Univerzita Karlova Praha
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Jan Novák

Hyperbolické systémy zákonů zachování

Katedra matematické analýzy
Doc. RNDr. Mirko Rokyta, CSc.

Studijní program: fyzika
Studijní obor: matematické a počítačové modelování ve fyzice a v technice (FMOD)

Rád bych poděkoval především svému školiteli doc. RNDr. Mirko Rokytovi, CSc., za jeho pečlivý přístup ke mně jakožto diplomantovi. Děkuji rovněž Ing. J.Richterovi za pomoc s texem.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 23.8.2007 Jan Novák

Obsah

1 Úvod **3**

2 Těleso a jeho pohyb **4**

3 Rázové vlny **5**

4 Zákony zachování **7**

5 Selektory **10**

6 Slabá konvergence **13**

7 Zobecněná řešení **20**

8 Jednoznačnost **21**

9 Existence **24**

10 Závěr a shrnutí **28**

Název práce: Hyperbolické systémy zákonů zachování
Autor: Jan Novák
Katedra (ústav): Katedra matematické analýzy
Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Mirko Rokyta, CSc.
e-mail vedoucího: mirko.rokyta@mff.cuni.cz
Abstrakt: V práci je zkoumána metoda řešení hyperbolických rovnic zákonů zachování Youngovými mírami. První část je věnována entropické nerovnosti, která se ve výzkumu jednoznačnosti a existence hyperbolických rovnic stala klíčovým selektorem. Je ukázáno, že má analogický tvar k druhému termodynamickému zákonu a je dokázána základní věta dávající do vztahu entropická řešení k těm získaným pomocí viskózní aproximace.
Jsou dále dokázány základní existenční věty pro pravděpodobnostní míry v případě, že posloupnost funkcí získaných z perturbované rovnice, je stejnoměrně omezená v prostoru $L^\infty(\mathbb{R}^d_+)$ nebo $L^r(\Omega)$, $1 < r \leqq p/q$, kde Ω je omezená oblast v $\mathbb{R}^d_+$. V tomto případě jsou naznačeny možnosti zobecnění do $\mathbb{R}^d_+$.
Na závěr je předvedeno, jak lze dokázat jednoznačnost a existenci pro počáteční data z $L^1(\mathbb{R}^{d-1}) \cap L^p(\mathbb{R}^{d-1})$ v případě skalární rovnice.
Klíčová slova: hyperbolický systém, zákony zachování, řešení v mírách.

Title: Hyperbolic systems of conservation laws
Author: Jan Novák
Department: Department of mathematical analysis
Supervisor: Doc. RNDr. Mirko Rokyta, CSc.
Supervisor's e-mail address: mirko.rokyta@mff.cuni.cz
Abstract: We study the concept of Young measures applied to the solution of hyperbolic conservation laws. In the first part we deal with the entropic inequality which plays a key role as a selector of a relevant physical solution to the hyperbolic equations. We show that this inequality is designed similarly as the second law of thermodynamics (the Clausius-Duhem inequality). We prove a theorem connecting entropy solution to the solution obtained as a limit of viscous approximations.
Further we prove the basic existence theorems for the Young measures, in cases that the corresponding sequences of functions are uniformly bounded in $L^\infty(\mathbb{R}^d_+)$ or $L^r(\Omega)$, $1 < r \leqq p/q$ where Ω is open and bounded subset of $\mathbb{R}^d_+$. In the case we discuss the possible generalization to the case of $\mathbb{R}^d_+$.
At the end we show how to prove the existence and uniqueness for the scalar equation and for the data lying in $L^1(\mathbb{R}^{d-1}) \cap L^p(\mathbb{R}^{d-1})$.
Keywords: hyperbolic system, conservation laws, measure valued solutions.

Kapitola 1

Úvod

Uvažujme následující systém rovnic:[1]

$$\partial_t u_i + \partial_{x_j} f_i^j(u) = 0, \;\; u(x,0) = u^0(x) \tag{1.1}$$

$u : \mathbb{R}_+^d \to \mathbb{R}^s$, kde $i = 1, 2, ..., s$ $(s \in \mathbb{N})$ a $j = 1, 2, ..., d{-}1$, $(d \in \mathbb{N},\;\; d \geqq 2)$,
$\mathbb{R}_+^d = \mathbb{R}^{d-1} \times (0, \infty)$, $f : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$ je $\mathcal{C}^1$ a nelineární.

Označme $A_{ik}^j(u) = \partial_{u_k} f_i^j$. Systém (1.1) se nazývá hyperbolický, jestliže pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}^{d-1}$ má matice $A_\alpha(u) \equiv \alpha_j . A^j(u)$ jenom reálné vlastní hodnoty a je diagonalizovatelná. (Systém se nazývá striktně hyperbolický, jestliže všechny vlastní hodnoty jsou reálné a různé.)
Systém nazveme symetrizovatelným, jestliže existuje pozitivně definitní matice $A^0(u)$ (hladce závisející na u) taková, že jsou matice $A^j A^0$ symetrické pro všechna $j = 1, ..., d{-}1$. (1.1) se nazývají hyperbolické rovnice zákonů zachování.
V Kapitolách 2,3 a 4 je ukázáno, co například popisují ve fyzice tyto rovnice a odkud pochází entropická nerovnice, která slouží jako selektor. To znamená, že pomáhá redukovat počet řešení, vybírá fyzikálně relevantní. Nicméně, existují také další selektory (je občas výhodnější ověřit, zda-li platí jiná podmínka). Některé základní informace k tomuto tématu jsou v Kapitole 5. Jedna z metod určení jednoznačnosti a existence hyperbolických systémů je založena na změnění hyberbolické rovnice na příslušný parabolický problém (přidáním členu $\epsilon\Delta$ na pravou stranu rovnice). U těchto rovnic totiž existuje jednoznačné hladké řešení. Limitním přechodem s ϵ k nule a použitím nějaké konvergenční metody můžeme ukázat jednoznačnost řešení výchozí rovnice.
Pro limitní přechody se tu používá slabá-*-konvergence($\rightharpoonup^*$). Metoda (youngových) měr se používá pro překonání nelineárního členu $f(u)$, u kterého se objevuje následující oscilační jev($\sin(nx)$ je vybrán jako příklad posloupnosti oscilujících funkcí, které jsou omezené v $L^\infty(0, 2\pi)$): $\sin(nx) \rightharpoonup^* 0$, $(\sin(nx))^2 \rightharpoonup^* 1/2$ v $L^\infty(0, 2\pi)$.
Proto se tedy používá detailnější popis konvergence pravděpodobnostními mírami. Základní existenční věty pro tyto objekty jsou v Kapitole 6. Zbytek práce je důkaz, jak lze například ukázat jednoznačnost a existenci v případě skalární rovnice pro počáteční podmínky $u_0 \in L^p(\mathbb{R}_+^d) \cap L^1(\mathbb{R}_+^d)$.

[1] V práci se používá Einsteinova sumační konvence.

Kapitola 2

Těleso a jeho pohyb

Poznámka 2.1 Od tohoto místa počínaje bude používáno značení $|v|$ pro normu vektoru v a také $|A|$ pro míru množiny A, rozlišení bude vidět z kontextu. Bude využívána standardní zkratka s.v. v situaci, kdy bude něco platit až na množinu míry nula. Bez předchozího upozornění budou používány pojmy a věty z funkcionální analýzy (z teorie integrálu a Banachových prostorů).

Definice 2.2 *Tělesem budeme myslet otevřenou podmnožinu $B \subset \mathbb{R}^m$, kde $m = 1, 2, 3$. Částice tělesa jsou identifikovány s body této množiny. Polohou tělesa je bilipschitzovské zobrazení (zobrazení $\phi : G \to \mathbb{R}^m$, $G \subset \mathbb{R}^m$, je β-bilipschitzovské, jestliže*

$$1/\beta.|x-y| \leqq \ |\phi(x)-\phi(y)| \leqq \beta.|x-y|$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^m$ a nazývá se bilipschitzovské, jestliže je β-bilipschitzovské pro nějaké β) z B do otevřené podmnožiny $\mathbb{R}^m$. Pohybem tělesa (nerelativistickým) budeme mít na mysli lipschitzovské zobrazení $\chi : B \times (t_1, t_2) \to \mathbb{R}^m$.
Pro fixované $x \in B$ a $t \in (t_1, t_2)$, $\chi(x, t)$ specifikuje pozici v prostoru částice x v čase t; pro zafixované $t \in (t_1, t_2)$ je $\chi(., t) : B \to \mathbb{R}^m$ poloha tělesa v čase t a pro fixované $x \in B$ je křivka $\chi(x, .) : (t_1, t_2) \to \mathbb{R}^m$ trajektorie částice x.

Poznámka 2.3 Máme přirozený referenční (lagrangeovský) a prostorový (eulerovský) popis. Potřeba zavést tyto dva pojmy vzniká z faktu, že můžeme buď sledovat nějakou částici a měřit její polohu a rychlost, a nebo si můžeme vybrat bod prostoru a měřit rychlost částic, které tam jsou v daném čase. Proto se také bilanční rovnice (termodynamiky kontinua), kterými se budeme zabývat v příští kapitole, objevují párově.

Definice 2.4 *Mějme nějaké pole w. Nechť je $w = f(x, t)$ v referenčním a $w = \phi(\chi, t)$ v eulerovském popisu. Potom*

$$D_t w = \partial_t f, \quad w_t = \partial_t \phi; \quad \operatorname{Grad} w = \operatorname{grad}_x f, \quad \operatorname{grad} w = \operatorname{grad}_\chi \phi.$$

Poznámka 2.5 Rychlost $v = D_t\chi$ leží v $L^\infty(B \times (t_1, t_2), \mathbb{R}^m)$ a deformační gradient $F = \operatorname{Grad}\ \chi = \partial_{\chi^\iota} x^i$ leží v $L^\infty(B \times (t_1, t_2), M^{m\times m})$, kde $M^{m\times m}$ jsou čtvercové matice o rozměru m. Budeme uvažovat, že $\det F$ je kladný, abychom mohli přecházet od lagrangeovského k eulerovskému popisu. Příslušnou transformační větu lze nalézt například v [2].

Kapitola 3

Rázové vlny

Rázové vlny se objevují například za letadlem při překročení rychlosti zvuku. Z Huygensova principu vidíme, že na povrchu kužele, který má vrchol v letadle a osu v dráze letu, dochází k nahušťování vlnoploch (podélné vlnění), tedy ke vzniku rázové vlny.
Obecně vzato jsou tyto jevy skokové změny fyzikálního stavu, kde se neuplatňují chemické přeměny a jsou možné v prostředí, které je stlačitelné, ale jehož viskozita a tepelná vodivost je zanedbatelná. Typickým příkladem je vzduch kolem nás.([10])
Matematicky se to u typu rovnic, které v sobě zahrnují popis tohoto fyzikálního jevu, projevuje jako nespojitost klasického řešení v konečném čase. A jsou to právě hyperbolické rovnice, u kterých se tento fenomén objevuje.
Vzniká tedy potřeba zobecnit pojem klasického řešení. Jednou z možností jsou slabá řešení. U těch se ale, jak bude ukázáno níže, objevuje nejednoznačnost. Zavedla se proto slabá entropická řešení. Statistický popis vedl k definici řešení v mírách. Zde je definice slabého řešení:

Definice 3.1 *Slabé řešení rovnice (1.1) je funkce* $u : \mathbb{R}^d_+ \to \mathbb{R}^s$ *taková, že:*

$$\int_{\mathbb{R}^d_+} u(x,t).\partial_t\phi(x,t) + f(u(x,t)).\partial_x\phi(x,t)\ dxdt + \int_{\mathbb{R}^{d-1}} u_0(x,t).\phi(x,0)\ dx = 0, \qquad (3.1)$$

pro každou $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d_+)$ *s kompaktním nosičem.*

Zobecnili jsme tedy pojem klasického řešení, abychom zahrnuli nespojité jevy. Vzniká otázka charakterizace tohoto druhu řešení. (Širší definice může spolu nést nějakou podmínku na ploše nespojitosti). Nejprve uveďme pojem po částech $\mathcal{C}^1$ (slabého) řešení.

Definice 3.2 *Funkce* $u : \mathbb{R}^d_+ \to \mathbb{R}^s$ *je po částech* $\mathcal{C}^1$*, jestliže existuje konečný počet hladkých orientovaných* $(d-1)$*-dimenzionálních ploch* Γ_c *v* $\mathbb{R}^d_+$*, vně kterých je* u $\mathcal{C}^1$*, na* Γ_c *má* u *nespojitost. Jestliže je* Γ *právě takový povrch, označíme* $n = (n_{x_1}, ..., n_{x_{d-1}}, n_t)$ *libovolný vnější normálový vektor ke* Γ *a existují vlastní* $u_\pm = \lim_{\epsilon \to 0} u((x,t) \pm \epsilon n)$*. Potom označíme* $[u] = u_+ - u_-$ *a podobně,* $[f^j(u)] = f^j(u_+) - f^j(u-), j = 1, ..., d-1$*. Funkce* u *je po částech* $\mathcal{C}^1$ *slabé řešení rovnice (1.1), pokud je po částech* $\mathcal{C}^1$ *a splňuje (3.1).*

Nyní tedy uveďme nutné podmínky na po částech hladké slabé řešení, známé jako Rankine-Hugeniotovy podmínky. (Budeme používat označení z předchozí definice.)

Věta 3.3 *Buď $u : \mathbb{R}_+^d \to \mathbb{R}^s$ po částech $\mathcal{C}^1$ slabé řešení (1.1) a Γ plocha nespojitosti u ve smyslu předchozí definice. Nechť je dále u klasické řešení na oblastech, kde je u $\mathcal{C}^1$ funkce. Potom platí následující:*

$$n_t[u] + n_{x_j}[f^j(u)] = 0 \tag{3.2}$$

na Γ.

<u>*Důkaz*</u>. Viz např. [6]. □

Poznámka 3.4 Buď $d = 2$ a $n_x \neq 0$ $(x = x_j)$, potom můžeme vynásobit (3.2) pomocí $-1/n_x$ a obdržet

$$\sigma[u] = [f(u)], \tag{3.3}$$

kde je s převrácená hodnota ke směrnici křivky $\Gamma = \{(x,t), t = t(x)\}$, tedy $\sigma = 1/(dt/dx)$.

Příklad 3.5 Uvažujme skalární případ (1.1) pro $d = 2$ a $f(u) = u^2/2$, tedy $u : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$. Tato rovnice se nazývá v literatuře Burgersova.
Uvažujme počáteční data $u_0(x) = 1$, pro $x \leq 0$, a $u_0(x) = 0$, pro $x \geqq 0$. Nyní vezmeme řešení, které je identicky jedna nalevo od křivky nespojitosti sklonu σ a identicky nula napravo. Potom dávají předchozí podmínky $\sigma(1-0) = 1^2/2 - 0^2/2$. Tedy křivka nespojitosti je přímka.
Nyní předepišme počáteční data $u_0(x) = 0$, pro $x \leq 0$ a $u_0(x) = 1$, pro $x \geqq 0$. Jestliže vezmeme nespojité řešení, které je tentokrát naopak identicky nula nalevo křivky nespojitosti a jedna napravo, dostáváme jako předtím $\sigma = 1/2$.
Dají se ale zkonstruovat i následující slabá řešení této rovnice. Uvažujme po částech konstantní funkce parametrizované pomocí $a \geqq 0$

$$\begin{aligned} u_a(x,t) : 0, &\quad \textit{pro} \quad x/t < -a/2 \\ -a, &\quad \textit{pro} \quad -a/2 < x/t < 0 \\ a, &\quad \textit{pro} \quad 0 < x/t < a/2 \\ 0, &\quad \textit{pro} \quad x/t > a/2, \end{aligned}$$

Lze ukázat ([8]), že všechny tyto funkce jsou slabými řešeními Burgersovy rovnice (tedy rovnice typu (1.1)), čímž dostáváme nespočetně mnoho těchto řešení. Proto se zavádí, jak už bylo zmíněno, pojem selektoru, který vybírá jednoznačné řešení.

Kapitola 4

Zákony zachování

Pokud se hodnota nějaké fyzikální veličiny před proběhnutím nějakého děje a po jeho skončení rovnají, říkáme, že platí zákon zachování. Speciálně, aplikujeme zákony zachování na termodynamiku kontinua, která nám bude sloužit jako modelový příklad a napíšeme rovnice bilance pro hmotnost, hybnost, moment hybnosti a energii. Navíc k tomu přidáme nerovnici pro entropii, která plyne z termodynamických úvah.(Tím budou zahrnuty i nerovnovážné děje). Základním úkolem v této oblasti je sledování teploty a umístění bodů tělesa.
Uvažujme nyní obecnou extenzivní veličinu w, kterou chceme bilancovat. Objemová hustota veličiny $\Psi(x,t)$ v referenčním popisu se rovná $\Psi(x,t) = \lim\limits_{V_0 \to 0} dw/dV_0$, kde V_0 je objem v čase $t = 0$. Naopak při prostorovém popisu je objem tělesa V časově proměný v závislosti na pohybu tělesa. Objemovou hustotu při prostorovém popisu značíme $\Phi(x,t)$ a platí $\Phi(x,t) = \lim\limits_{V \to 0} dw/dV$. Nyní platí pro celkové množství veličiny w:

$$w(t) = \int_{V_0 \setminus S} \Psi(x,t)\; dV = \int_{V \setminus s} \Phi(\chi,t)\; dV,$$

kde $S = S(x,t)$(nebo v prostorovém popisu $s = s(\chi,t)$), je nějaká pohybující se plocha nespojitosti (chceme zahrnout do popisu rázové vlny) a provádíme objemovou integraci. Celkové množství veličiny uvnitř tělesa se může změnit buď díky toku skrz hranici (J) nebo produkci uvnitř objemu tělesa (P). Napíšeme to následovně:

$$D_t w = J(w) + P(w),$$

kde $D_t w = \partial_t w + v^i(x,t)\partial_{x_i} w$ je konvektivní derivace. Tohle může být považováno za obecný bilanční zákon. (Podrobnosti lze nalézt v [9].)
Podívejme se teď na odvození jedné z bilančních rovnic, rovnice kontinuity v prostorovém popisu. Vezměme objem V s povrchem S, kde je uzavřena nějaká pohybující se látka o hustotě ρ (prostorový popis). Celkovou hmotnost látky M dostaneme přeintegrováním ρ přes objem V.

$$M = \int_V \rho\; dV. \tag{4.1}$$

Nyní aplikujeme obecný zákon bilance:

$$-dM/dt = \int_S \rho v\; dS.$$

Tedy máme

$$\partial_t \int_V \rho \; dV + \int_S \rho v \; dS = 0.$$

Plošný integrál můžeme přetransormovat na objemový pomocí Gaussovy věty:

$$\partial_t \int_V \rho \; dV + \int_V \mathrm{div}(\rho v^T) \; dS = 0\,.$$

Rovnici můžeme přepsat na tvar

$$\int_V \partial_t \rho \; + \mathrm{div}(\rho v^T) \; dV \; = 0. \tag{4.2}$$

Vidíme, že když přeintegrujeme nějakou funkci prostorových proměných v 4.2 přes objem V, musíme dostat nulu. (Tohle je jenom reformulace (4.1), tedy globálního zákona zachování. Ale přepíšeme-li rovnici (4.1) tímto způsobem, můžeme dostat větší informaci.) Pokud má rovnice (4.2) platit pro všechny objemy $V' \subset V$ potom dostaneme lokální zákon zachování:

$$\partial_t \rho + \mathrm{div}(\rho v^T) \; = 0\,. \tag{4.3}$$

V referenčním popisu má rovnice kontinuity tvar

$$D_t \rho_0 = 0 \tag{4.4}$$

a platí vztah $\rho = \rho_0 / \det F$.
Bilanční rovnice pro moment hybnosti zapíšeme následovně:

$$\begin{aligned} D_t(\rho_0 v) &= \mathrm{Div}\, S + \rho_0 b \\ \partial_t(\rho.v) + \mathrm{div}(\rho.vv^T) &= \mathrm{div}\, T + \rho b \end{aligned} \tag{4.5}$$

kde $S, T \in \mathbb{R}^{m \times m}$. S se nazývá Piolův-Kirchhoffův tenzor a T je Cauchyho tenzor. $b \in \mathbb{R}^m$ je objemová síla, kterou může být například gravitace. Tenzorové členy zde představují tok a produkce je způsobena objemovou silou. Může být ukázána platnost vztahu $T = 1/(\det F) S F^T$. Pro $n \in S^{m-1}$ představuje hodnota $S \cdot n$ v (x, t) napětí (sílu na jednotku plochy) přenášené částicí x v čase t přes materiálovou plochu s normálou n, a hodnota $T \cdot n$ v (χ, t) je napětí přenášené v bodě χ a čase t přes prostorový povrch s normálou n.
Bilanční rovnice pro zákon zachování hybnosti vypadají následovně:

$$\begin{aligned} SF^T &= FS\,, \\ T^T &= T\,. \end{aligned} \tag{4.6}$$

A nakonec rovnice pro zákon zachování energie:

$$\begin{aligned} D_t(\epsilon\rho_0 + 1/2\rho_0 v^T v) = \mathrm{Div}(v^T S + Q) + \rho_0 v^T b + \rho_0 r, q &= QF^T / \det F \\ \partial_t(\epsilon\rho + 1/2\rho v^T v) + \mathrm{div}((\epsilon\rho + 1/2\rho v^T v) v^T) &= \mathrm{div}(v^T + q) + \rho v^T b + \rho r \end{aligned} \tag{4.7}$$

kde r jsou vnější energetické vlivy doprovázené emisí a absorbcí zářivé energie, Q a q jsou tepelné toky v referenčním a prostorovém popisu (v $\mathbb{R}^{m \times 1}$), ϵ je vnitřní energie na

jednotku hmoty. Zákony bilance pro celkovou energii lze převést na formulaci prvního zákona termodynamiky.
Jak už jsme se zmiňovali, bilance entropie bude vyjádřena v nejobecnější formulaci nerovnicí

$$D_t(\rho_0 s) \geqq \mathrm{Div}(Q/\theta) + \rho_0 r/\theta, \tag{4.8}$$

kde s je specifická entropie (na jednotku hmoty) a θ je absolutní teplota.

Poznámka 4.1 Entropie je extenzivní veličina, která charakterizuje makroskopický stav systému, ale také vnitřní pochody (jedna z definic entropie říká, že je to logaritmus počtu stavů, z kterých je systém vytvořen).
Tato nerovnost je variantou druhého zákona termodynamiky. Říká, že růst entropie uchované v nějaké části tělesa převyšuje tok entropie skrz hranici a produkci ve vnitřku. V literatuře se objevuje pod názvem Clausius-Duhemova nerovnost.

Důležitá je pro nás forma rovnic, které popisují bilanční zákony. Můžeme ukázat, že jsou speciálními případy (1.1). Poslední nerovnost je zodpovědná za testování termodynamické přípustnosti fyzikálních procesů, u kterých dochází k nespojitostem. Poznámky k tomuto tématu mohou být nalezeny například v ([2]). Jak uvidíme, analogická nerovnost bude hrát klíčovou úlohu pro dokazování jednoznačnosti a existence.

Kapitola 5

Selektory

Pokusíme se přepsat 1.1 do tvaru levé strany rovnice (4.8).

Lemma 5.1 *Buď $\eta = \eta(u) : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ a $q = q(u) : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^{d-1}$. Za předpokladu, že jsou funkce f, η a q dostatečně hladké a platí následující podmínka*

$$\partial_{u_k} q^j = \partial_{u_k} f_i^j . \partial_{u_i} \eta, \tag{5.1}$$

j=1,2,...,(d-1), k=1,2,...,s, splňují hladká řešení (1.1) automaticky rovnici

$$\partial_t \eta(u) + \partial_{x_j} q^j(u) = 0. \tag{5.2}$$

<u>*Důkaz*</u>. Přímočaře spočítáme vynásobením rovnice (1.1) výrazem $\nabla_u \eta(u)$ a použitím věty o derivaci složené funkce. Máme

$$\begin{aligned} \partial_t u_i . \partial_{u_i} \eta + \partial_{x_j} f_i^j(u) . \partial_{u_i} \eta = 0, \\ \partial_t u_i . \partial_{u_i} \eta + \partial_{u_k} f_i^j(u) . \partial_{x_j} u_k . \partial_{u_i} \eta = 0, \end{aligned} \tag{5.3}$$

i=1,...,s.
Vidíme tedy, že zvolením takového q, že platí (5.1) přepíšeme rovnici na tvar (5.2). □

Definice 5.2 *(η, q) z předchozího lemmatu se nazývá entropický pár (η je entropie and q je k ní příslušný entropický tok).*

Poznámka 5.3 Na entropii můžeme požadovat další podmínky.

Věta 5.4 *Nechť je $f \in \mathcal{C}^1$ a u^ϵ klasické řešení perturbovaného problému*

$$\partial_t u^\epsilon + \partial_{x_j} f^j(u^\epsilon) = \epsilon \Delta u^\epsilon. \tag{5.4}$$

Buď $u^\epsilon \to u$ s.v. a $\|u^\epsilon\|_{L^\infty(K)} \leq c(K)$, $c = c(K)$ a K je kompaktní podmnožina $\mathbb{R}^d_+$. (η, q) je entropický pár s $\mathcal{C}^2$ a konvexní entropií. Potom platí následující:
u je slabé řešení (1.1) a

$$\partial_t \eta(u) + \partial_{x_j} q^j(u) \leqq 0 \quad v \quad D'. \tag{5.5}$$

<u>*Důkaz*</u>. Platí vztah
$$\Delta u_k.\partial_{u_k}\eta = \Delta\eta(u) - \partial^2_{u_i u_j}\eta.\nabla u_i \nabla u_j, \tag{5.6}$$
neboť:

$$\begin{aligned}\Delta\eta(u) = \partial_{x_1}(\partial_{u_i}\eta.\partial_{x_1}u_i) + \partial_{x_2}(\partial_{u_i}\eta.\partial_{x_2}u_i) + ... + \partial_{x_{d-1}}(\partial_{u_i}\eta.\partial_{x_{d-1}}u_i) &= \\ = (\partial_{x_1}(\partial_{u_i}\eta).\partial_{x_1}u_i + \partial_{u_i}\eta.\partial^2_{x_1x_1}u_i) + (\partial_{x_2}(\partial_{u_i}\eta).\partial_{x_2}u_i + \partial_{u_i}\eta.\partial^2_{x_2x_2}u_i) + ... &+ \\ (\partial_{x_{d-1}}(\partial_{u_i}\eta).\partial_{x_{d-1}}u_i + \partial_{u_i}\eta.\partial^2_{x_{d-1}x_{d-1}}u_{d-1}) &= \\ (\partial_{u_iu_k}\eta.\partial_{x_1}u_k\partial_{x_1}u_i + \partial_{u_i}\eta.\partial^2_{x_1x_1}u_i) + (\partial_{u_iu_k}\eta.\partial_{x_2}u_k\partial_{x_2}u_i + \partial_{u_i}\eta.\partial^2_{x_2x_2}u_i) &+ \\ (\partial_{u_iu_k}\eta.\partial_{x_{d-1}}u_k\partial_{x_{d-1}}u_i + \partial_{u_i}\eta.\partial^2_{x_{d-1}x_{d-1}}u_i)&\end{aligned} \tag{5.7}$$

Ale z tohoto rozepsání už vidíme rovnici (5.6).
Nyní přenásobíme rovnici (5.4) opět členem $\nabla_u\eta(u)$. Levou stranu přepíšeme pomocí entropického páru na tvar (5.2) a do pravé strany dosadíme podle (5.6). Nyní ale z konvexity η plyne:
$$\partial_t\eta(u^\epsilon) + \partial_{x_j}q^j(u^\epsilon) \leqq \epsilon\Delta\eta(u^\epsilon) \tag{5.8}$$
Nyní vezmeme nezáporné $\phi \in \mathcal{D}'$ (nosič N), vynásobíme jím rovnici (5.8) a přeintegrujeme (provedeme per partes): □

$$-\int_N \eta(u^\epsilon)\partial_t\phi - \int_N q^j(u^\epsilon)\partial_{x_j}\phi \leqq \epsilon\int_N \eta(u^\epsilon)\Delta\phi \tag{5.9}$$

Existuje ale podle předpokladů na perturbovanou posloupnost konstanta c (zvolená pro množinu N) tak, že $\|u^\epsilon\|_{L^\infty(N)} \leq c$. Můžeme tedy v integrálech provést limitní přechody a dostáváme platnost (5.5). (Analogicky druhá část tvrzení.)

Poznámka 5.5 (5.5) se nazývá entropickou nerovností. V Kapitole 4 byla nerovnost (4.8) vyjádřena v referenčním popisu. Vyjádřeme si ji ještě v prostorovém popisu:

$$\partial_t(\rho s) + \mathrm{div}(\rho s.v^T) \geqq \mathrm{div}(q/\theta) + \rho r/\theta \tag{5.10}$$

Můžeme srovnat tvar této nerovnosti s (5.5). Jako matematický selektor se uplatnilo takové kritérium, které má podobný tvar jako druhý zákon termodynamiky. Nyní předveďme příslušnou větu, která dokazuje jednoznačnost a existenci v případě omezených dat (což je přirozený požadavek pro veličiny vystupující v zákonech zachování).

Věta 5.6 *Buď $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ a $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^{d-1})$. Potom existuje právě jedno slabé řešení $u \in L^\infty(\mathbb{R}^{d-1} \times (0,t))$ Cauchyho problému pro rovnici (1.1)($s = 1$) pro $t > 0$, které splňuje (5.5) pro všechny konvexní entropie η.*

<u>*Důkaz*</u>. Důkaz tohoto výsledku může být nalezen v [5]. □

Poznámka 5.7 Je důležité zmínit, že musíme ověřit entropickou nerovnost pro všechny entropie. Vzniká tedy otázka, kolik entropií může daný hyperbolický systém pro fixní s a d mít. V případě skalárních rovnic zákonů zachování ($s = 1$) máme nekonečně mnoho konvexních entropií, neboť podle (5.1) odpovídá entropii η tok $q = \int_0^u \eta'(s)f'(s)\ ds$.

Podmínky kompatibility reprezentují $(d-1)s$ rovnic pro d neznámých funkcí v obecném případě $s > 1$. Takový systém je přeurčen vyjma případu ($s = 2$, $d = 2$). Z této úvahy vidíme, že se nedá říci, zda-li nějaká entropie obecně existuje. Existenční výsledek dostáváme ale v případě symetrizovatelných systémů (důkaz této věty můžeme nalézt, například, v [12]).

Poznámka 5.8 Tvrzení 5.4 říká, že viskozitní řešení (limity řešení perturbované rovnice (5.4)) splňují entropickou nerovnost, v případě stejnoměrné omezenosti řešení perturbované rovnice na kompaktech.
Můžeme nalézt například v [11], že viskozitní řešení jsou dalším selekčním kritériem. Ve skutečnosti (5.4) nemá formu podmínky pro řešení (1.1). Můžeme ale říci, že se lze dívat na některé pochody, kde zanedbáváme viskozitu, jako na limitní případy vazkých. Perturbovaný člen odpovídá u některých rovnic zahrnutí viskozity.

Kapitola 6

Slabá konvergence

Definice 6.1 *Buďte $\mathcal{C}_K(\mathbb{R}^s)$ spojité funkce s kompaktním nosičem. $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^s)$ bude značit zúplnění $\mathcal{C}_K(\mathbb{R}^s)$ v supremové normě.*

Poznámka 6.2 $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^s)$ jsou spojité funkce s nulou v nekonečnu.

Definice 6.3 *Reprezentanti omezených lineárních funkcionálů na $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^s)$ se nazývají Radonovy míry.*
Definujme také $\mathrm{Prob}(\mathbb{R}^s) \equiv \{\mu \in M(\mathbb{R}^s), \mu$ je nezáporná, $\mu(\mathbb{R}^s) = 1\}$. (μ je nezáporná pokud pro všechna $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^s)$, $g \geqq 0$, platí $\mu(g) \geqq 0$.)

Poznámka 6.4 Budeme používat značení $M(\mathbb{R}^s) = \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^s)^*$ (s normou $\|.\|_{M(\mathbb{R}^s)}$) pro prostor Radonových měr. Dále bude značena dualita mezi $M(\mathbb{R}^s)$ a $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^s)$ pomocí závorek $\langle ., . \rangle$.)
Radonovy míry můžeme také zavést z množinového hlediska jako Borelovy míry, které jsou konečné na kompaktech a vyhovují podmínkám vnější a vnitřní reguarality. Potom je formulována Rieszova věta o reprezentaci, která identifikuje elementy $(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^s))^*$ s těmito mírami. Informace o této konstrukci lze nalézt v [3].

Definice 6.5 $L^1(\Omega, \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^s)) \equiv \{f : (x \in \Omega) \mapsto (f_x \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^s)), \int_\Omega \|f_x\|_{\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^s)} < \infty\}$, *$\Omega \subset \mathbb{R}^d_+$ je otevřená. Budeme psát $L^1_w = L^1(\Omega, \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^s))$.*

Definice 6.6 *Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d_+$ otevřená. Zobrazení $\nu : \Omega \mapsto \mathrm{Prob}(\mathbb{R}^s)$ je slabě-*-měřitelné pokud pro všechny $f \in L^1_w$ je zobrazení $x \mapsto \langle \nu_x, f_x \rangle = \int_{\mathbb{R}^s} f_x(\lambda) d\nu_x(\lambda)$ měřitelné. Značíme $L^\infty_w \equiv \{\nu : \Omega \to \mathrm{Prob}(\mathbb{R}^s)$, ν je slabě-*-měřitelné, $\|\nu\|_{L^\infty_w} < \infty\}$, kde $\|\nu\|_{L^\infty_w} \equiv \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} \|\nu_x\|_{M(\mathbb{R}^s)}$.*

Platí následující vztah mezi L^1_w a L^∞_w:

Lemma 6.7 *${L^1_w}^* = L^\infty_w$ a L^1_w je Banachův prostor.*

<u>*Důkaz*</u>. Důkaz je v [12]. □

Věta 6.8 *Uvažujme měřitelnou posloupnost funkcí* $u^n : \mathbb{R}^d_+ \to \mathbb{R}^s$. *Potom:*
1) Existuje podposloupnost u^{n_k} *a soubor nezáporných měr* ν_x, *pro s.v.* $x \in \mathbb{R}^d_+$, *takových, že platí*

$$g(u^{n_k}) \rightharpoonup^* \int_{\mathbb{R}^s} g(\lambda)\ d\nu_x(\lambda) \quad v \quad L^\infty(\mathbb{R}^d_+) \tag{6.1}$$

pro $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^s)$.
2) Jestliže navíc

$$\|u^n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d_+)} \leqq k \tag{6.2}$$

stejnoměrně v n, potom existuje kompakt K takový, že supp $\nu_x \subset K$ *a* $\nu_x(\mathbb{R}^s) = 1$ *pro s.v.* $x \in \mathbb{R}^d_+$. *(6.1) potom platí pro libovolné* $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^s)$.

Důkaz.
1)
Definujme posloupnost pravděpodobnostních měr $\nu^n_x \equiv \delta_{u^n(x)}$ pro s.v. $x \in \mathbb{R}^d_+$ a $n \in \mathbb{N}$. Potom pro $f \in L^1_w$ máme

$$\langle \nu^n_x, f_x \rangle = \int_{\mathbb{R}^s} f_x(\lambda)\ d\nu_x(\lambda) = f_x(u^n(x)).$$

Víme, že posloupnost $u^n(x)$ je měřitelná v x a $f_x(\lambda)$ je spojitá v λ, tedy je složení $f_x(u^n(x))$ měřitelné.
Zavedeme $\nu^n : x \mapsto \nu^n_x$. Potom podle definice 6.6 je ν^n slabě-*-měřitelné. Dostáváme, že

$$\|\nu^n\|_{L^\infty_w(\mathbb{R}^d_+)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^d_+} \|\delta_{u^n(x)}\|_{M(\mathbb{R}^s)} = 1.$$

Proto je posloupnost ν^n stejnoměrně omezená v $L^\infty_w(\mathbb{R}^d_+, M(\mathbb{R}^s))$. Potom podle Alaogluovy věty (důkaz je například v [6]) existuje podposloupnost (bude nadále značena ν^n) taková, že

$$\nu^n \rightharpoonup^* \nu \quad \text{v} \quad L^\infty_w(\mathbb{R}^d_+, M(\mathbb{R}^s)).$$

To znamená, že pro všechny $f \in L^1_w(\mathbb{R}^d_+, \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^s))$ platí

$$\langle\!\langle \nu^n, f \rangle\!\rangle \to \langle\!\langle \nu, f \rangle\!\rangle, \tag{6.3}$$

kde $\langle\!\langle \nu, f \rangle\!\rangle$ je kombinací duality mezi L^1_w a L^∞_w a slabé formulace. Nyní vezmeme speciální $f = \phi.g$, kde $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d_+)$ a $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^s)$. Potom vidíme, že $f \in L^1_w(\mathbb{R}^d_+, \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^s))$. Tedy

$$\langle\!\langle \nu^n_x(\lambda), \phi(x).g(\lambda) \rangle\!\rangle \to \langle\!\langle \nu_x(\lambda), \phi(x).g(\lambda) \rangle\!\rangle, \tag{6.4}$$

což neznamená nic jiného než

$$\int_{\mathbb{R}^d_+} \int_{\mathbb{R}^s} g(\lambda)\ d\nu^n_x(\lambda)\phi(x)\ dx \to \int_{\mathbb{R}^d_+} \int_{\mathbb{R}^s} \langle \nu_x(\lambda), g(\lambda) \rangle \phi(x)\ dx, \tag{6.5}$$

pro všechny g a ϕ $(n \to \infty)$.
Nyní fixujeme g a využijeme faktu, že ν^n je delta distribuce v bodě u^n. Proto

$$\int_{\mathbb{R}^d_+} g(u^n(x))\phi(x)\ dx \to \int_{\mathbb{R}^d_+} \langle \nu_x(\lambda), g(\lambda) \rangle \phi(x)\ dx, \tag{6.6}$$

pro všechny ϕ, když $n \to \infty$. Ale toto už je požadovaná slabá-*-konvergence, protože $\langle \nu_x, g \rangle$ je v $L^\infty(\mathbb{R}^d_+)$ pro každé $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^s)$.
Abychom to ukázali, potřebujeme, aby

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d_+} |\langle \nu_x, g \rangle| < \infty.$$

Ale $|\int_{\mathbb{R}^s} g(\lambda)\ d\nu_x(\lambda)| \leqq \int_{\mathbb{R}^s} |g(\lambda)|\ d\nu_x(\lambda) \leqq \|g\|_{\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^s)}$.
Nakonec vezmeme $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^s)$, $g \geqq 0$, a $\phi \in\ L^1(\mathbb{R}^d_+)$, $\phi \geqq 0$. Máme podle (6.6)

$$0 \leqq \int_{\mathbb{R}^d_+} g(u^n(x))\phi(x)\ dx \to \int_{\mathbb{R}^d_+} \langle \nu_x(\lambda), g(\lambda) \rangle \phi(x)\ dx,$$

jak $n \to \infty$. Tedy vidíme, že ν_x je nezáporná pro s.v. $x \in \mathbb{R}^d_+$.
2)
Díky odhadu (6.2) máme $\langle \nu_x, g \rangle = 0$ pro všechny g takové, že supp $g \cap (B_{k+c}(0))$ je prázdná množina ($B_r(0)$ je uzavřená koule se středem v počátku a poloměrem r) , $c > 0$. (Máme posloupnost nul v (6.6), která jde k $\int_{\mathbb{R}^d_+} \langle \nu_x(\lambda), g(\lambda) \rangle \phi(x)\ dx$.) Proto supp $\nu_x \subseteq B_{k+c}(0)$ (stejnoměrně) pro s.v. $x \in \mathbb{R}^d_+$.
K dokončení důkazu vezmeme $g_0 \equiv 1$ on $B_{k+c}(0)$, g_0 je spojitá s kompaktním nosičem, $|g_0| \equiv 1$ na $B_{k+c}(0)$. Obdržíme z (6.1):

$$\langle \nu_x, g_0 \rangle = 1 \quad \text{for a.e.} \quad x \in \mathbb{R}^d_+$$

$\|\nu_x\|_{M(\mathbb{R}^s)}$ je supremum těchto výrazů, tedy jsme získali spodní odhad $\|\nu_x\|_{M(\mathbb{R}^s)} \geqq 1$. Ze slabé-*-polospojitosti normy plyne:

$$\|\nu_x\|_{M(\mathbb{R}^s)} \leqq \liminf \|\nu^n_x\|_{M(\mathbb{R}^s)} = 1$$

Tedy ν_x je pravděpodobnostní míra na $\mathbb{R}^s$ pro s.v. $x \in \mathbb{R}^d_+$. □

Poznámka 6.9 *V literatuře se zobrazeni ν říká Youngova míra.*

Důsledek 6.10 *Uvažujme měřitelnou posloupnost funkcí $u^n : \Omega \to \mathbb{R}^s$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d_+$ je omezená otevřená množina. Nechť platí odhad:*

$$\|u^n\|_{L^p(\Omega)} \leqq l,\ \ 1 < p < \infty. \tag{6.7}$$

$\tau \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^s)$ takové, že $|\tau(\lambda)| \leqq c(1 + |\lambda|^q)$ pro všechna λ, kde c je konstanta nezávislá na τ a $q > 0$. Potom existuje podposloupnost stále značená u^n a soubor pravděpodobnostních měr ν_x, pro s.v. $x \in \mathbb{R}^d_+$, takových, že platí

$$\tau(u^n)(x) \rightharpoonup \int_{\mathbb{R}^s} \tau(\lambda)\ d\nu_x(\lambda) \quad v \quad L^r(\Omega),\ 1 < r \leqq p/q.$$

<u>*Důkaz*</u>.
Pro potřeby důkazu definujme funkce $\gamma^k(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}^s$:

$$\begin{array}{rll} 1, & for & |\lambda| \leqq k \\ k+1-\lambda, & for & |\lambda| \in (k, k+1) \\ 0, & for & |\lambda| \geqq (k+1). \end{array} \tag{6.8}$$

Zafixujme $r \in (1, p/q]$, vezměme $h \in L^t(\Omega)$ $(1/t + 1/r = 1)$, a definujme $\tau^k(u) = \tau(u).\gamma^k(u)$, (bez újmy na obecnosti je $\tau \geqq 0$, jinak $\tau = \tau^+ + \tau^-$, kde τ^+ je pozitivní a τ^- negativní část funkce τ).
Chceme dokázat $\langle \nu_x, \tau \rangle \in L^r(\Omega)$, kde ν_x je míra, která existuje podle části 1) Věty 6.8.
Dále označme $I \equiv \int_\Omega h(x)(\tau(u^n(x)) - \langle \nu_x, \tau \rangle)$. Tento integrál můžeme rozepsat jako $I = \int_\Omega h(x)(\tau(u^n(x) - \tau^k(u^n(x)) + \int_\Omega h(x)(\tau^k(u^n(x) - \langle \nu_x, \tau^k \rangle) + \int_\Omega h(x)(\langle \nu_x, \tau^k \rangle - \langle \nu_x, \tau \rangle)$.
(Je použito značení: $I = I_1 + I_2 + I_3$.) Ukážeme, že $I_1 \to 0$ pro $k \to \infty$ stejnoměrně v n, $I_2 \to 0$ pro $n \to \infty$ a $I_3 \to 0$ opět pro $k \to \infty$. Celkově tím bude ověřeno, že integrál I jde k nule.
Potom můžeme vzít k tak velké, že I_1 a I_3 jsou malé. Následně lze zvolit n takové, že I_2 je malé. Konvergence v itegrálu I_1 zůstane zachována, protože je uniformní v n. Z podmínek na růst τ máme:

$$\|\tau(u^n)\|_{L^r(\Omega)} \leqq c^r(\int_\Omega (1 + |u^n(x)|)^{qr})^{1/r} \leqq c_0 \quad \text{stejnoměrně v} \quad n. \tag{6.9}$$

Bude postupně ukázáno zdůvodnění konvergence pro integrály I_1, I_2 a I_3:

1. Definujeme $A_k^n \equiv \{x \in R_+^d, |u^n(x)| \geqq k\}$. Podle definice γ^k je $(1 - \gamma^k(u^n)) \neq 0$ na A_k^n. Dále je $|I_1| \leqq \int_\Omega |h(x)|.|\tau(u^n(x)).(1 - \gamma^k(u^n))| \leqq \int_{A_k^n} |h(x)|.|\tau(u^n(x))| \leqq \|h\|_{L^t(A_k^n)}.\|\tau(u^n)\|_{L^r(A_k^n)} \leqq c.\|h\|_{L^t(A_k^n)} \to 0$ pro $k \to \infty$ stejnoměrně v n. (A_k^n je level-set s fixovaným horním indexem n a h je měřitelná funkce.)

2. Použijeme vnoření $L^t(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, které je platné na množinách konečné míry $(t > 1)$. Potom $(\langle \nu_x^n, \tau^k \rangle - \langle \nu_x, \tau^k \rangle) \rightharpoonup^* 0$ v $L^\infty(\Omega)$, poněvadž $\tau^k \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^s)$. (Používána stejná strategie jako v důkazu 6.8.)

3. K zjištění, že I_3 jde k nule používáme Leviho větu o monotonní konvergenci (dále jen větu o monotonní konvergenci) :
$0 \leqq \tau^k \leqq \tau^{k+1} \leqq \tau$. Tedy $\int_{\mathbb{R}^s} \tau^k \, d\nu_x \to \int_{\mathbb{R}^s} \tau \, d\nu_x$ pro s.v. $x \in \Omega$ pro $k \to \infty$.
Předpokládejme dále, že $h \geqq 0$:
Platí $0 \leqq h(x)\langle \nu_x, \tau^k \rangle \leqq h(x)\langle \nu_x, \tau^{k+1} \rangle \leqq h(x)\langle \nu_x, \tau \rangle$ a $h(x)\langle \nu_x, \tau^k \rangle \to h(x)\langle \nu_x, \tau \rangle$ pro s.v. $x \in \Omega$. Tedy znovu podle věty o monotonní konvergenci máme žádaný výsledek, ale stále může být $\int_\Omega h(x)\langle \nu_x, \tau \rangle$ nekonečný. Konečnost tohoto integrálu $\langle \nu_x, \tau \rangle \in L^r(\Omega)$ plyne z následujících úvah.
Používáme (6.9) a $r > 1$ (Alaogluova věta). Platí nerovnost $\|\tau^k(u^n)\|_{L^r(\Omega)} \leqq \|\tau(u^n)\|_{L^r(\Omega)} \leqq c$ stejnoměrně v k a n. Z toho vyplývá, že pro všechna fixovaná k existuje posloupnost funkcí $a_k(x) \in L^r(\Omega)$ a podposloupnost n (značená stejně) taková, že $\langle \nu_x^n, \tau^k \rangle \rightharpoonup^* a_k(x)$ v $L^r(\Omega)$ stejnoměrně v k pro $n \to \infty$.
Pokud to srovnáme s částí 2) tohoto důkazu, dostaneme $a_k(x) = \langle \nu_x, \tau^k \rangle$ pro všechna k a s.v. $x \in \Omega$. Odtud plyne, že $\|\langle \nu, \tau^k \rangle\|_{L^r(\Omega)} \leqq c$ a opět požijeme Alaogluovu větu.
Tedy existuje funkce $a \in L^r(\Omega)$ taková, že $\int_\Omega h(x)\langle \nu, \tau^k \rangle \to \int_\Omega h(x)a(x)$ pro k$\to \infty$ (k je podposloupnost) pro všechna $h \in L^t(\Omega)$.
Dostali jsme tedy, že integrál $\int_\Omega h(x)\langle \nu, \tau^k \rangle$ jde pro $k \to \infty$ ke dvěma různým výrazům, které se tedy musí rovnat. Dosaďme za $h = \chi_E$ charakteristickou funkci E,

kde $E \subset \Omega$ je měřitelná množina. Potom máme $\int_E \langle \nu_x, \tau \rangle \, dx = \int_E a(x) \, dx$. Nakonec tedy dostáváme $\langle \nu_x, \tau \rangle = a(x) \in L^r(\Omega)$ s.v. a I_3 jde do nuly pro k $\to \infty$.

Dokažme nyní, že míry generované touto posloupností mají normu jedna. Udělejme to ve více krocích, nejprve ukažme, že platí následující:

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} |A_k^n| = 0 \tag{6.10}$$

je postačující podmínka pro $\|\nu\|_{L_w^\infty} = 1$.
Opravdu, pokud $E \subset \Omega$ je měřitelná množina pozitivní a konečné míry, potom:

$$1/|E| \int_E (1 - \gamma^k(u^n(x)) \ \leqq 1/|E|.|A_k^n| \leqq 1/|E| \sup_{n\in\mathbb{N}} |A_k^n| \equiv \alpha_k \to 0, \qquad \text{pro} \quad k \to \infty\,.$$

Nyní použijeme předchozí nerovnost dohromady s Větou 6.8 aplikovanou na γ^k a slabou-*-polospojitost normy. Z tohoto plyne

$$1 - \alpha_k \leqq 1/|E| \int_E \gamma^k(u^n(x)) \to 1/|E| \int_E \langle \nu_x, \gamma^k \rangle \, dx \leqq 1\|E| \int_E \|\nu_x\|_{M(\mathbb{R}^s)} \leqq 1. \tag{6.11}$$

Tedy $1/|E| \int_E \|\nu_x\|_{M(\mathbb{R}^s)} \, dx = 1$ pro všechny E meřitelné. Proto $\|\nu_x\|_{M(\mathbb{R}^s} = 1$ pro s.v. $x \in \Omega$. Ověřme tedy ještě, zda-li jsou funkce u^n takové, že podmínka (6.10) opravdu platí. Ale

$$|A_k^n|.k^p = \int_{A_k^n} k^p \leqq \int_{A_k^n} |u^n(x)|^p \leqq \int_\Omega |u^n(x)|^p \leqq l. \tag{6.12}$$

Tedy $|A_k^n| \leqq l/k^p$ a proto je nezávisle n a n

$$\lim_{k\to\infty} |A_k^n| = 0.$$

□

Poznámka 6.11 Předpoklady na růst τ v předchozí Větě 6.8 jsou přirozené (v kontextu stlačitelného proudění), více informací může být nalezeno v [8] v kapitole 1 and 5. Věta 6.8 je užívána v důkazu jednoznačnosti a existence skalárních hyperbolických rovnic druhého řádu ([8], kapitola 4).
Tento důkaz lze rozhodně zobecnit do $\mathbb{R}_+^d$ v poslední části, kde počítáme normu měr. Konstrukce s pozitivními měřitelnými a konečnými mírami E není závislá na tom, zda-li jsme v omezené oblasti. V poslední nerovnosti (6.12) (ověření, že (6.10) platí) mohu také dosadit místo Ω celé $\mathbb{R}_+^d$. Omezenost Ω je potřeba pro vnoření $L^t(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, $t > 1$, které se používá pro konvergenci prvního a druhého integrálu do nuly.
Konstrukce pro výpočet normy měr v důkazu tohoto Důsledku 6.10 lze použít pro výpočet normy i v případě Věty 6.8. V tomto případě ale budou od určitého k množiny A_k^n prázdné. (Každopádně v obou případech se používá slabá-*-polospojitost normy. Nicméně ve Větě 6.8 přímo normy můžeme nabýt konkrétní volbou funkce g.)

Ve skutečnosti budeme používat verzi této věty (Lemma 6.13) kde u je stejnoměrně omezená posloupnost v $L^\infty(\mathbb{R}_+, L^p(\mathbb{R}^{d-1}))$.

Definice 6.12 *Říkáme, že $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^p(\mathbb{R}^{d-1}))$ když existuje $c < \infty$ tak, že $\|u(.,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} < c$ pro s.v. $t \in \mathbb{R}_+$ (a analogicky $L^\infty(\mathbb{R}_+, L^1(\mathbb{R}^{d-1}))$.*

Uvedeme následující lemma, které bude použito v části o jednoznačnosti a existenci:

Lemma 6.13 *Uvažujme tedy opět posloupnost měřitelných funkcí $u^n : \mathbb{R}^d_+ \to \mathbb{R}$. Nechť platí*

$$\|u^n(.,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} \leqq c, \quad \text{pro s.v.} \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{6.13}$$

Uvažujme $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ takové, že platí růstová podmínka $|g(\lambda)| \leqq k.(1 + |\lambda|^q)$ pro všechna λ, kde k je nezávislá na g a $q \in [1, p)$. Potom existuje podposloupnost u^{n_k} ($n_k = n$) a soubor pravděpodobnostních měr ν_x, pro s.v. $x \in \mathbb{R}^d_+$, takových, že platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d_+} g(u^{n_k})(x)\phi(x)\ dx \to \int_{\mathbb{R}^d_+} \int_{\mathbb{R}} g(\lambda) d\nu_x(\lambda)\ \phi(x)\ dx \quad \text{pro} \in \phi \in L^\infty(\mathbb{R}^d_+) \cap L^1(\mathbb{R}^d_+). \tag{6.14}$$

<u>*Důkaz*</u>. Jak lze postupovat v důkazu tohoto lemmatu je naznačeno v [13], uvedeme jenom krátkou poznámku. □

Poznámka 6.14 Uvědomme si, že z $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d_+) \cap L^p(\mathbb{R}^d_+)$ už plyne $\phi \in L^p(\mathbb{R}^d_+)$ pro všechna p. Neboť

$$\int_{\mathbb{R}^d_+} |\phi(x)|^p\ dx = \int_{\mathbb{R}^d_+} |\phi(x)|^{p-1}.|\phi(x)|\ dx \leqq \|\phi\|^{p-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^d_+)}.\|\phi\|_{L_1(\mathbb{R}^d_+)}. \tag{6.15}$$

Nyní odhadněme výraz $\int_{\mathbb{R}^d_+} |g(u^n(x))||\phi(x)|\ dx$ pomocí růstových podmínek na g. Máme

$$|\int_{\mathbb{R}^d_+} g(u^n(x))\phi(x)\ dx| \leqq c + k\int_{\mathbb{R}^d_+} |u^n(x)|^q|\phi(x)|\ dx. \tag{6.16}$$

Nyní pomocí Hölderovy nerovnosti a (6.13) dostáváme:

$$\int_{\mathbb{R}^d_+} |(u^n(y))|^q|\phi(y)|\ dy \leqq \int_{\mathbb{R}_+} (\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u^n(x,t)|^p)^{q/p}.(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\phi(x,t)|^{p/(p-q)})^{(p-q)/p})\ dt \leqq$$

$$\|u^n\|^q_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L^p(\mathbb{R}^{d-1}))}. \int_{\mathbb{R}^+} \|\phi(x,t)\|_{L^{p/(p-q)}(\mathbb{R}^{d-1})}\ dt,$$

kde Hölderovu nerovnost jsme mohli použít ($q < p$). Z toho plyne omezenost integrálu na levé straně (6.14).

Poznámka 6.15 Na Youngovu míru ν_y můžeme pohlížet jako na objekt, který udává limitní pravděpodobnostní rozdělení hodnot u^n v nějakém okolí y pro $n \to \infty$.
Opět označme $B_\delta(y)$ kouli se středem v y a poloměrem δ. Můžeme definovat $\nu^{n,\delta}_x(A) \equiv 1/|B_\delta(y)|.\text{meas}\,\{x \in B_\delta(y),\ u^n(x) \in A\}$. $\nu^{n,\delta}_y$ je tedy pravděpodobnostní rozdělení hodnot $u^n(x)$ pro $x \in B_\delta(y)$. Potom jde ukázat [1], že

$$\nu_y = \lim_{\delta\to 0} \lim_{n\to\infty} \nu^{n,\delta}_x,$$

kde konvergence je slabá-* ve smyslu měr. (Nevznikne ale Youngova míra, když se provede jako první limitní přechod $\delta \to 0$. Musí se tedy vzít do úvahy i okolí bodu y.)

Příklad 6.16 V případě posloupnosti $\sin(nx)$ můžeme zkonstruovat Youngovu míru explicitně (některé úvahy lze nalézt v [3]):

$$d\nu_x(\lambda) = \frac{1}{\pi} . \frac{d\lambda}{\sqrt{1-(\lambda)^2}} . \chi_{-1,1}(\lambda)$$

Potom pro všechna $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ máme podle (6.1)

$$g(\sin\ nx) \rightharpoonup^* \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{g(\lambda)}{\sqrt{1-(\lambda)^2}}\, d\lambda \quad \text{v} \quad L^\infty(\mathbb{R}). \tag{6.17}$$

Kapitola 7

Zobecněná řešení

Pojem slabého řešení byl definován v Kapitole 3. Každé řešení bude už v dalším textu považováno automaticky za slabé. Nyní defnice řešení v mírách (zavedeme pojmy pro případ skalární rovnice (1.1)):

Definice 7.1 *Slabě-*-měřitelné zobrazení* $\nu : x \mapsto \nu_x$, $\nu : \mathbb{R}^d_+ \to \mathrm{Prob}(\mathbb{R})$ *se nazve řešení v mírách rovnice* (1.1) *pokud splňuje*

$$\partial_t \langle \nu_x, Id \rangle + \partial_{x_j} \langle \nu_x, f^j \rangle = 0$$

v D'.

Kombinace předchozích definic s entropickou nerovností nám dá následující:

Definice 7.2 *Youngova míra* ν *asociovaná k posloupnosti funkcí perturbované rovnice se nazývá entropické řešení 1.1 v mírách, jestliže*

$$\partial_t \langle \nu_{(x,t)}(\lambda), \eta \rangle + \mathrm{div} \langle \nu_{(x,t)}(\lambda), q \rangle \leqq 0 \tag{7.1}$$

v D' *v* $\mathbb{R}^d_+$ *pro všechny konvexní entropie a pokud pro všechny kompaktní množiny* $K \subset \mathbb{R}^{d-1}$ *platí*

$$\lim_{T \to 0+} \frac{1}{T} \int_0^T \int_K \langle \nu_{(x,t)}(\lambda), |\lambda - u_0(x)| \rangle \, dxdt = 0. \tag{7.2}$$

Funkce u *se nazývá entropické řešení rovnice, jestliže* δ_u *je entropické řešení v mírách.*

Kapitola 8

Jednoznačnost

V této kapitole budeme uvažovat pouze f splňující:

$$|f(\lambda) - f(\rho)| = O(|\lambda|^\alpha + |\lambda|^q + |\rho|^\alpha + |\rho|^q), \tag{8.1}$$

$1 \leqq q < p$, a $(d-2)/(d-1) < \alpha \leqq 1$.
Uvažujeme entropie $\eta(\lambda) = |\lambda - k|$ (stačí uvažovat tyto entropie, protože potom už je entropická nerovnost splněna pro všechny konvexní entropie), pro všechna k, a k ní příslušný tok $q = \mathrm{sgn}(\lambda - k)(f(\lambda) - f(k))$, kde

$$\mathrm{sgn}(\lambda) \equiv \begin{cases} \frac{\lambda}{|\lambda|}, & \text{jestliže} \quad \lambda \neq 0 \\ 0, & \text{jestliže} \quad \lambda = 0. \end{cases} \tag{8.2}$$

V definici entropického řešení (7.2) vezmeme $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^p(\mathbb{R}^{d-1})) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+, L^1(\mathbb{R}^{d-1}))$.

Poznámka 8.1 Výsledky jsou založeny na Lemmatu 6.13. Předpoklady na u^n jsou v tomto lemmatu připravené tak, aby mohl být použit odhad na řešení perturbované rovnice, který je potřeba při důkazu existence.

V dalším se bude využívat konvolucí s následujícími funkcemi:

Definice 8.2 *Funkce $w : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ se nazve mollifier, pokud splňuje:*

$$w \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d),\ \mathrm{supp}\, w \subset \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leqq 1\},$$
$$w(x) \geqq 0, \int_{\mathbb{R}^d} w(x)\, dx = 1,\ w(x) = w(-x), w_\epsilon = w(x/\epsilon)/\epsilon^d,\ \epsilon > 0 \tag{8.3}$$

Předpokládejme tedy, že z parabolické perturbace dostaneme posloupnost funkcí u^n, pro které platí (6.13). Lze dokázat následující výsledek:

Věta 8.3 *Předpokládejme, že f splňuje předpoklady v (8.1). Buďte ν a μ Youngovy míry, které přísluší k posloupnostem u^n a v^n, které splňují (6.13). Nechť vyhovují nerovnosti (7.1). Potom*

$$\partial_t \langle \nu_x, (\lambda) \otimes \mu_x(\rho), |(\lambda - \rho)| \rangle + \mathrm{div} \langle \nu_x(\lambda) \otimes \mu_x(\rho), \mathrm{sgn}(\lambda - \rho)(f(\lambda) - f(\rho)) \rangle \leqq 0, \tag{8.4}$$

v D' v $\mathbb{R}_+^d$, kde $\nu_x \otimes \mu_x$ označuje tenzorový součin měr $d\nu_x(\lambda)\ d\mu_x(\rho)$ na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Důkaz. Zdůvodnění je v [13]. □

Věta 8.4 *Nechť jsou ν a μ dvě entropická řešení v mírách skalární rovnice (1.1), potom existuje funkce*

$$w \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^1(\mathbb{R}^{d-1})) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+, L^p(R^{d-1})) \tag{8.5}$$

taková, že $\nu_x = \mu_x = \delta_{w(x)}$ pro s.v. $x \in \mathbb{R}^d_+$.

Důkaz.
Když dokážeme platnost následující rovnosti, budeme hotovi:

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |\lambda - \rho| \; d(\nu_x \otimes \mu_x) = 0, \tag{8.6}$$

pro $x \in E$, kde E je měřitelná podmnožina $\mathbb{R}^d_+$ a míra $\mathbb{R}^d_+ \setminus E$ je nula.
Z toho už plyne, že ν_x a μ_x mají nosiče, v kterém leží jediný společný bod $w(x)$ pro všechna $x \in E$.
Pro spor předpokládejme, že $\lambda_1 \in \operatorname{supp} \nu_x$ a $\lambda_2 \in \operatorname{supp} \mu_x$ ($\lambda_1 \neq \lambda_2$). Potom existují funkce ψ_1, $\psi_2 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ takové, že $\operatorname{supp} \psi_1 \cap \operatorname{supp} \psi_2 = \emptyset$, $\langle \nu_x, \psi_1 \rangle > 0$ a $\langle \mu_x, \psi_2 \rangle > 0$. Podle (8.6) máme ale

$$0 < \int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \psi_1(\lambda)\psi_2(\rho) \; d(\nu_x \otimes \mu_x) \leqq \|\psi_1(\lambda)\psi_2(\rho)/(\lambda - \rho)\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R})} . \int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |\lambda - \rho| \; d(\nu_x \otimes \mu_x) = 0,$$

což je spor.
Dokažme nyní rovnost (8.6). Definujme funkce $\psi^n(r)$:

$$\begin{array}{rll} 1, & pro & 0 \leqq r \leqq n \\ 2(1 - r/2n), & pro & n < r \leqq 2n \\ 0, & pro & r > 2n \end{array} \tag{8.7}$$

a $\psi^n_\epsilon \equiv \psi^n * w_\epsilon$, $\epsilon > 0$, kde w_ϵ je jednodimenzionální analogie mollifieru.
Buď nyní $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty, \phi \geqq 0$. Potom

$$\begin{aligned} \Big| \int_{\mathbb{R}^d_+} \langle \nu_{(x,t)}(\lambda) \otimes \mu_{(x,t)}(\mu), q(\lambda, \mu) \rangle \phi(t) . \nabla \psi^n_\epsilon(x) \Big| &\leqq \\ k.\Big(\int_{\mathbb{R}^d_+} \langle \nu_{(x,t)}, |\lambda|^\alpha + |\lambda|^q \rangle + \int_{\mathbb{R}^d_+} \langle \mu_{(x,t)} \; , |\mu|^\alpha + |\mu|^q \rangle \Big) \phi(t) . |\nabla \psi^n_\epsilon(|x|)| &\leqq \\ c.(\|\nabla \psi^n_\epsilon(|x|)\|_{L^{1/(1-\alpha)}(\mathbb{R}^{d-1})} + \|\nabla \psi^n_\epsilon(|x|)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{d-1})}), & \end{aligned} \tag{8.8}$$

neboť v prvním odhadu použijeme (8.1) a k druhé nerovnosti používáme Jensenovu a Hölderovu nerovnost.
Z definice funkce ψ^n: Používáme $\partial_{x_i} \psi^n_\epsilon(|x|) = c/n . x_i/|x|$, $i = 1, ..., d$. Proto platí $|\nabla \psi^n_\epsilon| \leqq c/n$. Integrál $\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\nabla \psi^n_\epsilon|^{1/(1-\alpha)}$ je různý od nuly jenom pro $n \leqq |x| \leqq 2n$.
Máme tedy:

$$\|\nabla(\psi^n_\epsilon)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{d-1})} \leqq c \|\nabla(\psi^n_\epsilon)\|_{L^{1/(1-\alpha)}(\mathbb{R}^{d-1})} \leqq c.n^{(d-1).(1-\alpha)-1}$$

Pro $\alpha > (d-2)/(d-1)$ je tedy

$$\lim_{n\to\infty} \|\nabla \psi_\epsilon^n\|_{L^{1/(1-\alpha)}(\mathbb{R}^{d-1})} = 0. \tag{8.9}$$

Máme $A_n(t) \equiv \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \langle \nu_{(x,t)} \otimes \mu_{(x,t)}, |\lambda - \rho| \rangle \psi_\epsilon^n(|x|)\, dx$. Potom $A_n \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$.
Jestliže t_1 a t_2 ($t_1 < t_2$) jsou Lebesgueovy body $A_n(t)$ a ϕ jde k charakteristické funkci intervalu (t_1, t_2), dostaneme z Věty 8.3, 8.8 a použití testovací funkce $\phi.\psi^n$ v (8.4), že

$$A_n(t_2) - A_n(t_1) \leqq C.\|\nabla \psi_\epsilon^n\|_{L^{1/(1-\alpha)}(\mathbb{R}^{d-1})}. \tag{8.10}$$

Chceme nyní ukázat

$$\lim_{T\to 0+} \frac{1}{T} \int_0^T A_n(t)\, dt = 0 \tag{8.11}$$

s pomocí (7.2).
Na příklad z existenčního Lemmatu 6.13, z kterého máme existenci pravděpodobnostních měr, vidíme že množiny $\{x \in \mathbb{R}^{d-1} : \langle \nu_{(x,t)}, 1 \rangle \neq 1\}$ a $\{x \in \mathbb{R}^{d-1} : \langle \mu_{(x,t)}, 1 \rangle \neq 1\}$ mají nulovou Lebesguovu míru v $\mathbb{R}^{d-1}$ pro s.v. $t \in \mathbb{R}_+$. Pro tato t máme

$$\begin{aligned} A_n(t) &\leqq \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \langle \nu_{(x,t)} \otimes \mu_{(x,t)}, |\lambda - u_0| + |u_0 - \rho| \rangle \psi_\epsilon^n\, dx = \qquad (8.12) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \langle \nu_{(x,t)} \otimes \mu_{(x,t)}, |\lambda - u_0| \rangle \psi_\epsilon^n\, dx + \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \langle \nu_{(x,t)} \otimes \rho_{(x,t)}, |\rho - u_0| \rangle \psi_\epsilon^n\, dx. \end{aligned}$$

(8.12) zkombinovaný s (7.2) nám dává (8.11). Z (8.10) a (8.11) plyne

$$A_n(t) \leqq c.\|\nabla \psi_\epsilon^n\|_{L^{1/(1-\alpha)}}. \tag{8.13}$$

Věta o monotonní konvergenci dohromady s (8.9) dokazuje (8.6). □

Kapitola 9

Existence

Poznámka 9.1 Nejprve se provede parabolická regularizace (1.1). Takto získaná posloupnost v_n vyhovuje předpokladům (6.13) a přiřazená ν je řešení v mírách.
Potom z Věty 8.4 plyne, že existuje funkce w vyhovující (8.5) taková, že $\nu = \delta_w$.

Věta 9.2 *Nechť f splňuje růstovou podmínku (8.1) a $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d_+) \cap L^p(\mathbb{R}^d_+)$. Potom existuje jednoznačné entropické řešení w skalární rovnice (1.1) takové, že*

$$\|w(.,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^{d-1})} \leqq \|u_0\|_{L^r(\mathbb{R}^{d-1})}, \tag{9.1}$$

pro s.v. $t \in \mathbb{R}_+$ a $1 \leqq r \leqq p$.

Důkaz. Uvažujme tedy následující parabolickou regularizaci (1.1):

$$\partial_t u^{\epsilon_n} + \partial_{x_j} f^j_{\epsilon_n}(u^{\epsilon_n}) = 1/n.\Delta u^{\epsilon_n} \quad \text{v} \quad \mathbb{R}^d_+ \tag{9.2}$$

$$u^{\epsilon_n}(.,0) = u_0^{\epsilon_n} \quad \text{na} \quad \mathbb{R}^{d-1} \tag{9.3}$$

kde $u_0^{\epsilon_n}$ a f_{ϵ_n} jsou regularizace u_0 a f splňující $u_0^{\epsilon_n} \to u_0$ v $L^1(\mathbb{R}^{d-1})$ a $f_{\epsilon_n} \equiv f * w_{\alpha_n}$ (w_{α_n} je $(d-1)$-dimenzionální mollifier) s α_n takovými, že

$$\sup_{|\gamma| \leqq \alpha_n} |f(x+\gamma) - f(x)| \leqq 1/n \quad \text{pro} \quad |x| \leqq \|u_0^{\epsilon_n}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{d-1})}. \tag{9.4}$$

V další části důkazu budeme používat zkrácenou notaci $u^{\epsilon^n} \equiv u^n$ ($u^{\epsilon_n}(.,0) \equiv u_0^n$) a $f_{\epsilon_n} \equiv f_n$.
Parabolická perturbace (9.2) má jednoznačné řešení v_n pro každé n (viz [4]), které vyhovuje

$$\|v_n(.,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^{d-1})} \leqq \|u_0^n\|_{L^r(\mathbb{R}^{d-1})} \leqq \|u_0\|_{L^r(\mathbb{R}^{d-1})} + \epsilon_n,\ t \in \mathbb{R}_+,\ 1 \leqq r \leqq \infty \quad \text{a} \quad \epsilon_n \to 0, \tag{9.5}$$

kde poslední nerovnost plyne z trojúhelníkové nerovnosti (chceme mít funkce v_n odhadnuté stejnoměrně jako v Lemmatu 6.13). Dokažme nyní existenci Youngovy míry μ, která vyhovuje (7.2).
a)
Za tím účelem definujeme regularizace $\mathrm{sgn}(x)$, $|x-k|$ a $q(x,k)$ pro $k \in \mathbb{R}$:
$j_\delta(x) \equiv \mathrm{sgn} * w_\delta$, $\eta_\delta(x,k) \equiv \int_k^x j_\delta(y-k)\, dy$, $q_\delta(x,k) \equiv \int_k^x f_n'(y) j_\delta(y-k)\, dy$

Vynásobení (9.2) s $\phi.j_\delta(v_n-k)$, kde $\phi \geqq 0$, $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d_+)$ a užití $j'_\delta \geqq 0$ nám dává

$$\int_{\mathbb{R}^d_+} (\eta_\delta(v_n(x),k)\partial_t\phi + q_\delta(v_n(x),k).\nabla\phi)\ dx = \tag{9.6}$$

$$1/n.(\int_{\mathbb{R}^d_+} |\nabla v_n|^2.j'_\delta(v_n-k)\phi\ dx - \int_{\mathbb{R}^d_+} \eta_\delta(v_n(x),k)\Delta\phi\ dx) \geqq -c/n(\|v_n\|_{L^\infty(R_+,L^1(R^{d-1}))}+1). \tag{9.7}$$

Nechť δ jde k nule v této rovnici a užitím (9.3) a (9.5) dostáváme pro všechna $k \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}^d_+} (|v_n-k|\partial_t\phi + \operatorname{sgn}(v_n-k)(f_n(v_n)-f_n(k)).\nabla\phi)\ dx \geqq (-c/n). \tag{9.8}$$

Posloupnost v_n vyhovuje předpokladům v Lemmatu 6.13 (podle (9.5) výše), tedy existuje Youngova míra μ a podposloupnost v_{n_j} (označovaná v_j), která vyhovuje (6.14).
Nechť nyní j jde do nekonečna v (9.8) (položíme j místo n) a užijeme vlastnosti α_n:

$$\begin{aligned}
\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d_+} (\operatorname{sgn}(v_j-k)(f_j(v_j)-f_j(k).\nabla\phi)\ dx &= \\
= \lim_{j\to\infty}(\int_{\mathbb{R}^d_+} \operatorname{sgn}(v_j-k)(f_j(v_j)-f_j(k).\nabla\phi)\ dx &+ \\
\int_{\mathbb{R}^d_+} \operatorname{sgn}(v_j-k)(f_j(v_j)-f(v_j)+f_j(k)-f(k)).\nabla\phi)\ dx &= \\
\int_{\mathbb{R}^d_+} \langle\mu, \operatorname{sgn}(\lambda-k)(f(\lambda)-f(k))\rangle.\nabla\phi\ dx.&
\end{aligned} \tag{9.9}$$

Z tohoto plyne (po provedení stejné procedury s prvním členem v (9.8)), že μ vyhovuje (7.1).
b)
Nyní dokážeme, že μ vyhovuje také počáteční podmínce. Za tím účelem definujme následující dvě funkce g a Q:

$$g(\lambda) = |\lambda|^r \quad \text{a} \quad Q(\lambda,\lambda_0) = g(\lambda) - g(\lambda_0) - g'(\lambda_0)(\lambda-\lambda_0), \tag{9.10}$$

$r \in (1,\ \min(2,p))$. Pro nějakou kompaktní $K \subset \mathbb{R}^{d-1}$ máme

$$\int_K \langle\mu, |\lambda-u_0|\rangle\ dx \leqq c(K)(\int_K \langle\mu, Q(\lambda,u_0)\rangle\ dx)^{1/2}.$$

Z Jensenovy nerovnosti dostáváme

$$1/T\int_0^T(\int_K \langle\mu,|\lambda-u_0|\rangle\ dx)dt \leqq c(K)(1/T\int_0^T\int_K \langle\mu, Q(\lambda,u_0)\rangle\ dxdt)^{1/2}. \tag{9.11}$$

Buď $\psi_m \to g'(u_0)$ v $L^{r/r-1}(\mathbb{R}^{d-1})$, kde $\psi_m \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{d-1})$. Z výsledků Lemmatu 6.13 a (9.5) plyne:

$$\int_0^T\int_K \langle\mu, Q(\lambda,u_0)\rangle\ dxdt \quad \leqq \quad \int_0^T\int_K \langle\mu, |\lambda|^r - |u_0|^r - g'(u_0)(\lambda-u_0)\rangle\ dxdt$$

$$= \int_0^T \int_K \langle \mu, u_0 - \lambda \rangle \psi_m \, dxdt + T \int_{\mathbb{R}^{d-1} \setminus K} |u_0|^r \, dx +$$
$$+ \quad 2T \|u_0\|_{L^r} . \|g'(u_0) - \psi_m\|_{L^{r/(r-1)}}. \tag{9.12}$$

Buďte K_i kompaktní množiny takové, že $K \subset K_1 \subset K_2 \subset ..., \bigcup K_i = \mathbb{R}^{d-1}$. Protože $Q(\lambda, u_0) \geqq 0$, máme

$$\int_0^T \int_K \langle \mu, Q(u_0 - \lambda) \rangle \, dxdt \leqq \int_0^T \int_{K_i} \langle \mu, Q(u_0 - \lambda) \rangle \, dxdt. \tag{9.13}$$

Pomocí (9.12)(s K místo K_i) a předpokladu $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^{d-1}) \cap L^p(\mathbb{R}^{d-1})$ je

$$1/T \int_0^T \int_K \langle \mu, Q(\lambda, u_0) \rangle \, dxdt \quad \leqq \quad 1/T \int_0^T \int_K \langle \mu, u_0 - \lambda \rangle \, dxdt$$
$$+ \quad 2\|u_0\|_{L^r} \|g'(u_0) - \psi_m\|_{L^{r/(r-1)}}. \tag{9.14}$$

Tedy pro důkaz (7.2), stačí podle (9.11) a konstrukce ψ_m dokázat

$$\lim_{T \to 0+} \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \langle \mu, |u_0 - \lambda| \rangle \, \psi_m \, dxdt \leqq 0. \tag{9.15}$$

Uvažujme nyní

$$\frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^{d-1}} (u_0(x) - v_n(x,t)) \psi_m(x) dxdt \quad =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} (u_0(0) - u_0^n) \psi_m(x) dx -$$
$$- \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_0^t \partial_s v_n(x,s) \psi_m(x) \, dsdxdt$$

(Nyní označíme integrály na pravé straně této rovnosti jako I_1^n a I_2^n.) Pomocí (9.2), růstových podmínek na f, nerovnosti (9.5) a Lemmatu 6.13 dostaneme

$$I_2^n = -\frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_0^t (f_n(v_n(x,s)). \nabla \psi_m + 1/n . v_n \Delta \psi_m) \, dsdxdt \leqq c(m)T. \tag{9.16}$$

I_1^n jde k nule pro $n \to \infty$, protože $u_0^n \to u_0$ v $L^1(\mathbb{R}^{d-1})$. Z toho plyne

$$1/T \int_0^T \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \langle \mu, |u_0 - \lambda| \rangle \, dxdt = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^{d-1}} (u_0 - v_n) \psi_m(x) dxdt \leqq c(m)T, \tag{9.17}$$

což dokazuje (9.15). Následující lemma kombinované s (9.4) dokazuje (9.1). □

Lemma 9.3 *Předpokládejme, že ν je Youngova míra asociovaná k posloupnosti $u^n(x)$ vyhovující (6.13). Potom z*

$$\nu_x = \delta_{u(x)} \ s.v. \tag{9.18}$$

plyne

$$u_n \to u \ \ v \ \ L^r_{loc}(\mathbb{R}^d). \tag{9.19}$$

Důkaz. Nechť $1 < r < \min(2,p)$ a buďte funkce Q, g jako v důkazu předchozí věty. $K \subset \mathbb{R}^{d-1}$. Z Taylorova rozvoje Q máme

$$\int_K |u^n - u|^r \leqq (\int_K |u^n - u|^2/(1+|u^n|+|u|)^{2-r})^{r/2}.(\int_K (1+|u_n|+|u|)^r)^{2-r/2},$$

kde z Věty 6.13 $\int_K (1+|u_n|+|u|)^r)^{2-r/2} \leqq C_K$. Z toho máme

$$\int_K |u^n - u|^r \leqq C(\int_K Q(u^n,u))^{r/2}. \tag{9.20}$$

Buď $\tau_m \in L^1(\mathbb{R}^d_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d_+)$, $\tau_m \to g'$ v $L^{r/(r-1)}(\mathbb{R}^d_+)$, potom (9.18) a výsledky Lemmatu 6.13 dávají

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_K Q(u^n,u) &= -\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}(\int_K \tau_m(u^n-u)\ dx - \\ -\int_K (g'(u)-\tau_m)(u^n-u)\ dx) &\leq \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}(\|u^n\|_{L^r(K)} + \\ &+ \|u\|_{L^r(K)}).\|g'(u)-\tau_m\|_{L^{r/(r-1)}(K)} = 0 \end{aligned} \tag{9.21}$$

Kombinací (9.20) a (9.21) máme

$$\lim_{n\to\infty}\int_K |u^n - u|^r\ dx = 0, \tag{9.22}$$

což dokazuje (9.19) pro $1 < r < \min(2,p)$.
Případ $r = 1$ plyne z Cauchyho nerovnosti. Předpoklady v Lemmatu 6.13 ukazují, že $\|u\|_{L^p(K)}$ a $\|u^n\|_{L^p(K)}$ jsou omezené (stejnoměrně v n), proto (9.22) dohromady s interpolační nerovnicí (Hölderova nerovnost aplikovaná na funkci $|u^n|^{r\alpha}|u^n|^{r(1-\alpha)}$, $0 \leqq \alpha \leqq 1$)

$$\|u^n - u\|_{L^r(K)} \leqq \|u^n - u\|^{\alpha}_{L^s(K)}.\|u^n - u\|^{1-\alpha}_{L^p(K)}, (1-\alpha)/p + \alpha/s = 1/r$$

dokazují (9.19) pro $2 \leqq r < p$. □

Kapitola 10

Závěr a shrnutí

Práce zkoumá popis řešení hyperbolických rovnic zákonů zachování pomocí pravděpodobnostních měr. V první části práce je vysvětleno, co v přírodě tyto rovnice popisují. Je ukázáno, že jeden z důležitých selektorů-entropická nerovnost-má obdobný tvar jako druhý termodynamický zákon, pokud se provede identifikace $\eta = \rho.s$ a $q = \rho s.v^T$. Existují ale i jiné selektory a je otázka, jaké mezi nimi jsou vztahy. Entropická nerovnost slouží jako kritérium výběru jednoznačného řešení v případě rovnic s omezenými počátečními daty. Stojí za povšimnutí, že právě veličiny ve fyzikálních zákonech zachování jsou omezené.
Další část práce už je věnována vybudování aparátu pro statististický popis, neboť přímý limitní přechod slabou-*-konvergencí (která se v práci používá) v členu $f(u)$ není možný. Základním prostorem jsou spojité funkce s nulou v nekonečnu (zkoumáme spojitou nelinearitu f). Jsou dokázány dvě základní věty. Jedna (Věta 6.8) je formulována pro případ posloupnosti funkcí (která vznikne z perturbované rovnice) stejnoměrně omezených v $L^\infty(\mathbb{R}^d_+)$ a druhá (Důsledek 6.8) je zformulována pro funkce stejnoměrně omezené v $L^r(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d_+$ je omezená otevřená množina v $\mathbb{R}^d_+$ a $1 < r \leqq p/q$. Důkaz v případě Důsledku 6.10 používá existenci měr právě z Věty 6.8, protože ta závisí jenom na měřitelnosti posloupnosti funkcí u^n perturbované rovnice. Pravděpodobnostní míry, jejichž existenci Věta 6.8 zajišťuje, mají omezený nosič. To je, jak vidíme z důkazu, důsledek stejnoměrné omezenosti funkcí u^n v $L^\infty(\mathbb{R}^d_+)$. V důkazu Důsledku 6.8 nemáme takovýto předpoklad k dispozici, míry mají tedy neomezený nosič. (Předpoklad stejnoměrné omezenosti v $L^r(\Omega)$ se využívá pro Alaogluovu větu.) Důkaz jednoznačnosti se opírá o Větu 8.3, v které se s mírami provede nejprve proces zhlazení pomocí konstrukce s mollifiery. Ukáže se, že takovéto míry už jsou diferencovatelné a platí pro ně obdoba Leibnizova pravidla ([13]). Důkaz existence je postaven na nerovnosti (9.5), pro kterou je i volen prostor $L^\infty(\mathbb{R}_+, L^p(\mathbb{R}^{d-1}))$.

Literatura

[1] Ball, J.M. : A version of the fundamental theorem for Young measures. In: *PDEs and Continuum Models of Phase Trans.*, Lecture Notes in Physics, Vol. 344, Rascle, M., Serre, D., Slemrod, M. (eds), Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 241–259, 1989.

[2] Dafermos, C. : *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*. Springer Verlag, 2005.

[3] DiPerna, R.J. : Measure-valued solutions to conservation laws. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **88** (1985), 223–270.

[4] Friedman, A. : *Partial differential equations of parabolic type*. Prentice-Hall Int. Inc., 1964.

[5] Kružkov, S.N. : First order quasilinear equations in several independent variables. *Math. USSR Sb.* **10** (2), (1970), 217–243.

[6] Godlewski, E., Raviart, P.A. : *Hyperbolic Systems of Conservation Laws*. Mathematiques & Applications, S.M.A.I., Ellipses, Paris, 1991, (in English).

[7] Lukeš J., Malý J. : *Míra a integrál*, Karolinum, Praha, 1993, 2002.

[8] Málek J., Nečas J., Rokyta M., Růžička M. : *Weak and measure-valued solutions to evolutionary partial differential equations*. Chapman & Hall, 1996.

[9] Maršík, F. : *Termodynamika kontinua*. Academia, Praha, 1999.

[10] von Neumann, J. : *Collected works, Volume 6, Shock waves*. Pergamon Press, New York, 1963.

[11] Renardy, M., Rogers, R.C. : *An Introduction to Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1993.

[12] Rokyta, M. : *Euler equations and their numerical solution by the finite volume method*. Disertační práce (CSc.). MFF UK, Praha, 1992.

[13] Szepessy, A. : An existence result for scalar conservation laws using measure valued solutions. *Commun. in Partial Differential Equations* **14 (10)** (1989), 1329–1350.