Posudek na diplomovou práci

Karla Pazourka

KONTAKTNÍ GEOMETRIE TYPU F_4

Předložená diplomová práce obsahuje 71 stran a skládá se z deseti kapitol. Je napsána poměrně pečlivě a i počet překlepů je celkem malý.

Autor se v práci zabývá geometrií a globální analýzou homogenních prostorů F_4/P_1 a F_4/P_4, kde F_4 je Cartanem objevená výjimečná komplexní Lieova podgrupa komplexní dimenze 52, P_1 a P_2 jsou jisté maximální parabolické podgrupy F_4.

V kapitolách 2 a 3 autor shrnul základní a v práci používané pojmy z teorie podílových algeber, zvláště pak o oktoninech, zavedených pomocí tzv. Cayley-Dicksonova procesu, a o projektivních rovinách a prostorech, zavedených jak axiomaticky, tak jako přímkový prostor ve speciálním případě projektivního prostoru nad tělesem. Je vysvětlena rovněž souvislost nejmenší projektivní roviny, kterou je Fanova rovina 7 bodů, s algebrou oktonionů. V kapitole 4 se autor věnuje vysvětlení základních pojmů z teorie jednoduchých komplexních Lieových grup a algeber a Cliffordových algeber a jejich konečně dimenzionálním reprezentacím. V kapitole 5 je obsažena klasifikace parabolických podgrup jednoduchých komlexních Lieových grup, jejichž zmíněné P_1 a P_4 jsou speciáním příkladem. Kapitola 6 obsahuje definice kohomologie Lieových algeber s hodnotami v konečně dimenzionálních modulech a příklady výpočtů kohomologie v nejednoušších případech. Autor ilustruje známý fakt, že výpočet je většinou velmi zdlouhavý a vyžaduje často řešit soustavy mnoha byť lineárních rovnic. V této kapitole je také obsažena Kostantova verze věty Botta, Borela a Weila, pomocí níž lze kohomologie počítat celkem snadno za užití jistého kombinatorického konceptu, kterým je tzv. Hasseho diagram asociovaný k Weylově grupě resp. její části. Autor tento fakt ilustruje na příkladech.

Zatímco prvních šest kapitol obsahuje pouze shrnutí základních pojmů a ilustrační příklady, v kapitolách 7, 8, 9 a 10 jsou obsaženy původní výskledky autora, kterým se nyní budu v krátkosti věnovat. Jedním z přínosů této práce je základní popis všech tzv. standardních invariantních diferenciálních operátorů v regulárním charakteru pro zmíněné homogenní prostory. Konkrétněji řečeno, autor uvádí výpočet Hasseho grafů pro F_4/P_1 a F_4/P_4, čímž autor poopravuje jistý publikovaný výsledek o těchto Hasseho diagramech. O co je oprava relativně malá, o to více se opravený výsledek Hasseho grafu kryje s tvarem předpokládaným. Tyto Hasseho grafy jsou přirozeným podkladem pro teoretické fyziky a mohou sloužit jako pomůcka pro hledání všech invariantních dfiferencálních rovnic, jejichž splnění je možné požadovat popř. klást na fyzikální pole. Nejedná se jen o hypotetické použití, když uvážíme, že studovaná geometrická situace přesně odpovídá situaci zkoumané v rámci dvaceti šesti dimenzionální strunové teorie bosonů.

Z mého hlediska nejvýznamnějším výsledkem práce je však geometrický popis prostoru F_4/P_4, a sice jako tzv. komplexní Moufangové projektivní roviny. Často je totiž velice těžké a někdy prakticky nemožné zjiistit, jaký má homogenní prostor G/H význam či přesněji a poněkud moderně řečeno, jaká je jeho filtrovaná tečná struktura, zda indukuje metriku, jejich třídu, Cauchy-Riemannovu, obecnou kontaktní či jinou v geometrii studovanou a pojmenovanou strukturu. Reálná verze komplexní Moufangové roviny představuje historicky první model projektivní roviny, kde není splněn Desarguesův axiom. Jelikož prostory, jejichž souřadnicový okruh tvoří asociativní algebru, jsou desarguesovské, je ihned zřejmé, že v Moufangové rovině souřadnicový okruh asociativní není, a tak tento okruh tvoří místo, kudy se do hry dostávají oktoniony, specificky a přesněji výjimečná oktonionová Joradnova algebra. Důkaz fakt tvrdícího, že komplexní Moufangové rovina se kryje s homogenním prostorem F_4/P_4, je rozložen do dvou kroků, přičemž v prvním z nich je ukázána tranzitivnost akce grupy F_4 na komplexní Moufangové rovině. V druhém kroku je užita celkem zajímavá metoda určení stabilizátoru, tj. izotropní podgrupy, akce. Opírá se o využití kořenového systému komplexní Lieovy algebry algebry $\mathfrak{f}_4$ a znalosti všech vah jisté ireducibilní reprezentace F_4. Jedním z důležitých podkroků byl důkaz existence jediné ireducibilní reprezentace grupy F_4 dimenze 26, který byl proveden mj. za pomoci počítače, kterým autor nechal vyhodnocovat Weylovu fomuli pro speciální vstupy.

Rád bych zdůraznil, že výsledek o realizaci homogenního prostoru pomocí Moufangové roviny je nový a původní, byť je některými experty implicitně předpokládán zrovna tak, jako je známo, že důkaz vč. směru, kudy by se měl ubírat, chybí.

Karel Pazourek pracoval samostatně a nastudoval ne zcela jednoduché a zároveň četné teorie, které při důkazech bez větších obtíží používal. Podařilo se mu nejen naučit se zmíněné teorie, ale získat i netriviální a zajímavé výsledky, mezi nimiž byl i výsledek, jenž dokonce jisté skupině zainteresovaných odborníků chyběl.

Proto doporučuji, aby práce byla přijata jako diplomová práce.

Navrhuji hodnocení v ý b o r n ě.

V Praze 3.9.2007 RNDr. Svatopluk Krýsl, Ph.D.