Oponentský posudek.
K. Pazourek: Kontaktní geometrie typu F4.

Hlavním tématem diplomové práce Karla Pazourka je popis základních vlastností (komplexní) jednoduché Lieovy grupy F4 (resp. její Lieovy algebry) a interpretace projektivní roviny nad tělesem oktonionů jako homogenního prostoru grupy F4. K tomuto základnímu cíli potřebuje K. Pazourek řadu informací, které jsou shromážděny v přípravných kapitolách práce (kapitoly 2 až 6). Vybrané téma je velmi zajímavé a aktuální a ukazuje pozoruhodné souvislosti mezi různými oblastmi matematiky.

Přípravné kapitoly obsahují témata z různých oborů. Druhá kapitola popisuje konstrukci tělesa oktonionů pomocí Cayleyovy-Dicksonovy konstrukce a souvislost s výjimečnou Jordanovou algebrou. Projektivní prostory, Fanova rovina, protipříklad ukazující, že Desarguesův axiom nemusí platit a konstrukce projektivního prostoru dimenze dvě na tělesem oktonionů jsou témata zpracovaná v třetí kapitole. Standardní informace o Lieových grupách a Lieových algebrách, jejich reprezentacích, kořenových systémech, fundamentálních vahách a o realizaci spinových grup pomocí Cliffordových algeber je obsažena v kapitole čtvrté.

Stručná pátá kapitola je věnována diskusi o parabolických podalgebrách jednoduchých Lieových algeber, gradovaných Lieových algebrách a jejich popisu pomocí podmnožin v systémech jednoduchých kořenů. Kapitola šestá popisuje kohomologie Lieových algeber, definuje Hasseův diagram pro danou parabolickou podalgebru a cituje slavnou Kostantovu verzi Bottovy-Borelovy-Weilovy věty, která dává vyčerpávající popis příslušných kohomologií pro případ nilpotentní podalgebry dané jednoduché Lieovy algebry. Autor zároveň uvádí několik ilustračních příkladů výpočtu kohomologických grup (výsledek v příkladu 6.5.5. není přesný).

Sedmá a osmá kapitola práce obsahuje jádro celé práce a přináší nové výsledky. Nejdůležitějším výsledkem kapitoly sedmé je Věta 7.5.1, která dokazuje, že grupa F4 působí tranzitivně na projektivní rovině nad tělesem oktonionů. To je naprosto zásadní informace, která se pak používá podstatně v kapitole následující. Pro důkaz tohoto tvrzení zavádí autor vhodnou realizaci spinorových grup v dimenzi 8 a 9 a studuje podrobně akci těchto grup na projektivní rovině nad tělesem oktonionů. Tyto partie patří k podstatným částem diplomové práce.

Osmá kapitola práce je věnována vlastnostem parabolických podalgeber Lieovy algebry F4. Jsou zde podrobně popsány dvě maximální parabolické podalgebry v F4, které odpovídají škrtnutému prvnímu, resp. poslednímu kořenu v příslušném Dynkinově diagramu. V této kapitole je spočítán Hasseův diagram pro obě výše zmíněné parabolické podalgebry a jsou zde klasifikovány ireducibilní reprezentace grupy F4, které mají dimenzi menší nebo rovnu 26. Identifikace jediné ireducibilní reprezentace s dimenzí rovnou 26 pak umožňuje dokázat závěrečnou charakterizaci projektivní roviny nad tělesem oktonionů jako homogenního prostoru grupy F4. Také tato část práce obsahuje nové výsledky.

Práce je napsána čitelně a velmi přesně. Přípravné kapitoly jsou zpracovány pečlivě a přehledně. Nové výsledky, obsažené v kapitolách 7 a 8 jsou zajímavé a netriviální. Lieova grupa (resp. Lieova algebra) F4 patří mezi výjimečné Lieovy grupy, které nemají přímou maticovou realizaci. Zkoumání jejich vlastností je tedy obtížnější. Souvislosti s tělesem oktonionů, s Fanovou rovinou a s projektivní rovinou nad tělesem oktonionů jsou velmi zajímavé a podstatné. V práci jsem našel jen velmi málo přepisů (které nestojí za zmínku). Drobné nepřesnosti, které jsou matematického charakteru, uvádím níže v příloze. Jedná se však jen o maličkosti, které nemají vliv na hodnocení práce.

Celkově je možné konstatovat, že autor se při přípravě práce musel naučit základy z řady různých matematických odvětví. Práce obsahuje netriviální nové a zajímavé výsledky a bezpochyby splňuje požadavky kladené na diplomovou práci. Doporučuji proto uznat práci jako práci diplomovou.

Vzhledem k výše uvedenému hodnocení práce navrhuji hodnotit předloženou diplomovou práci známkou ‚výborně'.

V Praze, 10.9.2007

prof. Vladimír Souček, DrSc.

oponent

Příloha. Drobné nepřesnosti v textu práce.

str. 8, řádek 14 zdola:
Jordanova identita je formulována jako triviální rovnost (zřejmý přepis).

str. 24, Definice 4.2.10:
V definici 4.2.10 je třeba předpokládat, že reprezentace W je ireducibilní (je-li např. W součet definující a adjungované reprezentace Lieovy algebry sl2, pak má reprezentace W ve smyslu uvedené definice dva vektory nejvyšší váhy s různými nejvyššími váhami, takže definice nejvyšší váhy není jednoznačná).

str. 25, řádek 11 zdola:
Tvrzení „ … a proto ji lze rozšířit …" by správně mělo znít „ … a proto lze toto zobrazení $x \to -x$ rozšířit ..“

str. 36, řádek uprostřed:
Toto je poznámka pouze terminologická. V práci jsou velmi přesně používány správné české tvary názvů obsahujících cizí jména. Jedinou výjimkou je termín Hassův diagram. V tomto případě jde o matematika, který se jmenuje Hasse, tedy příslušný termín by měl znít Hasseův diagram.

str. 38:
Výsledek obsažený v ilustračním příkladu 6.5.5. není správný. Hasseův digram v tomto případě má dva vrcholy, které odpovídají prázdné množině a množině obsahující kořen α_1. Mezi nimi existuje jedna hrana, ohodnocená kořenem α_1.

V předchozím výpočtu pomocí definice je správně konstatováno, že operátor d_1 je triviální, tedy jeho jádro je celý prostor kořetězců dimenze 1, který má ale dimenzi rovnou dvěma! Ve výpočtu dimenze kohomologické grupy H^1 tedy vyjde $2-1=1$, v souladu s výše uvedeným výpočtem pomocí kořenových podmnožin.

str. 59, 1. řádek zdola:
V příslušném Hasseově diagramu je v prostředním šestiúhelníku šipka ohodnocená kořenem a_3, toto ohodnocení má správně být a_5 (jde o zřejmý přepis). Totéž platí pro následující diagram v obrázku 8 na str. 60.