (2.6) tak dostávame

$$C[D] = 2\mu D + \lambda(\text{tr } L)I$$

pre každé $D \in \text{Sym}$.

Podľa (2.3), konštitučná rovnica (2.1) dostane tvar

$$T = -\pi I + 2\mu D + \lambda(\text{tr } L)I. \quad (2.10)$$

□

Uvažujme rovnicu pohybu v tvare

$$\rho[v' + (\text{grad } v)v] = \text{div } T + b.$$

a dosadíme za T podľa (2.10). Dostávame,

$$2 \text{ div } D = \text{div} (\text{grad } v + \text{grad } v^T) = \Delta v + \text{grad } \text{div } v$$

a

$$\text{div} (\text{tr } L)I = \text{grad} (\text{tr } L) = \text{grad } \text{div } v,$$

kde $\Delta = \text{div grad}$ je priestorový laplacian. Rovnica pohybu tak prejde v tvar

$$\rho[v' + (\text{grad } v)v] = \mu \Delta v + (\lambda + \mu) \text{grad } \text{div } v - \text{grad } \pi + b. \quad (2.11)$$

Tieto (vektorové) rovnice sa nazývajú **Navier-Stokesove rovnice**, pre dané μ , λ a b predstavujú nelineárny systém parciálnych diferenciálnych rovníc pre rýchlosť v , hustotu ρ a tlak π . Dané rovnice doplníme o rovnicu kontinuity v tvare

$$\rho' + \text{div} (\rho v) = 0. \quad (2.12)$$

Máme tak štyri rovnice pre päť neznámych, preto musíme dodať ešte jednu ďalšiu rovnicu. Budeme uvažovať barotropické prúdenie³, pre ktoré je tlak definovaný známou funkciou hustoty

$$\pi = \hat{\pi}(\rho). \quad (2.13)$$

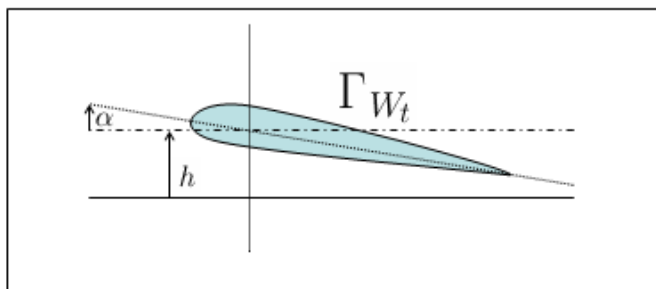
V ďalšom budeme predpokladať, že $\mu > 0$, $\lambda + \mu > 0$. Druhá nerovnosť je splnená napr. v prípade $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$, ktorý sa obvykle používa v technickej praxi.

³Vid' Feistauer et al. [fe, s. 33].

Kapitola 3

Formulácia úlohy

V nasledujúcom texte sa budeme zaoberať dvoj-dimenzionálnym modelom popisujúcim interakciu viskózne, stlačiteľnej tekutiny a leteckého profilu. Profil bude predstavovať tuhé teleso s dvoma stupňami voľnosti - vertikálnymi a torznými vibráciami (vid' Obrázok 3.1). Rovnice popisujúce pohyb profilu uvedieme neskôr.



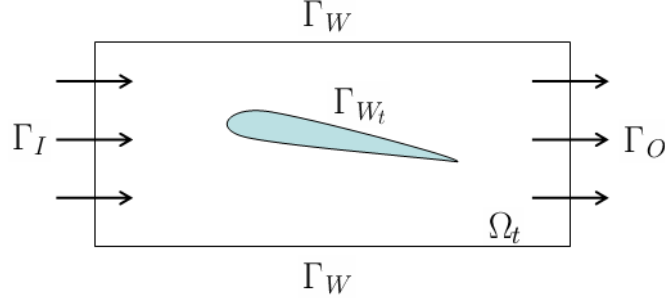
Obrázok 3.1: Model leteckého profilu

Daná úloha má časovo závislú hranicu (pohybujúci sa profil) a teda aj časovo závislú výpočtovú oblasť (vid' Obrázok 3.2).

3.1 Vstupné dáta úlohy

Uvažujme úlohu danú na oblasti

$$\tilde{\Omega} := \bigcup_{t \in [0, T]} \Omega_t \times \{t\}.$$



Obrázok 3.2: Zadanie úlohy

Rozdeľme hranicu oblasti na štyri časti. Tri z nich budú časovo nezávislé, štvrtá predstavuje pohybujúci sa letecký profil a na čase závisí:

$$\begin{array}{ll}
 \Gamma_I := \Gamma_I \times [0, T] & \text{vstup,} \\
 \Gamma_O := \Gamma_O \times [0, T] & \text{výstup,} \\
 \Gamma_W := \Gamma_W \times [0, T] & \text{myslená stena prúdenia,} \\
 \Sigma := \bigcup_{t \in [0, T]} \Gamma_{W_t} \times \{t\} & \text{letecký profil.}
 \end{array}$$

V oblasti $\tilde{\Omega}$ uvažujeme Navier-Stokesove rovnice, rovnicu kontinuity a rovnicu pre tlak barotropickej tekutiny:

$$\begin{aligned}
 \rho[v' + (\text{grad } v)v] &= \mu \Delta v + (\lambda + \mu) \text{grad div } v - \text{grad } \pi + b & \text{v } \tilde{\Omega}, \\
 \rho' + \text{div}(\rho v) &= 0 & \text{v } \tilde{\Omega}, \\
 \pi &= \hat{\pi}(\rho) & \text{v } \tilde{\Omega}.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Okrajové podmienky pre časovo nezávislú časť hranice:

$$\begin{aligned}
 v &= v_D & \text{na } \Gamma_I \cup \Gamma_W, \\
 -(\pi - \pi_{ref})n + \mu(\text{grad } v)n + (\lambda + \mu)(\text{div } v)n &= 0 & \text{na } \Gamma_O, \\
 \rho &= \rho_D & \text{na } \Gamma_I.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Počiatkové podmienky:

$$\begin{aligned}
 v(x, 0) &= v_0(x) & \text{v } \Omega_0, \\
 \rho(x, 0) &= \rho_0(x) & \text{v } \Omega_0.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Potrebuje tiež predpísať okrajové podmienky na časti hranice Σ a počiatkové podmienky na Ω_0 . Tomu sa budeme venovať neskôr.

Skutočnosť, že oblasť vyplnená tekutinou sa s časom mení, spôsobuje určité obtiaže. Môžeme ich vyriešiť použitím Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) formulácie pre matematický popis úlohy s pohyblivou hranicou.

3.2 Rovnice pre pohyb profilu

V našej úlohe môže profil vykonávať dva druhy pohybu: vertikálne a torzné vibrácie. Tieto sú popísané dvoma stupňami voľnosti: uhlom náklonu profilu α a vertikálnou výchylkou h . Vývoj hodnôt týchto veličín pre malé výchylky profilu je popísaný diferenciálnymi rovnicami ¹

$$\begin{aligned} m\ddot{h} + D_{hh}\dot{h} + D_{h\alpha}\dot{\alpha} + S_\alpha\ddot{\alpha} + k_{hh}h &= -L_2, \\ I_\alpha\ddot{\alpha} + D_{\alpha h}\dot{h} + D_{\alpha\alpha}\dot{\alpha} + S_\alpha\dot{h} + k_{\alpha\alpha}\alpha &= M. \end{aligned} \quad (3.4)$$

V uvedených rovniciach používame nasledovné označenie:

$$\begin{aligned} m &= \int_{\Pi_t} \tilde{\rho} dx && \text{hmotnosť profilu,} \\ S_\alpha &= \int_{\Pi_t} x \tilde{\rho} dx && \text{statický moment,} \\ I_\alpha &= \int_{\Pi_t} x^2 \tilde{\rho} dx && \text{moment zotrvačnosti,} \\ L_2 &= - \int_{\Gamma_{W_t}} \sum_{j=1}^2 T_{2j} n_j dS && \text{aerodynamický vztlak,} \\ M &= - \int_{\Gamma_{W_t}} \sum_{i,j=1}^2 T_{ij} n_j r_i^{ort} dS && \text{aerodynamický moment,} \end{aligned}$$

kde Π_t je plocha profilu, $\tilde{\rho}$ je hustota profilu, $\Gamma_{W_t} = \partial\Pi_t$, T je tenzor napätia získaný z (2.10), $r_1^{ort} = -(x_2 - x_{EA2})$ a $r_2^{ort} = x_1 - x_{EA1}$. Ďalej,

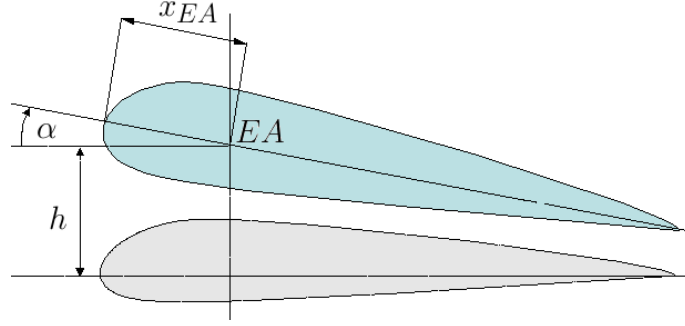
$$\begin{aligned} k_{hh} &&& \text{vertikálna tuhosť,} \\ k_{\alpha\alpha} &&& \text{torzná tuhosť,} \\ D_{hh}, D_{h\alpha}, D_{\alpha h}, D_{\alpha\alpha} &&& \text{koeficienty viskózneho tlmenia} \end{aligned}$$

sú dané (konštantné) parametre.

Rovnice (3.4) doplníme týmito počiatočnými podmienkami

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= \alpha_0, & \dot{\alpha}(0) &= \alpha_1, \\ h(0) &= h_0, & \dot{h}(0) &= h_1. \end{aligned}$$

¹Vid' Růžička [ru, s. 17].



Obrázok 3.3: Vibrácie profilu

3.3 ALE formulácia

Uvažujeme Navier-Stokesove rovnice v pohybujúcej sa oblasti $\tilde{\Omega} = \Omega_t \times [0, T]$ (presnejšie $\bigcup_{t \in [0, T]} \Omega_t \times \{t\}$).

Za účelom simulácie prúdenia tekutiny v pohybujúcej sa oblasti použijeme *Arbitrary Lagrangian-Eulerian* (ALE) metódu².

Nech Ω_0 je počiatočná (referenčná) oblasť a Ω_t výpočtová oblasť v (neskoršom) čase t . Zavedieme ALE zobrazenie

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_t : \Omega_0 &\rightarrow \Omega_t \\ X &\mapsto y = y(X, t) = \mathcal{A}_t(X), \end{aligned}$$

ktoré zobrazuje referenčnú oblasť Ω_0 na výpočtovú oblasť Ω_t tak, že \mathcal{A}_t je spojitě diferencovateľné a bijektívne na Ω_0 .

Definujeme pole *rýchlosti pohybu oblasti* v bodoch X referenčnej oblasti pre každú časovú vrstvu t

$$\tilde{w}(X, t) = \frac{\partial}{\partial t} y(X, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{A}_t(X),$$

ktorá má v priestorových premenných tvar

$$w = \tilde{w} \circ A_t^{-1}, \quad \text{i.e.} \quad w(y, t) = \tilde{w}(\mathcal{A}_t^{-1}(y), t).$$

Pre funkciu $f : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ definujeme *ALE deriváciu* f vzt'ahom

$$\frac{D^{\mathcal{A}}}{Dt} f(y, t) = \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}(X, t),$$

²Vid' napr. Quarteroni [qa, s. 37]; Sváček [sv, s. 6].

kde $\tilde{f} = f \circ \mathcal{A}_t$ a $X = \mathcal{A}_t^{-1}(y)$.

Použitím reťazového pravidla pre deriváciu dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{D^{\mathcal{A}}}{Dt} f(y, t) &= \frac{\partial}{\partial t} f(\mathcal{A}_t(X), t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} f(y, t) + \text{grad } f(y, t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{A}_t(X)|_{X=\mathcal{A}_t^{-1}(y)} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} f(y, t) + \text{grad } f(y, t) \cdot w(y, t). \end{aligned}$$

Využitím ALE derivácie môžeme prepísať Navier-Stokesove rovnice do tvaru

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{D^{\mathcal{A}}}{Dt} v + (\text{grad } v)(v - w) \right] &= \mu \Delta v + (\lambda + \mu) \text{grad div } v - \text{grad } \pi + b \\ \frac{D^{\mathcal{A}}}{Dt} \rho + \text{div}(\rho v) - \text{grad } \rho \cdot w &= 0 \\ \pi &= \hat{\pi}(\rho) \end{aligned} \quad (3.5)$$

kde všetky rovnice uvažujeme v oblasti $\tilde{\Omega}$. Poznamenajme, že rovnica kontinuity môže byť zapísaná v tvare

$$\frac{D^{\mathcal{A}}}{Dt} \rho + \rho \text{div}(v) + \text{grad } \rho \cdot (v - w) = 0. \quad (3.6)$$

Okrajové a počiatkové podmienky ostanú nezmenené. Poznamenajme, že predpokladáme $\mu > 0$, $\lambda + \mu > 0$.

3.4 Slabá formulácia

Definujme najprv priestory testovacích funkcií. Nech $q \in Q = L^2(\Omega_t)$ a $u \in V = \{u \in H^1(\Omega_t)^2 : u|_{\Gamma_D} = 0\}$, kde $\Gamma_D = \Gamma_I \cup \Gamma_W \cup \Gamma_{W_t}$ je časť hranice, na ktorej predpisujeme Dirichletovu okrajovú podmienku.

Vynásobením rovnice (3.5)₁ ľubovoľnou $u \in V$, integrovaním cez Ω_t a použitím Greenovej vety dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \rho \frac{D^{\mathcal{A}}}{Dt} v \cdot u \, dx + \int_{\Omega_t} \rho (\text{grad } v)(v - w) \cdot u \, dx &= \\ - \mu \int_{\Omega_t} \text{grad } v \cdot \text{grad } u \, dx - (\lambda + \mu) \int_{\Omega_t} \text{div } v \text{div } u \, dx &+ \\ + \int_{\Omega_t} \pi \text{div } u \, dx + \int_{\Omega_t} b \cdot u \, dx &+ \\ + \int_{\Gamma_O} [-\pi + \mu (\text{grad } v) + (\lambda + \mu)(\text{div } v)] n \cdot u \, dS & \end{aligned}$$

Podobným postupom s rovnicou (3.6), kde za testovaciu funkciu volíme $q \in Q$, dostaneme

$$\int_{\Omega_t} \frac{D^{\mathcal{A}}}{Dt} \rho q \, dx + \int_{\Omega_t} \rho \operatorname{div} v q \, dx + \int_{\Omega_t} \operatorname{grad} \rho \cdot (v - w) q \, dx = 0$$

Pre zjednodušenie zapisuje definujeme lineárne formy³:

$$\begin{aligned} a(v, u) &= \mu (\operatorname{grad} v, \operatorname{grad} u) + (\lambda + \mu)(\operatorname{div} v, \operatorname{div} u), \\ b(u, q) &= (\operatorname{div} u, q), \\ \alpha(v, \rho, q) &= (v \cdot \operatorname{grad} \rho, q), \\ d(\rho, w, v, u) &= (\rho(\operatorname{grad} v)w, u), \\ e(\rho, v, q) &= (\rho \operatorname{div} v, q). \end{aligned}$$

Použitím takto definovaných foriem prepíšeme pôvodné rovnice do tvaru

$$\begin{aligned} \left(\rho \frac{D^{\mathcal{A}}}{Dt} v, u \right) + d(\rho, v - w, v, u) + a(v, u) \\ = b(u, \pi) + (b, u) + \int_{\Gamma_o} \pi_{ref} n \cdot u \, dS, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\left(\frac{D^{\mathcal{A}}}{Dt} \rho, q \right) + e(\rho, v, q) + \alpha(v - w, \rho, q) = 0,$$

kde sme využili takzvanú slabú okrajovú podmienku (3.2)₂.

3.5 Okrajové podmienky

Predpokladajme, že pre každé $t \in [0, T]$ existuje $v^* \in H^1(\Omega_t)^2$ tak, že

$$\begin{aligned} v^*(x, t) &= v_D(x, t), & x \in \Gamma_I \cup \Gamma_W \\ v^*(x, t) &= w(x, t), & x \in \Gamma_{W_t} \end{aligned}$$

(v zmysle stôp). Potom je “slabá formulácia” úlohy nasledová:

- Nájst’ v tak, že $v - v^* \in V$; $\rho \in Q$
- rovnica (3.7)₁ je splnená $\forall u \in V$.

³Označenie z Feistauer et al. [fe, s. 368].

Okrajová podmienka pre hustotu ρ predpísaná na vstupe Γ_I je formulovaná v takzvanom slabom integrálnom zmysle⁴

$$\begin{aligned} \left(\frac{D^{\mathcal{A}}}{Dt} \rho, q\right) + e(\rho, v, q) + \alpha(v - w, \rho, q) - \gamma \int_{\Gamma_I} \rho v_D \cdot n q \, dS = \\ - \gamma \int_{\Gamma_I} \rho_D v_D \cdot n q \, dS \quad \forall q \in Q, \end{aligned} \quad (3.8)$$

kde γ je vhodný parameter.

Vo vyššie uvedenej formulácii predpokladáme, že funkcie $\rho, v, b, w, \rho_D, v_D$ sú natoľko regulárne, aby formy vystupujúce v (3.7) a (3.8) mali zmysel.

3.6 Diskrétna úloha

Predpokladajme pre jednoduchosť, že oblasti Ω_t sú polygonálne. Nech $\{\mathcal{T}_h\}_{h \in (0, T)}$ je regulárny systém triangulácií oblasti $\tilde{\Omega} := \bigcup_{t \in [0, T]} \Omega_t \times \{t\}$. Na časovom intervale $[0, T]$ zvolíme delenie $t_n = n\tau, n = 0, \dots, r$ pre časový krok τ . Pre ALE deriváciu funkcie f definovanej na $\tilde{\Omega}$ máme

$$\begin{aligned} \frac{D^{\mathcal{A}}}{Dt} f(y_n, t_n) &= \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}(X, t_n) \\ &\approx (\tilde{f}(X, t_n) - \tilde{f}(X, t_{n-1}))/\tau \\ &= (f(y_n, t_n) - f(y_{n-1}, t_{n-1}))/\tau, \end{aligned}$$

kde $y_n = \mathcal{A}_{t_n}(X), y_{n-1} = \mathcal{A}_{t_{n-1}}(X)$.

Z dôvodu zjednodušenia zápisu budeme písať $f^n = f(y_n, t_n)$ a $d_{\mathcal{A}t} f^n = (f^n - f^{n-1})/\tau$.

Približné riešenie budeme hľadať na každej časovej vrstve t_n v konečnorozmernom priestore konečných elementov X_h a Q_h .

Položíme $Q_h = X_h^{(m)}$, $X_h = [X_h^{(k)}]^2$, $V_h = \{v_h \in [X_h^{(k)}]^2; v_h|_{\Gamma_D} = 0\}$, kde $X_h^{(p)} = \{v_h \in C(\tilde{\Omega}_h); v_h|_K \in P^p(K) \forall K \in \mathcal{T}_h\}$ a $P^p(K)$ je množina všetkých polynómov na K stupňa $\leq p$.

⁴Vid' Feistauer et al. [fe, s. 373].

Aproximujme priestory V a Q pomocou V_h a Q_h . Použijeme aproximácie

$$\begin{aligned} v^n &\approx v_h^n \in V_h, \\ \rho^n &\approx \rho_h^n \in Q_h, \\ \frac{D^{\mathcal{A}}}{Dt} v^n &\approx (v^n - v^{n-1})/\tau \approx (v_h^n - v_h^{n-1})/\tau = d_{\mathcal{A}t} v_h^n, \\ \frac{D^{\mathcal{A}}}{Dt} \rho^n &\approx (\rho^n - \rho^{n-1})/\tau \approx (\rho_h^n - \rho_h^{n-1})/\tau = d_{\mathcal{A}t} \rho_h^n \end{aligned}$$

Definujme ďalej funkciu

$$q_h + \delta q_{h\beta} \quad \text{s} \quad q_{h\beta} = (v_h^{n-1} - w_h^{n-1}) \cdot \text{grad} \, q_h$$

pre vhodnú konštantu $\delta > 0$, ktorá bude použitá namiesto q_h z dôvodu zamedzenia Gibbsovho javu v numerickom riešení (takzvaná streamline diffusion test function)⁵.

Nech $v_h^* \in X_h$ je aproximácia v^* . Môžeme použiť aproximáciu

$$\begin{aligned} v_h^*(P_i, t) &= v_D(P_i, t) & \forall P_i \in \Gamma_I \cup \Gamma_W, \\ v_h^*(P_i, t) &= w(P_i, t) & \forall P_i \in \Gamma_{Wt}, \\ v_h^*(P_i, t) &= 0 & \forall P_i \in \Omega_t. \end{aligned}$$

Dostávame tak formuláciu diskkrétnej úlohy:

Nájst' $v_h^n \in X_h$ tak, že $v_h^n - v_h^{*n} \in V_h$; $\rho_h^n \in Q_h$ spĺňajúce nasledujúce rovnice:

$$\begin{aligned} &(\rho_h^{n-1} d_{\mathcal{A}t} v_h^n, u_h) + d(\rho_h^{n-1}, v_h^{n-1} - w_h^{n-1}, v_h^n, u_h) + a(v_h^n, u_h) \\ &= b(u_h, \pi_h^{n-1}) + (b_h^{n-1}, u_h) + \int_{\Gamma_O} \pi_{ref} u_h \cdot n \, dS \quad \forall u_h \in V_h, \\ &(d_{\mathcal{A}t} \rho_h^n, q_h) + e(\rho_h^{n-1}, v_h^n, q_h + \delta q_{h\beta}) \\ &+ \alpha(v_h^{n-1} - w_h^{n-1}, \rho_h^n, q_h + \delta q_{h\beta}) - \gamma \int_{\Gamma_I} \rho_h^n v_D^n \cdot n q_h \, dS \\ &= -\gamma \int_{\Gamma_I} \rho_D^n v_D^n \cdot n q_h \, dS \quad \forall q_h \in Q_h, \\ &\pi_h^n = \widehat{\pi}(\rho_h^n). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Môžeme písať

$$v_h^n = v_h^{*n} + z_h^n, \quad \text{kde} \quad z_h^n \in V_h.$$

⁵Vid' Feistauer et al. [fe, s. 346]

Pri predpoklade, že $u_h^{n-1}, \rho_h^{n-1}, \pi_h^{n-1}, w_h^{n-1}$ sú známe, použitím substitúcie pre v_h^n dostávame lineárny systém pre parametre určujúce neznáme funkcie z_h^n a ρ_h^n .

Systém (3.9) môžeme riešiť v dvoch oddelených krokoch. Najprv nájdeme v_h^n riešením prvej rovnice. Využitím výsledku nájdeme ρ_h^n riešením druhej.

Kapitola 4

Existencia riešenia diskrétneho problému

Uvažujme prípad homogénnej úlohy s nulovou okrajovou podmienkou pre rýchlosť, $v_D = 0$, zadanou na celej hranici $\partial\Omega$. Dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} & (\rho_h^{n-1} d_{\mathcal{A}t} v_h^n, u_h) + d(\rho_h^{n-1}, v_h^{n-1} - w_h^{n-1}, v_h^n, u_h) + a(v_h^n, u_h) \\ & = b(u_h, \pi_h^{n-1}) + (b_h^{n-1}, u_h) \quad \forall u_h \in V_h, \\ & (d_{\mathcal{A}t} \rho_h^n, q_h) + e(\rho_h^{n-1}, v_h^n, q_h + \delta q_{h\beta}) \\ & + \alpha(v_h^{n-1} - w_h^{n-1}, \rho_h^n, q_h + \delta q_{h\beta}) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Pre túto úlohu dokážeme existenciu približného riešenia na ďalšej časovej vrstve za predpokladu existencie riešenia z predchádzajúcej časovej vrstvy a obmedzení pre veľkosť časového kroku τ a pre konštantu δ .

Veta¹ Nech v_h^{n-1}, ρ_h^{n-1} je približné riešenie z časovej vrstvy t_{n-1} také, že $\rho_h^{n-1} \geq \rho_0$, kde $\rho_0 > 0$ je kladná konštantá. Označme

$$K_{n-1} = \max\{\|v_h^{n-1}\|_\infty, \|v_h^{n-1} - w_h^{n-1}\|_\infty, \|\rho_h^{n-1}\|_\infty\}. \tag{4.2}$$

Nech ďalej platí

$$\tau \leq \frac{\mu\rho_0}{2K_{n-1}^4}, \quad \frac{3}{2}\tau \leq \delta \leq \frac{\mu}{4N K_{n-1}^2}. \tag{4.3}$$

Potom existuje jednoznačné riešenie v_h^n, ρ_h^n úlohy (4.1) na časovej vrstve t_n .

¹Vid'. Feistauer et al. [fe, p. 371].

Dôkaz. Definujme formy

$$\begin{aligned}
\tilde{a}(v, \rho, u, q) &= \frac{1}{\tau} (\rho_h^{n-1} v, u) + d(\rho_h^{n-1}, v_h^{n-1} - w_h^{n-1}, v, u) + a(v, u) \\
&\quad + \frac{1}{\tau} (\rho, q) + e(\rho_h^{n-1}, v, q + \delta q_\beta) + \alpha(v_h^{n-1} - w_h^{n-1}, \rho, q + \delta q_\beta), \\
F(u, q) &= b(u, \pi_h^{n-1}) + (b_h^{n-1}, u) + \frac{1}{\tau} (\rho_h^{n-1} v_h^{n-1}, u) + \frac{1}{\tau} (\rho_h^{n-1}, q)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Úloha (4.1) potom pre neznáme $v = v_h^n \in V_h$, $\rho = \rho_h^n \in Q_h$ prejde v tvar

$$\tilde{a}(v, \rho, u, q) = F(u, q) \quad \forall u \in V_h, \forall q \in Q_h. \tag{4.5}$$

Pre dôkaz existencie a jednoznačnosti riešenia tejto úlohy ukážeme pozitívnu definitnosť formy \tilde{a} .

Použijeme Cauchyho nerovnosť a Youngovu nerovnosť v tvare $\alpha\beta \leq \varepsilon\alpha^2 + \beta^2/(4\varepsilon)$. Pre ľubovoľné $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4 > 0$ máme

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\tau} (\rho_h^{n-1} v, v) &\geq \frac{\rho_0}{\tau} \|v\|^2, \\
|d(\rho_h^{n-1}, v_h^{n-1} - w_h^{n-1}, v, v)| &\leq \|\rho_h^{n-1}(v_h^{n-1} - w_h^{n-1})\|_\infty \|\text{grad } v\| \|v\| \\
&\leq \varepsilon_1 \|\text{grad } v\|^2 + \frac{K_{n-1}^4}{\varepsilon_1} \|v\|^2, \\
|\alpha(v_h^{n-1} - w_h^{n-1}, \rho, \rho + \delta\rho_\beta)| &= |(\rho_\beta, \rho) + \delta\|\rho_\beta\|^2| \\
&\leq \varepsilon_2 \|\rho_\beta\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_2} \|\rho\|^2 + \delta\|\rho_\beta\|^2 \\
|e(\rho_h^{n-1}, v, \rho + \delta\rho_\beta)| &\leq \varepsilon_3 \|\text{grad } v\|^2 + \frac{N K_{n-1}^2}{4\varepsilon_3} \|\rho\|^2 \\
&\quad + \varepsilon_4 \|\text{grad } v\|^2 + \frac{N K_{n-1}^2 \delta^2}{4\varepsilon_4} \|\rho_\beta\|^2.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Spojením predchádzajúcich odhadov dostaneme

$$\begin{aligned}
\tilde{a}(v, \rho, v, \rho) &\geq \left(\frac{\rho_0}{\tau} - \frac{K_{n-1}^4}{4\varepsilon_1} \right) \|v\|^2 \\
&\quad + (\mu - \varepsilon_1 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4) \|\text{grad } v\|^2 + (\lambda + \mu) \|\text{div } v\|^2 \\
&\quad + \left(\delta - \varepsilon_2 - \frac{N \delta^2 K_{n-1}^2}{4\varepsilon_4} \right) \|\rho_\beta\|^2 \\
&\quad + \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{4\varepsilon_2} - \frac{N K_{n-1}^2}{4\varepsilon_3} \right) \|\rho\|^2.
\end{aligned}$$

Zvoľme teraz $\varepsilon_i = \mu/4$ pre $i = 1, 3, 4$, $\varepsilon_2 = \delta/2$ a využitím predpokladu (4.3) dostaneme

$$\begin{aligned}
\tilde{a}(v, \rho, v, \rho) &\geq \frac{\rho_0}{2\tau} \|v\|^2 + \frac{\mu}{4} \|\text{grad } v\|^2 + (\lambda + \mu) \|\text{div } v\|^2 \\
&\quad + \frac{\delta}{4} \|\rho_\beta\|^2 + \frac{1}{2\tau} \|\rho\|^2.
\end{aligned}$$

Vidíme, že forma \tilde{a} je pozitívne definitná a úloha (4.5) má práve jedno riešenie. □

Uvažujme teraz obecnú nenulovú Dirichletovu okrajovú podmienku pre rýchlosť zadanú na celej hranici $\partial\Omega$. Rovnice (3.9) prejdú v tvar:

$$\begin{aligned}
&(\rho_h^{n-1} d_{\mathcal{A}} v_h^n, u_h) + d(\rho_h^{n-1}, v_h^{n-1} - w_h^{n-1}, v_h^n, u_h) + a(v_h^n, u_h) \\
&\quad = b(u_h, \pi_h^{n-1}) + (b_h^{n-1}, u_h) \quad \forall u_h \in V_h, \\
&(d_{\mathcal{A}} \rho_h^n, q_h) + e(\rho_h^{n-1}, v_h^n, q_h + \delta q_{h\beta}) \\
&\quad + \alpha(v_h^{n-1} - w_h^{n-1}, \rho_h^n, q_h + \delta q_{h\beta}) - \gamma \int_{\Gamma_I} \rho_h^n v_D^n \cdot n q_h \, dS \quad (4.7) \\
&\quad = -\gamma \int_{\Gamma_I} \rho_D^n v_D^n \cdot n q_h \, dS \quad \forall q_h \in Q_h, \\
&\pi_h^n = \hat{\pi}(\rho_h^n),
\end{aligned}$$

Nech $v^* \in H^1(\Omega_t)^2$, $v^*|_{\partial\Omega} = v_D$ je realizácia okrajovej podmienky pre rýchlosť, hľadáme potom riešenie $v = v_h^n$, $\rho = \rho_h^n$ tak, že $v - v^* \in V_h$, $\rho \in Q_h$. Ak označíme $v = v^* + z$ pre $z \in V_h$, úlohu (4.7) môžeme prepísať do tvaru

$$\begin{aligned}
& \tilde{a}(z + v^*, \rho, u, q) - \gamma \int_{\Gamma_I} \rho v_D^n \cdot nq \, dS \\
& = F(u, q) - \gamma \int_{\Gamma_I} \rho_D^n v_D^n \cdot nq \, dS \quad \forall u \in V_h, \forall q \in Q_h,
\end{aligned} \tag{4.8}$$

kde sme využili označenie zavedené v dôkaze predchádzajúcej vety. Definujme formy

$$\begin{aligned}
\hat{a}(z, \rho, u, q) &= \tilde{a}(z, \rho, u, q) - \gamma \int_{\Gamma_I} \rho v_D^n \cdot nq \, dS, \\
\hat{F}(u, q) &= F(u, q) - \tilde{a}(v^*, \rho, u, q) - \gamma \int_{\Gamma_I} \rho_D^n v_D^n \cdot nq \, dS.
\end{aligned}$$

Úloha (4.8) prejde v tvar

$$\hat{a}(z, \rho, u, q) = \hat{F}(u, q) \quad \forall u \in V_h, \forall q \in Q_h \tag{4.9}$$

pre neznáme $z \in V_h$ a $\rho \in Q_h$.

Tvrdenie² Nech platia predpoklady predchádzajúcej vety. Predpokladajme navyše $\gamma > 0$ a $v_D \cdot n < 0$ na Γ_I . Nech $v^* \in H^1(\Omega_t)^2$ je realizácia okrajovej podmienky pre rýchlosť'. Potom existuje jednoznačné riešenie $v = v_h^n$, $\rho = \rho_h^n$ úlohy (4.7), kde $v - v^* \in V_h$, $\rho \in Q_h$.

Dôkaz. Pre platnosť tvrdenia potrebujeme ukázať pozitívnu definitnosť formy \hat{a} . Je

$$\hat{a}(z, \rho, z, \rho) = \tilde{a}(z, \rho, z, \rho) - \gamma \int_{\Gamma_I} \rho^2 v_D^n \cdot n \, dS.$$

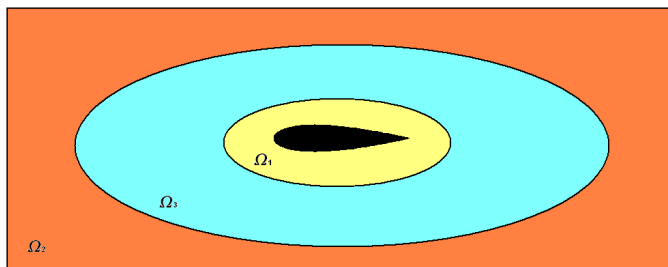
Druhý člen na pravej strane je podľa predpokladov tvrdenia kladný, forma \tilde{a} je pozitívne definitná podľa predchádzajúcej vety. \square

²Vid' Feistauer et al. [fe, p. 374].

Kapitola 5

Konštrukcia ALE zobrazenia pre izolovaný profil

Pri konštrukcii ALE zobrazenia máme pomerne veľkú voľnosť. Pre praktické počítanie sa zvykne používať metóda, v ktorej sa oblasť rozdelí na tri časti. Prvá časť je okolie profilu, ktoré transformujeme spolu s profilom ako tuhé teleso. Druhá časť, vyplňajúca okolie vonkajšej hranice, sa transformuje identickým zobrazením. Transformácia tretej časti, ktorá sa nachádza medzi predchádzajúcimi dvoma, bude kombináciou prvých dvoch transformácií tak, aby sa na každej strane hladko napojila.



Obrázok 5.1: Rôzne časti oblasti v konštrukcii ALE zobrazenia

Uvedme analytickú konštrukciu výsledného ALE zobrazenia. Transformácia bodov profilu bude pre náklon α a vertikálnu výchylku h popísaná nasledujúcim zobrazením

$$H(X, Y) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X - X_{EA} \\ Y - Y_{EA} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_{EA} \\ Y_{EA} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix},$$

kde (X, Y) sú referenčné súradnice transformovaného bodu a (X_{EA}, Y_{EA}) sú referenčné súradnice osi okolo ktorej sa profil otáča.

Identické zobrazenie budeme značiť $Id(X, Y) = (X, Y)$. Definujme ďalej váhové funkcie ξ , θ v závislosti na $R = R(X, Y)$, R_1 , R_2 predpisom

$$\xi(R) = \min \left(\max \left(0, \frac{R - R_1}{R_2 - R_1} \right), 1 \right)$$

$$\theta(R) = \frac{1}{2} (\cos(\xi(R) \pi) + 1)$$

Pomocou predchádzajúcich funkcií môžeme zostrojiť výsledné ALE zobrazenie predpisom

$$\mathcal{A}_t(X, Y) = \theta(R) H(X, Y) + (1 - \theta(R)) Id(X, Y)$$

Pre zobrazenie $R = R(X, Y)$ máme opäť možnosť voľby (určí sa ním tvar oblasti, ktorá sa bude transformovať ako pevné teleso). Pre letecký profil je výhodné použiť elipsu, pre ktorú tak máme $R(X, Y) = \sqrt{\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2}}$, kde $a, b > 0$ sú jej poloosi. Dodajme ešte, že konštanty R_1 a R_2 určujú veľkosť oblasti Ω_3 .

Kapitola 6

Riešenie diskrétneho problému

Našou úlohou je zostrojiť priestory Q_h a X_h , v ktorých budeme hľadať približné riešenie. K tomu použijeme Galerkinovu metódu, tj. prevedieme trianguláciu oblasti na konečné elementy \mathcal{T}_h a definujeme na tejto triangulácii bázové funkcie, ktoré vytvoria bázy príslušných priestorov.

Keď máme k dispozícii približné priestory Q_h a X_h , môžeme pristúpiť k riešeniu približného problému. Pre rýchlosť a pre tlak vytvoríme v každom časovom intervale sústavu lineárnych rovníc, ktorých riešením dostaneme približné hodnoty v_h^n a ρ_h^n . Voľba numerickej schémy (3.9) nám umožňuje oddeliť rovnice pre rýchlosť a pre tlak na dve samostatné sústavy a každú z nich riešiť oddelene.

6.1 Triangulácia oblasti

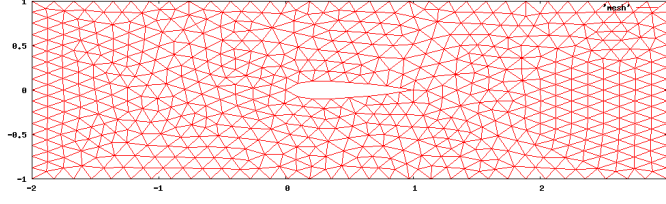
Na trianguláciu oblasti sme použili polygonálnu trianguláciu, letecký profil sme aproximovali po častiach lineárnou lomenou krivkou. Výpočtová oblasť je tak tvorená trojuholníkovými konečnými elementami $K \in \mathcal{T}_h$ (viď Obrázok 6.1).

Na konštrukciu a adaptívne zjemňovanie triangulácie bol využitý software ANGENER¹.

6.2 Voľba bázových funkcií

Pri riešení úlohy sme použili lineárne konečné prvky pre tlak aj pre rýchlosť.

¹<http://www.karlin.mff.cuni.cz/dolejsi/angen/angen.htm>



Obrázok 6.1: Príklad izotropnej siete

Popíšeme najprv voľbu bázových funkcií priestoru Q_h . Pre každý vrchol P triangulácie \mathcal{T}_h definujeme jednu bázovú funkciu q_h^P hodnotou vo vrchole P : $q_h^P(P) = 1$, pre každý ďalší vrchol P' definujeme $q_h^P(P') = 0$. Keďže q_h^P je lineárna na každom elemente, je týmto určená jednoznačne. Nosičom takto definovanej bázovej funkcie sú len elementy obsahujúce bod P ako svoj vrchol. Zároveň je daná aj dimenzia priestoru Q_h . Ak označíme počet vrcholov triangulácie $N_h = \#\text{vrcholov } \mathcal{T}_h$, potom $\dim Q_h = N_h$.

Bázové funkcie priestoru X_h volíme podobne. Pre každý vrchol P definujeme dve bázové funkcie u_{hx}^P a u_{hy}^P , kde $u_{hx}^P = (q_h^P, 0)$ a $u_{hy}^P = (0, q_h^P)$, kde q_h^P je príslušná bázová funkcia priestoru Q_h . Nosičom takto definovaných bázových funkcií sú opäť len elementy obsahujúce vrchol P a dimenzia priestoru $\dim X_h = 2N_h$.

Vrcholy triangulácie a im odpovedajúce bázové funkcie očísľujeme:

$$P_i, q_h^i, u_{hx}^i, u_{hy}^i, \quad i = 1, \dots, N_h.$$

Približné riešenia ρ_h a v_h sú lineárnymi kombináciami príslušných bázových funkcií:

$$\begin{aligned} \rho_h &= \sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i q_h^i, \\ v_h &= \sum_{i=1}^{N_h} (\beta_i^x u_{hx}^i + \beta_i^y u_{hy}^i). \end{aligned} \tag{6.1}$$

Hodnota približného riešenia ρ_h vo vrchole P_i je tak daná koeficientom α_i , podobne hodnota x-ovej a y-ovej zložky približného riešenia v_h v uvažovanom vrchole je daná koeficientami β_i^x a β_i^y .

Pre ďalšie zjednodušenie zápisu použime označenie

$$\begin{aligned} \beta_i &= \beta_k^x, \quad u_h^i = u_{hx}^k, & \text{pre } i = 2k - 1 \\ \beta_i &= \beta_k^y, \quad u_h^i = u_{hy}^k, & \text{pre } i = 2k, \quad k = 1 \dots N_h. \end{aligned}$$

Približné riešenie v_h tak môžeme zapísať ako lineárnu kombináciu

$$v_h = \sum_{i=1}^{2N_h} \beta_i u_h^i.$$

6.3 Zostavenie sústav lineárnych rovníc pre výpočet rýchlosti a tlaku

Popíšeme zostavenie sústav lineárnych rovníc pre výpočet rýchlosti a tlaku pre prípad pevnej oblasti. V tomto prípade sa rovnice (3.9) zjednodušia, $\frac{D^{\omega}}{Dt} f(y, t) = \frac{\partial}{\partial t} f(y, t)$, a $w = 0$.

Uvažované rovnice tak majú nasledujúci tvar

$$\begin{aligned} & (\rho_h^{n-1} d_t v_h^n, u_h) + d(\rho_h^{n-1}, v_h^{n-1}, v_h^n, u_h) + a(v_h^n, u_h) \\ & = b(u_h, \pi_h^{n-1}) + (b_h^{n-1}, u_h) + \int_{\Gamma_O} \pi_{ref} u_h \cdot n \, dS \quad \forall u_h \in V_h, \\ & (d_t \rho_h^n, q_h) + e(\rho_h^{n-1}, v_h^n, q_h + \delta q_{h\beta}) \\ & + \alpha(v_h^{n-1}, \rho_h^n, q_h + \delta q_{h\beta}) - \gamma \int_{\Gamma_I} \rho_h^n v_D^n \cdot n q_h \, dS \\ & = -\gamma \int_{\Gamma_I} \rho_D^n v_D^n \cdot n q_h \, dS \quad \forall q_h \in Q_h, \\ & \pi_h^n = \widehat{\pi}(\rho_h^n), \end{aligned} \tag{6.2}$$

kde $d_t \rho_h^n = (\rho_h^n - \rho_h^{n-1})/\tau$, $d_t v_h^n = (v_h^n - v_h^{n-1})/\tau$.

Rozpísaním diferencií $d_t \rho_h^n$, $d_t v_h^n$ a rozpísaním ρ_h^n , v_h^n ako lineárnych kombinácií básových funkcií, kde píšeme $u_i = u_h^i$ a $q_i = q_h^i$, dostaneme

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{2N_h} \beta_i \left(\frac{1}{\tau} (\rho_h^{n-1} u_i, u_j) + d(\rho_h^{n-1}, v_h^{n-1}, u_i, u_j) + a(u_i, u_j) \right) \\
&= \frac{1}{\tau} (\rho_h^{n-1} v_h^{n-1}, u_j) + b(u_j, \pi_h^{n-1}) + (b_h^{n-1}, u_j) \\
&+ \int_{\Gamma_O} \pi_{ref} u_j \cdot n \, dS \quad \forall j = 1 \dots 2N_h, \\
& \sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i \left(\frac{1}{\tau} (q_i, q_j) + \alpha(v_h^{n-1}, q_i, q_j + \delta q_{j\beta}) - \gamma \int_{\Gamma_I} q_i v_D^n \cdot n q_j \, dS \right) \quad (6.3) \\
&= \frac{1}{\tau} (\rho_h^{n-1}, q_j) - e(\rho_h^{n-1}, v_h^n, q_j + \delta q_{j\beta}) \\
&- \gamma \int_{\Gamma_I} \rho_D^n v_D^n \cdot n q_j \, dS \quad \forall j = 1 \dots N_h, \\
& \pi_h^n = \widehat{\pi}(\rho_h^n),
\end{aligned}$$

Uvedené rovnice tvoria systém $2N_h$ lineárnych rovníc pre $2N_h$ neznámych koeficientov β_i a systém N_h lineárnych rovníc pre N_h neznámych koeficientov α_i .

Ich riešením dostaneme priamo hodnoty približného riešenia v_h a ρ_h v príslušných vrcholoch.

Výhodou použitej Galerkinovej metódy je, že každá bázová funkcia má malý nosič. Pri výpočte jednotlivých koeficientov matíc tuhosti a vektorov pravých strán nám tak stačí počítat' len diagonálne koeficienty a koeficienty odpovedajúce vrcholom triangulácie, ktoré sú spojené stranou jedného z elementov. Ostatné koeficienty matíc tuhosti budú nulové, nakoľko pre takéto dvojice je na každom prvku vždy aspoň jedna z testovacích funkcií u_i, u_j resp. q_i, q_j nulová. Dostávame tak pre rýchlosť aj pre tlak sústavy s riedkymi maticami tuhosti.

6.4 Riešenie lineárnych sústav

Na riešenie lineárnych sústav (6.3) sme použili priamy riešič pre riedke matice PARDISO². Tento riešič pracuje pre symetrické aj nesymetrické sústavy a je vhodný pre paralelné spúšťanie. Jeho veľkou výhodou je pomerne malá

²<http://www.pardiso-project.org/index.html>

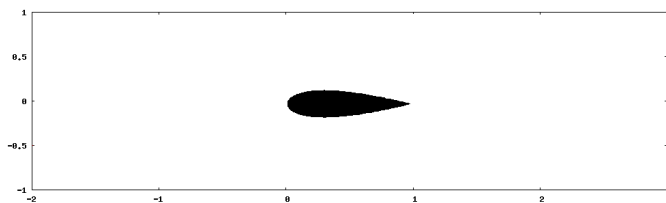
pamät'ová náročnosť a vysoká rýchlosť (výpočty tak mohli byť prevádzané na bežne dostupnom PC v rozumnom čase).

Kapitola 7

Príklady

Previedli sme niektoré numerické experimenty pre prípad kanála, vnútri ktorého je nepohybujúci sa profil. Zmena uhlu nábehu profilu pre rôzne experimenty je riešená zadávaním rôznej okrajovej podmienky pre rýchlosť.

Voľba oblasti je znázornená na obrázku 7.1



Obrázok 7.1: Voľba výpočtovej oblasti

Prvý experiment sme previedli s nasledovnými vstupnými parametrami:

$$\begin{aligned}\mu &= 1 \\ \lambda &= -\frac{2}{3}\mu \\ \rho_{ref} &= 1 \\ \pi(\rho) &= 1 \\ v_{ref} &= (1, 0) \\ \tau &= 0.001 \\ \delta &= \frac{3}{2}\tau\end{aligned}$$

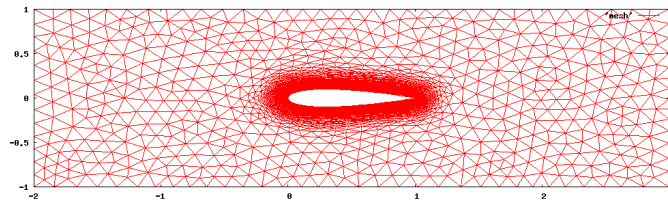
Pre dané parametre dostávame veľkosť Reynoldsovho čísla

$$Re = \frac{\rho_{ref} v_{ref}}{\mu} = 1$$

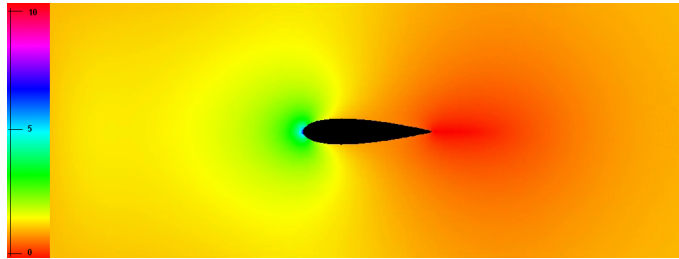
(uvažovaná charakteristická dĺžka profilu je $l = 1$).

Počiatkové podmienky pre rýchlosť a tlak volíme $v_0 = v_{ref}$, resp. $\rho_0 = \rho_{ref}$. Okrajovú podmienku pre rýchlosť na vstupe a na hornej a spodnej časti kanála volíme $v_D = v_{ref}$, na profile predpokladáme nulovú rýchlosť (vzhľadom k profilu). Hustotu predpisujeme na vstupe hodnotou $\rho_D = \rho_{ref}$.

Z výsledkov experimentu vidno spojitú zmenu rozdelenia hustoty (a teda aj tlaku) v čase aj v priestore. V prednej časti profilu podľa očakávania dôjde k zvýšeniu tlaku, v chvostovej časti dochádza k jeho zníženiu. Nábeh trvá približne pol sekundy, potom sa riešenie stabilizuje a mení sa len minimálne.

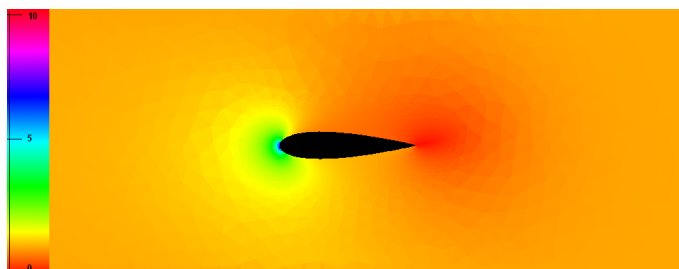


Obrázok 7.2: Adaptovaná sieť zachycujúca zmenu rýchlosti v okolí profilu

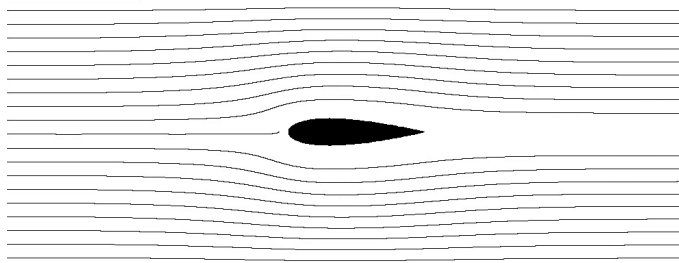


Obrázok 7.3: Rozdelenie hustoty pre prípad $\alpha = 0$ v čase $t = 1$

Prevádzali sme aj experimenty pre reálne dáta odpovedajúce prúdeniu vzduchu, tlak sme počítali zo vzťahu $\pi(\rho) = c\rho^\kappa$. Vstupné parametre boli nasledovné:



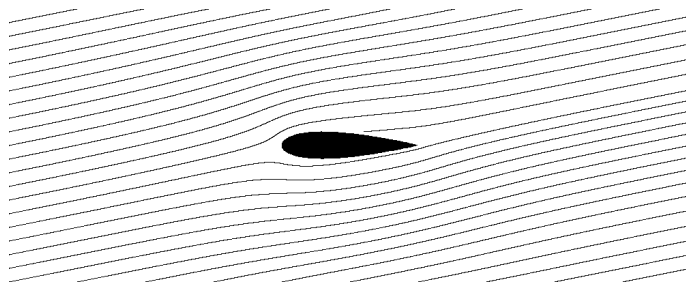
Obrázok 7.4: Rozdelenie hustoty pre prípad $\alpha = \pi/10$ v čase $t = 0.4$



Obrázok 7.5: Zobrazenie prúdnic rýchlosti pre prípad $\alpha = 0$ v čase $t = 1$

$$\begin{aligned} \mu &= 1.8 \cdot 10^{-5} \\ \lambda &= -\frac{2}{3}\mu \\ \rho_{ref} &= 1.20 \\ \pi(\rho) &= c\rho^\kappa \\ c &= 78500 \\ \kappa &= 1.4 \\ \tau &= 0.001 \\ \delta &= \frac{3}{2}\tau \end{aligned}$$

Referenčnú rýchlosť sme volili v rôznych experimentoch voľbou Reynoldsovho čísla z rozmedzia $Re = 10^1 \dots 10^6$. Pri takýchto vstupných dátach prestal výpočet fungovať. Pomerne rýchlo (niekoľko časových krokov) dochádzalo v riešení k veľkému rozdielu medzi minimálnym a maximálnym tlakom, ako aj medzi minimálnou a maximálnou rýchlosťou a spočítané riešenie nemalo žiaden fyzikálny význam. Skúšali sme meniť parameter δ v rozmedzí danom predpokladmi (4.3), ale bezvýsledne.



Obrázok 7.6: Zobrazenie prúdnic rýchlosti pre prípad $\alpha = \pi/10$ v čase $t = 0.4$

Z predpokladov (4.3) vyplýva aj ohraňenie pre časový krok. Pre $Re = 10^3$ dostávame horný odhad pre časový krok rovný $\tau = 10^{-5}$, pre vyššie Reynoldove čísla možná veľkosť časového kroku rapídne klesá (pre $Re = 10^6$ je už $\tau = 10^{-9}$). Previedli sme výpočty pre časové kroky $\tau = 0.0001$ a $\tau = 0.00001$, ale k získaniu rozumných výsledkov to nevedlo. Pre takéto malé časové kroky zrejme vo výpočte začali prevládať zaokrúhľovacie chyby a tým bolo znehodnotené. Aj v prípade eliminácie zaokrúhľovacích chýb použitím presnejšej aritmetiky by sme však narazili na nemožnosť spočítať riešenie na dlhšom časovom intervale v rozumnej dobe, nakoľko časový krok pre jednu iteráciu je veľmi malý.

Kapitola 8

Diskusia

Pri numerickom experimentovaní na reálnych vstupných dátach úlohy sme rýchlo narazili na obmedzenia pre časový krok vyplývajúce z dôkazu existencie približného riešenia. Problém sa dá čiastočne vyriešiť použitím presnejšej aritmetiky výpočtu, ale len za cenu neúmerneho predĺženia výpočtu.

Lepšie riešenie spočíva v zvýšení rádu použitých konečných prvkov, nakoľko v experimentoch používame len lineárne prvky P^1/P^1 pre rýchlость aj pre tlak. Tento krok by mohol pomôcť hlavne k presnejšiemu výpočtu rýchlости, s ktorou boli najväčšie problémy.

Ďalšie zlepšenie je možné v tvorbe rôznych triangulácií pre rýchlость a pre tlak. V prevedených experimentoch sme počítali tlak pre sieť adaptovanú na rozloženie rýchlости. Takáto sieť je veľmi hustá v okolí profilu, pretože tam dochádza k veľkým zmenám rýchlости. Lenže tlak sa v okolí profilu správa spojite a počítanie na hustej sieti tak zbytočne predĺži dobu výpočtu.

Paradoxne najmenšie problémy boli s riešením vzniknutých lineárnych sústav. Použitý software pracoval efektívne a môžeme ho doporučiť. Experimentovali sme aj s veľmi hustými sieťami s počtom vrcholov $N_h = 40000$, pre ktoré vzniknutá matica tuhosti pre rýchlость mala 80000 riadkov, a ani pre takéto dáta nebolo riešenie lineárnej sústavy úzkym hrdlom výpočtu.

Kapitola 9

Záver

V tejto práci sme ukázali odvodenie Navier-Stokesových rovníc modelu stlačiteľnej barotropickej tekutiny a popisu metódy pre úlohu s premennou hranicou. Ukázali sme existenciu a jednoznačnosť približného riešenia pre prípad Dirichletovej okrajovej podmienky. Ďalej sme previedli numerické experimenty pre prípad pevnej hranice a overili sme nutnosť splnenia predpokladov pre voľbu časového kroku vyplývajúcich z dôkazu existencie riešenia.

Literatúra

- [an] V. Dolejší:
ANGENER,
<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~dolejsi/angen/angen.htm>
- [fe] M. Feistauer, J. Felcman, I. Straškraba:
Mathematical and Computational Methods for Compressible Flow,
Oxford University Press, New York, 2003.
- [gu] M. E. Gurtin:
An Introduction to Continuum Mechanics,
Academic Press, New York, 1981.
- [qa] A. Quarteroni:
Simulation of Fluid and Structure Interaction,
European Mathematical Society, Prague, 2001.
- [pa] O. Schenk:
PARDISO Solver Project,
<http://www.pardiso-project.org/index.html>
- [ru] M. Růžička:
Interaction of Incompressible Fluid and Moving Bodies,
Master Thesis, MFF UK, Prague, 2005.
- [sv] P. Sváček:
Numerical Solution of Fluid Over a Moving Profile,
MFF UK, Prague, 2005.