Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Jiří Koula

Variety určené krátkými identitami

Katedra algebry

Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Jaroslav Ježek, DrSc.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Matematické struktury

2007

Děkuji vedoucímu práce prof. RNDr. Jaroslavu Ježkovi, DrSc. za článek, na němž práce staví, a za vedení této práce způsobem, který mi poskytnul zároveň podporu i volnost potřebnou k jejímu napsání. Děkuji také své matce Světlaně Koulové za podporu v průběhu celého studia, jehož vyústěním tato práce je. V neposlední řadě pak děkuji Anně Říhové za to, že mi ukázala, že existuje i svět mimo matematiku.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 10. srpna 2007 Jiří Koula

Obsah

1 Úvod **5**

1.1 Formulace problému 5

1.2 Členění práce 6

2 Základní definice a věty **7**

2.1 Konfluentní grafy 7

2.2 Algebry a variety 8

2.3 Rovnicové třídy 12

2.4 Přepisující systémy 13

3 Rovnosti tvaru $x = t(x, \ldots, y)$ **18**

4 Rovnosti tvaru $x = t(y, \ldots, z)$ **41**

5 Závěr **58**

Název práce: Variety určené krátkými identitami
Autor: Jiří Koula
Katedra: Katedra algebry
Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Jaroslav Ježek, DrSc.
e-mail vedoucího: `jezek@karlin.mff.cuni.cz`

Abstrakt: Tato práce se zabývá hledáním volných algeber nad spočetnou množinou proměnných ve varietách grupoidů určených identitou tvaru $x = t$, kde t je term délky 5. K tomuto účelu je použita metoda přepisujících systémů. Práce staví na článku [3], jehož výsledky rozšiřuje.

Klíčová slova: přepisující systém, volná algebra, varieta grupoidů

Title: Varieties determined by short identities
Author: Jiří Koula
Department: The Department of Algebra
Supervisor: Prof. RNDr. Jaroslav Ježek, DrSc.
Supervisor's e-mail address: `jezek@karlin.mff.cuni.cz`

Abstract: This paper deals with searching for free algebras over the countable infinite set of variables in varieties determined by identity of form $x = t$, where t is term of length 5. Notion of rewriting system is introduced and used for it. The paper is based on article [3] and extends its results.

Keywords: rewriting system, free algebra, variety of grupoids

Kapitola 1

Úvod

1.1 Formulace problému

Jedním ze zajímavých problémů univerzální algebry je pro danou konečnou množinu rovností Σ najít způsob jak určit, které rovnosti jsou důsledky Σ.

Množina Σ generuje plně invariantní kongruenci θ na algebře termů $\mathbf{U}(X)$ a můžeme tedy uvažovat faktorovou algebru $\mathbf{U}(X)/\theta$. Potom $u = v$ je důsledkem Σ, právě když se u a v nacházejí ve stejné třídě ekvivalence podle θ. Jedním z možných přístupů jak určit, zda $u = v$, je vybrat z každé třídy ekvivalence jednoho zástupce tak, abychom na základě zadaného termu u byli schopni určit zástupce patřícího do stejné třídy ekvivalence jako u. Tento zástupce se obvykle nazývá normální formou termu u.

Označme ν zobrazení přiřazující termu u jeho normální formu. Potom zřejmě $u = v$ je důsledkem Σ, právě když $\nu(u) = \nu(v)$. Zbývá však otázka, jak počítat normální formu.

Jednou z odpovědí na tuto otázku je přepisující systém. Jedná se o soubor rovností chápaných jako pravidla, jak přepisovat termy na jiné termy, který má další vlastnosti. Volbou vhodného přepisujícího systému tak můžeme za příznivých okolností dostat soubor pravidel, která každý term přepíší postupně na jeho normální formu. Ukážeme si algoritmus, jak na základě dané rovnosti generovat potřebný přepisující systém. Pokud se algoritmus po konečném počtu kroků zastaví, máme předpis, jak počítat normální formu.

Dalším důsledkem je popis volné algebry ve varietě určené Σ. Tato algebra je izomorfní $\mathbf{U}(X)/\theta$, nosnou množinou je množina normálních forem a operace je definována jediným možným způsobem – $f(\nu(u_1), \ldots, \nu(u_n)) = \nu(f(u_1, \ldots, u_n))$.

V této práci se omezíme na grupoidy, budeme tedy zkoumat rovnosti s jednou binární operací.

1.2 Členění práce

V druhé kapitole je budován matematický aparát, o který se práce opírá. Začíná několika tvrzeními z teorie grafů, která využijeme na konci třetí kapitoly. Následují základní definice a tvrzení o algebrách a varietách algeber, další oddíl pak představí pojem rovnicových tříd a dá je do souvislosti s varietami.

Poslední oddíl pak přechází od obecné teorie k varietám grupoidů a představuje přepisující systémy coby nástroj, který je možno použít pro námi stanovený úkol.

Třetí kapitola zkoumá variety určené rovností $x = t$, kde t je term délky 5, jehož první proměnná je x a poslední proměnná je různá od x, navíc se zabývá jen takovými termy, které obsahují alespoň tři různé proměnné. Termů vyhovujících této podmínce je 406, tato práce řeší 248 z nich.

Čtvrtá kapitola se pak zabývá varietami určenými rovností $x = t$, kde t je term délky 5, jehož první i poslední proměnná je různá od x. Opět se zaměřuje na termy, které obsahují alespoň tři různé proměnné. Termů tohoto typu je 770 (počítáme jen ty, které na pravé straně obsahují proměnnou x, ty totiž mohou být zajímavé), z nichž tato práce řeší 616 a věta v závěru kapitoly ukazuje, že dalších 28 termů (tedy rovností, jejichž pravou stranou termy jsou) určuje tutéž varietu – ovšem ponechává otevřenou otázku, jak vypadá volný grupoid a zda tato varieta není triviální.

Kapitola 2

Základní definice a věty

Celá práce se zabývá varietami určenými rovnostmi, vybudujme si tedy aparát, na němž stavíme. Protože cílem této práce není vytvořit další učebnici univerzální algebry, uvedené věty ponecháme bez důkazů. Obsah prvního oddílu patří do teorie grafů, uvedený aparát je základem pro Knuth-Bendixův algoritmus z [5]. Definice, znění vět i jejich důkazy z druhého a třetího oddílu lze najít v [1] a [2], poslední oddíl je převzat z [3].

2.1 Konfluentní grafy

Začneme několika tvrzeními z teorie grafů, která využijeme na konci příští kapitoly.

Definice 2.1. Nechť je dán orientovaný graf G. Potom řekneme, že G *je konečně terminující*, pokud v G neexistuje nekonečná orientovaná cesta (tedy posloupnost x_1, x_2, ... vrcholů G taková, že hrana vede z x_i do x_{i+1} pro $i \geq 1$).

Vrchol v orientovaného grafu G je *terminální*, pokud neexistuje vrchol u takový, že vede orientovaná hrana z t do v. V konečně terminujícím grafu tedy každá orientovaná cesta končí v terminálním vrcholu.

G nazveme *konfluentním*, pokud pro každou trojici vrcholů t, u, v grafu G takových, že existuje orientovaná cesta z t do u a z t do v, najdeme vrchol w takový, že existuje orientovaná cesta z u do w a z v do w.

G je *lokálně konfluentní*, pokud pro každou trojici vrcholů t, u, v grafu G takových, že existuje hrana z t do u a z t do v, najdeme vrchol w takový, že existuje orientovaná cesta z u do w a z v do w.

Konečně řekneme, že G je *konvergentní*, pokud je konečně terminující a zároveň konfluentní.

Věta 2.1. *Je-li G konečně terminující a lokálně konfluentní, potom je konfluentní (a tedy konvergentní).*

Věta 2.2. *Je-li G konvergentní, potom každý vrchol v grafu G je spojen (neorientovanou) cestou právě s jedním terminálním vrcholem.*

2.2 Algebry a variety

Definice 2.2. Pro neprázdnou množinu A definujme $A^0 = \{\emptyset\}$ a pro kladné celé číslo n pak buď A^n množina všech uspořádaných n-tic prvků A. *n-ární funkcí* rozumíme jakékoliv zobrazení $f : A^n \to A$, n se nazývá *arita* funkce f. Funkce se nazývá *konstantou*, je-li její arita 0 (taková funkce je plně určena obrazem prázdné množiny, což je jediný prvek A^0, jedná se tedy o prvek množiny A).

Definice 2.3. *Typ algebry* je množina $\mathfrak{F}$ *funkčních symbolů* taková, že každý prvek $f \in \mathfrak{F}$ má přiřazeno nezáporné celé číslo n, které se nazývá *aritou* f, o f pak hovoříme jako o *n-árním funkčním symbolu*. Podmnožinu n-árních funkčních symbolů značíme $\mathfrak{F}_n$.

Definice 2.4. *Algebrou* $\mathbf{A}$ *typu* $\mathfrak{F}$ nazveme uspořádanou dvojici (A, F), kde A je neprázdná množina a F je množina funkcí na A indexovaná prvky $\mathfrak{F}$ tak, že pro každý odpovídající n-ární funkční symbol $f \in \mathfrak{F}$ máme n-ární funkci $f^{\mathbf{A}}$ na A. Množinu A budeme nazývat *nosnou množinou* algebry $\mathbf{A} = (A, F)$, funkce $f^{\mathbf{A}}$ pak *fundamentálními funkcemi.*

Definice 2.5. Mějme dány algebry $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ stejného typu $\mathfrak{F}$. Potom funkce $\alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ se nazývá *homomorfismus* z $\mathbf{A}$ do $\mathbf{B}$, pokud pro každý n-ární funkční symbol $f \in \mathfrak{F}$ a každou uspořádanou n-tici $(a_1, \ldots, a_n)$ prvků A platí

$$\alpha f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = f^{\mathbf{B}}(\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n).$$

Je-li zobrazení α prosté, mluvíme o *monomorfismu*, je-li na, mluvíme o *epimorfismu*, zobrazení zároveň prosté a na nazýváme *izomorfismem* (a značíme $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B}$).

Definice 2.6. Mějme dány algebry $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ stejného typu. Řekneme, že $\mathbf{B}$ je podalgebrou $\mathbf{A}$, pokud $B \subseteq A$ a každá fundamentální funkce $f^{\mathbf{B}}$ je restrikcí příslušné fundamentální funkce $f^{\mathbf{A}}$ na B.

Jinak řečeno, podalgebra vznikne tak, že z nosné množiny vybereme určitou podmnožinu takovou, že na ní jsou všechny fundamentální funkce uzavřeny, tuto podmnožinu prohlásíme nosnou množinou podalgebry a fundamentální funkce na ni zúžíme.

Definice 2.7. Nechť $\mathbf{A}$ je algebra a $X \subset A$. Potom řekneme, že $\mathbf{A}$ *je generovaná* X, pokud nejmenší podalgebra $\mathbf{A}$ obsahující prvky X je právě $\mathbf{A}$. Tedy jinak řečeno, vyjdeme-li z X a hledáme-li množinu M obsahující X a uzavřenou na operace algebry $\mathbf{A}$, potom nejmenší takovou množinou je A.

Definice 2.8. Nechť $\mathbf{A}$ je algebra typu $\mathfrak{F}$ a θ je relace na A. Potom θ nazveme *kongruencí* na $\mathbf{A}$, pokud pro každý funkční symbol $f \in \mathfrak{F}_n$ a prvky $a_i, b_i \in A$ takové, že $a_i \theta b_i$ pro $1 \le i \le n$, je $f^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n) \theta f^{\mathbf{A}}(b_1, \dots, b_n)$.

Kongruence θ na $\mathbf{A}$ se nazývá *úplně invariantní*, pokud pro každý endomorfismus α na $\mathbf{A}$ z $a\theta b$ plyne $\alpha a \theta \alpha b$. Je snadné ověřit, že úplně invariantní kongruence jsou uzavřeny na libovolné průniky, je proto korektní pro relaci r na A definovat nejmenší úplně invariantní kongruenci obsahující r. Nazýváme ji *úplně invariantní kongruencí generovanou* r.

Nyní můžeme definovat algebru $\mathbf{A}/\theta$ na třídách ekvivalence A/θ. Pro $f \in \mathfrak{F}_n$ a $a_1, \dots, a_n \in A$ buď hodnota f aplikovaného na $(a_1/\theta, \dots, a_n/\theta)$ rovna $f^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n)/\theta$. Z předchozí definice vidíme, že pro každé f dostaneme funkci a je tak korektně definována struktura algebry.

Definice 2.9. Množinu všech kongruencí na $\mathbf{A}$ označíme Con$\mathbf{A}$. Nechť θ je kongruence na $\mathbf{A}$. *Faktorová algebra* $\mathbf{A}/\theta$ je algebra, jejíž nosná množina je A/θ a fundamentální operace splňují $f^{\mathbf{A}/\theta}(a_1/\theta, \dots, a_n/\theta) = f^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n)/\theta$ pro $f \in \mathfrak{F}_n$ a $a_1, \dots, a_n \in A$.

Definice 2.10. Mějme dány algebry $\mathbf{A_1}$ a $\mathbf{A_2}$ stejného typu. *Direktní součin* $\mathbf{A_1} \times \mathbf{A_2}$ bude algebra s nosnou množinou $A_1 \times A_2$ taková, že pro každé $f \in \mathfrak{F}_n$ a $a_i \in A_1$, $a_i' \in A_2$, $1 \leq i \leq n$ platí

$$f^{\mathbf{A_1} \times \mathbf{A_2}}((a_1, a_1'), \ldots, (a_n, a_n')) = (f^{\mathbf{A_1}}(a_1, \ldots, a_n), f^{\mathbf{A_2}}(a_1', \ldots, a_n')).$$

Definice 2.11. Nechť je K třída algeber stejného typu, definujme operátory převádějící K na jinou třídu algeber téhož typu:

$\mathbf{A} \in I(K)$, právě když je $\mathbf{A}$ izomorfní nějaké algebře z K;

$\mathbf{A} \in S(K)$, právě když je $\mathbf{A}$ podalgebrou nějaké algebry z K;

$\mathbf{A} \in H(K)$, právě když je $\mathbf{A}$ homomorfním obrazem nějaké algebry z K (tedy pokud existuje epimorfismus $\alpha : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ pro nějaké $\mathbf{B} \in K$);

$\mathbf{A} \in P(K)$, právě když je $\mathbf{A}$ direktním součinem neprázdného systému algeber z K.

Lemma 2.3. *Platí následující nerovnosti: $SH \leq HS$, $PS \leq SP$, $PH \leq HP$. Navíc jsou operátory H, S a IP idempotentní (složeny samy se sebou dávají opět sebe sama).*

Definice 2.12. Neprázdná třída K algeber stejného typu $\mathfrak{F}$ se nazývá *varietou*, právě když je uzavřená na podalgebry, homomorfní obrazy a direktní součiny.

Neboť průnik třídy variet typu $\mathfrak{F}$ je opět varieta, můžeme tvrdit, že pro každou třídu algeber K existuje nejmenší varieta obsahující K.

Definice 2.13. Nechť K je třída algeber stejného typu. Potom $V(K)$ bude značit nejmenší varietu obsahující K. Říkáme, že $V(K)$ je *varieta generovaná* K. Pokud K sestává z jediné algebry $\mathbf{A}$, píšeme prostě $V(\mathbf{A})$. Varieta V je *konečně generovaná*, pokud existuje konečná množina algeber K, že $V = V(K)$.

Věta 2.4 (Tarski)**.** *$V = HSP$.*

Definice 2.14. Buď X množina objektů, které budeme nazývat *proměnné*, a $\mathfrak{F}$ typ algebry. Potom množina $T(X)$ všech *termů typu $\mathfrak{F}$ nad X* je nejmenší množina taková, že

(1) $X \cup \mathfrak{F}_0 \subseteq T(X)$;

(2) jsou-li $p_1, \dots, p_n \in T(X)$ a $f \in \mathfrak{F}_n$, potom řetězec $f(p_1, \dots, p_n) \in T(X)$.

Pro binární funkční symbol $\cdot$ používáme místo zápisu $\cdot(p, q)$ zápis $p \cdot q$ (či pq, nehrozí-li zmatení). Pro $p \in T(X)$ můžeme p psát jako $p(x_1, \dots, x_n)$, což značí, že proměnné použité v p se vyskytují mezi proměnnými $x_1, \dots, x_n$. Term p je n-ární, pokud je počet proměnných vyskytujících se v p menší nebo roven n.

Definujme pojem *podtermu* termu t – sám t je podtermem t a je-li u podterm t tvaru $f(u_1, \dots, u_n)$ pro $f \in \mathfrak{F}_n$, potom je podtermem t také každý term u_i, $1 \leq i \leq n$. Je-li $u \neq t$ podterm t, hovoříme o *vlastním podtermu* t.

Definice 2.15. Nechť je dán term $p(x_1, \dots, x_n)$ typu $\mathfrak{F}$ nad množinou X a algebra $\mathbf{A}$ typu $\mathfrak{F}$. Potom definujme zobrazení $p^{\mathbf{A}} : A^n \to A$ následovně:

(1) $p^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n) = a_i$, je-li p proměnná x_i (jedná se tedy o i-tou projekci);

(2) Je-li $p = f(p_1(x_1, \dots, x_n), \dots, p_k(x_1, \dots, x_n))$ pro $f \in \mathfrak{F}_k$, položme $p^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathbf{A}}(p_1(a_1, \dots, a_n), \dots, p_k(a_1, \dots, a_n))$.

Speciálně pro $p = f \in \mathfrak{F}$ je $p^{\mathbf{A}} = f^{\mathbf{A}}$. Zobrazení $p^{\mathbf{A}}$ nazýváme *termovou funkcí* na $\mathbf{A}$ odpovídající p (a horní index $\mathbf{A}$ často vynecháváme).

Definice 2.16. Je-li dána množina X a typ algebry $\mathfrak{F}$ a je-li $T(X)$ neprázdná, potom *algebrou termů typu $\mathfrak{F}$ nad X* budeme rozumět algebru $\mathbf{T}(X)$, jejíž nosná množina je $T(X)$ a fundamentální funkce splňují

$$f^{\mathbf{T}(X)} : (p_1, \dots, p_n) \mapsto f(p_1, \dots, p_n),$$

kde $f \in \mathfrak{F}_n$ a $p_i \in T(X), 1 \leq i \leq n$.

Definice 2.17. Buď K třída algeber typu $\mathfrak{F}$ a $\mathbf{U}(X)$ algebra generovaná X. Pokud pro každé $\mathbf{A} \in K$ a každé zobrazení $\alpha : X \to \mathbf{A}$ existuje homomorfismus $\beta : \mathbf{U}(X) \to \mathbf{A}$ rozšiřující α (tedy $\beta(x) = \alpha(x)$ pro $x \in X$), říkáme, že $\mathbf{U}(X)$ má *univerzální mapovací vlastnost pro K nad X*, X se nazývá množinou *volných generátorů* algebry $\mathbf{U}(X)$ a říkáme, že $\mathbf{U}(X)$ je *volně generována* množinou X.

Lemma 2.5. *Předpokládejme, že $\mathbf{U}(X)$ má univerzální mapovací vlastnost pro K nad X. Je-li dána $\mathbf{A} \in k$ a $\alpha : X \to \mathbf{A}$, existuje jednoznačné rozšíření $\beta : \mathbf{U}(X) \to \mathbf{A}$ zobrazení α takové, že β je homomorfismus.*

Věta 2.6. *Předpokládejme, že* $\mathbf{U}_1(X_1)$ *a* $\mathbf{U}_2(X_2)$ *jsou dvě algebry v třídě algeber* K *takové, že mají univerzální mapovací vlastnost pro* K *nad příslušnými množinami. Je-li* $|X_1| = |X_2|$*, pak jsou* $\mathbf{U}_1(X_1)$ *a* $U_2(X_2)$ *izomorfní.*

Věta 2.7. *Pro libovolný typ* $\mathfrak{F}$ *a libovolnou množinu* X *proměnných, kde* $X \neq \emptyset$ *v případě* $\mathfrak{F}_0 = \emptyset$*, má algebra termů* $\mathbf{U}(X)$ *univerzální mapovací vlastnost pro třídu všech algeber typu* $\mathfrak{F}$ *nad* X*.*

Definice 2.18. Buď K systém algeber typu $\mathfrak{F}$. Je-li dána množina X proměnných, buď $\theta_K(K)$ kongruence na $\mathbf{U}(X)$ definovaná jako $\theta_K(K) = \bigcap \Phi_K(X)$, kde $\Phi_K(X) = \{\phi \in \mathrm{Con}\mathbf{U}(\mathrm{X}); \mathbf{U}(\mathrm{X})/\phi \in \mathrm{IS(K)}\}$. Potom definujme *$K$-volnou algebru* $\mathbf{F}_K(\overline{X})$ jako $\mathbf{F}_K(\overline{X}) = \mathbf{U}(X)/\theta_K(X)$, kde $\overline{X} = X/\theta_K(X)$.

Věta 2.8. *Předpokládejme, že* $\mathbf{U}(X)$ *existuje. Potom* $F_K(\overline{X})$ *má univerzální mapovací vlastnost pro* K *nad* $\overline{X}$*.*

Věta 2.9. *Je-li* K *třída algeber typu* $\mathfrak{F}$ *a* $\mathbf{A} \in K$*, potom pro dostatečně velkou množinu* X *(postačující je např.* $|X| \geq |A|$*) platí* $\mathbf{A} \in H(\mathbf{F}_K(\overline{X}))$*.*

Věta 2.10 (Birkhoff)**.** *Předpokládejme, že* $\mathbf{U}(X)$ *existuje. Potom, je-li* K *neprázdná, je* $\mathbf{F}_K(\overline{X}) \in ISP(K)$*. je-li tedy* K *uzavřena na* I*,* S *a* P *(tedy např. je-li* K *varieta), potom* $\mathbf{F}_K(\overline{X}) \in K$*.*

2.3 Rovnicové třídy

Definice 2.19. *Identitou typu* $\mathfrak{F}$ *nad* X nazveme výraz $p \approx q$ (značeno též (p, q) či $p \to q$), kde $p, q \in T(X)$. Nechť $Id(X)$ je množina identit typu $\mathfrak{F}$ nad X. Algebra $\mathbf{A}$ typu $\mathfrak{F}$ *splňuje* identitu $p(x_1, \ldots, x_n) \approx q(x_1, \ldots x_n)$, psáno $\mathbf{A} \models p(x_1, \ldots, x_n) \approx q(x_1, \ldots x_n)$ (či stručně $\mathbf{A} \models p \approx q$), pokud pro libovolná $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{A}$ platí $p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = q^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)$. Třída algeber K splňuje $p \approx q$ (psáno $K \models p \approx q$), pokud $\mathbf{A} \models p \approx q$ pro každé $\mathbf{A} \in K$. Je-li Σ množina identit, říkáme, že K splňuje Σ (psáno $K \models \Sigma$), pokud $K \models p \approx q$ pro každou $p \approx q \in \Sigma$. Je-li dáno K a X, označme $Id_K(X) = \{p \approx q \in Id(X); K \models p \approx q\}$. Pokud K splňuje Σ, říkáme také, že Σ *platí v* K.

Předchozí definici splňování je možno přeformulovat pomocí pojmu homomorfismu.

Lemma 2.11. *Je-li K třída algeber typu $\mathfrak{F}$ a $p \approx q$ identita typu $\mathfrak{F}$ nad X, potom $K \models p \approx q$, právě když pro každou algebru $\mathbf{A} \in K$ a každý homomorfismus $\alpha : \mathbf{U}(X) \to \mathbf{A}$ je $\alpha(p) = \alpha(q)$.*

Definice 2.20. Buď Σ množina identit typu $\mathfrak{F}$ nad X a definujme $M(\Sigma)$ jako třídu algeber splňujících Σ. Třídu algeber K nazveme *rovnicovou třídou*, pokud existuje Σ tak, že $K = M(\Sigma)$. V takovém případě říkáme, že K *je určena* Σ.

Definice 2.21. Je-li dán typ $\mathfrak{F}$ a množina proměnných X, buď $\tau : Id(X) \to T(X) \times T(X)$ bijekce daná předpisem $\tau(p \approx q) = (p, q)$.

Lemma 2.12. *Nechť K je třída algeber typu $\mathfrak{F}$ a X je množina proměnných. Potom $\tau(Id_K(X))$ je úplně invariantní kongruence na $\mathbf{U}(X)$.*

Lemma 2.13. *Je-li V varieta a X nekonečná množina proměnných, potom $V = M(Id_V(X))$.*

Věta 2.14 (Birkhoff)**.** *Třída algeber je rovnicovou třídou, právě když je varietou.*

Předchozí věta je základem pro vše, co následuje dále. Vidíme totiž, že máme-li nějakou rovnost $u \approx v$, tato rovnost nám určuje rovnicovou třídu, která je varietou (a $Id_V(X)$ je úplně invariantní kongruence generovaná $u \approx v$). V tomto smyslu nám tedy rovnost určuje varietu V. Chceme-li zkoumat algebry patřící do V, vidíme, že vezme-li spočetnou množinu proměnných X, potom jsou všechny konečné a spočetné algebry ve V homomorfními obrazy algebry $\mathbf{A} = \mathbf{F}_V(\overline{X})$. Jednu z technik, jak najít algebru $\mathbf{A}$, si ukážeme v následujícím oddílu.

2.4 Přepisující systémy

Narozdíl od předchozích odstavců odteď teorii omezíme na rámec, v němž se později budeme pohybovat. Vyjdeme ze spočetné množiny proměnných X. Budeme se zabývat grupoidy, tedy algebrami s jednou binární operací. W bude množina všech termů nad X a $\mathbf{W}$ grupoid termů nad X – volný grupoid nad X. Binární operaci ve $\mathbf{W}$ budeme značit multiplikativně $(\cdot)$.

Definice 2.22. Nechť V je varieta. Říkáme, že V je *triviální*, pokud obsahuje jen jednoprvkové algebry – taková varieta je určena rovností $x = y$.

Definice 2.23. Je-li $t \in W$ term, potom t_R bude značit term opačný. Nestačí-li intuice, je možno jej definovat indukcí podle délky termu. Je-li t proměnná, potom $t_R = t$, je-li $t = uv$, potom $t_R = v_R u_R$. Ještě si definujme zobrazení L a R z $W \to X$. Je-li t proměnná, potom $L(t) = R(t) = t$. Je-li $t = uv$, potom $L(t) = L(u)$ a $R(t) = R(v)$. Řečeno lidsky, $L(t)$ je proměnná, která se v t vyskytuje nejvíce vlevo (t začíná na $L(t)$) a $R(t)$ je proměnná, která se v t vyskytuje nejvíce vpravo (t končí na $R(t)$).

Uvědomme si, že najdeme-li V-volnou algebru ve varietě V určené rovností $x = t$, máme i V_R-volnou algebru ve varietě V_R určené rovností $x = t_R$. Je totiž $x_R = x$ a stačí tedy ve všech výpočtech a úvahách všechny termy nahradit termy opačnými.

Definice 2.24. Nechť V je varieta grupoidů. Podmnožinu R množiny W nazveme *reprezentativní množinou pro* V, jsou-li splněny následující podmínky:

(1) pro každý term t existuje právě jeden term u takový, že $u \in R$ a rovnost (t, u) je splněna ve V;

(2) je-li $t \in R$, potom také každý vlastní podterm t patří do R.

Lemma 2.15. *Pro každou varietu grupoidů existuje alespoň jedna reprezentativní množina.*

Důkaz. Buď V varieta grupoidů. Označme S systém všech podmnožin $M \subseteq W$ takových, že je-li $t \in M$, potom i každý vlastní podterm t leží v M, a pro $u, v \in M, u \neq v$ není rovnost (u, v) splněna ve V. Z Zornova lemmatu plyne existence maximálního prvku R systému S.

Předpokládejme, že R není reprezentativní množina. Potom existuje term t takový, že rovnost (t, u) není splněna pro žádný term $u \in R$. Vezměme si term t minimální délky mající tuto vlastnost. Jistě $t \notin R$. Pokud by t byla proměnná, potom by $R \cup \{t\} \in S$, což by byl spor s maximalitou R. Je tedy $t = uv$ pro nějaké termy u, v. Z minimality t plyne, že existují termy $u', v' \in R$ takové, že ve V platí rovnosti $(u, u'), (v, v')$. Protože ve V platí i rovnost $(t, u'v')$, term uv nenáleží do R. Potom ale $\{u'v'\} \cup R \in S$, což je spor s maximalitou R. ☐

Definice 2.25. Je-li R reprezentativní množina pro V, můžeme definovat binární operaci $\circ$ na R následovně: Pro $u, v \in R$ buď uv jediný takový term $w \in R$, že (uv, w) platí ve V. Grupoid $R(\circ)$ nazveme *asociovaný s R a V*.

Věta 2.16. *Nechť V je netriviální varieta grupoidů a R reprezentativní množina termů pro V. Potom $X \subseteq R$ a asociovaný grupoid $R(\circ)$ je V-volný nad X.*

Důkaz. Mějme $x \in X$. Potom v R najdeme term t takový, že ve V platí $x \approx t$. Pokud by t neobsahoval x, máme $x \approx t \approx y$, kde y je jiná proměnná různá od x nevyskytující se v t, a v je triviální. Proto t obsahuje x. Potom ale z definice musí R obsahovat i x, je tedy $x = t$ a $x \in R$.

Nyní na W definujme binární relaci r tak, že $(u, v) \in R$, právě když $u \approx v$ platí ve V. Snadno se ověří, že r je úplně invariantní kongruence a $\mathbf{W}/r$ je V-volná nad $\{x/r; x \in X\}$. Protože R je reprezentativní množina, je zobrazení $t \mapsto t/r$ bijekcí R na W/r a z definice $\circ$ plyne, že se jedná o izomorfismus $R(\circ)$ na $\mathbf{W}/r$. $\square$

Značení. Je-li J množina uspořádaných dvojic termů, potom A_J bude množina všech termů t takových, že kdykoliv $(u, u') \in J$ a f je substituce (tedy endomorfismus $\mathbf{W}$), potom $f(u)$ není podtermem t. Jinak řečeno, A_J obsahuje termy, které neobsahují žádnou levou stranu z J ani její substituci.

Definice 2.26. Nechť J je množina uspořádaných dvojic termů a jsou splněny následující podmínky:

(1) pokud $(u, u') \in J$, $(v, v') \in J$, f, g jsou substituce takové, že $f(u) = g(v)$, a každý vlastní podterm $f(u)$ patří do A_J, potom $f(u') = g(v')$;

(2) je-li $(u, u') \in J$ a f substituce taková, že každý vlastní podterm $f(u)$ patří do A_J, potom $f(u') \in J$;

(3) je-li $(u, u') \in J$, potom u není proměnná.

Potom množinu J nazveme *přepisujícím systémem.*

Definice 2.27. Je-li J přepisující systém, můžeme definovat zobrazení $J^* : W \to A_J$ následujícím způsobem (indukcí dle délky termu): Je-li $t \in W$ proměnná, buď $J^*(t) = t$. V opačném případě je $t = t_1 t_2$. Pokud $J^*(t_1)J^*(t_2) \in A_J$, definujme $J^*(t) = J^*(t_1)J^*(t_2)$. Pokud $J^*(t_1)J^*(t_2)$ do A_J nenáleží, je nutně $J^*(t_1)J^*(t_2) = f(u)$ pro nějakou substituci f a term u takový, že existuje uspořádaná dvojice $(u, u') \in J$. Potom položme $J^*(t) = f(u')$. Z vlastností (1) a (2) definice přepisujícího systému plyne, že J^* je korektně definované zobrazení $W \to A_J$.

Máme-li přepisující systém J a zobrazení J^*, můžeme na A_J definovat binární operaci $\circ$ předpisem $t_1 \circ t_2 = J^*(t_1 t_2)$ pro $t_1, t_2 \in A_J$. Grupoid $A_J(\circ)$ nazveme *spojený s* J.

Definice 2.28. Buď V varieta grupoidů. Přepisující systém J nazveme *přepisující systém pro* V, jsou-li splněny následující dvě podmínky:

(4) pro každou dvojici $(u, u') \in J$ je rovnost (u, u') splněna ve V;

(5) grupoid spojený s J patří do V.

Věta 2.17. *Nechť V je varieta grupoidů a J je přepisující systém pro V. Potom grupoid spojený s J je V-volný nad X. Rovnost (u, v) je splněna ve V právě tehdy, když $J^*(u) = J^*(v)$.*

Důkaz. Indukcí podle délky termu je snadné dokázat, že $(t, J^*(t))$ je splněna ve V pro každý term $t \in W$. Mějme $u, v \in A_J$ a nechť (u, v) je splněna ve V. Zobrazení J^* je homomorfismus z $\mathbf{W}$ na $A_J(\circ)$. Z podmínky (5) dostáváme $J^*(u) = J^*(v)$. Neboť J^* je identita na A_J, dostáváme $u = v$. Ověřili jsme, že A_J je reprezentativní množina pro V a tedy V-volná. $\square$

Z předchozího plyne, že máme-li dánu varietu V, potom, najdeme-li přepisující systém pro V, máme popis volných grupoidů ve V. Nabízí se algoritmus, jak pro varietu určenou vhodnou rovností $u_1 \approx v_1$ hledat přepisující systém. Začneme s kandidátem $J_1 = \{u_1 \to v_1\}$. Podmínky (1) až (4) budou splněny triviálně, zkusíme ověřit podmínku (5). Pokud uspějeme, našli jsme přepisující systém pro V. V opačném případě najdeme rovnost $u_2 \approx v_2$, kterou musíme přidat do J a jejímž přidáním neporušíme platnost prvních čtyř podmínek přepisujícího systému. Definujeme proto $J_2 = \{u_1 \to v_1, u_2 \to v_2\}$ a zkusíme ověřit podmínku (5) pro J_2. Takto postupně definujeme množiny rovností J_i. Pokud se nám pro nějaké i podaří ověřit podmínku (5) pro J_i, našli jsme přepisující systém pro V. V opačném případě je možné, že posloupnost J_1, J_2, ... bude nekonečná (spočetná), ale sjednocení $\bigcup J_i$ bude přepisujícím systémem pro V. Poslední zajímavou možností je, že se sice nepodaří najít přepisující systém, ale pokus o jeho nalezení nás přivede k popisu reprezentativní množiny pro V a tedy i k popisu V-volného grupoidu. Tím máme připravenu veškerou potřebnou teorii a můžeme začít s aplikací.

Kapitola 3

Rovnosti tvaru $x = t(x, \ldots, y)$

Poznámka. Jak je vidět z nadpisu, budeme v následujících kapitolách pro rovnosti místo znaku $\approx$ používat rovnítko. Můžeme si to dovolit, neboť již nebude hrozit nedorozumění, zda $u = v$ znamená, že je spněna rovnost $u \approx v$, nebo zda skutečně u a v je tentýž term.

V této kapitole se budeme zabývat rovnostmi tvaru $x = t(x, \ldots, y)$, tedy takovými, jejichž pravá strana začíná na x, ale končí na proměnnou různou od x, a navíc obsahují alespoň tři proměnné. Základem pro nás bude popis volné algebry ve varietě určené rovností tvaru $x = (\ldots(xy_1)y_2)\ldots)y_n$, kde $i \neq j$ implikuje $y_i \neq y_j$ a zároveň $x \neq y_i$ pro všechna i. Hodit se nám bude následující lemma.

Lemma 3.1. *Nechť $x = (\ldots(xy_1)y_2)\ldots)y_n$, kde $n \geq 1$, $i \neq j$ implikuje $y_i \neq y_j$ a zároveň $x \neq y_i$ pro všechna i, ať V je varieta určená touto rovností. Pro $x \in X$ označme $x^1 = x$ a je-li definováno x^i, pak buď $x^{i+1} = (x^i \cdot x^i)$. Nechť $A = \{x^i; x \in X, 1 \leq i \leq n\}$. Na A definujme binární operaci $\circ$ vztahy $x^i \circ a = x^{i+1}$ pro $1 \leq i < n$, $a \in A$ a $x^n \circ a = x^1$ pro $a \in A$. Potom je grupoid $A(\circ)$ volný ve V.*

Důkaz. K důkazu tvrzení stačí ukázat, že A je reprezentativní množina pro V a $A(\circ)$ je asociovaný s A a V. Jistě je-li $t \in A$, je v A i každý podterm t. Nyní chceme ukázat, že pro každý term t nad X najdeme právě jeden term $a \in A$, že ve V platí $a = t$. to je totéž jako ukázat, že pro každý t najdeme alespoň jeden takový term a a že pro $a_1, a_2 \in A$ neplatí ve V $a_1 = a_2$.

Všimněme si, že V není triviální, patří do ní totiž netriviální grupoid $A(\circ)$ (to, že je netriviální a že patří do V je vidět z jeho definice). Mějme nyní term t nad X. Potom se dá psát ve tvaru $t = (\dots(xt_1)t_2)\dots)t_k$, kde x je proměnná, t_i jsou termy a $k \geq 0$. Je-li $k \geq n$, potom (opakovaným) aplikováním rovnosti $x = (\dots(xy_1)y_2)\dots)y_n$ dostaneme $t = (\dots(xt_1)t_2)\dots)t_l$, kde l je zbytek k po dělení n, nadále tedy uvažujme jen $k < n$.

V takovém případě ale ve V platí $t = x^{k+1}$. Proč? Je $t = (\dots(xt_1)t_2)\dots)t_k$ a substitucí ve výchozí rovnosti dostáváme

$$x = (\dots(x \cdot t_1)t_2)\dots)t_k)y_{k+1})\dots)y_n.$$

Tuto rovnost nyní opakovaně zprava násobme postupně termy x^1, x^2,..., x^k, dostáváme

$$(\dots(x \cdot x^1)x^2)\dots)x^k = (\dots(x \cdot t_1)t_2)\dots)t_k)y_{k+1})\dots)y_n)x^1)x^2)\dots)x^k.$$

Ovšem levá strana není nic jiného než x^{k+1} a aplikováním výchozí rovnosti vidíme, že pravá strana je rovna t. Z právě dokázaného můžeme odvodit užitečnou rovnost

$$(\dots(xt_1)t_2)\dots)t_k = x^{k+1} = (\dots(xu_1)u_2)\dots)u_k$$

pro $x \in X$, $k \geq 0$ a libovolné termy t_i, u_i, $1 \leq i \leq k$.

Nyní již víme, že pro každý term t nad X najdeme $a \in A$, že $t = a$ je splněno ve V. Kdyby takových a bylo více, řekněme a_1 a a_2, muselo by ve V platit $a_1 = t = a_2$. Ovšem v grupoidu $A(\circ)$ ležícím ve V tato rovnost neplatí. Tím jsme dokončili důkaz faktu, že A je reprezentativní množina pro V. Vzhledem k tomu, jak jsme definovali operaci $\circ$, je zřejmé, že $A(\circ)$ je asociovaný s A a V, jedná se tedy o V-volný grupoid. □

Speciálními případy právě dokázaného lemmatu je popis volných grupoidů ve varietách určených rovnostmi $x = xy$, $x = xy \cdot z$, $x = (xy \cdot z)u$ a $x = ((xy \cdot z)u)v)$, na něž se budeme ve zbytku kapitoly hojně odkazovat.

Věta 3.2. *Nechť t je jeden z termů $x((yz \cdot z)z)$, $x((yz \cdot z)u)$, $x((yz \cdot u)z)$, $x((yz \cdot u)u)$, $x((yz \cdot u)v)$, $x((y \cdot xz)u)$, $x((y \cdot zu)v)$, $x((y \cdot yz)u)$, $x((y \cdot zx)u)$,*

$x((y \cdot zy)u)$, $x((y \cdot zz)z)$, $x((y \cdot zz)u)$, $x((y \cdot zu)z)$, $x((y \cdot zu)u)$, $x(yz \cdot xu)$, $x(yz \cdot yu)$, $x(yz \cdot zz)$, $x(yz \cdot zu)$, $x(yz \cdot uz)$, $x(yz \cdot uu)$, $x(yz \cdot uv)$, $x(yz \cdot uy)$, $x(y(xx \cdot z))$, $x(y(xz \cdot u))$, $x(y(zx \cdot u))$, $x(y(zz \cdot u))$, $x(y(zu \cdot v))$, $x(y(xy \cdot z))$, $x(y(xz \cdot z))$, $x(y(yx \cdot z))$, $x(y(yy \cdot z))$, $x(y(yz \cdot u))$, $x(y(zy \cdot u))$, $x(y(zx \cdot z))$, $x(y(zz \cdot z))$, $x(y(zu \cdot z))$, $x(y(zu \cdot u))$, $x(y(zu \cdot y))$, $x(y(x \cdot yz))$, $x(y(x \cdot zu))$, $x(y(y \cdot xz))$, $x(y(y \cdot yz))$, $x(y(y \cdot zu))$, $x(y(z \cdot yu))$, $x(y(z \cdot zu))$, $x(y(z \cdot uv))$, $x(y(z \cdot xz))$, $x(y(z \cdot xu))$, $x(y(z \cdot uz))$, $x(y(z \cdot yy))$, $x(y(z \cdot uy))$, $x(y(z \cdot uu))$, $x(y(z \cdot zz))$. *Potom varieta určená rovností* $x = t$ *je rovna varietě určené rovností* $x = xy$.

Důkaz. Chceme dokázat, že z $x = t$ plyne $x = xy$ a naopak, že z $x = xy$ plyne $x = t$. Druhá implikace je ve všech případech snadná, stačí zvolit vhodnou substituci za y. Podívejme se postupně na jednotlivé termy.

Buď $t = x((yz \cdot z)z)$. Potom $x = x((yz \cdot z)z)$, $x = x((yz \cdot z)z) = x((y((yz \cdot z)z) \cdot ((yz \cdot z)z))((yz \cdot z)z)) = x((y((yz \cdot z)z))((yz \cdot z)z)) = x(y((yz \cdot z)z)) = xy$. Tím jsou vyřešeny i případy $t = x((yz \cdot z)u)$, $t = x((yz \cdot u)z)$, $t = x((yz \cdot u)u)$ a $t = x((yz \cdot u)v)$ – za proměnné u, v dosadíme z a máme převedeno na vyřešený případ (od tohoto místa dále takovéto jednoduché substituce nebudu vysvětlovat).

Pro $t = x((y \cdot xz)u)$ máme $x = x((y \cdot xz)u)$, $x = x((y \cdot xz)u) = x((y \cdot xz)((y \cdot (y \cdot xz)z)u)) = x(y \cdot xz)$, $x = x(y \cdot xz) = x(y \cdot x(yz)) = xy$, tím je vyřešeno i $t = x((y \cdot zu)v)$.

Pro $t = x((y \cdot yz)u)$ je $x = x((y \cdot yz)u)$, $x = x((y \cdot yz)u) = x((y \cdot yz)((y \cdot yz)u)) = x(y \cdot yz)$, $x = x(y \cdot yz) = x(y \cdot y(y \cdot yz)) = x \cdot yy$, $x = x(y \cdot yz) = x(y \cdot yy) = xy$.

Pro $t = x((y \cdot zx)u)$ je $x = x((y \cdot zx)u)$, $x = x((y \cdot zx)u) = x((y \cdot (y \cdot zy)x)u) = x \cdot yu = x \cdot y((y \cdot zy)u) = xy$.

Pro $t = x((y \cdot zy)u)$ je $x = x((y \cdot zy)u)$, $x = x((y \cdot zy)u) = x((y \cdot (y \cdot zy)y)u) = x((y \cdot (y \cdot zy)y)u) = x \cdot yu$, $x = x \cdot yu = x \cdot y(uz) = xy$.

Pro $t = x((y \cdot zz)z)$ je $x = x((y \cdot zz)z)$, $x = x((y \cdot zz)z) = x((y \cdot ((u \cdot zz)z)((u \cdot zz)z))((u \cdot zz)z)) = x((y \cdot ((u \cdot zz)z))((u \cdot zz)z)) = x((y \cdot ((u \cdot zz)z))) = xy$, což řeší i případy $t = x((y \cdot zz)u)$, $t = x((y \cdot zu)z)$ a $t = x((y \cdot zu)u)$.

Pro $t = x(yz \cdot xu)$ je $x = x(yz \cdot xu)$, $x = x(yz \cdot xu) = x(y(yz \cdot yu) \cdot xu) = x(y \cdot xu)$, $x = x(y \cdot xu) = x(y \cdot x(yu)) = xy$.

Pro $t = x(yz \cdot yu)$ je $x = x(yz \cdot yu)$, $x = x(yz \cdot yu) = x(y(yz \cdot yu) \cdot yu) = x(y \cdot yu)$, $x = x(y \cdot yu) = x(y \cdot y(yu)) = xy$.

Pro $t = x(yz \cdot zz)$ je $x = x(yz \cdot zz)$, $x = x(yz \cdot zz) = x(y(uz \cdot zz) \cdot (uz \cdot zz)(uz \cdot zz)) = x(y \cdot (uz \cdot zz)) = xy$, což řeší i případy $t = x(yz \cdot zu)$, $t = x(yz \cdot uz)$, $t = x(yz \cdot uu)$ a $t = x(yz \cdot uv)$.

Pro $t = x(yz \cdot uy)$ je $x = x(yz \cdot uy)$, $x = x(yz \cdot uy) = x(y(yz \cdot uy) \cdot uy) = x(y \cdot uy)$, $x \cdot uy = x \cdot (uy \cdot (y \cdot uy)) = x$, $x = x \cdot uy = x \cdot u(uy) = xu$.

Pro $t = x(y(xx \cdot z))$ je $x = x(y(xx \cdot z))$, $x = x(y(xx \cdot z)) = x(yy \cdot (xx \cdot z))$, $yx = y(x(yy \cdot (xx \cdot z))) = y$, což řeší i případy $t = x(y(xz \cdot u))$, $t = x(y(zx \cdot u))$, $t = x(y(zz \cdot u))$ a $t = x(y(zu \cdot v))$.

Pro $t = x(y(xy \cdot z))$ je $x = x(y(xy \cdot z))$, $zx = z(x(y(xy \cdot z))) = z(x(zx \cdot (x(zx) \cdot z))) = z$.

Pro $t = x(y(xz \cdot z))$ je $x = x(y(xz \cdot z))$, $ux = u(x(y(xz \cdot z))) = u(x((u(xz \cdot z))(xz \cdot z))) = u$.

Pro $t = x(y(yx \cdot z))$ je $x = x(y(yx \cdot z))$, $x = x(y(yx \cdot z)) = x(y(yx \cdot ((yx \cdot y)z))) = xy$.

Pro $t = x(y(yy \cdot z))$ je $x = x(y(yy \cdot z))$, $ux = u(x(y(yy \cdot z))) = u(x(xx \cdot ((xx \cdot xx) \cdot z))) = u$, což řeší i případy $t = x(y(yz \cdot u))$ a $t = x(y(zy \cdot u))$.

Pro $t = x(y(zx \cdot z))$ je $x = x(y(zx \cdot z))$, $x = x(y(zx \cdot z)) = x(y((zy \cdot z)x \cdot (zy \cdot z))) = xy$.

Pro $t = x(y(zz \cdot z))$ je $x = x(y(zz \cdot z))$, $x = x(y(zz \cdot z)) = x(y((zz \cdot z)(zz \cdot z) \cdot (zz \cdot z))) = xy$, což řeší i případy $t = x(y(zu \cdot z))$ a $t = x(y(zu \cdot u))$.

Pro $t = x(y(zu \cdot y))$ je $x = x(y(zu \cdot y))$, $x = x(y(zu \cdot y)) = x(y(z(y(zu \cdot y)) \cdot y)) = x(y \cdot zy)$, $u \cdot zy = u(zy \cdot (y \cdot zy)) = u$, $u = u \cdot zy = u \cdot z(yy) = uz$.

Pro $t = x(y(x \cdot yz))$ je $x = x(y(x \cdot yz))$, $x = x(y(x \cdot yz)) = x(y(x \cdot y(xz))) = xy$, což řeší i případ $t = x(y(x \cdot zu))$.

Pro $t = x(y(y \cdot xz))$ je $x = x(y(y \cdot xz))$, $yy = y(y(y(y \cdot yz))) = y$, $x = x(y(y \cdot xz)) = x(y(y \cdot x(x \cdot yz))) = x \cdot yy$, $x = x \cdot yy = xy$.

Pro $t = x(y(y \cdot yz))$ je $x = x(y(y \cdot yz))$, $x = x(y(y \cdot yz)) = x(y(y \cdot y(yz))) = xy$, což řeší i případy $t = x(y(y \cdot zu))$, $t = x(y(z \cdot yu))$, $t = x(y(z \cdot zu))$ a $t = x(y(z \cdot uv))$.

Pro $t = x(y(z \cdot xz))$ je $x = x(y(z \cdot xz))$, $zx = z(x(y(z \cdot xz))) = z(x(xz \cdot (z \cdot xz))) = z$, což řeší i případy $t = x(y(z \cdot xu))$ a $t = x(y(z \cdot uz))$.

Pro $t = x(y(z \cdot yy))$ je $x = x(y(z \cdot yy))$, $x = x(y(z \cdot yy)) = x(zz \cdot (z \cdot (zz \cdot zz))) = x \cdot zz$, $x = x(y(z \cdot yy)) = x \cdot yz$, $x = x \cdot yz = x \cdot (y \cdot zz) = xy$, což řeší i případy $t = x(y(z \cdot uy))$ a $t = x(y(z \cdot uu))$.

Pro $t = x(y(z \cdot zz))$ je $x = x(y(z \cdot zz))$, $x = x(y(z \cdot zz)) = x(y((y(z \cdot zz)) \cdot (y(z \cdot zz))(y(z \cdot zz)))) = x(y((y(z \cdot zz)) \cdot (y(z \cdot zz)))) = x(y(y(z \cdot zz))) = xy$. $\square$

Věta 3.3. *Nechť t je jeden z termů* $(x(xx \cdot y))z$, $(x(xy \cdot z))u$, $(x(yx \cdot z))u$, $(x(yy \cdot z))u$, $(x(yz \cdot u))v$, $(x(xy \cdot x))z$, $(x(yz \cdot x))u$, $(x(yz \cdot y))u$, $(x(xy \cdot y))z$, $(x(xy \cdot z))z$, $(x(yz \cdot u))u$, $(x(yx \cdot x))z$, $(x(yz \cdot z))u$, $(x(yx \cdot y))z$, $(x(yy \cdot x))z$, $(x(yy \cdot y))z$, $(x(yz \cdot x))z$, $(x(yz \cdot u))z$, $(x(yz \cdot z))z$, $(x(x \cdot xy))z$, $(x(x \cdot yz))u$, $(x(y \cdot xz))u$, $(x(y \cdot yz))u$, $(x(y \cdot zu))v$, $(x(x \cdot yx))z$, $(x(y \cdot zx))u$, $(x(y \cdot zy))u$, $(x(x \cdot yy))z$, $(x(x \cdot yz))z$, $(x(y \cdot xx))z$, $(x(y \cdot xy))z$, $(x(y \cdot xz))z$, $(x(y \cdot yx))z$, $(x(y \cdot yy))z$, $(x(y \cdot zx))z$, $(x(y \cdot zz))z$, $(x(y \cdot zz))u$, $(x(y \cdot zu))z$, $(x(y \cdot zu))u$, $(x \cdot xx) \cdot yz$, $(x \cdot xy) \cdot zu$, $(x \cdot yx) \cdot zu$, $(x \cdot yy) \cdot zu$, $(x \cdot yz) \cdot uv$, $(x \cdot yy) \cdot xz$, $(x \cdot yz) \cdot xu$, $(x \cdot yy) \cdot zy$, $(x \cdot yz) \cdot uy$, $(x \cdot yz) \cdot zz$, $(x \cdot yz) \cdot zu$, $(x \cdot yz) \cdot uz$, $(x \cdot yz) \cdot uu$, $xx \cdot (yy \cdot z)$, $xx \cdot (yz \cdot u)$, $xx \cdot (yz \cdot z)$, $xy \cdot (xx \cdot z)$, $xy \cdot (xz \cdot u)$, $xy \cdot (zx \cdot u)$, $xy \cdot (zy \cdot y)$, $xy \cdot (zy \cdot u)$, $xy \cdot (zu \cdot y)$, $xy \cdot (zu \cdot u)$, $xy \cdot (zu \cdot v)$, $xy \cdot (zz \cdot z)$, $xy \cdot (zz \cdot u)$, $xy \cdot (zu \cdot z)$, $xx \cdot (y \cdot xz)$, $xx \cdot (y \cdot zu)$, $xx \cdot (y \cdot yz)$, $xx \cdot (y \cdot zy)$, $xx \cdot (y \cdot zz)$, $xy \cdot (x \cdot zu)$, $xy \cdot (z \cdot xz)$, $xy \cdot (z \cdot xu)$, $xy \cdot (z \cdot yy)$, $xy \cdot (z \cdot yu)$, $xy \cdot (z \cdot uy)$, $xy \cdot (z \cdot uu)$, $xy \cdot (z \cdot uv)$, $xy \cdot (z \cdot zz)$, $xy \cdot (z \cdot zu)$, $xy \cdot (z \cdot uz)$. *Potom varieta určená rovností $x = t$ je rovna varietě určené rovností $x = xy \cdot z$.*

Důkaz. Stejně jako v předchozí větě je tvrzení $x = xy \cdot z$ implikuje $x = t$ záležitostí snadné substituce, zajímá nás tedy směr $x = t$ implikuje $x = xy \cdot z$.

Pro $t = (x(xx \cdot y))z$ je $x = (x(xx \cdot y))z$, $(x(xx \cdot y)) = ((x(xx \cdot y))((x(xx \cdot y))(x(xx \cdot y)) \cdot y))z = xz$, $xz = (x(xx \cdot y)) = xu$, $x = (x(xx \cdot y))z = xy \cdot z$, což řeší i případy $t = (x(xy \cdot z))u$, $t = (x(yx \cdot z))u$, $t = (x(yy \cdot z))u$ a $t = (x(yz \cdot u))v$.

Pro $t = (x(xy \cdot x))z$ je $x = (x(xy \cdot x))z$, $(x(xy \cdot x)) = ((x(xy \cdot x))((x(xy \cdot x))y \cdot (x(xy \cdot x))))z = xz$, $x = (x(xy \cdot x))z = xy \cdot z$, což řeší i případy $t = (x(yz \cdot x))u$ a $t = (x(yz \cdot y))u$.

Pro $t = (x(xy \cdot y))z$ je $x = (x(xy \cdot y))z$, $(x(xy \cdot y)) = ((x(xy \cdot y))((x(xy \cdot y))y \cdot y))z = xz$, $x = (x(xy \cdot y))z = xy \cdot z$.

Pro $t = (x(xy \cdot z))z$ je $x = (x(xy \cdot z))z$, $xx \cdot z = x((x(xy \cdot z))z) \cdot z = x$, $x = xx \cdot y$, $xx = (xx \cdot xx)y = xy$, $x = (x(xy \cdot z))z = xx \cdot z = xy \cdot z$, což řeší i případ $t = (x(yz \cdot u))u$.

Pro $t = (x(yx \cdot x))z$ je $x = (x(yx \cdot x))z$, $(x(yx \cdot x)) = ((x(yx \cdot x))(y(x(yx \cdot x)) \cdot (x(yx \cdot x))))z = xz$, $x = (x(yx \cdot x))z = xy \cdot z$, což řeší i případ $t = (x(yz \cdot z))u$.

Pro $t = (x(yx \cdot y))z$ je $x = (x(yx \cdot y))z$, $(x(yx \cdot y)) = ((x(yx \cdot y))(y(x(yx \cdot y)) \cdot y))z = xz$, $x = (x(yx \cdot y))z = xy \cdot z$.

Pro $t = (x(yy \cdot x))z$ je $x = (x(yy \cdot x))z$, $(x(yy \cdot x)) = ((x(yy \cdot x))(yy \cdot (x(yy \cdot x))))z = xz$, $x = (x(yy \cdot x))z = xy \cdot z$.

Pro $t = (x(yy \cdot y))z$ je $x = (x(yy \cdot y))z$, $(x(yy \cdot y)) = ((x(yy \cdot y))(yy \cdot y))z = xz$, $x = (x(yy \cdot y))z = xy \cdot z$.

Pro $t = (x(yz \cdot x))z$ je $x = (x(yz \cdot x))z$, $x = (x(yz \cdot x))z = (x((y(yz \cdot y))z \cdot x))z = (x(yx))z = (x((y(yx \cdot y))x))z = xy \cdot z$, což řeší i případ $t = (x(yz \cdot u))z$.

Pro $t = (x(yz \cdot z))z$ je $x = (x(yz \cdot z))z$, $x = (x(yz \cdot z))z = (x((y(yz \cdot z))z \cdot z))z = (x \cdot yz)z = (x \cdot (y(yz \cdot z))z)z = xy \cdot z$.

Pro $t = (x(x \cdot xy))z$ je $x = (x(x \cdot xy))z$, $(x(x \cdot xy)) = ((x(x \cdot xy))((x(x \cdot xy)) \cdot (x(x \cdot xy))y))z = xz$, $xz = (x(x \cdot xy)) = xu$, $x = (x(x \cdot xy))z = xy \cdot z$, což řeší i případy $t = (x(x \cdot yz))u$, $t = (x(y \cdot xz))u$, $t = (x(y \cdot yz))u$ a $t = (x(y \cdot zu))v$.

Pro $t = (x(x \cdot yx))z$ je $x = (x(x \cdot yx))z$, $(x(x \cdot yx)) = ((x(x \cdot yx))((x(x \cdot yx)) \cdot y(x(x \cdot yx))))z = xz$, $x = (x(x \cdot yx))z = xy \cdot z$, což řeší i případy $t = (x(y \cdot zx))u$ a $t = (x(y \cdot zy))u$.

Pro $t = (x(x \cdot yy))z$ je $x = (x(x \cdot yy))z$, $(x(x \cdot yy)) = ((x(x \cdot yy))((x(x \cdot yy)) \cdot yy))z = xz$, $x = (x(x \cdot yy))z = xy \cdot z$.

Pro $t = (x(x \cdot yz))z$ je $x = (x(x \cdot yz))z$, $x = (x(x \cdot yz))z = (x(x \cdot (y(y \cdot yz))z))z = (x \cdot xy)z$, $(x \cdot xy) = ((x \cdot xy) \cdot (x \cdot xy)y)z = xz$, $xz = (x \cdot xy) = xu$, $x = (x(x \cdot yz))z = xy \cdot z$.

Pro $t = (x(y \cdot xx))z$ je $x = (x(y \cdot xx))z$, $(x(y \cdot xx)) = ((x(y \cdot xx))(y \cdot (x(y \cdot xx))(x(y \cdot xx))))z = xz$, $x = (x(y \cdot xx))z = xy \cdot z$.

Pro $t = (x(y \cdot xy))z$ je $x = (x(y \cdot xy))z$, $(x(y \cdot xy)) = ((x(y \cdot xy))(y \cdot (x(y \cdot xy))y))z = xz$, $x = (x(y \cdot xy))z = xy \cdot z$.

Pro $t = (x(y \cdot xz))z$ je $x = (x(y \cdot xz))z$, $x = (x(y \cdot xz))z = (x((y(y \cdot y(xz))) \cdot xz))z = xy \cdot z$.

Pro $t = (x(y \cdot yx))z$ je $x = (x(y \cdot yx))z$, $x = (x(y \cdot yx))z = (x((y(y \cdot yy)) \cdot (y(y \cdot yy))x))z = xy \cdot z$.

Pro $t = (x(y \cdot yy))z$ je $x = (x(y \cdot yy))z$, $(x(y \cdot yy)) = ((x(y \cdot yy))(y \cdot yy))z = xz$, $x = (x(y \cdot yy))z = xy \cdot z$.

Pro $t = (x(y \cdot zx))z$ je $x = (x(y \cdot zx))z$, $x = (x(y \cdot zx))z = (x((y(y \cdot (zx)y)) \cdot zx))z = xy \cdot z$.

Pro $t = (x(y \cdot zz))z$ je $x = (x(y \cdot zz))z$, $x = (x(y \cdot zz))z = (x(y \cdot (yy \cdot yy))) \cdot yy$, $zx \cdot y = z((x(y \cdot (yy \cdot yy))) \cdot yy) \cdot y = z$, což řeší i případy $t = (x(y \cdot zz))u$, $t = (x(y \cdot zu))z$ a $t = (x(y \cdot zu))u$.

Pro $t = (x \cdot xx) \cdot yz$ je $x = (x \cdot xx) \cdot yz$, $(x \cdot xx) = ((x \cdot xx) \cdot (x \cdot xx)(x \cdot xx)) \cdot yz = x \cdot yz$, $x = (x \cdot xx) \cdot yz = (x \cdot uv) \cdot yz = (x \cdot (y \cdot yy)(yz)) \cdot (z \cdot zz)(yz) = xy \cdot z$, což řeší i případy $t = (x \cdot xy) \cdot zu$, $t = (x \cdot yx) \cdot zu$, $t = (x \cdot yy) \cdot zu$ a $t = (x \cdot yz) \cdot uv$.

Pro $t = (x \cdot yy) \cdot xz$ je $x = (x \cdot yy) \cdot xz$, $x = (x \cdot yy) \cdot xz = (x \cdot (x \cdot yy)(x \cdot yy)) \cdot xz = xx \cdot xz$, $x = (x \cdot yy) \cdot xz = (x \cdot (yy \cdot yy)) \cdot xz = xy \cdot xz$, $xy = (xy \cdot xy)(xy \cdot xy) = xx$, $xy = xx = xz$, $x = xy \cdot xz = xy \cdot z$, což řeší i případ $t = (x \cdot yz) \cdot xu$.

Pro $t = (x \cdot yy) \cdot zy$ je $x = (x \cdot yy) \cdot zy$, $x \cdot yy = ((x \cdot yy) \cdot yy) \cdot zy = x \cdot zy$, $x = (x \cdot yy) \cdot zy = (x \cdot (yz \cdot yz)) \cdot (u \cdot zz)(yz) = (x \cdot (yz \cdot yz)) \cdot u$, $x = (x \cdot (((y \cdot yy) \cdot zy) \cdot ((y \cdot yy) \cdot zy))) \cdot u = (x \cdot yy) \cdot u = (x \cdot zy)u = (x \cdot ((y \cdot yy) \cdot zy))u = xy \cdot u$, což řeší i případ $t = (x \cdot yz) \cdot uy$.

Pro $t = (x \cdot yz) \cdot zz$ je $x = (x \cdot yz) \cdot zz$, $x = (x \cdot yz) \cdot zz = (x \cdot ((y \cdot yz) \cdot zz)) \cdot (zz \cdot zz) = xy \cdot (zz \cdot zz)$, $x = xy \cdot (zz \cdot zz) = xy \cdot ((zz \cdot zz)(zz \cdot zz)) = xy \cdot zz$, $x = xy \cdot zz = xy \cdot (zz \cdot zz) = xy \cdot z$, což řeší i případy $t = (x \cdot yz) \cdot zu$, $t = (x \cdot yz) \cdot uz$ a $t = (x \cdot yz) \cdot uu$.

Pro $t = xx \cdot (yy \cdot z)$ je $x = xx \cdot (yy \cdot z)$, $x = xx \cdot (yy \cdot z) = xx \cdot (yy \cdot (yy \cdot z)) = xx \cdot y$, $xx = (xx \cdot xx) \cdot y = xy$, $xy = xx = xz$, $x = xx \cdot (yy \cdot z) = xy \cdot (yy \cdot z) = xy \cdot z$, což řeší i případ $t = xx \cdot (yz \cdot u)$.

Pro $t = xx \cdot (yz \cdot z)$ je $x = xx \cdot (yz \cdot z)$, $x = xx \cdot (yz \cdot z) = xx \cdot ((yy \cdot yy)(yz \cdot z) \cdot (yz \cdot z)) = xx \cdot (yy \cdot (yz \cdot z)) = xx \cdot y$, $xx = (xx \cdot xx) \cdot y = xy$, $xy = xx = xz$, $x = xx \cdot (yz \cdot u) = xy \cdot (yz \cdot u) = xy \cdot z$.

Pro $t = xy \cdot (xx \cdot z)$ je $x = xy \cdot (xx \cdot z)$, $x = xy \cdot (xx \cdot z) = xy \cdot (xx \cdot (xx \cdot z)) = xy \cdot x$, $yx = (yx)y \cdot ((yx)(yx) \cdot z) = y \cdot ((yx)(yx) \cdot z) = y \cdot ((yx)(yx) \cdot yx) = y \cdot yx$, $x = xy \cdot (xx \cdot z) = xx \cdot (xx \cdot z) = xx \cdot z$, $x = xx \cdot z = (x(xy \cdot x))z$ a $x = (x(xy \cdot x))z$ jsme už rozřešili. Tím jsou vyřešeny i případy $t = xy \cdot (xz \cdot u)$ a $t = xy \cdot (zx \cdot u)$.

Pro $t = xy \cdot (zy \cdot y)$ je $x = xy \cdot (zy \cdot y)$, $x = xy \cdot (zy \cdot y) = (x(uy \cdot y))((zy \cdot (uy \cdot y))(uy \cdot y)) = (x(uy \cdot y))(z(uy \cdot y)) = (x(uy \cdot y))(zy \cdot (uy \cdot y)) = (x(uy \cdot y))z$, $x = (x(uy \cdot y))z = (x((yu \cdot (uu \cdot u))(uu \cdot u)))z = (x(y(uu \cdot u)))z = (x(yu \cdot (uu \cdot u)))z = xy \cdot z$, což řeší i případy $t = xy \cdot (zy \cdot u)$, $t = xy \cdot (zu \cdot y)$, $t = xy \cdot (zu \cdot u)$ a $t = xy \cdot (zu \cdot v)$.

Pro $t = xy \cdot (zz \cdot z)$ je $x = xy \cdot (zz \cdot z)$, $xu = (xu)y \cdot (zz \cdot z) = (xu)(zz \cdot z) \cdot (zz \cdot z) = x \cdot (zz \cdot z)$, $xy \cdot u = xy \cdot (zz \cdot z) = x$, což řeší i případy $t = xy \cdot (zz \cdot u)$ a $t = xy \cdot (zu \cdot z)$.

Pro $t = xx \cdot (y \cdot xz)$ je $x = xx \cdot (y \cdot xz)$, $x = xx \cdot (y \cdot xz) = xx \cdot (yy \cdot (x \cdot yz)) = xx \cdot y$, $xx = (xx \cdot xx) \cdot y = xy$, $xy = xx = xz$, $x = xx \cdot (y \cdot xz) = xy \cdot (y \cdot xz) = xy \cdot z$, což řeší i případ $x = xx \cdot (y \cdot zu)$.

Pro $t = xx \cdot (y \cdot yz)$ je $x = xx \cdot (y \cdot yz)$, $x = xx \cdot (y \cdot yz) = xx \cdot (yy \cdot (yy \cdot (yy \cdot z))) = xx \cdot y$, $xx = (xx \cdot xx) \cdot y = xy$, $xy = xx = xz$, $x = xx \cdot (y \cdot xz) = xy \cdot (y \cdot xz) = xy \cdot z$.

Pro $t = xx \cdot (y \cdot zy)$ je $x = xx \cdot (y \cdot zy)$, $x = xx \cdot (y \cdot zy) = xx \cdot (yy \cdot (y \cdot yy)) = xx \cdot y$, $xx = (xx \cdot xx) \cdot y = xy$, $xy = xx = xz$, $x = xx \cdot (y \cdot xz) = xy \cdot (y \cdot xz) = xy \cdot z$.

Pro $t = xx \cdot (y \cdot zz)$ je $x = xx \cdot (y \cdot zz)$, $x = xx \cdot (y \cdot zz) = xx \cdot (yy \cdot (zz \cdot zz)) = xx \cdot y$, $xx = (xx \cdot xx) \cdot y = xy$, $xy = xx = xz$, $x = xx \cdot (y \cdot xz) = xy \cdot (y \cdot xz) = xy \cdot z$.

Pro $t = xy \cdot (x \cdot zu)$ je $x = xy \cdot (x \cdot zu)$, $x = xy \cdot (x \cdot zu) = xy \cdot (x \cdot (zz)(z \cdot uu)) = xy \cdot xz$, $xy = (xy \cdot xy)(xy \cdot xy) = xx$, $xy = xx = xz$, $x = xy \cdot (x \cdot zu) = xy \cdot z$.

Pro $t = xy \cdot (z \cdot xz)$ je $x = xy \cdot (z \cdot xz)$, $x = xy \cdot (z \cdot xz) = xy \cdot (zx \cdot x(zx)) = xy \cdot z$, což řeší i případ $t = xy \cdot (z \cdot xu)$.

Pro $t = xy \cdot (z \cdot yy)$ je $x = xy \cdot (z \cdot yy)$, $x = xy \cdot (z \cdot yy) = (x \cdot yy)(zy \cdot (yy \cdot yy)) = (x \cdot yy)z$, $x = xy \cdot (z \cdot yy) = xy \cdot ((z \cdot yy) \cdot yy) = xy \cdot z$, což řeší i případy $t = xy \cdot (z \cdot yu)$, $t = xy \cdot (z \cdot uy)$, $t = xy \cdot (z \cdot uu)$ a $t = xy \cdot (z \cdot uv)$.

Pro $t = xy \cdot (z \cdot zz)$je $x = xy \cdot (z \cdot zz)$, $xu = (xu)y \cdot (z \cdot zz) = (xu)(z \cdot zz) \cdot (z \cdot zz) = x \cdot (z \cdot zz)$, $xy \cdot u = xy \cdot (z \cdot zz) = x$, což řeší i případy $t = xy \cdot (z \cdot zu)$ a $t = xy \cdot (z \cdot uz)$. □

Věta 3.4. *Nechť t je jeden z termů $((x \cdot xx)y)z$, $((x \cdot xy)y)z$, $((x \cdot xy)z)y$, $((x \cdot xy)z)u$, $((x \cdot yx)x)z$, $((x \cdot yx)z)u$, $((x \cdot yz)x)u$, $((x \cdot yz)z)u$, $((x \cdot yz)u)v$, $((x \cdot yx)y)z$, $((x \cdot yx)z)y$, $((x \cdot yx)z)z$, $((x \cdot yy)x)z$, $((x \cdot yy)y)z$, $((x \cdot yz)y)u$, $((x \cdot yy)z)y$, $((x \cdot yy)z)u$, $((x \cdot yz)u)y$, $((x \cdot yz)u)z$, $((x \cdot yz)x)z$, $((x \cdot yz)z)z$, $((x \cdot yz)u)u$, $(xx \cdot xy)z$, $(xx \cdot yz)u$, $(xy \cdot xz)u$, $(xy \cdot yz)u$, $(xy \cdot zu)v$, $(xx \cdot yx)z$, $(xy \cdot zx)u$, $(xy \cdot zy)u$, $(xx \cdot yy)z$, $(xx \cdot yz)z$, $(xy \cdot xx)z$, $(xy \cdot xy)z$, $(xy \cdot xz)z$,*

$(xy\cdot yx)z$, $(xy\cdot yy)z$, $(xy\cdot zx)y$, $(xy\cdot zu)y$, $(xy\cdot zz)z$, $(xy\cdot zz)u$, $(xy\cdot zu)z$, $(xy\cdot zu)u$, $(xx\cdot x)\cdot yz$, $(xx\cdot y)\cdot zz$, $(xx\cdot y)\cdot zu$, $(xy\cdot x)\cdot zy$, $(xy\cdot x)\cdot zu$, $(xy\cdot y)\cdot zy$, $(xy\cdot y)\cdot zu$, $(xy\cdot z)\cdot uy$, $(xy\cdot z)\cdot uz$, $(xy\cdot z)\cdot uv$, $(xy\cdot z)\cdot xy$, $(xy\cdot z)\cdot xu$, $(xy\cdot z)\cdot yy$, $(xy\cdot z)\cdot yu$, $(xy\cdot z)\cdot uu$, $(xy\cdot z)\cdot zz$, $(xy\cdot z)\cdot zu$. *Potom varieta určená rovností* $x=t$ *je rovna varietě určené rovností* $x=(xy\cdot z)u$.

Důkaz. Opět pro důkaz stačí ukázat, že platí-li $x=t$, nutně už platí $x=(xy\cdot z)u$.

Pro $t=((x\cdot xx)y)z$ je $x=((x\cdot xx)y)z$, $x\cdot xx=(((x\cdot xx)((x\cdot xx)(x\cdot xx)))y)z=xz$, $x=((x\cdot xx)y)z=(xu\cdot y)z$.

Pro $t=((x\cdot xy)y)z$ je $x=((x\cdot xy)y)z$, $(x\cdot xy)y=((((x\cdot xy)y)(((x\cdot xy)y)y))y)z=xy\cdot z$, $x=((x\cdot xy)y)z=(xy\cdot u)z$.

Pro $t=((x\cdot xy)z)y$ je $x=((x\cdot xy)z)y$, $x=((x\cdot xy)z)y$, $x\cdot xz=(((x\cdot xz)\cdot(x\cdot xz)y)z)y=xy$, $xy=x\cdot xz=xz$, $x=((x\cdot xy)z)y=(xu\cdot z)y$, což řeší i případ $t=((x\cdot xy)z)u$.

Pro $t=((x\cdot yx)x)z$ je $x=((x\cdot yx)x)z$, $x=((x\cdot yx)x)z=((x\cdot((y\cdot yy)y)x)x)z=(xy\cdot x)z$, $yx=((yx)y\cdot yx)z=yz$, $x=((x\cdot yx)x)z=((xy)x)z=(xy\cdot u)z$, což řeší i případy $t=((x\cdot yx)z)u$, $t=((x\cdot yz)x)u$, $t=((x\cdot yz)z)u$ a $t=((x\cdot yz)u)v$.

Pro $t=((x\cdot yx)y)z$ je $x=((x\cdot yx)y)z$, $(x\cdot yx)y=((((x\cdot yx)y)\cdot y((x\cdot yx)y))y)z=xy\cdot z$, $(xy\cdot z)u=((x\cdot yx)y)u=x$.

Pro $t=((x\cdot yx)z)y$ je $x=((x\cdot yx)z)y$, $x=((x\cdot yx)z)y=((x\cdot yx)(z(x\cdot yx)))y$, $xz=(((x\cdot yx)(z(x\cdot yx)))y)z=x\cdot yx$, $x=((x\cdot yx)z)y=(xu\cdot z)y$.

Pro $t=((x\cdot yx)z)z$ je $x=((x\cdot yx)z)z$, $x=((x\cdot yx)z)z=((x\cdot yx)(z(x\cdot yx)))(z(x\cdot yx))$, $x(z(x\cdot yx))=(((x\cdot yx)(z(x\cdot yx)))(z(x\cdot yx)))(z(x\cdot yx))=x\cdot yx$, $x\cdot yx=x(((z\cdot yz)(x\cdot yx))(x\cdot yx))=xz$, $xz=x\cdot yx=xu$, $x=((x\cdot yx)z)z=(xy\cdot z)z=(xy\cdot z)u$.

Pro $t=((x\cdot yy)x)z$ je $x=((x\cdot yy)x)z$, $x=((x\cdot yy)x)z=((x\cdot((y\cdot yy)y)((y\cdot yy)y))x)z=(xy\cdot x)z$, $x=(xy\cdot x)z$, $yx=((yx)y\cdot yx)z=yz$, $x=((x\cdot yy)x)z=((x\cdot y)x)z=(xy\cdot u)z$.

Pro $t=((x\cdot yy)y)z$ je $x=((x\cdot yy)y)z$, $x(yy\cdot yy)=((x(yy\cdot yy)\cdot yy)y)z=xz$, $xz=x(yy\cdot yy)=xu$, $x=((x\cdot yy)y)z=(xu\cdot y)z$, což řeší i případ $t=((x\cdot yz)y)u$.

Pro $t = ((x \cdot yy)z)y$ je $x = ((x \cdot yy)z)y$, $x = ((x \cdot yy)z)y = ((x \cdot yy) \cdot zz)y$, $xz = (((x \cdot yy) \cdot zz)y)z = x \cdot yy$, $xz = x \cdot yy = xu$, $x = ((x \cdot yy)z)y = (xu \cdot z)y$, což řeší i případy $t = ((x \cdot yy)z)u$, $t = ((x \cdot yz)u)y$ a $t = ((x \cdot yz)u)z$.

Pro $t = ((x \cdot yz)x)z$ je $x = ((x \cdot yz)x)z$, $x = ((x \cdot yz)x)z = ((x \cdot ((y \cdot yz)y)z)x)z = (xy \cdot x)z$, $yx = ((yx)y \cdot (yx))z = yz$, $x = ((x \cdot yz)x)z = (xy \cdot x)z = (xy \cdot u)z$.

Pro $t = ((x \cdot yz)z)z$ je $x = ((x \cdot yz)z)z$, $x = ((x \cdot yz)z)z = ((x \cdot ((y \cdot yz)z)z)z)z = (xy \cdot z)z$, $xu \cdot y = ((xu \cdot y)y \cdot z)z = xz \cdot z$, $xu \cdot y = xz \cdot z = xt \cdot v$, $x = ((x \cdot yz)z)z = (xy \cdot u)z$, což řeší i případ $t = ((x \cdot yz)u)u$.

Pro $t = (xx \cdot xy)z$ je $x = (xx \cdot xy)z$, $xx = ((xx \cdot xx) \cdot (xx)y)z = xz$, $xz = xx = xy$, $x = (xx \cdot xy)z = (xx \cdot y)z = (xu \cdot y)z$, což řeší i případy $t = (xx \cdot yz)u$, $t = (xy \cdot xz)u$, $t = (xy \cdot yz)u$ a $t = (xy \cdot zu)v$.

Pro $t = (xx \cdot yx)z$ je $x = (xx \cdot yx)z$, $xx = ((xx \cdot xx) \cdot y(xx))z = xz$, $xz = xx = xy$, $x = (xx \cdot yx)z = (xu \cdot yx)z = (xu \cdot y)z$, což řeší i případy $t = (xy \cdot zx)u$ a $t = (xy \cdot zy)u$.

Pro $t = (xx \cdot yy)z$ je $x = (xx \cdot yy)z$, $xx = ((xx \cdot xx) \cdot yy)z = xz$, $xz = xx = xy$, $x = (xx \cdot yy)z = (xy \cdot yy)z = (xy \cdot u)z$.

Pro $t = (xx \cdot yz)z$ je $x = (xx \cdot yz)z$, $x = (xx \cdot yz)z = (xx \cdot (yy \cdot yz)z)z = (xx \cdot y)z$, $xx = ((xx \cdot xx)y)z = xz$, $xy = xx = xz$, $x = (xx \cdot yz)z = (xu \cdot yz)z = (xu \cdot y)z$.

Pro $t = (xy \cdot xx)z$ je $x = (xy \cdot xx)z$, $xu = ((xy \cdot xx)z)u = ((xy \cdot xx)(xy \cdot xy))u = xy$, $x = (xy \cdot xx)z = (xy \cdot u)z$.

Pro $t = (xy \cdot xy)z$ je $x = (xy \cdot xy)z$, $xu = ((xu)y \cdot (xu)y)z = ((xu \cdot xu)(xu \cdot xu))z = xz$, $x = (xy \cdot xy)z = (xy \cdot u)z$.

Pro $t = (xy \cdot xz)z$ je $x = (xy \cdot xz)z$, $xu = ((xu)y \cdot (xu)z)z = ((xu)(x((xu)z)) \cdot (xu)z)z = xz$, $x = (xy \cdot xz)z = (xy \cdot u)z$.

Pro $t = (xy \cdot yx)z$ je $x = (xy \cdot yx)z$, $xu = ((xy \cdot yx)z)u = ((xy \cdot yx)(yx \cdot xy))u = xy$, $x = (xy \cdot yx)z = (xy \cdot u)z$.

Pro $t = (xy \cdot yy)z$ je $x = (xy \cdot yy)z$, $xy \cdot yy = (((xy \cdot yy)y) \cdot yy)z = (x \cdot yy)z$, $x = (xy \cdot yy)z = ((x \cdot yy)u)z$, $x \cdot yy = (((x \cdot yy) \cdot yy)u)z = xz$, $x = ((x \cdot yy)u)z = (xy \cdot u)z$.

Pro $t = (xy \cdot zx)y$ je $x = (xy \cdot zx)y$, $x = (xy \cdot zx)y = (xy \cdot ((zx \cdot zz)x))y = (xy \cdot z)y$, $xz = ((xz \cdot y)z)y = xy$, $x = (xy \cdot z)y = (xy \cdot z)u$, což řeší i případ

$t = (xy \cdot zu)y$.

Pro $t = (xy \cdot zz)z$ je $x = (xy \cdot zz)z$, $xu = ((xu)y \cdot zz)z = ((xu)(zz \cdot zz) \cdot zz)z = xz$, $x = (xy \cdot zz)z = (xy \cdot u)z$, což řeší i případy $t = (xy \cdot zz)u$, $t = (xy \cdot zu)z$ a $t = (xy \cdot zu)u$.

Pro $t = (xx \cdot x) \cdot yz$ je $x = (xx \cdot x) \cdot yz$, $x = (xx \cdot x) \cdot yz = (xx \cdot x) \cdot (yy \cdot y)(yz) = (xx \cdot x)y$, $xx \cdot x = ((xx \cdot x)(xx \cdot x) \cdot (xx \cdot x))y = (x(xx \cdot x))y$, $x(xx \cdot x) = ((x(xx \cdot x))(x(xx \cdot x)) \cdot (x(xx \cdot x)))y = ((xx \cdot x) \cdot (x(xx \cdot x)))y = xy$, $xy = x(xx \cdot x) = xz$, $x = (xx \cdot x) \cdot yz = (xy \cdot x) \cdot yz = (xy \cdot z) \cdot yz = (xy \cdot z) \cdot u$.

Pro $t = (xx \cdot y) \cdot zz$ je $x = (xx \cdot y) \cdot zz$, $x \cdot uu = ((xx \cdot y) \cdot zz) \cdot uu = ((xx \cdot xx) \cdot zz) \cdot uu = xx$, $x = (xx \cdot y) \cdot zz = (xx \cdot y)(z \cdot uu) = (xx \cdot y)((zz \cdot y) \cdot uu) = (xx \cdot y)z$, $xu = ((xx \cdot y)z)u = ((xx \cdot xx)z)u = xx$, $xu = xx = xv$, $x = (xx \cdot y) \cdot zz = (xy \cdot y) \cdot zz = (xy \cdot z) \cdot zz = (xy \cdot z)u$, což řeší i případ $t = (xx \cdot y) \cdot zu$.

Pro $t = (xy \cdot x) \cdot zy$ je $x = (xy \cdot x) \cdot zy$, $yx = ((yx)y \cdot (yx)) \cdot zy = y \cdot zy$, $yx = y \cdot zy = yz$, $x = (xy \cdot x) \cdot zy = (xy \cdot x) \cdot zy = (xy \cdot x)u = (xy \cdot z)u$, což řeší i případ $t = (xy \cdot x) \cdot zu$.

Pro $t = (xy \cdot y) \cdot zy$ je $x = (xy \cdot y) \cdot zy$, $x = (xy \cdot y) \cdot zy = (x(uy) \cdot (uy)) \cdot (zy \cdot y)(uy) = (x(uy) \cdot (uy)) \cdot z = (x((yy \cdot y) \cdot zy) \cdot ((yy \cdot y) \cdot zy)) \cdot z = (xy \cdot y)z$, $xy = ((xy)y \cdot y)z = xz$, $x = (xy \cdot y)z = (xy \cdot u)z$, což řeší i případy $t = (xy \cdot y) \cdot zu$, $t = (xy \cdot z) \cdot uy$, $t = (xy \cdot z) \cdot uz$ a $t = (xy \cdot z) \cdot uv$.

Pro $t = (xy \cdot z) \cdot xy$ je $x = (xy \cdot z) \cdot xy$, $xu \cdot v = (((xu \cdot v)y)z)((xu \cdot v)y) = (((xu \cdot v) \cdot xu)z)((xu \cdot v) \cdot xu) = xz \cdot x$, $xu \cdot v = xz \cdot x = xy \cdot z$, $x = (xy \cdot z) \cdot xy = (xy \cdot z)u$, což řeší i případ $t = (xy \cdot z) \cdot xu$.

Pro $t = (xy \cdot z) \cdot yy$ je $x = (xy \cdot z) \cdot yy$, $xt = ((xt)y \cdot z) \cdot yy = ((xt)y \cdot tt) \cdot yy = x \cdot yy$, $x = (xy \cdot z) \cdot yy = (xy \cdot z)u$, což řeší i případy $t = (xy \cdot z) \cdot yu$ a $t = (xy \cdot z) \cdot uu$.

Pro $t = (xy \cdot z) \cdot zz$ je $x = (xy \cdot z) \cdot zz$, $xu = ((xu \cdot y)z) \cdot zz = ((xu \cdot y) \cdot yy)(yy \cdot yy) = x(yy \cdot yy)$, $xu = x(yy \cdot yy) = xz$, $x = (xy \cdot z) \cdot zz = (xy \cdot z)u$, což řeší i případ $t = (xy \cdot z) \cdot zu$. $\square$

Věta 3.5. *Nechť t je jeden z termů $((xx \cdot x)y)z$, $((xx \cdot y)z)u$, $((xy \cdot x)z)u$, $((xy \cdot y)z)u$, $((xy \cdot z)u)v$, $((xx \cdot y)x)z$, $((xy \cdot z)x)u$, $((xy \cdot z)y)u$, $((xx \cdot y)y)z$, $((xx \cdot y)z)y$, $((xx \cdot y)z)z$, $((xy \cdot x)y)z$, $((xy \cdot x)z)y$, $((xy \cdot z)u)y$, $((xy \cdot y)x)z$, $((xy \cdot y)y)z$, $((xy \cdot z)z)z$, $((xy \cdot z)z)u$, $((xy \cdot z)u)z$, $((xy \cdot z)u)u$, $((xy \cdot z)y)y$,*

$((xy \cdot y)z)y$, $((xy \cdot z)x)z$. Potom varieta určená rovností $x = t$ je rovna varietě určené rovností $x = ((xy \cdot z)u)v$.

Důkaz. Postupujeme obdobně jako u předchozích vět, dokazujeme, že z $x = t$ plyne $x = ((xy \cdot z)u)v$.

Pro $t = ((xx{\cdot}x)y)z$ je $x = ((xx{\cdot}x)y)z$, $xx{\cdot}x = (((xx{\cdot}x)(xx{\cdot}x){\cdot}(xx{\cdot}x))y)z = xy \cdot z$, $x = ((xx \cdot x)y)z = ((xu \cdot v)y)z$, což řeší i případy $t = ((xx \cdot y)z)u$, $t = ((xy \cdot x)z)u$, $t = ((xy \cdot y)z)u$ a $t = ((xy \cdot z)u)v$.

Pro $t = ((xx \cdot y)x)z$ je $x = ((xx \cdot y)x)z$, $xx = (((xx \cdot xx) \cdot y) \cdot xx)z = (((xx \cdot xx)x) \cdot xx)z = xz$, $xz = xx = xu$, $x = ((xx \cdot y)x)z = ((xu \cdot y)x)z = ((xu \cdot y)v)z$, což řeší i případy $t = ((xy \cdot z)x)u$ a $t = ((xy \cdot z)y)u$.

Pro $t = ((xx \cdot y)y)z$ je $x = ((xx \cdot y)y)z$, $((xx \cdot y)y) = ((((xx \cdot y)y)((xx \cdot y)y) \cdot y)y)z = (xy \cdot y)z$, $x = ((xx \cdot y)y)z = ((xy \cdot y)u)z$.

Pro $t = ((xx \cdot y)z)y$ je $x = ((xx \cdot y)z)y$, $xz = (((xx \cdot y)z)y)z = (((xx \cdot xx)z) \cdot xx)z = xx$, $xz = xx = xy$, $x = ((xx \cdot y)z)y = ((xu \cdot y)z)y = ((xu \cdot v)z)y$.

Pro $t = ((xx \cdot y)z)z$ je $x = ((xx \cdot y)z)z$, $xx = (((xx \cdot xx) \cdot y)z)z = (((xx \cdot xx) \cdot y)y)y = xy$, $xy = xx = xz$, $x = ((xx \cdot y)z)z = ((xu \cdot y)z)z = ((xu \cdot y)v)z$.

Pro $t = ((xy \cdot x)y)z$ je $x = ((xy \cdot x)y)z$, $(xy \cdot x) = (((xy \cdot x)y \cdot (xy \cdot x))y)z = xy \cdot z$, $xy \cdot z = xy \cdot x = xy \cdot u$, $x = ((xy \cdot x)y)z = ((xy \cdot u)y)z = ((xy \cdot u)v)z$.

Pro $t = ((xy \cdot x)z)y$ je $x = ((xy \cdot x)z)y$, $yz = (((yz \cdot y) \cdot yz)z)y = yy$, $yz = yy = yx$, $x = ((xy \cdot x)z)y = ((xy \cdot u)z)y = ((xy \cdot u)z)v$, což řeší i případ $t = ((xy \cdot z)u)y$.

Pro $t = ((xy \cdot y)x)z$ je $x = ((xy \cdot y)x)z$, $x = ((xy \cdot y)x)z$, $yy = (((yy)y \cdot y) \cdot yy)z = yz$, $xy = xx = xz$, $x = ((xy \cdot y)x)z = ((xy \cdot u)x)z = ((xy \cdot u)v)z$.

Pro $t = ((xy \cdot y)y)z$ je $x = ((xy \cdot y)y)z$, $xy = (((xy)y \cdot y)y)z = xz$, $x = ((xy \cdot y)y)z = ((xy \cdot u)y)z = ((xy \cdot u)v)z$.

Pro $t = ((xy \cdot z)z)z$ je $x = ((xy \cdot z)z)z$, $xz = (((xy \cdot z)z)z)z = xy$, $x = ((xy \cdot z)z)z = ((xy \cdot z)u)z = ((xy \cdot z)u)v$, což řeší i případy $t = ((xy \cdot z)z)u$, $t = ((xy \cdot z)u)z$ a $t = ((xy \cdot z)u)u$.

Pro $t = ((xy \cdot z)y)y$ je $x = ((xy \cdot z)y)y$, $(xy \cdot z)y = ((((xy \cdot z)y)y \cdot z)y)y = (xz \cdot y)y$, $x = ((xy \cdot z)y)y = ((xz \cdot y)y)y$, $x = ((xy \cdot z)z)z$ a $x = ((xy \cdot z)z)z$ už jsme rozřešili.

Pro $t = ((xy \cdot y)z)y$ je $x = ((xy \cdot y)z)y$, $(xy \cdot y)z = ((((xy \cdot y)z)y \cdot y)z)y = (xy \cdot z)y$, $x = ((xy \cdot y)z)y = ((xy \cdot z)y)y$ a $x = ((xy \cdot z)y)y$ jsme už rozřešili.

Pro $t = ((xy \cdot z)x)z$ je $x = ((xy \cdot z)x)z$, $xx = (((xy \cdot z)x)z)x = (((xy \cdot xy)x) \cdot xy)x = xy$, $xy = xx = xz$, $x = ((xy \cdot z)x)z = ((xy \cdot z)u)z = ((xy \cdot z)u)v$. $\square$

V následujících dvou tvrzeních uvedeme popis volných algeber (případně přepisujících systémů) pro několik variet z [3], důkazy vynecháme, lze je nalézt tamtéž. Poté ukážeme, že některé z námi zkoumaných rovností určují právě tyto variety.

Lemma 3.6. *Buď V varieta určená rovností $x = x \cdot xy$. Potom $\{x \cdot xy \to x, xx \to x\}$ je přepisující systém pro V.*

Buď V varieta určená rovností $x = x \cdot yy$. Potom $\{x \cdot yy \to x\}$ je přepisující systém pro V.

Buď V varieta určená rovností $x = xy \cdot y$. Potom $\{xy \cdot y \to x\}$ je přepisující systém pro V.

Buď V varieta určená rovností $x = xx \cdot xy$. Potom $\{xx \cdot xy \to x, x(xx \cdot y) \to xx\}$ je přepisující systém pro V.

Buď V varieta určená rovností $x = x(x \cdot xy)$. Potom $\{x(x \cdot xy) \to x, xx \to x\}$ je přepisující systém pro V.

Buď V varieta určená rovností $x = x(xx \cdot y)$. Potom $\{x(xx \cdot y) \to x, x \cdot xx \to x\}$ je přepisující systém pro V.

Buď V varieta určená rovností $x = x(xy \cdot z)$. Potom $\{x(xy \cdot z) \to x, x \cdot xy \to x, xx \to x\}$ je přepisující systém pro V.

Buď V varieta určená rovností $x = x(yx \cdot z)$. Označme $M = \{(\dots(xz_1 \cdot z_2)\dots)z_n) \cdot (\dots(yx \cdot u_1)\dots)u_m); n, m \geq 0\} \cup \{(\dots(yx \cdot u_1)\dots)u_m) \cdot (\dots(xz_1 \cdot z_2)\dots)z_n); n, m \geq 0\}$. Pak $\{t_1t_2 \to t_1; t_1t_2 \in M\}$ je přepisující systém pro V.

Buď V varieta určená rovností $x = x(yy \cdot z)$. Označme $M = \{x(\dots(yy \cdot z_1)\dots)z_n); n \geq 0\}$. Potom $\{t_1t_2 \to t_1; t_1t_2 \in M\}$ je přepisující systém pro V.

Buď V varieta určená rovností $x = x(yz \cdot y)$. Označme $M = \{x(\dots(yz \cdot y)z_1)\dots)z_n); n \geq 0\} \cup \{x(\dots(yy \cdot z_1)\dots)z_n); n \geq 0\}$. Potom $\{t_1t_2 \to t_1; t_1t_2 \in M\}$ je přepisující systém pro V.

Lemma 3.7. *Rovnosti $x = xy \cdot yz$ a $x = (x \cdot yz)y$ určují tutéž varietu V. Označme A množinu všech termů tvaru $(\dots(xu_1 \cdot u_2)\dots)u_n$, kde $x \in X$, $n \geq 0$, každé u_i je tvaru x nebo xx pro nějaké $x \in X$ a pro $1 \leq i < n$ je $u_i \neq u_{i+1}u_{i+1}$*

a $u_{i+1} \neq u_i u_i$. *Na* A *definujme binární operaci* $\circ$. *Pro* $a, b \in A$, *kde* $b = (\dots(xu_1 \cdot u_2)\dots)u_n$, *definujme*

(1) $a \circ b = ax$, *je-li* n *sudé a neexistuje term* p *takový, že* $a = p \cdot xx$;

(2) $a \circ b = ap$, *je-li* n *sudé a existuje term* p *takový, že* $a = p \cdot xx$;

(3) $a \circ b = a \cdot xx$, *je-li* n *liché a neexistuje-li term* p *takový, že* $a = px$;

(4) $a \circ b = ap$, *je-li* n *liché a existuje-li term* p *takový, že* $a = px$.

Potom je grupoid $A(\circ)$ *volný ve* V.

Nyní již můžeme vyslovit větu, k níž jsme směřovali.

Věta 3.8. *Buď* V *varieta určená rovností* $x = x \cdot xy$. *Potom je* V *určena i každou z rovností* $x = x(x(yz \cdot z))$, $x = x(x(yz \cdot u))$, $x = x(x(y \cdot yz))$, $x = x(x(y \cdot zz))$, $x = x(x(y \cdot zu))$.

Buď V *varieta určená rovností* $x = x \cdot yy$. *Potom je* V *určena i každou z rovností* $x = x(yy \cdot zz)$, $x = x(yz \cdot yz)$, $x = x(y(y \cdot zz))$.

Buď V *varieta určená rovností* $x = xy \cdot y$. *Potom je* V *určena i rovností* $x = (x \cdot yz) \cdot yz$.

Buď V *varieta určená rovností* $x = xx \cdot xy$. *Potom je* V *určena i rovností* $x = xx \cdot (x \cdot yz)$.

Buď V *varieta určená rovností* $x = x(x \cdot xy)$. *Potom je* V *určena i rovností* $x = x(x(x \cdot yz))$.

Buď V *varieta určená rovností* $x = x(xx \cdot y)$. *Potom je* V *určena i rovností* $x = x(xx \cdot yz)$.

Buď V *varieta určená rovností* $x = x(xy \cdot z)$. *Potom je* V *určena i každou z rovností* $x = x((x \cdot yz)u)$, $x = x(xy \cdot zz)$, $x = x(xy \cdot zu)$.

Buď V *varieta určená rovností* $x = x(yx \cdot z)$. *Potom je* V *určena i každou z rovností* $x = x((yz \cdot x)u)$, $x = x((yx \cdot z)u)$, $x = x(yx \cdot zu)$.

Buď V *varieta určená rovností* $x = x(yy \cdot z)$. *Potom je* V *určena i každou z rovností* $x = x((yy \cdot z)u)$, $x = x(yy \cdot zy)$, $x = x(yy \cdot zu)$.

Buď V *varieta určená rovností* $x = x(yz \cdot y)$. *Potom je* V *určena i každou z rovností* $x = x((yz \cdot y)u)$, $x = x((y \cdot zu)y)$.

Buď V *varieta určená rovností* $x = xy \cdot yz$ *(případně* $x = (x \cdot yz)y$*). Potom je* V *určena i každou z rovností* $x = xy \cdot (y \cdot zu)$, $x = (x(y \cdot zu))y$.

Důkaz. To, že z kratších rovností v tvrzení věty dostaneme příslušné delší rovnosti, je snadno k nahlédnutí (vhodnou substitucí, opakovaným použitím rovnosti či z popisu přepisujícího systému), dokážeme tedy jen opačná odvození.

Pro rovnost $x = x \cdot xy$ máme postupně: $x = x(x(yz \cdot z))$, $x = x(x(yz \cdot z)) = x(x(y(y(yz \cdot z)) \cdot (y(yz \cdot z)))) = x(x(y(y(yz \cdot z)))) = x \cdot xy$; $x = x(x(yz \cdot u))$, $x = x(x(yz \cdot u)) = x(x(y(y(yz \cdot u)) \cdot (y(yz \cdot u)))) = x(x(y(y(yz \cdot u)))) = x \cdot xy$; $x = x(x(y \cdot yz))$, $x = x(x(y \cdot yz)) = x(x(y \cdot y(y \cdot yz))) = x \cdot xy$; $x = x(x(y \cdot zz))$, $x = x(x(y \cdot zz)) = x(x(x \cdot (zz \cdot zz))) = xx$, $x = x(x(y \cdot zz)) = x(x(yz)) = x(x(y(y(y \cdot zz)))) = x \cdot xy$; $x = x(x(y \cdot zu))$, $x = x(x(y \cdot zu)) = x(x(y \cdot y(y \cdot zu))) = x \cdot xy$.

Pro rovnost $x = x \cdot yy$ máme postupně: $x = x(yy \cdot zz)$, $x = x(yy \cdot zz) = x(yy \cdot (zz \cdot zz)) = x \cdot yy$; $x = x(yz \cdot yz)$, $x = x(yz \cdot yz) = x(y(yz \cdot yz) \cdot y(yz \cdot yz)) = x \cdot yy$; $x = x(y(y \cdot zz))$, $x = x(y(y \cdot zz)) = x(yy \cdot (yy \cdot (yy \cdot yy))) = x \cdot yy$.

Pro rovnost $x = xy \cdot y$ je $x = (x \cdot yz) \cdot yz$, $x = (x \cdot yz) \cdot yz = (x \cdot (y \cdot yz)(yz)) \cdot (y \cdot yz)(yz) = xy \cdot y$.

Pro rovnost $x = xx \cdot xy$ je $x = xx \cdot (x \cdot yz)$, $x = xx \cdot (x \cdot yz) = xx \cdot (x \cdot (yy)(y \cdot yz)) = xx \cdot xy$.

Pro rovnost $x = x(x \cdot xy)$ je $x = x(x(x \cdot yz))$, $x = x(x(x \cdot yz)) = x(x(x \cdot y(y(y \cdot yz)))) = x(x \cdot xy)$.

Pro rovnost $x = x(xx \cdot y)$ je $x = x(xx \cdot yz)$, $x = x(xx \cdot yz) = x(xx \cdot y(yy \cdot yz)) = x(xx \cdot y)$.

Pro rovnost $x = x(xy \cdot z)$ máme postupně: $x = x((x \cdot yz)u)$, $x = x((x \cdot yz)u) = x((x \cdot y((y \cdot yz)u))u) = x(xy \cdot u)$; $x = x(xy \cdot zz)$, $x = x(xy \cdot zz) = x(xy \cdot ((xy \cdot xy)(xy \cdot xy))) = x \cdot xy$, $x = x \cdot xy = x \cdot x(xy) = xx$, $x = x(xy \cdot zz) = x(xy \cdot z)$; $x = x(xy \cdot zu)$, $x = x(xy \cdot zu) = x(xy \cdot z(zy \cdot zu)) = x(xy \cdot z)$.

Pro rovnost $x = x(yx \cdot z)$ máme postupně: $x = x((yz \cdot x)u)$, $x = x((yz \cdot x)u) = x((y((yz \cdot y)u) \cdot x)u) = x(yx \cdot u)$; $x = x((yx \cdot z)u)$, $x = x((yx \cdot z)u) = x((yx \cdot z)((y(yx \cdot z) \cdot z)u)) = x(yx \cdot z)$; $x = x(yx \cdot zu)$, $x = x(yx \cdot zu) = x(yx \cdot z(yz \cdot zu)) = x(yx \cdot z)$.

Pro rovnost $x = x(yy \cdot z)$ máme postupně: $x = x((yy \cdot z)u)$, $x = x((yy \cdot z)u) = x((yy \cdot z)((yy \cdot z)u)) = x(yy \cdot z)$; $x = x(yy \cdot zy)$, $x = x(yy \cdot zy) =$

$x((yy\cdot zy)(yy\cdot zy)\cdot u(yy\cdot zy)) = x((yy\cdot zy)u)$, $x = x((yy\cdot zy)u) = x((yy\cdot(yy\cdot zy)y)u) = x(yy\cdot u)$; $x = x(yy\cdot zu)$, $x = x(yy\cdot zu) = x(yy\cdot z(yy\cdot zu)) = x(yy\cdot z)$.

Pro rovnost $x = x(yz\cdot y)$ máme postupně: $x = x((yz\cdot y)u)$, $x = x((yz\cdot y)u) = x((yz\cdot y)((yz\cdot y)u)) = x(yz\cdot y)$; $x = x((y\cdot zu)y)$, $x = x((y\cdot zu)y) = x((y\cdot z((y\cdot zu)y))y) = x(yz\cdot y)$.

Pro rovnost $x = xy\cdot yz$ (případně $x = (x\cdot yz)y$) máme postupně: $x = xy\cdot(y\cdot zu)$, $x = xy\cdot(y\cdot zu) = xy\cdot(y\cdot(zz)(z\cdot zu)) = xy\cdot yz$; $x = (x(y\cdot zu))y$, $x = (x(y\cdot zu))y = (x(y\cdot(z(u\cdot zu))u))y = (x\cdot yz)y$. □

Nyní vyslovíme a dokážeme větu, která na několika nerovnostech ukáže použití metody přepisujících systémů, pro vybrané rovnosti generující varietu V najdeme přepisující systém J pro V a dle dokázané věty je grupoid $A_J(\circ)$ spojený s J V-volný nad X.

Věta 3.9. *Nechť V je varieta určená rovností $x = xx\cdot(yz\cdot y)$. Potom $\{xx\cdot(yz\cdot y)\to x, xx\cdot(y\cdot yy)\to x\}$ je přepisující systém pro V.*

Nechť V je varieta určená rovností $x = x((xx\cdot y)z)$. Potom $\{x((xx\cdot y)z)\to x, x(xx\cdot y)\to x, x\cdot xx\to x\}$ je přepisující systém pro V.

Nechť V je varieta určená rovností $x = x((xy\cdot z)u)$. Potom $\{x((xy\cdot z)u)\to x, x(xy\cdot z)\to x, x\cdot xy\to x, xx\to x\}$ je přepisující systém pro V.

Nechť V je varieta určená rovností $x = x(xy\cdot xz)$. Potom $\{x(xy\cdot xz)\to x, x(xy\cdot x)\to x, x(x\cdot xy)\to x, x\cdot xx\to x\}$ je přepisující systém pro V.

Nechť V je varieta určená rovností $x = x(yy\cdot yz)$. Potom $\{x(yy\cdot yz)\to x, x(yy\cdot y)\to x\}$ je přepisující systém pro V.

Nechť V je varieta určená rovností $x = x((yz\cdot u)y)$. Definujme množinu M jako $M = \{x(\ldots(yz\cdot u)y)z_1)\ldots)z_n); n\geq 0\}\cup\{x(\ldots(yz\cdot y)z_1)\ldots)z_n); n\geq 0\}\cup\{x(\ldots(yy\cdot z_1)\ldots)z_n); n\geq 0\}$. Potom $J = \{t_1t_2\to t_1; t_1t_2\in M\}$ je přepisující systém pro V.

Důkaz. Mějme V určenou rovností $x = xx\cdot(yz\cdot y)$. Zkusme za přepisující systém volit $J = \{xx\cdot(yz\cdot y)\to x\}$, nosnou množinu vezměme jako v definici přepisujícího systému a stejně tak binární operaci $\circ$. Podmínky (1) až (4) jsou zřejmě splněny, jde nám tedy o ověření podmínky (5), ptáme se, zda grupoid $A(\circ)$ patří do V, tedy zda platí

$$x = (x\circ x)\circ((y\circ z)\circ y)$$

za předpokladu $x, y, z \in A_J$. Problém může nastat ve chvíli, kdy $a, b \in A_J$ a $ab \notin A_J$, kde ab je vlastní podterm pravé strany ověřované rovnosti. Očíslujme si v zápisu pravé strany ověřované rovnosti binární operaci přirozenými čísly, tedy např. mezi x a x je $\circ_1$, mezi y a z je $\circ_3$.

Může nastat problém v $\circ_1$? Muselo by být první x rovno XX a zároveň druhé x rovno $YZ \cdot Y$. Ovšem to by muselo být zároveň $X = YZ$ a $X = Y$, což nemůže nastat, tedy xx vždy patří do A_J. Pokud nastane problém v $\circ_3$, musí být y rovno $YZ{\cdot}Y$ a neboť musí být $yz = XX$, dostáváme $z = X = y = YZ{\cdot}Y$, celkově dostáváme $xx \circ ((YZ \cdot Y)(YZ \cdot Y) \cdot (YZ \cdot Y)) = xx \circ (YZ \cdot Y) = x$, tedy problém nenastane. Operaci $\circ_2$ neřešíme, zajímají nás jenom součiny, které jsou vlastními podtermy. Zbývá tedy možnost, že problém nastane v $\circ_3$. Potom $y = XX$, $z = YZ \cdot Y$ a celkově máme $xx \circ ((XX \circ (YZ \cdot Y)) \circ XX) = xx \circ (X \circ XX)$. Aby $A(\circ)$ padl do V, musí tedy platit rovnost $x = xx \circ (y \circ yy)$.

Přidejme ji do J, dostáváme nového kandidáta $J = \{xx \cdot (yz \cdot y) \to x, xx \cdot (y{\cdot}yy) \to x\}$. Podmínky (1) až (4) jsou opět platné (podmínka (1) proto, že levé strany obou přepisujících rovností jsou neslučitelné, nemůže totiž platit $yz{\cdot}y = Y \cdot YY$, ostatní jsou zřejmé). Nyní opět ověřujeme první rovnost, problém s výskytem první rovnosti v nějakém podtermu už jsme vyřešili, výskyt druhé rovnosti nám pro $\circ_1$ a $\circ_3$ dává stejnou úvahu jako předchozí odstavec, problém u $\circ_2$ nastat nemůže, zbývá opět $\circ_4$, tedy případ, kdy v termu $xx \circ (yz \circ y)$ dostaneme podterm $(yz \circ y)$ ve tvaru $XX \circ (Y \cdot YY)$. Z toho dostaneme $y = X$, $z = X$, $y = Y \cdot YY$, tedy $y = z = X = Y \cdot YY$, celkově můžeme upravit $xx \circ ((Y \cdot YY) \cdot (Y \cdot YY)(Y \cdot YY)) = xx \circ (Y \cdot YY) = x$.

Zbývá ověřit, zda $x = (x \circ x) \circ (y \circ (y \circ y))$. Ze stejného důvodu jako v předchozích odstavcích nenastane problém u $\circ_1$ a $\circ_2$ neřešíme. U $\circ_3$ problém nastat nemůže, pro $y \circ yy$ tvaru $XX \cdot (YZ \cdot Y)$ máme $y = XX$, $y = YZ$, $y = Y$ a $YZ = Y$ není možné, u $y \circ yy$ tvaru $XX \cdot (Y \cdot YY)$ by pak bylo $y = XX$, $y = Y$, $y = YY$ a $Y = YY$ není možné. Zbývá možnost problému u $\circ_4$, tedy u výrazu $y \circ y$. v prvním případě by muselo být $y = XX$ a zároveň $y = YZ \cdot Y$, tedy $YZ = X = Y$, v druhém případě pak $y = XX$, $y = Y \cdot YY$, tedy $Y = X = YY$. Vidíme, že J splňuje podmínku (5) a je přepisujícím systémem pro V.

Nechť nyní je V určená rovností $x = x((xx \cdot y)z)$. Opět začneme s kandidátem $\{x((xx \cdot y)z) \to x\}$, ověřujeme, zda $x = x \circ (((x \circ x) \circ y) \circ z)$. Operaci $\circ_1$ neřešíme, problém u $\circ_2$ nemůže nastat (není možné zároveň $x = X$ a $x = (XX \cdot Y)Z$), problém u $\circ_3$ i $\circ_4$ nás nutí do J přidat rovnost $x(xx \cdot y) \to x$. Tím se na ověření původní rovnosti nic nemění, musíme ověřit ještě $x = x \circ ((x \circ x) \circ y)$, kde si problém u $\circ_3$ vynutí ještě přidání $x \cdot xx \to x$. Nyní již platí podmínky (1) až (5) a $J = \{x((xx \cdot y)z) \to x, x(xx \cdot y) \to x, x \cdot xx \to x\}$ je přepisující systém pro V.

Buď V určená rovností $x = x((xy \cdot z)u)$, kandidátem buď $J = \{x((xy \cdot z)u) \to x\}$, ověřujeme $x = x \circ (((x \circ y) \circ z) \circ u)$. Operaci $\circ_1$ neřešíme, problém u kterékoliv následující operace si vynucuje přidat rovnost $x(xy \cdot z) \to x$. Obdobně při ověřování $x = x \circ ((x \circ y) \circ z)$ dojdeme k nutnosti přidat $x \cdot xy \to x$ a konečně při ověřování $x = x \circ (x \circ y)$ přidáme rovnost $xx \to x$. Celkově tak dostáváme $J = \{x(xy \cdot xz) \to x, x(xy \cdot x) \to x, x(x \cdot xy) \to x, x \cdot xx \to x\}$, kde J splňuje podmínky (1) až (5).

Volme teď za V varietu určenou rovností $x = x(xy \cdot xz)$, za J pak $\{x(xy \cdot xz) \to x\}$, ověřujeme $x = x \circ ((x \circ y) \circ (x \circ z))$. Operaci $\circ_1$ neřešíme a je snadno vidět, že u $\circ_3$ problém nastat nemůže. U $\circ_2$ a $\circ_4$ pak může nastat nezávisle na sobě a dostáváme tak do J pravidla $x(xy \cdot x) \to x, x(x \cdot xz) \to x, x \cdot xx \to x$ a není již těžké nahlédnout, že $J = \{x(xy \cdot xz) \to x, x(xy \cdot x) \to x, x(x \cdot xy) \to x, x \cdot xx \to x\}$ je přepisující systém pro V.

Na konec jsme si nechali příklad spočetného přepisujícího systému. Mějme tedy V určenou rovností $x = x((yz \cdot u)y)$, zaveďme si značení pro prvky M – $a_n = x(\ldots(yz \cdot u)y)z_1)\ldots)z_n)$, $b_n = x(\ldots(yz \cdot y)z_1)\ldots)z_n)$, $c_n = x(\ldots(yy \cdot z_1)\ldots)z_n)$. Tvrdíme, že $J = \{a_n \to x; n \geq 0\} \cup \{b_n \to x; n \geq 0\} \cup \{c_n \to x; n \geq 0\}$ je přepisující systém pro V. Začneme opět od $J = \{x((yz \cdot u)y) \to x\}$. Při ověřování platnosti $x = x \circ (((y \circ z) \circ u) \circ y)$ dostaneme pro $\circ_2$ i $\circ_3$ nutnost přidat $b_0 \to x$. Při ověřování $\circ_4$ a možném problému dostáváme $x \circ (((y \circ z) \circ u) \circ y) = x \circ (((((YZ \cdot U)Y) \circ z) \circ u) \circ ((YZ \cdot U)Y)) = x \circ (((((YZ \cdot U)Y) \circ z) \circ u))$, což se má rovnat x, musíme tedy do J přidat $a_2 \to x$. Dále při ověřování $x = a_2$ u poslední operace $\circ$ dostáváme vhodnou substitucí nutnost přidat do J $a_1 \to x$. Celkově je-li v J $a_i \to x$, musí tam být i $a_{i+2} \to x$ a je-li v J $a_{i+1} \to x$, musí tam být i $a_i \to x$. V J tedy musí být všechna $a_i \to x$ pro $i \geq 0$. Z rovnosti $x = a_i$ dostaneme vhodnou substitucí za u nutnost přidat $b_i \to x$

a vhodnou substitucí za z v rovnosti $x = b_i$ pak nutnost přidat $c_i \to x$. Zbývá ukázat, že nic dalšího už není třeba přidat. To už je ale jen snadné procházení všech možných typů substitucí, rovnost $x = X_i$, $X \in \{a, b, c\}$, $i \geq 0$ vždy přejde na nutnost platnosti rovnosti téhož typu ($x = X_i$). $\square$

Na závěr této kapitoly si ukažme ještě rozřešení jedné rovnosti pomocí reprezentativní množiny.

Věta 3.10. *Nechť V je varieta určená rovností $x = (x \cdot yy) \cdot zz$. Připomeňme, že pro term t je $L(t)$ proměnná, která je v termu t úplně vlevo. Buď M množina všech termů t nad X takových, že:*

(1) t neobsahuje podterm tvaru $(u \cdot vv) \cdot ww$;

(2) t neobsahuje podterm tvaru $u \cdot (vv \cdot ww)$;

(3) t neobsahuje podterm tvaru $u \cdot vv$, kde $v \neq L(u)$.

Pro $a, b \in M$ definujme binární operaci $\circ$ následovně:

(1) $a \circ b = t$, pokud je $a = t \cdot L(t)L(t)$ a b je buď uu nebo $uu \cdot L(u)L(u)$ pro nějaké termy t, u;

(2) $a \circ b = a \cdot L(a)L(a)$, pokud a není rovno $t \cdot L(t)L(t)$ pro žádný term t a b je rovno buď $uu \cdot L(u)L(u)$ nebo uu pro nějaký term u;

(3) $a \circ b = ab$ v ostatních případech.

Potom M je reprezentativní množina pro V a grupoid $M(\circ)$ je asociovaný s R a V (a tedy V-volný).

Důkaz. Nejprve ukážeme, že M je reprezentativní množina pro V. Podmínky definující M jsou voleny tak, že pokud $t \in M$, potom jistě do M padne i každý podterm M. Dále se nám bude hodit ukázat, že ve V platí $x \cdot yy = x \cdot zz$. To je ale snadné, máme $x = (x \cdot yy) \cdot zz$, $x \cdot yy = ((x \cdot yy) \cdot yy) \cdot zz = x \cdot zz$. Z toho také dostáváme $x \cdot yy = x \cdot (uu \cdot uu) = x \cdot (uu \cdot vv)$.

Mějme nyní libovolný term t, chceme k němu najít term u_t ležící v M. Definujme si množinu $P = \{P_1, P_2, P_3\}$ obsahující pravidla odpovídající podmínkám kladeným na množinu M:

P_1: term $(u \cdot vv) \cdot ww$ přepiš na u;

P_2: term $u \cdot (vv \cdot ww)$ přepiš na $u \cdot L(u)L(u)$;

P_3: term $u \cdot vv$ přepiš na $u \cdot L(u)L(u)$, je-li $v \neq L(u)$.

Jistě do M patří právě ty termy, na něž není možné aplikovat ani jedno pravidlo. Pokud se u přepíše aplikací P_i na v, potom zjevně ve V platí $u = v$. Definujme si orientovaný graf G: jeho vrcholy nechť jsou termy a orientovaná hrana z u do v vede právě tehdy, když v vznikne z u aplikací pravidla z P. Terminální vrcholy jsou právě prvky M. Ukážeme-li, že G je konvergentní, dostaneme, že M je reprezentativní množina. K tomu stačí ukázat, že G je konečně terminující a lokálně konfluentní.

Začněme první vlastností, chceme tedy ukázat, že vezmeme-li libovolný term t a začneme aplikovat pravidla P, po konečně mnoha krocích nutně dojdeme do terminálního vrcholu, tedy prvku M, na který se nedá aplikovat žádné pravidlo. Případy P_1 a P_2 jsou jasné, jejich aplikací se zkrátí délka termu, je je tedy možno aplikovat jen konečně mnohokrát. Případ P_3 je jen o něco málo těžší. Buď dojde také ke zkrácení délky termu, nebo jsme podterm $u \cdot xx$ nahradili podtermem $u \cdot L(u)L(u)$, kde $x \in X$, $x \neq L(u)$. Ovšem pravidlo P_3 je možno bez zkrácení délky termu aplikovat jen konečně mnohokrát, každou aplikací se sníží počet podtermů tvaru $u \cdot xx$, $x \in X$, $x \neq L(u)$, neboť aplikací tento počet zjevně o jedna snížíme a nemohli jsme ho na jiném místě zvýšit, neboť x a $L(u)$ jsou proměnné (není totiž možné, aby změnou $u \cdot xx$ na $u \cdot L(u)L(u)$ vzniknul nový podterm tvaru vhodného pro aplikaci P_2 obsahující původní nahrazovaný term a na druhou stranu v termu $u \cdot L(u)L(u)$ nenajdeme podterm vhodný pro aplikaci P_2, který se nevyskytoval už v $u \cdot xx$).

Celkově tedy dostáváme, že začneme-li libovolným termem t, potom každou aplikací pravidel buď snížíme délku termu, nebo v případě zachování délky snížíme počet podtermů jistého druhu. Neboť délka t je konečná a počet podtermů pro každý term určité délky také (tedy i podtermů speciálních vlastností), nutně po konečném počtu kroků dospějeme k termu, na který už není možné aplikovat žádné pravidlo z P. Tedy G je skutečně konečně terminující.

Zbývá lokální konfluence. Máme tedy term t, který přepíšeme aplikací jednoho pravidla z P na u, ale také jinou aplikací pravidla z P na term v. Chceme ukázat, že najdeme term w takový, že u i v se dají pomocí pravidel z P přepsat na w.

Označme t_u podterm t, který jsme nahradili při přepsání na u, a obdobně definujme t_v. Pokud t_u není podterm t_v a t_v není podterm t_u, není problém, prostě na u aplikujeme pravidlo použité k přepisu t na v a na v aplikujeme pravidlo použité k přepisu t na u, dostáváme tak stejný term w.

Problém může nastat v případě, kdy jeden z nahrazovaných termů je podtermem druhého, BÚNO t_v je podtermem t_u (nevylučujeme $t_u = t_v$). Nezbývá než postupně projít všechny možnosti, která pravidla jsme při přepisech aplikovali a jakým podtermem přesně t_v v t_u je. Budeme se zabývat jen podtermem t_u, neboť při přepisu se nic mimo podterm t_u neměnilo, tedy přepis t na u i na v je plně popsán přepisem termu t_u (a ve druhém případě jeho podtermu t_v).

Nejprve nechť jsme aplikovali na t_u P_1, tedy $t_u = (a \cdot bb) \cdot cc$ a přepsali jsme jej na a. Potom t_v může být jeden z podtermů a, b, c, bb, cc, $a \cdot bb$, $(a \cdot bb) \cdot cc$, přičemž u b a c je ještě (zdánlivě) nutno rozlišit, zda se jedná o první nebo druhý výskyt a to, že se přepsal jeden z termů a, b, c ve skutečnosti znamená, že se mohlo aplikovat pravidlo z P na vlastní podterm (což, jak uvidíme, není důležité). V ostatních případech jde o přepis celého termu, v opačném případě se jedná o jiný z jmenovaných případů.

Nechť t_v je podterm a. Potom se nám t_u přepíše na $(a' \cdot bb) \cdot cc$ (u' bude od tohoto místa dále značit term, vzniklý aplikací pravidla z P na podterm (možno i nevlastní) u. Ovšem potom je možno volit $w = a' - a$ i $(a' \cdot bb) \cdot cc$ lze přepsat na a'.

Nechť t_v je podterm jednoho z výskytů b nebo c. Přepisem t_v jsme tedy dostali jeden z termů $(a \cdot b'b) \cdot cc$, $(a \cdot bb') \cdot cc$, $(a \cdot bb) \cdot c'c$, $(a \cdot bb) \cdot cc'$. V prvních dvou případech se nabízí přepis na $(a \cdot b'b') \cdot cc$ a ve druhých dvou na $(a \cdot bb) \cdot c'c'$, oba tyto termy je poté možno přepsat na $w = a$.

Nyní buď $t_v = bb$. Zde už musíme rozlišit, jaké pravidlo jsme použili k přepisu t_v. V případě P_1 je $bb = t_v = (d \cdot ee) \cdot ff$ a výsledkem přepisu je d. Porovnáním dostáváme $bb = (d \cdot ee) \cdot ff$, $b = d \cdot ee$, $b = ff$, $ee = f = d$, tedy bb se přepsalo na ee. Potom se ale u přepsalo na $(a \cdot ee) \cdot cc$, což je možno přepsat na $w = a$. V případě použití P_2 je $bb = t_v = d \cdot (ee \cdot ff)$, $d = b = ee \cdot ff$, tedy t_u se přepsalo na $(a \cdot ((ee \cdot ff) \cdot L(e)L(e))) \cdot cc$ (je totiž $L(ee \cdot ff) = L(e)$), což je možno dále pomocí P_1 přepsat na $(a \cdot ee) \cdot cc$ a to pak na $w = a$. Konečně při použití P_3 je $bb = t_v = d \cdot ee$, $ee = b = d$, tedy t_u se přepsalo na $(a \cdot (ee \cdot L(e)L(e))) \cdot cc$, což přepíšeme na $(a \cdot L(a)L(a)) \cdot cc$ a to na $w = a$.

Další případ je $t_v = cc$. Term cc se nám přepisuje na stejné termy jako bb

v předchozím případě, můžeme použít již dokázané výsledky. V případě užití P_1 se t_u přepíše na $(a \cdot bb) \cdot ee$, což se přepíše na $w = a$. V případě P_2 se t_u přepíše na $(a \cdot bb) \cdot ((ee \cdot ff) \cdot L(e)L(e))$, což se užitím P_1 přepíše na $(a \cdot bb) \cdot ee$ a to na $w = a$. V případě P_3 se t_u přepíše na $(a \cdot bb) \cdot (ee \cdot L(e)L(e))$, což se přepíše na $(a \cdot bb) \cdot L(a)L(a)$ a to na $w = a$.

Nechť nyní $t_v = a \cdot bb$. Pro P_1 máme $a \cdot bb = (d \cdot ee) \cdot ff$, $a = d \cdot ee$, $b = f$ a t_u se tak přepsalo na $d \cdot cc$. Potom za w zvolíme $d \cdot L(d)L(d)$ – na w se přepíše nejen $d \cdot cc$, ale také $a = d \cdot ee$. Pro P_2 je $a \cdot bb = t_v = d \cdot (ee \cdot ff)$, $a = d$ t_u se tak přepíše na $(d \cdot L(d)L(d)) \cdot cc$, což se dá přepsat na $w = d = a$. V případě P_3 se t_u přepíše na $(a \cdot L(a)L(a)) \cdot cc$ a to na $w = a$.

Zbývá případ $t_u = t_v$ s tím, že jsme v obou případech aplikovali jiné pravidlo. Nechť jsme tedy na t_v použili P_2. Potom je $(a \cdot bb) \cdot cc = t_v = d \cdot (ee \cdot ff)$, $d = a \cdot bb$, $ee = c = ff$ a t_u se přepsalo na $d \cdot L(d)L(d) = (a \cdot bb) \cdot L(a)L(a)$, což je možno přepsat na $w = a$. Pro aplikaci P_3 máme $(a \cdot bb) \cdot cc = d \cdot ee$, $d = a \cdot bb$, $c = e$, t_u se přepsalo na $d \cdot L(d)L(d) = (a \cdot bb) \cdot L(a)L(a)$, což je možno přepsat na $w = a$. Vyřešme na tomto místě ještě případ kdy na $t_u = t_v$ použijeme současně pravidla P_2 a P_3, což nám dovolí se dále omezit na případy, kdy t_v je vlastním podtermem t_u. Tedy $t_u = a \cdot (bb \cdot cc)$ se přepíše na $a \cdot L(a)L(a)$ a zároveň $t_u = t_v = d \cdot ee$ se přepíše na $d \cdot L(d)L(d)$. Potom je ale $a = d$ a obě pravidla přepsala t_u na tentýž term.

Tím je vyřešen případ, kdy jsme na t_u aplikovali P_1, pokračujme s případem aplikace P_2 na t_u. Je tedy $t_u = a \cdot (bb \cdot cc)$ a t_u jsme přepsali na $a \cdot L(a)L(a)$. Případy, kdy t_v je podtermem a, b nebo c, se vyřeší stejně jako v případě, kdy aplikujeme na t_u P_1. Zbývají tedy možnosti, kdy t_v je jeden z termů bb, cc, $bb \cdot cc$.

Nechť $t_v = bb$, opět využijeme již odvozených výsledků. Aplikací P_1 na t_v se t_u přepíše na $a \cdot (ee \cdot cc)$, což se přepíše na $w = a \cdot L(a)L(a)$. Aplikací P_2 na t_v se t_u přepíše na $a \cdot (((ee \cdot ff) \cdot L(e)L(e)) \cdot cc)$, což se přepíše na $a \cdot (ee \cdot cc)$ a to na $w = a \cdot L(a)L(a)$. Aplikací P_3 na t_v se t_u přepíše na $a \cdot ((ee \cdot L(e)L(e)) \cdot cc)$, což se přepíše na $a \cdot ee$ a to na $w = a \cdot L(a)L(a)$.

Nyní buď $t_v = cc$. V případě P_1 se t_u přepíše na $a \cdot (bb \cdot ee)$ a to na $w = a \cdot L(a)L(a)$. V případě P_2 se t_u přepíše na $a \cdot (bb \cdot ((ee \cdot ff) \cdot L(e)L(e)))$, to na $a \cdot (bb \cdot ee)$ a to na $w = a \cdot L(a)L(a)$. V případě P_3 se t_u přepíše na

$a\cdot(bb\cdot(ee\cdot L(e)L(e)))$, což se přepíše na $a\cdot(bb\cdot L(b)L(b))$ a to na $w = a\cdot L(a)L(a)$.

Zbývá případ $t_v = bb\cdot cc$. Aplikujeme-li na t_v P_1, je $bb\cdot cc = t_v = (d\cdot ee)\cdot ff$, $ee = b = d$, $f = c$ a t_u se přepíše na $a \cdot ee$ a to na $w = a \cdot L(a)L(a)$. Při aplikaci P_2 na t_v je $bb \cdot cc = t_v = d \cdot (ee \cdot ff)$, tedy $d = bb$, $ee = c = ff$, t_u se přepíše na $a \cdot (bb \cdot L(b)L(b))$ a to na $w = a \cdot L(a)L(a)$. Konečně při aplikaci P_3 je $bb \cdot cc = t_v = d \cdot ee$, $d = bb$, $c = e$ a t_u se přepíše na $a \cdot (bb \cdot L(b)L(b))$ a to na $w = a \cdot L(a)L(a)$.

Tím je ověřen případ aplikace P_2 na t_u a zbývá případ, kdy na t_u aplikujeme P_3. Je tedy $t_u = a\cdot bb$ a t_u se přepíše na $a\cdot L(a)L(a)$. Je-li t_v podtermem a nebo b, je ověření obdobné jako v předchozích případech. Zbývá tedy možnost $t_v = bb$.

Opět využijeme již odvozených výsledků. V případě P_1 se t_u přepíše na $a \cdot ee$ a to na $w = a \cdot L(a)L(a)$. V případě P_2 se t_u přepíše na $a \cdot ((ee \cdot ff) \cdot L(e)L(e))$, to na $a\cdot ee$ a to na $w = a \cdot L(a)L(a)$. V případě P_3 se t_u přepíše na $a \cdot (ee \cdot L(e)L(e))$ a to na $w = a \cdot L(a)L(a)$.

Celkově jsme ukázali, že pokud term t přepíšeme dvěma způsoby na termy u a v (aplikací jednoho pravidla z P), vždy najdeme term w takový, že je možno u i v přepsat na w. To ale neznamená nic jiného, než že graf G je lokálně konfluentní. Neboť je také konečně terminovaný, je konfluentní a tedy celkově konvergentní.

To znamená, že každý term t je v G spojen neorientovanou cestou právě s jedním terminálním vrcholem, tedy s prvkem M. Ovšem dva termy u, v jsou v G spojeny cestou právě tehdy, pokud rovnost $u = v$ platí ve V. To je snadné nahlédnout – hrany vzniklé aplikací pravidla P_1 jsou právě bezprostřední důsledky rovnosti $x = (x \cdot yy) \cdot zz$ a hrany vzniklé aplikací pravidel P_2 a P_3 je možno vynechat bez změny komponent souvislosti neorientovaného grafu G' (hranu $u\cdot(vv\cdot ww) \to u\cdot L(u)L(u)$ zastoupí cesta $u\cdot(vv\cdot ww) \to u\cdot(((vv\cdot ww)\cdot ww)\cdot vv) \to u\cdot(vv\cdot vv) \to ((u\cdot(vv\cdot vv))\cdot zz)\cdot L(u)L(u) \to u\cdot L(u)L(u)$ a hranu $u\cdot vv \to u\cdot L(u)L(u)$ cesta $u\cdot vv \to ((u\cdot vv)\cdot ww)\cdot L(u)L(u) \to u\cdot L(u)L(u)$).

Celkově tak máme, že pro term t existuje právě jeden term $u \in M$, že $t = u$ je splněno ve V, a M je reprezentativní množina pro V. Grupoid $M(\circ)$ je asociovaný s R a V, neboť $\circ$ je definováno právě tak, aby pro $a, b \in M$ byl $a \circ b$ takový term $c \in M$, pro který je $ab = c$ splněno ve V. $\square$

Kapitola 4

Rovnosti tvaru $x = t(y, \ldots, z)$

V této kapitole se budeme zabývat rovnostmi tvaru $x = t(y, \ldots, z)$, tedy takovými, jejichž pravá strana začíná i končí proměnnou různou od x a navíc obsahují alespoň tři proměnné. Základem této kapitoly je následující pozorování.

Lemma 4.1. *Mějme dánu varietu V. Pokud ve v platí rovnost $x = t$, kde t je term neobsahující x, potom je V triviální.*

Důkaz. Zvolme proměnnou y, která je různá od x a nevyskytuje se v t. Potom substitucí $x = y$ (s tím, že na ostatních proměnných bude substituce identitou) dostáváme $y = t$, celkově tedy $x = t = y$, všechny termy jsou si tedy ve V rovny a V je triviální. $\square$

Pro zjednodušení si uveďme několik termů t takových, že varieta generovaná rovností $x = t$ je triviální. Těchto rovností budeme posléze využívat v důkazech.

Lemma 4.2. *Nechť t je jeden z termů $(yx \cdot x)z$, $(yx \cdot z)y$, $(yx \cdot z)z$, $(yz \cdot x)z$, $(yz \cdot x)y$, $xx \cdot z$, $zx \cdot y$, $u \cdot xv$, $xy \cdot xy$, $uy \cdot xy$, $(y \cdot xy)z$, $(y \cdot xz)y$, $(y \cdot xz)z$, $(y \cdot zx)y$, $(y \cdot zx)z$, $y(xy \cdot z)$, $y(xz \cdot u)$, $y(x \cdot yz)$, $z(xx \cdot y)$, $z(x \cdot yy)$, $z(x \cdot yz)$. Potom varieta určená rovností $x = t$ je triviální.*

Důkaz. Dokázat tvrzení pro jednotlivé rovnosti není obtížné, důkaz lze přenechat čtenáři (který jej případně najde v [3]). $\square$

Lemma 4.3. *Nechť V je varieta určená rovností $x = t$, kde t nezačíná ani nekončí na x (takové jsou všechny termy vyšetřované v této kapitole). Plyne-li z $x = t$ některá z rovností $x = xy$, $x = yx$, $xy = xz$, $xx = xz$, $xz = yx$, $vx = uz$, $xx = yx$, potom je V triviální.*

Důkaz. Tvrzení je opravdu snadné. V případě platnosti $x = xy$ můžeme rovnost $x = t$ převést na $x = y$, kde y je proměnná, kterou t začíná, v případě $x = yx$ dostaneme $x = z$, t končí na z. Z $xy = xz$ plyne, že $x = t$ můžeme převést na $x = u$, kde term u obsahuje jen proměnné y, t začíná na y. Z $xx = xz$ plyne $xy = xx = xz$, což už máme rozřešeno, $xz = yx$ implikuje $xz = yx = xu$, z $vx = uz$ odvodíme $vx = vz$ a z $xx = yx$ plyne $zx = xx = yx$, což se řeší analogicky k $xy = xz$. □

Věta 4.4. *Nechť t je jeden z termů* $((yx \cdot x)x)z$, $((yx \cdot x)z)u$, $((yx \cdot z)x)u$, $((yx \cdot z)z)u$, $((yx \cdot z)u)v$, $((yz \cdot x)x)u$, $((yz \cdot x)z)u$, $((yz \cdot x)u)v$, $((yz \cdot z)x)u$, $((yz \cdot u)x)v$, $((yx \cdot x)y)z$, $((yx \cdot x)z)y$, $((yx \cdot x)z)z$, $((yx \cdot y)x)z$, $(y(xy \cdot x))z$, $((yx \cdot y)y)z$, $((yx \cdot y)z)y$, $((yx \cdot y)z)u$, $((yx \cdot z)u)y$, $((yx \cdot z)u)z$, $((yx \cdot z)x)y$, $((yx \cdot z)x)z$, $((yx \cdot z)y)y$, $((yx \cdot z)y)u$, $((yx \cdot z)u)u$, $((yx \cdot z)z)z$, $((yy \cdot x)x)z$, $((yy \cdot x)y)z$, $((yy \cdot x)z)y$, $((yy \cdot x)z)u$, $((yz \cdot x)u)y$, $((yz \cdot x)u)z$, $((yy \cdot y)x)z$, $((yy \cdot z)x)y$, $((yy \cdot z)x)u$, $((yz \cdot u)x)y$, $((yz \cdot u)x)z$, $((yz \cdot x)x)z$, $((yz \cdot x)y)y$, $((yz \cdot x)y)u$, $((yz \cdot x)u)u$, $((yz \cdot x)z)z$, $((yz \cdot y)x)y$, $((yz \cdot y)x)u$, $((yz \cdot u)x)u$, $((yz \cdot z)x)z$, $((y \cdot xx)x)z$, $((y \cdot xx)z)u$, $((y \cdot xz)x)u$, $((y \cdot xz)z)u$, $((y \cdot xz)u)v$, $((y \cdot zx)x)u$, $((y \cdot zx)z)u$, $((y \cdot zz)x)u$, $((y \cdot zx)u)v$, $((y \cdot zu)x)v$, $((y \cdot xx)y)z$, $((y \cdot xx)z)y$, $((y \cdot xx)z)z$, $((y \cdot xy)x)z$, $((y \cdot xy)y)z$, $((y \cdot xy)z)y$, $((y \cdot xy)z)u$, $((y \cdot xz)u)y$, $((y \cdot xz)u)z$, $((y \cdot xz)x)z$, $(y(xz \cdot u))y$, $((y \cdot xz)y)y$, $((y \cdot xz)y)u$, $((y \cdot xz)u)u$, $((y \cdot xz)z)z$, $((y \cdot yx)x)z$, $((y \cdot yx)y)z$, $((y \cdot yx)z)y$, $((y \cdot yx)z)u$, $((y \cdot zx)u)y$, $((y \cdot zx)u)z$, $((y \cdot yy)x)z$, $((y \cdot yz)x)u$, $((y \cdot zx)x)y$, $((y \cdot zx)x)z$, $((y \cdot zx)y)y$, $((y \cdot zx)y)u$, $((y \cdot zx)u)u$, $((y \cdot zx)z)z$, $((y \cdot zy)x)y$, $((y \cdot zy)x)u$, $((y \cdot zu)x)y$, $((y \cdot zu)x)u$, $((y \cdot zz)x)z$, $((y \cdot zu)x)z$, $(yx \cdot xx)z$, $(yx \cdot xz)u$, $(yx \cdot zx)u$, $(yx \cdot zz)u$, $(yx \cdot zu)v$, $(yz \cdot xx)u$, $(yz \cdot xz)u$, $(yz \cdot xu)v$, $(yz \cdot zx)u$, $(yz \cdot ux)v$, $(yx \cdot xy)z$, $(yx \cdot xz)z$, $(yx \cdot yx)z$, $(yx \cdot yy)z$, $(yx \cdot yz)y$, $(yx \cdot yz)u$, $(yx \cdot zu)y$, $(yx \cdot zu)z$, $(yx \cdot zx)y$, $(yx \cdot zx)z$, $(yx \cdot zy)y$, $(yx \cdot zy)u$, $(yx \cdot zu)u$, $(yx \cdot zz)z$, $(yy \cdot xx)z$, $(yy \cdot xy)z$, $(yy \cdot xz)y$, $(yy \cdot xz)u$, $(yz \cdot xu)y$, $(yz \cdot xu)z$, $(yy \cdot yx)z$, $(yz \cdot yx)u$, $(yy \cdot zx)y$, $(yy \cdot zx)u$, $(yz \cdot ux)y$, $(yz \cdot ux)z$, $(yz \cdot xx)y$, $(yz \cdot xx)z$,

$(yz \cdot xy)y$, $(yz \cdot xy)u$, $(yz \cdot xu)u$, $(yz \cdot xz)z$, $(yz \cdot zx)z$, $(yz \cdot ux)u$, $(yx \cdot x) \cdot zy$, $(yx \cdot x) \cdot zu$, $(yx \cdot z) \cdot uy$, $(yx \cdot z) \cdot uv$, $(yz \cdot x) \cdot uy$, $(yz \cdot x) \cdot uv$, $(yx \cdot x) \cdot zz$, $(yx \cdot y) \cdot xz$, $(yx \cdot y) \cdot zu$, $(yx \cdot z) \cdot xu$, $(yz \cdot y) \cdot xu$, $(yz \cdot u) \cdot xv$, $(yx \cdot y) \cdot yz$, $(yx \cdot z) \cdot yu$, $(yx \cdot y) \cdot zy$, $(yx \cdot z) \cdot xy$, $(yx \cdot z) \cdot yy$, $(yx \cdot z) \cdot zz$, $(yx \cdot z) \cdot zu$, $(yx \cdot z) \cdot uz$, $(yx \cdot z) \cdot uu$, $(yy \cdot x) \cdot yz$, $(yy \cdot x) \cdot zu$, $(yz \cdot x) \cdot yu$, $(yz \cdot x) \cdot zu$, $(yy \cdot x) \cdot zy$, $(yy \cdot y) \cdot xz$, $(yy \cdot z) \cdot xy$, $(yy \cdot z) \cdot xu$, $(yz \cdot u) \cdot xy$, $(yz \cdot u) \cdot xz$, $(yz \cdot x) \cdot zz$, $(yz \cdot x) \cdot uz$, $(yz \cdot x) \cdot uu$, $(yz \cdot y) \cdot xy$, $(yz \cdot z) \cdot xz$, $(yz \cdot z) \cdot xu$, $(yz \cdot u) \cdot xu$, $(y(xx \cdot x))z$, $(y(xz \cdot z))u$, $(y(xz \cdot x))u$, $(y(xx \cdot z))u$, $(y(zu \cdot x))v$, $(y(zz \cdot x))u$, $(y(zx \cdot u))v$, $(y(zx \cdot z))u$, $(y(zx \cdot x))u$, $(y(xz \cdot u))v$, $(y(xx \cdot y))z$, $(y(xx \cdot z))y$, $(y(xx \cdot z))z$, $(y(xy \cdot y))z$, $(y(xy \cdot z))y$, $(y(xy \cdot z))u$, $(y(xz \cdot u))z$, $(y(xz \cdot x))y$, $(y(xz \cdot x))z$, $(y(xz \cdot y))y$, $(y(xz \cdot y))u$, $(y(xz \cdot u))u$, $(y(xz \cdot z))z$, $(y(yx \cdot x))z$, $(y(yx \cdot y))z$, $(y(yx \cdot z))y$, $(y(yx \cdot z))u$, $(y(zx \cdot u))y$, $(y(zx \cdot u))z$, $(y(yy \cdot x))z$, $(y(yz \cdot x))y$, $(y(yz \cdot x))u$, $(y(zu \cdot x))y$, $(y(zu \cdot x))z$, $(y(zx \cdot x))y$, $(y(zx \cdot x))z$, $(y(zx \cdot y))y$, $(y(zx \cdot y))u$, $(y(zx \cdot u))u$, $(y(zx \cdot z))z$, $(y(zy \cdot x))y$, $(y(zy \cdot x))u$, $(y(zu \cdot x))u$, $(y(zz \cdot x))z$, $(y(x \cdot xx))z$, $(y(x \cdot xz))u$, $(y(x \cdot zx))u$, $(y(x \cdot zz))u$, $(y(x \cdot zu))v$, $(y(z \cdot xx))u$, $(y(z \cdot xz))u$, $(y(z \cdot xu))v$, $(y(z \cdot zx))u$, $(y(z \cdot ux))v$, $(y(x \cdot xy))z$, $(y(x \cdot xz))z$, $(y(x \cdot yx))z$, $(y(x \cdot yz))u$, $(y(x \cdot yy))z$, $(y(x \cdot zx))y$, $(y(x \cdot zx))z$, $(y(x \cdot zu))z$, $(y(x \cdot zy))y$, $(y(x \cdot zy))u$, $(y(x \cdot zu))y$, $(y(x \cdot zu))u$, $(y(x \cdot zz))z$, $(y(y \cdot xx))z$, $(y(y \cdot xy))z$, $(y(y \cdot xz))y$, $(y(y \cdot xz))u$, $(y(z \cdot xu))y$, $(y(z \cdot xu))z$, $(y(y \cdot yx))z$, $(y(y \cdot zx))y$, $(y(y \cdot zx))u$, $(y(z \cdot ux))y$, $(y(z \cdot ux))z$, $(y(z \cdot xx))y$, $(y(z \cdot xx))z$, $(y(z \cdot xy))y$, $(y(z \cdot xy))u$, $(y(z \cdot xu))u$, $(y(z \cdot xz))z$, $(y(z \cdot yx))y$, $(y(z \cdot yx))u$, $(y(z \cdot ux))u$, $(y(z \cdot zx))z$, $(y \cdot xx) \cdot xz$, $(y \cdot xx) \cdot zu$, $(y \cdot xz) \cdot xu$, $(y \cdot xz) \cdot zu$, $(y \cdot xz) \cdot uv$, $(y \cdot zx) \cdot xu$, $(y \cdot zx) \cdot zu$, $(y \cdot zx) \cdot uv$, $(y \cdot zz) \cdot xu$, $(y \cdot zu) \cdot xv$, $(y \cdot xx) \cdot yz$, $(y \cdot xx) \cdot zy$, $(y \cdot xx) \cdot zz$, $(y \cdot xy) \cdot xz$, $(y \cdot xy) \cdot yz$, $(y \cdot xy) \cdot zy$, $(y \cdot xy) \cdot zu$, $(y \cdot xz) \cdot uy$, $(y \cdot xz) \cdot uz$, $(y \cdot xz) \cdot xy$, $(y \cdot xz) \cdot xz$, $(y \cdot xz) \cdot yy$, $(y \cdot xz) \cdot yu$, $(y \cdot xz) \cdot uu$, $(y \cdot xz) \cdot zz$, $(y \cdot yx) \cdot zy$, $(y \cdot yx) \cdot zu$, $(y \cdot zx) \cdot uy$, $(y \cdot zx) \cdot uz$, $(y \cdot yy) \cdot xz$, $(y \cdot yz) \cdot xy$, $(y \cdot yz) \cdot xu$, $(y \cdot zu) \cdot xy$, $(y \cdot zu) \cdot xz$, $(y \cdot zx) \cdot xz$, $(y \cdot zx) \cdot yy$, $(y \cdot zx) \cdot yu$, $(y \cdot zx) \cdot uu$, $(y \cdot zx) \cdot zz$, $(y \cdot zy) \cdot xy$, $(y \cdot zy) \cdot xu$, $(y \cdot zu) \cdot xu$, $(y \cdot zz) \cdot xz$.
Potom varieta určená rovností $x = t$ je triviální.

Důkaz. Pro $t = ((yx \cdot x)x)z$ je $x = ((yx \cdot x)x)z$, $x = ((yx \cdot x)x)z = (((xx \cdot x)x)x)z = xz$, což řeší i případy $t = ((yx \cdot x)z)u$, $t = ((yx \cdot z)x)u$, $t = ((yx \cdot z)z)u$,

$t = ((yx \cdot z)u)v$, $t = ((yz \cdot x)x)u$, $t = ((yz \cdot x)z)u$, $t = ((yz \cdot x)u)v$, $t = ((yz \cdot z)x)u$ a $t = ((yz \cdot u)x)v$.

Pro $t = ((yx \cdot x)y)z$ je $x = ((yx \cdot x)y)z$, $x = ((yx \cdot x)y)z = (((xx \cdot x)x) \cdot xx)z = xz$.

Pro $t = ((yx \cdot x)z)y$ je $x = ((yx \cdot x)z)y$, $x \cdot yx = (((yx \cdot x)z)y) \cdot yx = (((yx \cdot x)x)y) \cdot yx = x$, $x = x \cdot yx$, $yx \cdot x = yx \cdot (x \cdot yx) = yx$, $x = ((yx \cdot x)z)y = (yx \cdot z)y$.

Pro $t = ((yx \cdot x)z)z$ je $x = ((yx \cdot x)z)z$, $x = ((yx \cdot x)z)z = ((((yz \cdot z)x)x)z)z = zz \cdot z$.

Pro $t = ((yx \cdot y)x)z$ je $x = ((yx \cdot y)x)z$, $x = ((yx \cdot y)x)z = ((((yx \cdot y)x)(yx \cdot y))x)z = xx \cdot z$, $xx = (xx \cdot xx)z = xz$.

Pro $t = (y(xy \cdot x))z$ je $x = (y(xy \cdot x))z$, $x = (y(xy \cdot x))z = ((y(xy \cdot x))((x(y(xy \cdot x)))x))z = xz$.

Pro $t = ((yx \cdot y)y)z$ je $x = ((yx \cdot y)y)z$, $(x(yx \cdot y))u = ((((yx \cdot y)y)z)(yx \cdot y))u = ((((yx \cdot y)y)(yx \cdot y))(yx \cdot y))u = y$, $(x(yx \cdot y))u = y$, $x = (y(xy \cdot x))z$, a případ $x = (y(xy \cdot x))z$ už jsme rozřešili.

Pro $t = ((yx \cdot y)z)y$ je $x = ((yx \cdot y)z)y$, $x \cdot yx = (((yx \cdot y)z)y) \cdot yx = (((yx \cdot y) \cdot yx)y) \cdot yx = y$, $x = y \cdot xy = yx \cdot (x \cdot yx) = yx \cdot y$, $x = ((yx \cdot y)z)y = ((yx \cdot y)z)y = xz \cdot y$, $x = ((yx \cdot y)z)y = ((yx \cdot y)z)y = yz \cdot y$, což řeší i případy $t = ((yx \cdot y)z)u$, $t = ((yx \cdot z)u)y$ a $t = ((yx \cdot z)u)z$.

Pro $t = ((yx \cdot z)x)y$ je $x = ((yx \cdot z)x)y$, $x \cdot yx = (((yx \cdot z)x)y) \cdot yx = (((yx \cdot y)x)y) \cdot yx = y$, $x = y \cdot xy$, $x = ((yx \cdot z)x)y = ((yx \cdot (z \cdot yx))x)y = zx \cdot y$.

Pro $t = ((yx \cdot z)x)z$ je $x = ((yx \cdot z)x)z$, $xx = (((yx \cdot z)x)z)x = z$.

Pro $t = ((yx \cdot z)y)y$ je $x = ((yx \cdot z)y)y$, $x = ((yx \cdot z)y)y = ((((xy \cdot y)x)x)(xy \cdot y))(xy \cdot y) = (y(xy \cdot y))(xy \cdot y)$, $yx \cdot z = (y(((yx \cdot z)y)y))(((yx \cdot z)y)y) = yx \cdot x$, $yx \cdot z = yx \cdot x = yx \cdot u$, $x = ((yx \cdot z)y)y = (((yy \cdot x)z) \cdot yy) \cdot yy = (((yy \cdot y)z) \cdot yy) \cdot yy$, což řeší i případy $t = ((yx \cdot z)y)u$ a $t = ((yx \cdot z)u)u$.

Pro $t = ((yx \cdot z)z)z$ je $x = ((yx \cdot z)z)z$, $xz = (((yx \cdot z)z)z)z = z$.

Pro $t = ((yy \cdot x)x)z$ je $x = ((yy \cdot x)x)z$, $x = ((yy \cdot x)x)z = (((((yy \cdot x)x)((yy \cdot x)x))x)x)z = (((((yy \cdot x)x)((yy \cdot x)x))x)x)z = (xx \cdot x)z$, $x = ((yy \cdot x)x)z = ((xx \cdot x)x)z = xz$.

Pro $t = ((yy \cdot x)y)z$ je $x = ((yy \cdot x)y)z$, $x = ((yy \cdot x)y)z = (((xx \cdot xx)x) \cdot xx)z = xx \cdot z$, $x = ((yy \cdot x)y)z = yy \cdot z$.

Pro $t = ((yy \cdot x)z)y$ je $x = ((yy \cdot x)z)y$, $x = ((yy \cdot x)z)y = (((zz \cdot zz)x)z) \cdot zz = zz \cdot zz$, což řeší i případy $t = ((yy \cdot x)z)u$, $t = ((yz \cdot x)u)y$ a $t = ((yz \cdot x)u)z$.

Pro $t = ((yy \cdot y)x)z$ je $x = ((yy \cdot y)x)z$, $x = ((yy \cdot y)x)z = (((((yy \cdot y)u)((yy \cdot y)u))((yy \cdot y)u))x)z = ((u((yy \cdot y)u))x)z = ((((yy \cdot y)y)((yy \cdot y)((yy \cdot y)y)))x)z = yx \cdot z$.

Pro $t = ((yy \cdot z)x)y$ je $x = ((yy \cdot z)x)y$, $x = ((yy \cdot z)x)y = (((xx \cdot xx)z)x) \cdot xx = (((xx \cdot xx)z)x) \cdot xx = z \cdot xx$, $x = ((yy \cdot z)x)y = (((yy \cdot yy)z)x) \cdot yy = y$, což řeší i případy $t = ((yy \cdot z)x)u$, $t = ((yz \cdot u)x)y$ a $t = ((yz \cdot u)x)z$.

Pro $t = ((yz \cdot x)x)z$ je $x = ((yz \cdot x)x)z$, $x = ((yz \cdot x)x)z = (((((yz \cdot y)y)z)x)x)z = (yx \cdot x)z$.

Pro $t = ((yz \cdot x)y)y$ je $x = ((yz \cdot x)y)y$, $x = ((yz \cdot x)y)y = ((((xu \cdot u)x)x)(xu \cdot u))(xu \cdot u) = (u(xu \cdot u))(xu \cdot u)$, $uz \cdot v = (u(((uz \cdot v)u)u))(((uz \cdot v)u)u) = uv \cdot v$, $x = ((yz \cdot x)y)y = ((yz \cdot y)y)y$, což řeší i případy $t = ((yz \cdot x)y)u$ a $t = ((yz \cdot x)u)u$.

Pro $t = ((yz \cdot x)z)z$ je $x = ((yz \cdot x)z)z$, $x = ((yz \cdot x)z)z = (((((yz \cdot y)z)z)x)z)z = (yx \cdot z)z$.

Pro $t = ((yz \cdot y)x)y$ je $x = ((yz \cdot y)x)y$, $x = ((yz \cdot y)x)y = (((xy \cdot x) \cdot xy)x) \cdot xy = xy \cdot xy$, což řeší i případy $t = ((yz \cdot y)x)u$ a $t = ((yz \cdot u)x)u$.

Pro $t = ((yz \cdot z)x)z$ je $x = ((yz \cdot z)x)z$, $x = ((yz \cdot z)x)z = (((((yz \cdot z)y)z)z)x)z = (yz \cdot x)z$.

Pro $t = ((y \cdot xx)x)z$ je $x = ((y \cdot xx)x)z$, $zz \cdot x = (((y(zz \cdot zz)) \cdot zz)z)x = z$, $x = xx \cdot y$, $xx = (xx \cdot xx)y = xy$, což řeší i případy $t = ((y \cdot xx)z)u$, $t = ((y \cdot xz)x)u$, $t = ((y \cdot xz)z)u$, $t = ((y \cdot xz)u)v$, $t = ((y \cdot zx)x)u$, $t = ((y \cdot zx)z)u$, $t = ((y \cdot zz)x)u$, $t = ((y \cdot zx)u)v$ a $t = ((y \cdot zu)x)v$.

Pro $t = ((y \cdot xx)y)z$ je $x = ((y \cdot xx)y)z$, $(y \cdot xx)y = ((y(((y \cdot xx)y)((y \cdot xx)y)))y)z = (yx \cdot y)z$, $x = ((y \cdot xx)y)u = ((yx \cdot y)z)u$ a případ $x = ((yx \cdot y)z)u$ už jsme rozřešili.

Pro $t = ((y \cdot xx)z)y$ je $x = ((y \cdot xx)z)y$, $x = ((y \cdot xx)z)y = (((z \cdot yy) \cdot xx)z)(z \cdot yy) = y(z \cdot yy)$.

Pro $t = ((y \cdot xx)z)z$ je $x = ((y \cdot xx)z)z$, $x = ((y \cdot xx)z)z = ((((y \cdot yy) \cdot xx) \cdot xx)z)z = yz \cdot z$.

Pro $t = ((y \cdot xy)x)z$ je $x = ((y \cdot xy)x)z$, $x = ((y \cdot xy)x)z = ((((y \cdot xy)x)(x((y \cdot xy)x)))x)z = xx \cdot z$, $x = ((y \cdot xy)x)z = ((yy \cdot (x \cdot yy))x)z = yx \cdot z$.

Pro $t = ((y \cdot xy)y)z$ je $x = ((y \cdot xy)y)z$, $(y \cdot xy)y = ((y(((y \cdot xy)y)y))y)z = (yx \cdot y)z$, $x = ((y \cdot xy)y)u = ((yx \cdot y)z)u$ a případ $x = ((yx \cdot y)z)u$ už jsme rozřešili.

Pro $t = ((y \cdot xy)z)y$ je $x = ((y \cdot xy)z)y$, $(y \cdot xy)z = ((y(((y \cdot xy)z)y))z)y = (yx \cdot z)y$, $x = ((y \cdot xy)z)y = ((yx \cdot z)y)y$ a případ $x = ((yx \cdot z)y)y$ už jsme rozřešili. To řeší i případy $t = ((y \cdot xy)z)u$, $t = ((y \cdot xz)u)y$ a $t = ((y \cdot xz)u)z$.

Pro $t = ((y \cdot xz)x)z$ je $x = ((y \cdot xz)x)z$, $x = ((y \cdot xz)x)z = ((((y(y \cdot xz))y) \cdot xz)x)z = yx \cdot z$.

Pro $t = (y(xz \cdot u))y$ je $x = (y(xz \cdot u))y$, $zx \cdot z = (z((y(xz \cdot u))y))z = y$.

Pro $t = ((y \cdot xz)y)y$ je $x = ((y \cdot xz)y)y$, $(z \cdot uv)z = ((y(((z \cdot uv)z)z))y)y = (yu \cdot y)y$, $x = ((y \cdot xz)y)y = (y(xz \cdot u))y$ a případ $x = (y(xz \cdot u))y$ jsme už rozřešili. To řeší i případy $t = ((y \cdot xz)y)u$ a $t = ((y \cdot xz)u)u$.

Pro $t = ((y \cdot xz)z)z$ je $x = ((y \cdot xz)z)z$, $x = ((y \cdot xz)z)z = ((((y(y \cdot xz)) \cdot xz) \cdot xz)z)z = yz \cdot z$.

Pro $t = ((y \cdot yx)x)z$ je $x = ((y \cdot yx)x)z$, $x = ((y \cdot yx)x)z = ((((y \cdot yx)x)(((y \cdot yx)x)x))x)z = xx \cdot z$.

Pro $t = ((y \cdot yx)y)z$ je $x = ((y \cdot yx)y)z$, $x = ((y \cdot yx)y)z = ((y \cdot yx)y)(((y \cdot yx)y)u)$, $(x((y \cdot yx)y))v = ((((y \cdot yx)y)(((y \cdot yx)y)u))((y \cdot yx)y))v = u$.

Pro $t = ((y \cdot yx)z)y$ je $x = ((y \cdot yx)z)y$, $x = ((y \cdot yx)z)y = (((z \cdot zu)((z \cdot zu)x))z)(z \cdot zu) = (((z \cdot zu)((z \cdot zu)x))z)(z \cdot zu) = u(z \cdot zu)$, což řeší i případy $t = ((y \cdot yx)z)u$, $t = ((y \cdot zx)u)y$ a $t = ((y \cdot zx)u)z$.

Pro $t = ((y \cdot yy)x)z$ je $x = ((y \cdot yy)x)z$, $x = ((y \cdot yy)x)z = ((((y \cdot yy)y)(((y \cdot yy)y)((y \cdot yy)y)))x)z = yx \cdot z$, což řeší i případ $t = ((y \cdot yz)x)u$.

Pro $t = ((y \cdot zx)x)y$ je $x = ((y \cdot zx)x)y$, $x = ((y \cdot zx)x)y = ((y(((x \cdot zz)z)x))x)y = (yz \cdot x)y$.

Pro $t = ((y \cdot zx)x)z$ je $x = ((y \cdot zx)x)z$, $xz = ((y(z \cdot xz)) \cdot xz)z$, $xz \cdot x = (((y(z \cdot xz)) \cdot xz)z)x = z$, $xz \cdot x = z$, $x = ((y \cdot zx)x)z = (((zx \cdot y) \cdot zx)x)z = yx \cdot z$.

Pro $t = ((y \cdot zx)y)y$ je $x = ((y \cdot zx)y)y$, $x = ((y \cdot zx)y)y = ((y(((x \cdot zy)x)x))y)y = (yy \cdot y)y$, což řeší i případy $t = ((y \cdot zx)y)u$ a $t = ((y \cdot zx)u)u$.

Pro $t = ((y \cdot zx)z)z$ je $x = ((y \cdot zx)z)z$, $x = ((y \cdot zx)z)z = ((((y(zx \cdot y)) \cdot zx) \cdot zx)z)z = yz \cdot z$.

Pro $t = ((y \cdot zy)x)y$ je $x = ((y \cdot zy)x)y$, $x = ((y \cdot zy)x)y = ((y(((y \cdot zy)z)y))x)y = (yz \cdot x)y$, což řeší i případy $t = ((y \cdot zy)x)u$, $t = ((y \cdot zu)x)y$ a $t = ((y \cdot zu)x)u$.

Pro $t = ((y \cdot zz)x)z$ je $x = ((y \cdot zz)x)z$, $xx \cdot x = (((y \cdot zz) \cdot xx)z)x = z$, což řeší i případ $t = ((y \cdot zu)x)z$.

Pro $t = (yx \cdot xx)z$ je $x = (yx \cdot xx)z$, $x = (yx \cdot xx)z = (((yx \cdot xx)x) \cdot xx)z = (x \cdot xx)z$, $xx = ((y \cdot xx)(xx \cdot xx))z = ((x \cdot xx)(xx \cdot xx))z = xz$, což řeší i případy $t = (yx \cdot xz)u$, $t = (yx \cdot zx)u$, $t = (yx \cdot zz)u$, $t = (yx \cdot zu)v$, $t = (yz \cdot xx)u$, $t = (yz \cdot xz)u$, $t = (yz \cdot xu)v$, $t = (yz \cdot zx)u$ a $t = (yz \cdot ux)v$.

Pro $t = (yx \cdot xy)z$ je $x = (yx \cdot xy)z$, $xu = ((yx \cdot xy)z)u = ((yx \cdot xy)(xy \cdot yx))u = xy$, $x = (yx \cdot xy)z = (yy \cdot xy)z = (yy \cdot y)z$.

Pro $t = (yx \cdot xz)z$ je $x = (yx \cdot xz)z$, $x = (yx \cdot xz)z = (((yy \cdot yx)x) \cdot xz)z = (y \cdot xz)z$.

Pro $t = (yx \cdot yx)z$ je $x = (yx \cdot yx)z$, $x = (yx \cdot yx)z = (yx \cdot yx)(yx \cdot yx)$, $xz = ((yx \cdot yx)(yx \cdot yx))z = yx$.

Pro $t = (yx \cdot yy)z$ je $x = (yx \cdot yy)z$, $x = (yx \cdot yy)z = (((yz \cdot yy)x)((yz \cdot yy)(yz \cdot yy)))z = (z((yz \cdot yy)(yz \cdot yy)))z$.

Pro $t = (yx \cdot yz)y$ je $x = (yx \cdot yz)y$, $x = (yx \cdot yz)y = (((zu \cdot zu)x)((zu \cdot zu)z))(zu \cdot zu) = (((zu \cdot zu)x)u)(zu \cdot zu) = (((((uz \cdot uz)u)((uz \cdot uz)u))x)u)(((uz \cdot uz)u)((uz \cdot uz)u)) = ((zz \cdot x)u) \cdot zz$, $x = ((zz \cdot x)u) \cdot zz$, $zz \cdot (zz \cdot zz) = (((zz \cdot zz)u) \cdot zz)(zz \cdot zz) = u$, což řeší i případy $t = (yx \cdot yz)u$, $t = (yx \cdot zu)y$ a $t = (yx \cdot zu)z$.

Pro $t = (yx \cdot zx)y$ je $x = (yx \cdot zx)y$, $x = (yx \cdot zx)y = (yx \cdot ((xz \cdot zz)x))y = (yx \cdot z)y$.

Pro $t = (yx \cdot zx)z$ je $x = (yx \cdot zx)z$, $x = (yx \cdot zx)z = (((yy \cdot xy)x) \cdot zx)z = (y \cdot zx)z$.

Pro $t = (yx \cdot zy)y$ je $x = (yx \cdot zy)y$, $x = (yx \cdot zy)y = (yx \cdot ((yz \cdot zy)y))y = (yx \cdot z)y$, což řeší i případy $t = (yx \cdot zy)u$ a $t = (yx \cdot zu)u$.

Pro $t = (yx \cdot zz)z$ je $x = (yx \cdot zz)z$, $x = (yx \cdot zz)z = (((yy \cdot xx)x) \cdot zz)z = (((yy \cdot xx)x) \cdot zz)z = (y \cdot zz)z$.

Pro $t = (yy \cdot xx)z$ je $x = (yy \cdot xx)z$, $x = (yy \cdot xx)z = ((yy \cdot yy) \cdot xx)z = yz$.

Pro $t = (yy \cdot xy)z$ je $x = (yy \cdot xy)z$, $x = (yy \cdot xy)z = ((yy \cdot yy)(x \cdot yy))z = yz$.

Pro $t = (yy\cdot xz)y$ je $x = (yy\cdot xz)y$, $zz\cdot xy = (yy\cdot((zz\cdot xy)z))y = (yy\cdot x)y$, $x = (yy\cdot xz)y = ((zz\cdot x)z)y$, $x = ((yy\cdot x)y)z$ a případ $x = ((yy\cdot x)y)z$ už jsme rozřešili. To řeší i případy $t = (yy\cdot xz)u$, $t = (yz\cdot xu)y$ a $t = (yz\cdot xu)z$.

Pro $t = (yy\cdot yx)z$ je $x = (yy\cdot yx)z$, $x = (yy\cdot yx)z = ((yy\cdot yy)(yy\cdot x))z = yz$, což řeší i případ $t = (yz\cdot yx)u$.

Pro $t = (yy\cdot zx)y$ je $x = (yy\cdot zx)y$, $x = (yy\cdot zx)y = (yy\cdot((xx\cdot zz)x))y = (yy\cdot z)y$, což řeší i případy $t = (yy\cdot zx)u$, $t = (yz\cdot ux)y$ a $t = (yz\cdot ux)z$.

Pro $t = (yz\cdot xx)y$ je $x = (yz\cdot xx)y$, $x = (yz\cdot xx)y = (((xx\cdot y)\cdot zz)\cdot xx)(xx\cdot y) = z(xx\cdot y)$.

Pro $t = (yz\cdot xx)z$ je $x = (yz\cdot xx)z$, $x = (yz\cdot xx)z = (((yz\cdot yy)z)\cdot xx)z = (y\cdot xx)z = (((y\cdot xx)\cdot yy)\cdot xx)z = yz$.

Pro $t = (yz\cdot xy)y$ je $x = (yz\cdot xy)y$, $yz\cdot xy = (yz\cdot((yz\cdot xy)y))y = (yz\cdot x)y$, $x = (yz\cdot xy)y = ((yz\cdot x)y)y$ a případ $x = ((yz\cdot x)y)y$ jsme už rozřešili. To řeší i případy $t = (yz\cdot xy)u$ a $t = (yz\cdot xu)u$.

Pro $t = (yz\cdot xz)z$ je $x = (yz\cdot xz)z$, $x = (yz\cdot xz)z = (((yz\cdot yz)z)\cdot xz)z = (y\cdot xz)z$.

Pro $t = (yz\cdot zx)z$ je $x = (yz\cdot zx)z$, $x = (yz\cdot zx)z = (((yz\cdot zy)z)\cdot zx)z = (((yz\cdot zy)z)\cdot zx)z = (y\cdot zx)z$, což řeší i případ $t = (yz\cdot ux)u$.

Pro $t = (yx\cdot x)\cdot zy$ je $x = (yx\cdot x)\cdot zy$, $x = (yx\cdot x)\cdot zy = ((zy\cdot x)x)((yu\cdot u)\cdot zy) = ((zy\cdot x)x)u$, $x = ((zy\cdot x)x)u = ((((yy\cdot y)\cdot zy)x)x)u = (yx\cdot x)u$, což řeší i případy $t = (yx\cdot x)\cdot zu$, $t = (yx\cdot z)\cdot uy$, $t = (yx\cdot z)\cdot uv$, $t = (yz\cdot x)\cdot uy$ a $t = (yz\cdot x)\cdot uv$.

Pro $t = (yx\cdot x)\cdot zz$ je $x = (yx\cdot x)\cdot zz$, $xx = ((y\cdot xx)\cdot xx)\cdot zz = (((yy\cdot y)\cdot xx)\cdot xx)\cdot zz = (y\cdot xx)\cdot zz = ((yy\cdot y)\cdot xx)\cdot zz = y\cdot zz = (yy\cdot y)\cdot zz = y$.

Pro $t = (yx\cdot y)\cdot xz$ je $x = (yx\cdot y)\cdot xz$, $x = (yx\cdot y)\cdot xz = ((xx\cdot x)\cdot xx)\cdot xz = x\cdot xz$, $yx = ((y\cdot yx)y)(yx\cdot z) = yy\cdot(yx\cdot z) = yy\cdot(yx\cdot(yx\cdot z)) = yy\cdot yx$, $(yx\cdot yy)(yx\cdot z) = ((yy\cdot yx)\cdot yy)(yx\cdot z) = yx$, $yy\cdot yx = yx = (yx\cdot yy)(yx\cdot z)$, $x = (yx\cdot y)\cdot xz = (yx\cdot y)(x\cdot xz) = (yx\cdot y)x$, $yx\cdot y = (yx\cdot y)((yx\cdot y)z) = (yx\cdot y)((yx\cdot y)x) = (yx\cdot y)x$, $x = (yx\cdot y)x = yx\cdot y$, $x = yx\cdot y = yx\cdot(y\cdot yz)$, $x = zx\cdot(z\cdot zy) = (zu\cdot x)(zu\cdot(zu\cdot(z\cdot zy))) = (zu\cdot x)(zu\cdot u) = ((zv\cdot(z\cdot zy))x)((zv\cdot(z\cdot zy))(z\cdot zy)) = vx\cdot(v(z\cdot zy)) = (zy\cdot x)(zy\cdot(z\cdot zy)) = (zy\cdot x)y$, $x = (zy\cdot x)y = ((zx\cdot y)x)y = yy$, což řeší i případy $t = (yx\cdot y)\cdot zu$, $t = (yx\cdot z)\cdot xu$, $t = (yz\cdot y)\cdot xu$ a $t = (yz\cdot u)\cdot xv$.

Pro $t = (yx \cdot y) \cdot yz$ je $x = (yx \cdot y) \cdot yz$, $x = (yx \cdot y) \cdot yz = ((xy \cdot x) \cdot xy)(xy \cdot z) = y(xy \cdot z)$, což řeší i případ $t = (yx \cdot z) \cdot yu$.

Pro $t = (yx \cdot y) \cdot zy$ je $x = (yx \cdot y) \cdot zy$, $vx = ((y \cdot vx)y) \cdot zy = (((xu \cdot x) \cdot vx)(xu \cdot x))(z(xu \cdot x)) = (u(xu \cdot x))(z(xu \cdot x)) = (u(xu \cdot x))((xz \cdot x)(xu \cdot x)) = (u(xu \cdot x))z = (u(xu \cdot x))z = ((xu \cdot x)((x(xu \cdot x))x))z = ((xu \cdot x)((x(xu \cdot x))x))z = uz$.

Pro $t = (yx \cdot z) \cdot xy$ je $x = (yx \cdot z) \cdot xy$, $x = (yx \cdot z) \cdot xy = ((yz \cdot x) \cdot zy)(x \cdot yz) = z(x \cdot yz)$, $x = z(x \cdot yz) = z(x \cdot yz)$.

Pro $t = (yx \cdot z) \cdot yy$ je $x = (yx \cdot z) \cdot yy$, $x = (yx \cdot z) \cdot yy = ((yy \cdot x) \cdot yy)(yy \cdot yy) = y(yy \cdot yy)$.

Pro $t = (yx \cdot z) \cdot zz$ je $x = (yx \cdot z) \cdot zz$, $xx = ((y \cdot xx)z) \cdot zz = ((y \cdot xx) \cdot zz)(zz \cdot zz) = ((((y \cdot yy)x) \cdot xx) \cdot zz)(zz \cdot zz) = (yy \cdot zz)(zz \cdot zz) = y$, což řeší i případy $t = (yx \cdot z) \cdot zu$, $t = (yx \cdot z) \cdot uz$ a $t = (yx \cdot z) \cdot uu$.

Pro $t = (yy \cdot x) \cdot yz$ je $x = (yy \cdot x) \cdot yz$, $x = (yy \cdot x) \cdot yz = ((yy \cdot yy)x)(yy \cdot z)$, $yv = ((yy \cdot yy) \cdot yv)(yy \cdot z) = yy \cdot (yy \cdot z)$, $yv = yy \cdot (yy \cdot z) = yu$, což řeší i případy $t = (yy \cdot x) \cdot zu$, $t = (yz \cdot x) \cdot yu$ a $t = (yz \cdot x) \cdot zu$.

Pro $t = (yy \cdot x) \cdot zy$ je $x = (yy \cdot x) \cdot zy$, $x = (yy \cdot x) \cdot zy = ((yy \cdot yy)x)(z \cdot yy)$, $vy = ((yy \cdot yy) \cdot vy)(z \cdot yy) = yy \cdot (z \cdot yy)$, $vy = yy \cdot (z \cdot yy) = uy$.

Pro $t = (yy \cdot y) \cdot xz$ je $x = (yy \cdot y) \cdot xz$, $uu \cdot u = (yy \cdot y)((uu \cdot u) \cdot zz) = (yy \cdot y)z$, $x = (yy \cdot y) \cdot xz = uu \cdot u$.

Pro $t = (yy \cdot z) \cdot xy$ je $x = (yy \cdot z) \cdot xy$, $x = (yy \cdot z) \cdot xy = ((yy \cdot yy) \cdot zy)(x \cdot yy) = z(x \cdot yy)$, což řeší i případy $t = (yy \cdot z) \cdot xu$, $t = (yz \cdot u) \cdot xy$ a $t = (yz \cdot u) \cdot xz$.

Pro $t = (yz \cdot x) \cdot zz$ je $x = (yz \cdot x) \cdot zz$, $tt = (yz \cdot tt) \cdot zz = ((yt \cdot z) \cdot tt) \cdot zz = z \cdot zz$, $x = (yz \cdot x) \cdot zz = (yz \cdot x)(u \cdot uu) = (((yy \cdot y) \cdot yy)x)(u \cdot uu) = yx \cdot (u \cdot uu)$. Neboť jsme už dokázali, že $x = (yy \cdot y) \cdot xz$ generuje triviální varietu, vidíme, že i $x = (yz \cdot x) \cdot zz$ generuje triviální varietu. Tento případ řeší i případy $t = (yz \cdot x) \cdot uz$ a $t = (yz \cdot x) \cdot uu$.

Pro $t = (yz \cdot y) \cdot xy$ je $x = (yz \cdot y) \cdot xy$, $x = (yz \cdot y) \cdot xy = (((yz \cdot y) \cdot uy)(yz \cdot y))(x(yz \cdot y)) = (u(yz \cdot y))(x(yz \cdot y)) = (u((yy \cdot y) \cdot yy))(x((yy \cdot y) \cdot yy)) = uy \cdot xy$.

Pro $t = (yz \cdot z) \cdot xz$ je $x = (yz \cdot z) \cdot xz$, $x = (yz \cdot z) \cdot xz = (((yz \cdot z) \cdot uz) \cdot uz)(x \cdot uz) = (u \cdot uz)(x \cdot uz) = ((yz \cdot z)((yz \cdot z) \cdot vz))(x((yz \cdot z) \cdot vz)) = ((yz \cdot z)v) \cdot xv = ((yz \cdot z) \cdot yz)(x \cdot yz) = y(x \cdot yz)$, což řeší i případy $t = (yz \cdot z) \cdot xu$ a $t = (yz \cdot u) \cdot xu$.

Pro $t = (y(xx \cdot x))z$ je $x = (y(xx \cdot x))z$, $x = (y(xx \cdot x))z = ((y(xx \cdot x))(xx \cdot x))z = xz$, což řeší i případy $t = (y(xz \cdot z))u$, $t = (y(xz \cdot x))u$, $t = (y(xx \cdot z))u$, $t = (y(zu \cdot x))v$, $t = (y(zz \cdot x))u$, $t = (y(zx \cdot u))v$, $t = (y(zx \cdot z))u$, $t = (y(zx \cdot x))u$ a $t = (y(xz \cdot u))v$.

Pro $t = (y(xx \cdot y))z$ je $x = (y(xx \cdot y))z$, $x = (y(xx \cdot y))z = ((y(xx \cdot y))(xx \cdot (y(xx \cdot y))))z = xz$.

Pro $t = (y(xx \cdot z))y$ je $x = (y(xx \cdot z))y$, $x = (y(xx \cdot z))y = ((xx \cdot z)(xx \cdot z))(xx \cdot z)$, $yx \cdot y = (y(((xx \cdot z)(xx \cdot z))(xx \cdot z)))y = xx \cdot z$, $yx \cdot y = xx \cdot z$, $xx \cdot z = yx \cdot y = xx \cdot u$, $x = (y(xx \cdot z))y = (yy \cdot (xx \cdot z)) \cdot yy = (yy \cdot u) \cdot yy$.

Pro $t = (y(xx \cdot z))z$ je $x = (y(xx \cdot z))z$, $x = (y(xx \cdot z))z = ((y(yy \cdot (xx \cdot z)))(xx \cdot z))z = ((y(yy \cdot (xx \cdot z)))(xx \cdot z))z = yz$.

Pro $t = (y(xy \cdot y))z$ je $x = (y(xy \cdot y))z$, $y(xy \cdot y) = (y(((y(xy \cdot y))y)y))z = (y \cdot xy)z$, $x = (y(xy \cdot y))z = ((y \cdot xy)u)z$ a případ $x = ((y \cdot xy)z)u$ jsme už rozřešili.

Pro $t = (y(xy \cdot z))y$ je $x = (y(xy \cdot z))y$, $y(xy \cdot z) = (y(((y(xy \cdot z))y)z))y = (y \cdot xz)y$, $x = (y(xy \cdot z))y = ((y \cdot xz)y)y$ a případ $x = ((y \cdot xz)y)y$ už jsme rozřešili. To řeší i případy $t = (y(xy \cdot z))u$ a $t = (y(xz \cdot u))z$.

Pro $t = (y(xz \cdot x))y$ je $x = (y(xz \cdot x))y$, $zx \cdot z = (z((y(xz \cdot x))y))z = y$.

Pro $t = (y(xz \cdot x))z$ je $x = (y(xz \cdot x))z$, $x = (y(xz \cdot x))z = ((y((x(xz \cdot x))x))(xz \cdot x))z = xz$.

Pro $t = (y(xz \cdot y))y$ je $x = (y(xz \cdot y))y$, $yx \cdot y = (y((y(xz \cdot y))y))y = y$, $xy = (xy \cdot x) \cdot xy = x \cdot xy$, $x = (y(xz \cdot y))y = ((xz \cdot y)(xz \cdot (xz \cdot y)))(xz \cdot y) = ((xz \cdot y)(xz \cdot y))(xz \cdot y)$, $x = ((xy \cdot z)(xy \cdot z))(xy \cdot z)$, $y(xz \cdot y) = ((((y(xz \cdot y))y)z)(((y(xz \cdot y))y)z))(((y(xz \cdot y))y)z) = (yz \cdot yz) \cdot yz$, $x = (y(xz \cdot y))y = ((yz \cdot yz) \cdot yz)y$, což řeší i případy $t = (y(xz \cdot y))u$ a $t = (y(xz \cdot u))u$.

Pro $t = (y(xz \cdot z))z$ je $x = (y(xz \cdot z))z$, $x = (y(xz \cdot z))z = ((y((y(xz \cdot z))(xz \cdot z)))(xz \cdot z))z = yz$.

Pro $t = (y(yx \cdot x))z$ je $x = (y(yx \cdot x))z$, $x = (y(yx \cdot x))z = ((y(yx \cdot x))(((y(yx \cdot x))x)x))z = xz$.

Pro $t = (y(yx \cdot y))z$ je $x = (y(yx \cdot y))z$, $x = (y(yx \cdot y))z = ((y(yx \cdot y))(((y(yx \cdot y))x)(y(yx \cdot y))))z = xz$.

Pro $t = (y(yx \cdot z))y$ je $x = (y(yx \cdot z))y$, $yx \cdot y = (y((y(yx \cdot z))y))y = yx \cdot z$, $yx \cdot z = yx \cdot y = yx \cdot u$, $x = (y(yx \cdot z))y = (yy \cdot ((yy \cdot x)z)) \cdot yy = (yy \cdot y) \cdot yy$, což řeší i případy $t = (y(yx \cdot z))u$, $t = (y(zx \cdot u))y$ a $t = (y(zx \cdot u))z$.

Pro $t = (y(yy \cdot x))z$ je $x = (y(yy \cdot x))z$, $x = (y(yy \cdot x))z = ((y(yy \cdot x))(((y(yy \cdot x))(y(yy \cdot x)))x))z = xz$.

Pro $t = (y(yz \cdot x))y$ je $x = (y(yz \cdot x))y$, $yx \cdot y = (y((y(yz \cdot x))y))y = y$, $x = xy \cdot x$, $yx = (yx \cdot y) \cdot yx = y \cdot yx$, $yz \cdot x = (y(yz \cdot (yz \cdot x)))y = (y(yz \cdot x))y = x$, $x = yz \cdot x = (yy \cdot z)x = zx$, což řeší i případy $t = (y(yz \cdot x))u$, $t = (y(zu \cdot x))y$ a $t = (y(zu \cdot x))z$.

Pro $t = (y(zx \cdot x))y$ je $x = (y(zx \cdot x))y$, $x = (y(zx \cdot x))y = (y(((x(zz \cdot z))x)x))y = (y \cdot zx)y$.

Pro $t = (y(zx \cdot x))z$ je $x = (y(zx \cdot x))z$, $x = (y(zx \cdot x))z = ((y(((zx \cdot x)y)y))(zx \cdot x))z = yz$.

Pro $t = (y(zx \cdot y))y$ je $x = (y(zx \cdot y))y$, $yx \cdot y = (y((y(zx \cdot y))y))y = zx \cdot y$, $x = (y(zx \cdot y))y = (u(zx \cdot y))y = (((zx \cdot y)(zy \cdot (zx \cdot y)))(zx \cdot y))y = yy$, což řeší i případy $t = (y(zx \cdot y))u$ a $t = (y(zx \cdot u))u$.

Pro $t = (y(zx \cdot z))z$ je $x = (y(zx \cdot z))z$, $x = (y(zx \cdot z))z = ((y(((zx \cdot z)y)(zx \cdot z)))(zx \cdot z))z = yz$.

Pro $t = (y(zy \cdot x))y$ je $x = (y(zy \cdot x))y$, $x = (y(zy \cdot x))y = (y(((y(zy \cdot z))y)x))y = (y \cdot zx)y$, což řeší i případy $t = (y(zy \cdot x))u$, $t = (y(zu \cdot x))u$,

Pro $t = (y(zz \cdot x))z$ je $x = (y(zz \cdot x))z$, $x = (y(zz \cdot x))z = (y(((zz \cdot x)(zz \cdot x))x))(zz \cdot x)$, $xz = ((y(((zz \cdot x)(zz \cdot x))x))(zz \cdot x))z = x$.

Pro $t = (y(x \cdot xx))z$ je $x = (y(x \cdot xx))z$, $x = (y(x \cdot xx))z = ((y(x \cdot xx))(x \cdot xx))z = xz$, což řeší i případy $t = (y(x \cdot xz))u$, $t = (y(x \cdot zx))u$, $t = (y(x \cdot zz))u$, $t = (y(x \cdot zu))v$, $t = (y(z \cdot xx))u$, $t = (y(z \cdot xz))u$, $t = (y(z \cdot xu))v$, $t = (y(z \cdot zx))u$ a $t = (y(z \cdot ux))v$.

Pro $t = (y(x \cdot xy))z$ je $x = (y(x \cdot xy))z$, $x = (y(x \cdot xy))z = ((y(x \cdot xy))(x(x(y(x \cdot xy)))))z = xz$.

Pro $t = (y(x \cdot xz))z$ je $x = (y(x \cdot xz))z$, $x = (y(x \cdot xz))z = ((y(y(y(x \cdot xz))))(x \cdot xz))z = yz$.

Pro $t = (y(x \cdot yx))z$ je $x = (y(x \cdot yx))z$, $y(x \cdot yx) = (y((y(x \cdot yx))(y(y(x \cdot yx)))))z = yx \cdot z$, $x = (y(x \cdot yx))z = (yx \cdot u)z$, $x = (yx \cdot u)z = (yx \cdot (y(yx \cdot y)))z = y$, což řeší i případ $t = (y(x \cdot yz))u$.

Pro $t = (y(x \cdot yy))z$ je $x = (y(x \cdot yy))z$, $x = (y(x \cdot yy))z = ((y(y \cdot yy))(x((y(y \cdot yy))(y(y \cdot yy)))))z = yz$.

Pro $t = (y(x \cdot zx))y$ je $x = (y(x \cdot zx))y$, $x = (y(x \cdot zx))y = (y(x((x(z \cdot zz))x)))y = (y \cdot xz)y$.

Pro $t = (y(x \cdot zx))z$ je $x = (y(x \cdot zx))z$, $x = (y(x \cdot zx))z = ((y(y((x \cdot zx)y)))(x \cdot zx))z = yz$, což řeší i případ $t = (y(x \cdot zu))z$.

Pro $t = (y(x \cdot zy))y$ je $x = (y(x \cdot zy))y$, $x = (y(x \cdot zy))y = (y(x((y(z \cdot zy))y)))y = (y \cdot xz)y$, což řeší i případy $t = (y(x \cdot zy))u$, $t = (y(x \cdot zu))y$ a $t = (y(x \cdot zu))u$.

Pro $t = (y(x \cdot zz))z$ je $x = (y(x \cdot zz))z$, $x = (y(x \cdot zz))z = ((y(x((x \cdot zz)(x \cdot zz))))(x \cdot zz))z = xz$.

Pro $t = (y(y \cdot xx))z$ je $x = (y(y \cdot xx))z$, $x = (y(y \cdot xx))z = ((y(y \cdot zz))((y(y \cdot zz)) \cdot xx))z = ((y(y \cdot zz))z)z$.

Pro $t = (y(y \cdot xy))z$ je $x = (y(y \cdot xy))z$, $y(y \cdot xy) = (y(y((y(y \cdot xy))y)))z = (y \cdot yx)z$, $x = (y(y \cdot xy))z = ((y \cdot yx)u)z$ a případ $x = ((y \cdot yx)z)u$ jsme již rozřešili.

Pro $t = (y(y \cdot xz))y$ je $x = (y(y \cdot xz))y$, $z(z \cdot xy) = (y(y((z(z \cdot xy))z)))y = (y \cdot yx)y$, $x = (y(y \cdot xz))y = ((z \cdot zx)z)y$ a případ $x = ((y \cdot yx)y)z$ už jsme rozřešili. To řeší i případy $t = (y(y \cdot xz))u$, $t = (y(z \cdot xu))y$ a $t = (y(z \cdot xu))z$.

Pro $t = (y(y \cdot yx))z$ je $x = (y(y \cdot yx))z$, $x = (y(y \cdot yx))z = ((y(y \cdot yx))((y(y \cdot yx))((y(y \cdot yx))x)))z = xz$.

Pro $t = (y(y \cdot zx))y$ je $x = (y(y \cdot zx))y$, $x = (y(y \cdot zx))y = (y(y((x(x \cdot yz))x)))y = (y \cdot yz)y$, což řeší i případy $t = (y(y \cdot zx))u$, $t = (y(z \cdot ux))y$ a $t = (y(z \cdot ux))z$.

Pro $t = (y(z \cdot xx))y$ je $x = (y(z \cdot xx))y$, $zx \cdot z = (z((y(z \cdot xx))y))z = (z((yy \cdot (z \cdot xx)) \cdot yy))z = y$.

Pro $t = (y(z \cdot xx))z$ je $x = (y(z \cdot xx))z$, $x = (y(z \cdot xx))z = (y((z \cdot xx) \cdot xx))(z \cdot xx)$, $xz = ((y((z \cdot xx) \cdot xx))(z \cdot xx))z = x$.

Pro $t = (y(z \cdot xy))y$ je $x = (y(z \cdot xy))y$, $x = (y(z \cdot xy))y = (y((xy \cdot (z(y \cdot xy))) \cdot xy))y = yy \cdot y$, což řeší i případy $t = (y(z \cdot xy))u$ a $t = (y(z \cdot xu))u$.

Pro $t = (y(z \cdot xz))z$ je $x = (y(z \cdot xz))z$, $x = (y(z \cdot xz))z = ((y((z \cdot xz)(y(z \cdot xz))))(z \cdot xz))z = ((y((z \cdot xz)(y(z \cdot xz))))(z \cdot xz))z = yz$.

Pro $t = (y(z \cdot yx))y$ je $x = (y(z \cdot yx))u$, $x = (y(z \cdot yx))u = ((y(z \cdot yy))(z((y(z \cdot yy))x)))u = yu$, což řeší i případy $t = (y(z \cdot yx))u$ a $t = (y(z \cdot ux))u$.

Pro $t = (y(z \cdot zx))z$ je $x = (y(z \cdot zx))z$, $x = (y(z \cdot zx))z = ((y((z \cdot zx)((z \cdot zx)y)))(z \cdot zx))z = yz$.

Pro $t = (y \cdot xx) \cdot xz$ je $x = (y \cdot xx) \cdot xz$, $x = (y \cdot xx) \cdot xz = x = ((y \cdot xx) \cdot xx) \cdot xz = x \cdot xz$, $x = x \cdot xz = x(x \cdot xz) = xx$, $x = (y \cdot xx) \cdot xz = yx \cdot xz$, $u \cdot xx = (y(u \cdot xx))((u \cdot xx)z) = (ux \cdot (u \cdot xx))((u \cdot xx) \cdot xz) = (ux \cdot (u \cdot xx))x = (ux \cdot ux)x = ux \cdot x$, $x = (y \cdot xx) \cdot xz = (y \cdot xx) \cdot xx = yx \cdot x = y \cdot xx = yx$, což řeší i případy $t = (y \cdot xx) \cdot zu$, $t = (y \cdot xz) \cdot xu$, $t = (y \cdot xz) \cdot zu$, $t = (y \cdot xz) \cdot uv$, $t = (y \cdot zx) \cdot xu$, $t = (y \cdot zx) \cdot zu$, $t = (y \cdot zx) \cdot uv$, $t = (y \cdot zz) \cdot xu$ a $t = (y \cdot zu) \cdot xv$.

Pro $t = (y \cdot xx) \cdot yz$ je $x = (y \cdot xx) \cdot yz$, $y \cdot xx = (y((y \cdot xx)(y \cdot xx))) \cdot yz = yx \cdot yz$, $x = (y \cdot xx) \cdot yz = (yx \cdot yu) \cdot yz$, $x = (yx \cdot yu) \cdot yz = (((y \cdot vv)x)((y \cdot vv) \cdot yu))((y \cdot vv) \cdot yz)$, $yx = (((y \cdot vv) \cdot yx)((y \cdot vv) \cdot yu))((y \cdot vv) \cdot yz) = vv \cdot v$, $yx = vv \cdot v = zu$, $x = (y \cdot xx) \cdot yz = yz$.

Pro $t = (y \cdot xx) \cdot zy$ je $x = (y \cdot xx) \cdot zy$, $x = (y \cdot xx) \cdot zy = ((x \cdot yy) \cdot xx)(z(x \cdot yy)) = y(z(x \cdot yy)) = y((yy \cdot zz)(x \cdot yy)) = yz$.

Pro $t = (y \cdot xx) \cdot zz$ je $x = (y \cdot xx) \cdot zz$, $x = (y \cdot xx) \cdot zz = ((y \cdot zz) \cdot xx) \cdot zz = z \cdot zz$.

Pro $t = (y \cdot xy) \cdot xz$ je $x = (y \cdot xy) \cdot xz$, $x = (y \cdot xy) \cdot xz = ((y \cdot xy)(x(y \cdot xy))) \cdot xz = x \cdot xz$, $x = x \cdot xz = x(x \cdot xz) = xx$, $u \cdot xu = (y((u \cdot xu)y))((u \cdot xu)z) = (y((u \cdot xu)y))((u \cdot xu) \cdot xz) = (y((u \cdot xu)y))x$, $u \cdot xu = (y((u \cdot xu)y))x = (xy \cdot ((u \cdot xu) \cdot xy))x = (xy \cdot x)x$, $u \cdot xu = (xy \cdot x)x = v \cdot xv$, $x = (y \cdot xy) \cdot xz = (y \cdot xy)(x \cdot zx) = (y \cdot xy)(u \cdot zu) = (y \cdot xy)((y \cdot zy)(z(y \cdot zy))) = (y \cdot xy)z$.

Pro $t = (y \cdot xy) \cdot yz$ je $x = (y \cdot xy) \cdot yz$, $x = (y \cdot xy) \cdot yz = ((x \cdot yx)(x(x \cdot yx)))((x \cdot yx)z) = y((x \cdot yx)z)$. Neboť jsme už dokázali, že $x = (y(xy \cdot x))z$ generuje triviální varietu, vidíme, že i $x = (y \cdot xy) \cdot yz$ generuje triviální varietu.

Pro $t = (y \cdot xy) \cdot zy$ je $x = (y \cdot xy) \cdot zy$, $x = (y \cdot xy) \cdot zy = (uy \cdot (x \cdot uy))((y \cdot zy) \cdot uy) = (uy \cdot (x \cdot uy))z$, $y \cdot xy = (uy \cdot ((y \cdot xy) \cdot uy))z = (uy \cdot x)z$, $x = (y \cdot xy) \cdot zy = ((uy \cdot x)v) \cdot zy$, $xu = ((uy \cdot xu)v) \cdot zy = (((u \cdot yu) \cdot xu)v)(z \cdot yu) = yv \cdot (z \cdot yu)$, $xu = yv \cdot (z \cdot yu) = yv \cdot ((u \cdot zu) \cdot yu) = yv \cdot z$, $x = (y \cdot xy) \cdot zy = xu$, $x = (y \cdot xy) \cdot zy = y \cdot xy = y$, což řeší i případy $t = (y \cdot xy) \cdot zu$, $t = (y \cdot xz) \cdot uy$, $t = (y \cdot xz) \cdot uz$,

Pro $t = (y \cdot xz) \cdot xy$ je $x = (y \cdot xz) \cdot xy$, $x = (y \cdot xz) \cdot xy = ((z \cdot xy) \cdot xz)(x(z \cdot xy)) = x(x(z \cdot xy))$, $z \cdot xy = (v((z \cdot xy)u))((z \cdot xy)v) = (v((z \cdot xy) \cdot xz))((z \cdot xy)v) = vx \cdot ((z \cdot xy)v) = (xz \cdot x)((z \cdot xy) \cdot xz) = (xz \cdot x)x$, $z \cdot xy = (xz \cdot x)x$,

$z\cdot xy = (xz\cdot x)x = z\cdot xu$, $x = (y\cdot xz)\cdot xy = (y\cdot xz)\cdot xu$ a případ $x = (y\cdot xz)\cdot xu$ už jsme rozřešili.

Pro $t = (y\cdot xz)\cdot xz$ je $x = (y\cdot xz)\cdot xz$, $u\cdot xz = (y((u\cdot xz)\cdot xz))((u\cdot xz)\cdot xz) = yx\cdot x$, $x = (y\cdot xz)\cdot xz = y(xz\cdot u)$.

Pro $t = (y\cdot xz)\cdot yy$ je $x = (y\cdot xz)\cdot yy$, $u\cdot xv = (y((u\cdot xv)z))\cdot yy = (y((u\cdot xv)\cdot uu))\cdot yy = yx\cdot yy$, $x = (y\cdot xz)\cdot yy = yy\cdot yy$, což řeší i případy $t = (y\cdot xz)\cdot yu$ a $t = (y\cdot xz)\cdot uu$.

Pro $t = (y\cdot xz)\cdot zz$ je $x = (y\cdot xz)\cdot zz$, $x = (y\cdot xz)\cdot zz = ((y\cdot yx)\cdot xx)\cdot xx = y\cdot xx = (y\cdot yx)\cdot xx = y$.

Pro $t = (y\cdot yx)\cdot zy$ je $x = (y\cdot yx)\cdot zy$, $x = (y\cdot yx)\cdot zy = ((x\cdot xy)((x\cdot xy)x))(z(x\cdot xy)) = y(z(x\cdot xy))$. Neboť jsme už dokázali, že $x = ((yx\cdot x)z)y$ generuje triviální varietu, vidíme, že i $x = y(z(x\cdot xy))$ generuje triviální varietu. To řeší i případy $t = (y\cdot yx)\cdot zu$, $t = (y\cdot zx)\cdot uy$ a $t = (y\cdot zx)\cdot uz$.

Pro $t = (y\cdot yy)\cdot xz$ je $x = (y\cdot yy)\cdot xz$, $u\cdot uu = (y\cdot yy)((u\cdot uu)\cdot zz) = (y\cdot yy)z$, $x = (y\cdot yy)\cdot xz = u\cdot uu$.

Pro $t = (y\cdot yz)\cdot xy$ je $x = (y\cdot yz)\cdot xy$, $x = (y\cdot yz)\cdot xy = ((y\cdot yz)((y\cdot yz)(uy\cdot y)))(x(y\cdot yz)) = ((y\cdot yz)\cdot uy)(x(y\cdot yz)) = u(x(y\cdot yz)) = u(x((y\cdot yz)((y\cdot yz)(vy\cdot y)))) = u(x((y\cdot yz)\cdot vy)) = u\cdot xv$, což řeší i případy $t = (y\cdot yz)\cdot xu$, $t = (y\cdot zu)\cdot xy$ a $t = (y\cdot zu)\cdot xz$.

Pro $t = (y\cdot zx)\cdot xz$ je $x = (y\cdot zx)\cdot xz$, $x = (y\cdot zx)\cdot xz = ((y\cdot xz)\cdot zx)\cdot xz = z\cdot xz$, $x = z\cdot xz = zx\cdot (x\cdot zx) = zx\cdot z$, $x = zx\cdot z$, $x = (y\cdot zx)\cdot xz = ((zx\cdot y)\cdot zx)\cdot xz = y\cdot xz$.

Pro $t = (y\cdot zx)\cdot yy$ je $x = (y\cdot zx)\cdot yy$, $xx = (y(z\cdot xx))\cdot yy = (y((x\cdot zz)\cdot xx))\cdot yy = yz\cdot yy$, $x = (y\cdot zx)\cdot yy = zz$, což řeší i případy $t = (y\cdot zx)\cdot yu$ a $t = (y\cdot zx)\cdot uu$.

Pro $t = (y\cdot zx)\cdot zz$ je $x = (y\cdot zx)\cdot zz$, $x = (y\cdot zx)\cdot zz = ((y\cdot xy)\cdot xx)\cdot xx = y\cdot xx$, $xx = y(xx\cdot xx) = yx$.

Pro $t = (y\cdot zy)\cdot xy$ je $x = (y\cdot zy)\cdot xy$, $x = (y\cdot zy)\cdot xy = (zy\cdot ((y\cdot zy)\cdot zy))(x\cdot zy) = (zy\cdot z)(x\cdot zy)$, $x = (zy\cdot z)(x\cdot zy) = (((y\cdot zy)\cdot uy)(y\cdot zy))(x((y\cdot zy)\cdot uy)) = (u(y\cdot zy))\cdot xu$, $x = (u(y\cdot zy))\cdot xu = (uv\cdot (y\cdot zy))(x\cdot uv)$, $v\cdot xv = (uv\cdot (y\cdot zy))((v\cdot xv)\cdot uv) = (uv\cdot (y\cdot zy))u$, $v\cdot xv = (uv\cdot (y\cdot zy))u = (uv\cdot (yt\cdot ((t\cdot tt)\cdot yt)))u = (uv\cdot (yt\cdot y))u$, $wy\cdot (x\cdot wy) = ((u\cdot wy)(yt\cdot y))u = ((y\cdot wy)(yt\cdot y))y = yt\cdot y$,

$yt \cdot y = wy \cdot (x \cdot wy) = yu \cdot y$, $yx = (y \cdot zy)(yx \cdot y) = (y \cdot zy)(yu \cdot y) = yu$, což řeší i případy $t = (y \cdot zy) \cdot xu$ a $t = (y \cdot zu) \cdot xu$.

Pro $t = (y{\cdot}zz){\cdot}xz$ je $x = (y{\cdot}zz){\cdot}xz$, $x = (y{\cdot}zz){\cdot}xz = ((y{\cdot}zz){\cdot}zz){\cdot}xz = z{\cdot}xz$, $x = z \cdot xz = zx \cdot (x \cdot zx) = zx \cdot z$, $x = zx \cdot z$, $x = (y \cdot zz) \cdot xz = ((zz \cdot y) \cdot zz) \cdot xz = y \cdot xz$. □

Dále si ukážeme několik rovností, které určují netriviální varietu.

Věta 4.5. *Buď V varieta určená jednou z rovností $x = ((yz \cdot y)x)z$, $x = (yz \cdot x) \cdot yz$, $x = (yz \cdot y) \cdot xz$. Ve všech třech případech se jedná o tutéž varietu a $J = \{y \cdot xy \to x, yx \cdot y \to x\}$ je přepisující systém pro V.*

Důkaz. Je snadné nahlédnout, že J je přepisující systém pro varietu určenou rovností $x = y \cdot xy$, případně $x = yx \cdot y$ (z $x = y \cdot xy$ dostaneme $x = y \cdot xy$, $x = yx{\cdot}(x{\cdot}yx) = yx{\cdot}y$ a obdobně naopak). Z těchto rovností jistě odvodíme rovnosti ze zadání, zbývá tedy dokázat jen opačné odvození. Pro $x = ((yz \cdot y)x)z$ je $x = ((yz \cdot y)x)z = (((zx)z \cdot zx)x)z = zx \cdot z$. Pro $x = (yz \cdot x) \cdot yz$ je $x = (yz \cdot x) \cdot yz = ((yz \cdot y)(yz) \cdot x) \cdot (yz \cdot y)(yz) = yx \cdot y$. Pro $x = (yz \cdot y) \cdot xz$ je $x = (yz \cdot y) \cdot xz = ((zz \cdot z) \cdot zz) \cdot xz = z \cdot xz$. □

Stejně tak bychom z $x = (yz \cdot x) \cdot xu$ snadno odvodili $x = yx \cdot xz$, opačné odvození je triviální a z [3] tak dostaneme, že $J = \{yx \cdot xz \to x, x(xy \cdot z) \to xy, (z \cdot xy)y \to xy$ je přepisující systém pro varietu určenou rovností $x = (yz \cdot x) \cdot xu$.

Na závěr předkládám 28 rovností, které určují tutéž varietu. Platí v ní komutativita, nicméně nepodařilo se mi určit, zda je či není triviální.

Věta 4.6. *Nechť t je jeden z termů $((y{\cdot}yx)z)z$ (1), $(y(xz{\cdot}z))y$ (2), $((yx{\cdot}y)z)z$ (3), $(y(z{\cdot}zx))y$ (4), $((y{\cdot}xy)z)z$ (5), $(y(xz{\cdot}y))z$ (6), $((yx{\cdot}z)z)y$ (7), $(y(y{\cdot}zx))z$ (8), $((y{\cdot}xz)y)z$ (9), $(y(y{\cdot}xz))z$ (10), $((y{\cdot}yz)x)z$ (11), $((yz{\cdot}z)x)y$ (12), $(y{\cdot}yz){\cdot}xz$. (13) $(yz{\cdot}z){\cdot}xy$ (14). Potom všechny rovnosti $x = t$ a $x = t_R$ určují tutéž varietu V, ve které platí $xy = yx$.*

Důkaz. Očíslujme si rovnosti $x = t$ stejně jako jsme si ve znění věty očíslovali termy. Postupně ukážeme, jak z některých rovností plynou jiné rovnosti tak, abychom ve výsledku dostali, že z libovolné z rovností 1 až 14 plynou všechny ostatní. Díky komutativitě dostaneme z každé rovnosti i rovnost opačnou, obdobně by se dal důkaz provést pro 1_R až 14_R.

Začneme rovností 1. Máme $x = ((y \cdot yx)z)z$, $x((y \cdot yx)u) = (((y \cdot yx)((y \cdot yx)u))((y \cdot yx)u))((y \cdot yx)u) = u$, $x = ((y \cdot yx)z)z = ((y \cdot yx)((z(z(y \cdot yx)))u))((z(z(y \cdot yx)))u) = u((z(z(y \cdot yx)))u)$, $x = u((z(z(y \cdot yx)))u) = (y \cdot yx)((z(z(y \cdot yx)))(y \cdot yx)) = y \cdot yx$, $x = u((z(z(y \cdot yx)))u) = u((z \cdot zx)u) = u \cdot xu$, $x = ((y \cdot yx)z)z = xz \cdot z$, $xy = y(xy \cdot y) = yx$. Díky komutativitě z rovnosti 1 jistě dokážeme rovnosti 2, 3, 4, 5.

Rovnost 2 $x = (y(xz \cdot z))y$ nám dává $x = (y(xz \cdot z))y$, $ux \cdot u = u((y(xz \cdot z))y) \cdot u = (u(((xz \cdot z)(xz \cdot z))(xz \cdot z)))u = xz \cdot z$, $x = (y(xz \cdot z))y = ((xz \cdot z)z)z = ((yx \cdot y)z)z$, tedy z 2 plyne 3.

Z rovnosti 3 $x = ((yx \cdot y)z)z$ plyne $x = ((yx \cdot y)z)z$, $x \cdot yx = (((yx \cdot y) \cdot yx) \cdot yx) \cdot yx = y$, $x = ((yx \cdot y)z)z = ((yx \cdot y)(z(yx \cdot y)))(z(yx \cdot y)) = z(z(yx \cdot y))$, tedy z 3 plyne 5_R, kde 5_R je rovnost opačná k 5. Později ukážeme, že z 5 plyne 1, tedy z 5_R plyne 1_R a protože komutativita dokázaná z 1 lze stejně dokázat z 1_R, celkově dostaneme, že z 3 plyne 5 (díky komutativitě z $x = t$ plyne $x = t_R$).

Nyní ale ještě ukážeme, že i z 4 plyne 5_R. Je $x = (y(z \cdot zx))y$, $x = (y(z \cdot zx))y = (y((x(z \cdot zx))((x(z \cdot zx))x)))y = (y((x(z \cdot zx))x))y = yx \cdot y$, $x = (y(z \cdot zx))y = z \cdot zx$, $x = z \cdot zx = z(z(yx \cdot y))$.

A teď už $x = ((y \cdot xy)z)z$, $x(u(y \cdot xy)) = (((y \cdot xy)(u(y \cdot xy)))(u(y \cdot xy)))(u(y \cdot xy)) = u$, $x = y(x(z \cdot yz)) = y(x(z \cdot yz)) = y(x(xy \cdot (y \cdot xy))) = y \cdot xy$, $x = ((y \cdot xy)z)z = xz \cdot z$, $x = yx \cdot (x \cdot yx) = yx \cdot y$, $x = yx \cdot y = (yx \cdot x) \cdot yx = y \cdot yx$, $x = y \cdot yx = ((y \cdot yx)z)z$, takže z 5 skutečně odvodíme 1. Tím jsme zatím ukázali, že rovnosti 1 až 5 (ještě s 1_R až 5_R) určují tutéž varietu, v níž platí komutativita.

Vezměme nyní rovnost 6, je $x = (y(xz \cdot y))z$, $y(xz \cdot y) = (y(((y(xz \cdot y))z)y))z = (y \cdot xy)z$, $x = (y(xz \cdot y))z = ((y \cdot xy)z)z$, tedy z 6 odvodíme 5 a tudíž i komutativitu a díky ní i rovnosti 7, 8, 9, 10.

Z rovnosti 7 plyne $x = ((yx \cdot z)z)y$, $xy \cdot (yx \cdot z) = ((((yx \cdot z)z)y)y)(yx \cdot z) = z$, $x = ((yx \cdot z)z)y = ((yx \cdot (xy \cdot z))(xy \cdot z))y = (z(xy \cdot z))y$, $x = (y(xz \cdot y))z$, tedy rovnost 6 a komutativita.

Z rovnosti 8 plyne $x = (y(y \cdot zx))z$, $x = (y(y \cdot zx))z = ((y(y(zx \cdot u)))((y(y(zx \cdot u))) \cdot zx))z = ((y(y(zx \cdot u)))u)z$, $x = ((y(y(zx \cdot zx))) \cdot zx)z = zx \cdot z$, $x = (y(y \cdot zx))z = ((zx \cdot y)((zx \cdot y) \cdot zx))z = ((zx \cdot y)y)z$, $x = ((yx \cdot z)z)y$, tedy rovnost 7 a komutativita.

Z rovnosti 9 plyne $x = ((y \cdot xz)y)z$, $(y \cdot xz)y = ((y(((y \cdot xz)y)z))y)z = (yx \cdot y)z$, $x = ((y \cdot xz)y)z = ((yx \cdot y)z)z$, tedy rovnost 3 a komutativita.

Z rovnosti 10 plyne $x = (y(y \cdot xz))z$, $y(y \cdot xz) = (y(y((y(y \cdot xz))z)))z = (y \cdot yx)z$, $x = (y(y \cdot xz))z = ((y \cdot yx)z)z$, tedy rovnost 1 a komutativita.

Ukázali jsme, že z každé z rovností 6 až 10 plyne komutativita, je tudíž možno odvodit každou z každé. Také jsme ukázali, že ze skupiny 6-10 lze odvodit skupinu 1-5, k opačnému odvození nám poslouží rovnost 5 a postup $x = ((y \cdot xy)z)z$, $(y \cdot xy)z = ((z(((y \cdot xy)z)z))y)y = (zx \cdot y)y$, $x = ((y \cdot xy)z)z = ((zx \cdot y)y)z$, $x = ((yx \cdot z)z)y$, tedy z 5 jsme odvodili 7.

Zbývá nám už propojit jen čtyři rovnosti. Z rovnosti 11 dostaneme rovnost 1 postupem $x = ((y \cdot yz)x)z$, $(y \cdot yz)x = ((y \cdot yz)((y \cdot yz)x))z$, $((y \cdot yz)x)x = (((y \cdot yz)((y \cdot yz)x))z)x = z$, $x = ((y \cdot yx)z)z$, tedy i komutativitu a díky ní i rovnost 12. Naopak, z 12 dostaneme 11 postupem $x = ((yz \cdot z)x)y$, $x = ((yz \cdot z)x)y = (((xz \cdot z)z)x) \cdot xz = z \cdot xz$, $x = ((yz \cdot z)x)y = (((y \cdot zy) \cdot zy)x)y = ((z \cdot zy)x)y$, $x = ((y \cdot yz)x)z$.

Z rovnosti 13 dostaneme rovnost 11_R pomocí $x = (y \cdot yz) \cdot xz$, $x = ((y \cdot yz)((y \cdot yz)(uz \cdot z)))(x(uz \cdot z)) = ((y \cdot yz) \cdot uz)(x(uz \cdot z)) = u(x(uz \cdot z))$, díky získané komutativitě pak z 13 plyne i 14. Naopak, z 14 dostaneme 13 postupem $x = (yz \cdot z) \cdot xy$, $x = (yz \cdot z) \cdot xy = (((y \cdot zy) \cdot zy) \cdot zy)(x(y \cdot zy)) = z(x(y \cdot zy))$, $x = z(x(y \cdot zy)) = z(x(xz \cdot (z \cdot xz))) = z \cdot xz$, $x = (yz \cdot z) \cdot xy = ((y \cdot zy) \cdot zy) \cdot xy = (z \cdot zy) \cdot xy$.

K dokončení celého důkazu už stačí nahlédnout, že z 8 odvodíme 13: $x = (y(y \cdot zx))z$, $x = (y(y \cdot zx))z = ((y(y(zx \cdot u)))((y(y(zx \cdot u))) \cdot zx))z = ((y(y(zx \cdot u)))u)z$, $x = ((y(y(zx \cdot zx))) \cdot zx)z = zx \cdot z$, $x = (y(y \cdot zx))z = (y(y(xz \cdot x))) \cdot xz = (y \cdot yz) \cdot xz$.

Celkově jsme tak ukázali, že z každé z rovností 1 až 14 a 1_R až 14_R plyne každá jiná, určují tedy tutéž varietu V, ve které platí mimo jiné komutativita. Otázkou však zůstává, zda je V triviální. $\square$

Kapitola 5

Závěr

V této práci jsme se zabývali popisem volných algeber ve varietách grupoidů určených rovností tvaru $x = t$, kde t je term délky 5. Omezili jsme se na dvě skupiny případů:

(1) t začíná x a končí proměnnou $y \neq x$ a obsahuje alespoň tři různé proměnné;

(2) t začíná proměnnou y a končí proměnnou z pro $y \neq x \neq z$ (je možné $y = z$) a obsahuje alespoň tři různé proměnné, z nichž jedna je x.

Ukázali jsme, že pro prvky množiny (1) určuje v mnoha případech příslušná rovnost varietu, která je určena i o něco jednodušší rovností a je nám již známa. U množiny (2) jsme pak zjistili, že mnoho rovností tohoto typu určuje triviální varietu, tedy varietu obsahující jen jednoprvkové algebry.

Z práce je vidět, že ač oproti článku [3] máme k dispozici mnohem více rovností, povětšinou neurčují žádnou novou varietu. Na druhou stranu jsme použili teorii přepisujících systémů k popsání několika nových variet, které se u termů délky 4 neobjevily.

Literatura

[1] Burris S., Sankappanavar H. P. (1981): A Course in Universal Algebra. Springer Verlag, Berlin.

[2] Ježek J. (1976): Univerzální algebra a teorie modelů. SNTL, Praha.

[3] Ježek J. (1982): Free Grupoids In Varieties Determined By a Short Equation. *Acta Universitatis Carolinae–Mathematica et Physica* **23**, 3–24.

[4] Ježek J., McNulty G. (1995): Perfect Bases for Equational Theories. *Journal of Symbolic Computation* **19**, 489–505.

[5] Knuth D. E., Bendix P. B. (1970): Simple word problems in universal algebras. In (Leech, J., ed.): *Computational Problems in Abstract Algebra* (Proc. Conf., Oxford, 1967). Oxford: Pergamon Press, 263–297.