UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Martin Klimeš

Limitní ultramocnina a neregulární universum

Katedra teoretické informatiky a matematické logiky

Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Josef Mlček, CSc.
Studijní program: Matematické struktury

Praha 2007

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním.

V Praze 10. srpna 2007 Martin Klimeš

==

Název: Limitní ultramocnina a neregulární universum

Autor: Martin Klimeš

Katedra: Katedra teoretické informatiky a matematické logiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Josef Mlček, CSc.

e-mail vedoucího: mlcek@ktiml.mff.cuni.cz

Abstrakt: Je navrženo zobecnění limitní ultramocniny tak, aby poskytlo charakterizaci (standardně omezených částí) elementárních rošíření universa teorie množin; speciálně je aplikovatelná na modely nestandardní teorie množin. Důraz je přitom kladen na slabý princip standardizace, kterému je věnována zvláštní sekce, stejně jako otázce saturovanosti. Jsou zachyceny souvislosti mezi elementární vnořitelností nestandardních rozšíření universa a zobecněným Rudin–Keislerovým uspořádáním, a mezi standardizovatelností a Rudin–Frolíkovým uspořádáním ultrafiltrů. Dále je ukázáno, že existence nestandardních rozšíření, k jejichž nagenerování ze standardního universa je třeba vlastní třídy prvků, vynucuje existenci modelu s měřitelným kardinálem.

Klíčová slova: Limitní ultramocnina, nestandardní teorie množin, elementární vnoření univers, Rudin–Keislerovo uspořádání, princip standardizace.

==

==

Title: Limit Ultrapower and Nonregular Universe

Author: Martin Klimeš

Department: Department of Computer Science and Mathematical Logic

Supervisor: doc. RNDr. Josef Mlček, CSc.

Supervisor's e-mail: mlcek@ktiml.mff.cuni.cz

Abstract: The limit ultrapower is generalized to complete distributive lattices equipped with a ultrafilter and a partition system. This construction provides a complete characterization of the internal universe in models of nonstandard set theory: we prove that bounded part of an elementary extension of a set universe is given by suitable partition ultrapower. Our special interest is in models where a weak form of standardization holds. The Rudin–Keisler preorder on ultrafilters is defined on partition systems on ultrafilters such that it corresponds to embeddings of related partition ultrapowers, whereas Rudin–Frolík ordering characterizes those embedddings which are standardizable.

Finally, the problem whether set-many elements are always enough to generate the internal universe from its standard part is considered. It's shown that the existence of a narrow elementary extension which doesn't rise from adjunction of set-many elements implies an existence of highly nonregular ultrafilters, and thus is equivalent to a large-cardinal hypothesis.

Key words and phrases: Limit ultrapower, nonstandard set theory, elementary embedding, Rudin–Keisler order, standardization.

==

Vřele děkuji mému diplomovému vedoucímu, J. Mlčkovi,
za jeho zájem a nevšední ochotu a za všechny ty cenné připomínky,
nebýt kterých, nemohla by tato práce být nikdy zveřejněna.

OBSAH

ÚVOD

Rozšíření metod nestandardního kalkulu na celé universum teorie množin, a tím na veškerou matematiku, je dnes všeobecně uznáváno jako velmi žádoucí, přestože pro dokázání většiny nestandardně získaných výsledků bohatě vystačí obvyklý superstrukturní přístup (z teoretického hlediska nepříliš uspokojující). Za více než třicet let zkoumání v dané oblasti byla navržena celá řada rozdílných verzí nestandardní teorie množin. Jejich jádro je vždy stejné: elementární rozšíření nějakého množinového universa. Tato práce přináší detailní charakterizaci elementárních rozšíření modelů ZFC$^-$ pomocí tzv. rozkladové ultramocniny universa, k tomuto účelu navržené konstrukce. Ta představuje zobecnění jak klasické ultramocniny universa, tak i limitní (jak ji definují Chang & Keisler v [CK]), nebo Booleovské ultramocniny. Ve svém zkoumání v tomto oboru navazuji na výsledky z diplomových prací Petra Pajase [PAJ] a Emila Jeřábka [JEŘ].

V podstatě existují dva typy přístupu k základům nestandardní teorie množin: (i) skrze elementární vnoření universa $\mathbb{V}$ do tranzitivní třídy (tzv. reflexe, klasicky značené symbolem $*$) a (ii) axiomatické zavedení teorie pomocí predikátů $\mathbb{S}$ (standardní) a $\mathbb{I}$ (internální) — poměrně nedávný souhrn této problematiky lze najít v referátu [DN]. Situace, kterou se zabývám ve své práci je dostatečně obecná na to, aby zahrnula oba případy a aby získané výsledky bylo možné aplikovat na většinu nestandardních teorií množin — konkrétně na ty případy, kdy universum rozšíření splňuje sadu axiomů ZFS$^-$ nebo ZFC. Přitom je kladen speciální důraz na standardizovatelná rozšíření, to je taková, kde platí slabá (internální) forma axiomu standardizace. Vzhledem k tomu, že každý prvek z ultramocniny je omezen nějakým standardním (konstantou), a tuto vlastnost přejímá i rozkladová ultramocnina, je pomocí této konstrukce možné popsat pouze tu část nestandardních rozšíření, která je standardně omezená. Tím vymezené požadavky na model nestandardní teorie množin lze shrnout jako axiomatický systém wBST — oslabený fragment teorie BST (Bounded Set Theory) Vladimira Kanovei. Rozkladová ultramocnina zavedená v kapitole 1 tvoří přirozený model této teorie. Je přitom direktní limitou ultramocnin universa přes jednotlivé rozklady, což koresponduje s obecnou Rudin-Keislerovskou strukturací intrenálního universa modelu wBST. Také ta bezprostředně popisuje internální universum jako direktní limitu jednoduchých (jednogenerovaných) modelů, neboli ultramocnin standardního universa, — jak je ukázáno v [JEŘ].

Usměrněné systémy ultrafiltrů, které odpovídají direktním limitám ultramocnin univers (nazývám je ultragramy) stojí v centru pozornosti kapitoly 2. Ukazuji zde mimo jiné, jak z takového ultragramu sestrojit rozkladovou ultramocninu, která tedy by byla jemu příslušnou direktní limitou; to uzavírá důkaz vzájemné korespondence.

Rozšíření Rudin-Keislerova kvaziuspořádání ultrafiltrů i na ultragramy potom přináší charakterizaci elementární vnořitelnosti dvou internálních univers a podobně se rozřeší i problém izomorfismu modelů wBST. Kompletní charaktrizace modelů wBST rozkladovými ultramocninami je formulována a dokázána v kapitole 3. Nabízí se přitom otázka, které dvojice podunivers internálního universa tvoří samy model wBST, neboli, kdy platí slabá standardizace? Andreev s Hrbáčkem dokázali (v [AH]), že v rámci teorie BST neexistuje žádné jiné netriviální poduniversum, pro které by platil plný princip standardizace, než je standardní universum. Pro oslabenou standardizaci je však situace zcela odlišná — v kapitole 4 ukážeme, že její platnost odpovídá Rudin–Frolíkovu uspořádání ultrafiltrů. Kapitola 5 popisuje saturovanost v modelech wBST ve vztahu k ultradatům.

Z hlediska strukturní charakterizace modelů teorie wBST představuje důležitý rys kofinální typ jejich Rudin-Keislerovského usměrnění internálního universa. Je dobře známo, že modely mající v tomto kvaziuspořádání maximální element (tzv. jednoduché modely), to je ty, k jejichž nagenerování ze standardních prvků stačí přidat jediný nový element, jsou právě klasické ultramocniny. Naproti tomu rozkladové ultramocniny s množinovými ultradaty charakterizují modely s množinovou kofinalitou (tzv. polojednoduché modely), což jsou přitom právě ty modely, které lze elementárně vnořit do jednoduchých; speciálně jsou tedy úzké (extenze jejich prvků jsou množiny). Otázku zda každý úzký model wBST je polojednoduchý, zodpověděl Emil Jeřábek v práci [JEŘ] negativně, když za předpokladu vlastní třídy měr sestrojil protipříklad. Ukážeme, že předpoklad existence úzkého nepolojednoduchého modelu již existenci míry vynucuje. Přesněji: vynucuje existenci vysoce neregulárních uniformních ultrafiltrů, která je podle známého Donderova výsledku [DON] ekvivalentní existenci vnitřního modelu s mírou. To znamená, že v samotném ZFS^- nejen není možné takový model sestrojit, ale není možné ani dokázat jeho konzistenci. Předpoklad existence úzkého nepolojednoduchého modelu je z kategorie tvrzení o velkých kardinálech.

§ 0. ZÁKLADNÍ POJMY A ZNAČENÍ

Dějištěm této práce je Zermelo-Fraenkelova teorie množin bez axiomu regularity — teorie ZFC$^-$. Jazykem je $\in$-jazyk; ustálené množinové značení bude v souladu s knihou [JECH], která také může posloužit jako odkaz pro dobře známé a zde nedefinované pojmy. S třídami, které budou vždy označovány pomocí velkých písmen, budeme zacházet obvyklým (neformálním) způsobem; vždy ale se zřetelem k jejich syntaktickému charakteru (třídy jako extenze formulí). Takovým způsobem je nutné chápat zápisy jako:

$$x \in A,\ A = B,\ A \subseteq B,\ A \times B,\ A - B,\ \wp(A) := \{\, x \mid x \subseteq A \,\}.$$

Poslední z nich definuje potenční třídu třídy A.

Když R je binární relace na X $(R \subseteq X \times X)$, tak o ní řekneme, že je *úzká*, pokud $R^{-1}``\{x\}$ je množina pro každé $x \in X$. O třídě $X$ řekneme, že je *$R$-tranzitivní*, jestliže $x \in X \Longrightarrow R^{-1}``\{x\} \subseteq X$, a o struktuře $\langle X, R\rangle$, že je *extenzionální*, pokud pro $a, b \in X$ $(\forall x \in X\ xRa \Longleftrightarrow xRb) \Longrightarrow a = b$.

Modelem rozumíme interpretaci, tedy syntaktický model; model $\in$-jazyka, nazývaný též *$\in$-struktura*, je dvojice tříd $\langle \mathbb{M}, \in^{\mathbb{M}}\rangle$, kde $\in^{\mathbb{M}} \subseteq \mathbb{M} \times \mathbb{M}$, třída $\mathbb{M}$ je *doména* modelu. Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme na model odkazovat jeho doménou. Interpretace formule ve struktuře se nazývá *relativizace*. Konkrétně relativizace $\in$-formule ϕ do $\in$-struktury $\langle \mathbb{M}, \in^{\mathbb{M}}\rangle$, je formule $\phi^{\mathbb{M}, \in^{\mathbb{M}}}$, která vznikne z ϕ nahrazením každého $\in$ symbolem $\in^{\mathbb{M}}$, a následně postupným nahrazením veškerých podformulí tvaru $\exists x\ \psi(x)$, resp. $\forall x\ \psi(x)$, formulemi $\exists x \in \mathbb{M}\ \psi(x)$, resp. $\forall x \in \mathbb{M}\ \psi(x)$. Namísto $\phi^{\mathbb{M}, \in^{\mathbb{M}}}$ se často píše $\langle \mathbb{M}, \in^{\mathbb{M}}\rangle \models \phi$ nebo $\phi^{\mathbb{M}}$ — říkáme, že ϕ platí v $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}$ splňuje ϕ. Relativizace množinových relací a konstant je dána relativizací jejich definujících formulí.

Elementární vnoření se vždy budou vztahovat k $\in$-jazyku. Pro $\in$-struktury $\langle \mathbb{W}, \in^{\mathbb{W}}\rangle$, $\langle \mathbb{M}, \in^{\mathbb{M}}\rangle$, píšeme $\mathbb{W} \preceq \mathbb{M}$, pokud

(i) $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{M}$, $\in^{\mathbb{W}} = \in^{\mathbb{M}} \cap \mathbb{W} \times \mathbb{W}$,

(ii) $\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{W}\ (\phi^{\mathbb{W}}(x_1, \ldots, x_n) \Longleftrightarrow \phi^{\mathbb{M}}(x_1, \ldots, x_n))$ pro každou $\in$-formuli ϕ s volnými proměnnými mezi $x_1, \ldots, x_n$.

Universem budeme rozumět model teorie množin ZFC$^-$. Speciálně

$$\mathbb{V} := \{\, x \mid x = x \,\},$$

$$\mathbb{WF} := \bigcup_{\alpha \in Ord} V_\alpha,\ \text{ kde } V_0 = \emptyset,\ V_{\alpha+1} = \wp(V_\alpha) \text{ a } V_\gamma = \bigcup_{\beta < \gamma} V_\beta, \text{ je-li } \gamma \text{ limitní},$$

jsou universa ($\mathbb{WF}$ je tzv. fundované jádro).

0.1. Dohoda. Symbol $\mathbb{U}$, bude značit tranzitivní třídu takovou, že $\langle \mathbb{U}, \in \rangle \models \mathrm{ZFC}^-$; všechny omezené množinové relace a operace (konkrétně Gödelovy operace) jsou v tom případě absolutní pro $\mathbb{U}$. Tuto konvenci přijímáme poze pro zjednodušení značení (není nutné dělat relativizaci všech zápisů do $\mathbb{U}$).

Některé konstrukce vyžadují, aby universum, ve kterém jsou prováděny, splňovalo axiom silného výběru anebo axiom regularity (jenž pro naše účely též vystačí):

(AS) ***Axiom silného výběru*** je formulován v $\in$-jazyce rozšířeném o binární predikát $\mathcal{C}$, který definuje očíslování množin ordinály:

$$\forall x\ (Ord(x) \Longrightarrow \exists!\, y\ \mathcal{C}(x,y)) \ \ \&\ \ \forall y\ \exists!\, x\ \mathcal{C}(x,y) \ \ \&\ \ \forall x,y\ (\mathcal{C}(x,y) \Longrightarrow Ord(x)).$$

Teorie ZFS^- je teorie ZFC^-+AS se schématy axiomů vydělení a nahrazení postulovanými pro všechny formule $\in, \mathcal{C}$-jazyka.

(AF) ***Axiom regularity***. *Každá neprázdná množina má $\in$-minimální prvek, tj. prvek s ní disjunktní.*

Axiom regularity je ekvivalentní předpokladu $\mathbb{V} = \mathbb{WF}$. Oba axiomy umožňují vyjádřit libovolnou třídu T jako sjednocení dobře uspořádaného řetězce množin $T = \bigcup_{\alpha \in Ord} t_\alpha$, $\alpha < \beta \Longrightarrow t_\alpha \subseteq t_\beta$. Speciálně tak umožní definovat formuli vybírající z každé třídy nějakou její podmnožinu, což je nutné pro reprezentaci faktorů vlastních tříd podle ekvivalencí, jež nejsou úzké (například třeba při konstrukci ultramocniny universa).

§ 1. ROZKLADOVÁ ULTRAMOCNINA UNIVERSA

V této kapitole je popsána konstrukce rozkladové ultramocniny z tzv. ultradat, jsou ukázány její základní vlastnosti a její souvislost s direktní limitou.

ULTRADATA.

1.1. Předpoklady. Třídová struktura $\langle \mathcal{B}, \leqslant, \wedge, \vee, 0\rangle$, $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{U}$, budiž *nahoru–úplný distributivní svaz s nulou* (jako nejmenším prvkem) — krátce *svaz*; tím míníme, že pro každou podmnožinu $s \subseteq \mathcal{B}$, $s \in \mathbb{U}$, existuje prvek $\bigvee s := \sup s$ a platí $a \wedge \bigvee s = \bigvee \{\, a \wedge b \mid b \in s \,\}$.

Poznamenejme, že od svazu $\mathcal{B}$ nepožadujeme, aby byl úzký (tj. k $a \in \mathcal{B}$ může existovat vlastní třída prvků menších).

Třída $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{B}$ ať je *ultrafiltr* na svazu $\mathcal{B}$, to je:

(i) $0 \notin \mathcal{Z}$,
(ii) $\forall c, d \in \mathcal{Z}\ \exists\, e \in \mathcal{Z}\ (e \leqslant c \wedge d)$,
(iii) $\forall c \in \mathcal{Z}\ \forall b \in \mathcal{B}\ (c \leqslant b \implies b \in \mathcal{Z})$,
(iv) $\forall a \in \mathcal{B}\ (a \in \mathcal{Z}$ nebo $\exists\, d \in \mathcal{Z}\ (a \wedge d = 0))$.

1.2. Lemma. Z podmínky (iv) speciálně plyne:

$$(a \vee b) \in \mathcal{Z} \implies a \in \mathcal{Z} \text{ nebo } b \in \mathcal{Z}.$$

Důkaz. Pokud $a \notin \mathcal{Z}$ tak existuje $d \in \mathcal{Z}$: $a \wedge d = 0$, tedy $d \wedge b = d \wedge (a \vee b) \in \mathcal{Z}$, a proto též $b \in \mathcal{Z}$. ◆

Pro $a \in \mathcal{B}$ je $\mathcal{B}{\restriction}a := \{\, c \in \mathcal{B} \mid c \leqslant a \,\}$ podsvaz svazu $\mathcal{B}$, na kterém, když $a \in \mathcal{Z}$, je $\mathcal{Z}{\restriction}a := \{\, c \in \mathcal{Z} \mid c \leqslant a \,\}$ ultrafiltr.

1.3. Definice. *Nahoru usměrněná třída* (krátce *usměrnění*) je třídová struktura $\langle \mathcal{P}, \leq \rangle$, kde $\leq$ je kvaziuspořádání na $\mathcal{P}$ a $\forall p, q \in \mathcal{P}\ \exists\, s \in \mathcal{P}\ (s \geq p\ \&\ s \geq q)$.

1.4. Definice.
(a) Množina $u \subseteq \mathcal{B}$, $u \in \mathbb{U}$, je *$\mathcal{Z}$-rozklad v* $\mathbb{U}$, pokud

$$\bigvee u \in \mathcal{Z} \quad \& \quad (a, b \in u \Longrightarrow a \wedge b = 0).$$

(b) Jsou-li u, v $\mathcal{Z}$-rozklady, pak u *zjemňuje* v, psáno $u \geq_{\mathcal{Z}} v$, pokud

$$\exists\, d \in \mathcal{Z}\ \forall a \in u\ \exists\, b \in v\ (a \wedge d \leqslant b).$$

(c) Třída $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{U}$ je *$\mathcal{Z}$-rozkladový systém*, je-li $\langle \mathcal{U}, \leq_{\mathcal{Z}} \rangle$ neprázdná nahoru usměrněná třída $\mathcal{Z}$-rozkladů.

(d) Pro $\mathcal{Z}$-rozkladové systémy $\mathcal{U}$, $\mathcal{W}$ zavedeme vztahy $\leq_{\mathcal{Z}}$ a $\simeq_{\mathcal{Z}}$ následovně

$$\begin{aligned} \mathcal{W} \leq_{\mathcal{Z}} \mathcal{U}, &\text{ značí } \forall w \in \mathcal{W}\ \exists u \in \mathcal{U}\ (w \leq_{\mathcal{Z}} u), \\ \mathcal{W} \simeq_{\mathcal{Z}} \mathcal{U}, &\text{ značí } \mathcal{W} \leq_{\mathcal{Z}} \mathcal{U}\ \&\ \mathcal{U} \leq_{\mathcal{Z}} \mathcal{W}. \end{aligned}$$

1.5. Poznámka & definice. Je-li $u \in \mathcal{Z}$ rozklad, pak

$$\mathcal{Z}_u := \{\, s \subseteq u \mid s \in \mathbb{U}\ \&\ \bigvee s \in \mathcal{Z} \,\}$$

je ultrafiltr Booleovy algebry $\wp(u)^{\mathbb{U}}$. Přitom však ne nutně $\mathcal{Z}_u \in \mathbb{U}$; pokud to nicméně platí, je $\mathbb{U} \models$ "$\mathcal{Z}_u$ je ultrafiltr na u".

Důkaz. Všimněme si, že pro $s, t \subseteq u$ je

$$\bigvee s \wedge \bigvee t = \bigvee \{\, a \wedge b \mid a \in s, b \in t \,\} = \bigvee \{\, a \mid a \in s \cap t \,\} = \bigvee (s \cap t).$$

Podmínky (i)–(iii) z 1.1. se proto automaticky přenáší ze $\mathcal{Z}$ na $\mathcal{Z}_u$. Dále

$$\bigvee s \vee \bigvee (u - s) = \bigvee u \in \mathcal{Z},$$

takže podle lemmatu 1.2. je buď $s \in \mathcal{Z}_u$ nebo $(u - s) \in \mathcal{Z}_u$. ◆

1.6. Definice. Trojici $\langle \mathcal{B}, \mathcal{Z}, \mathcal{U} \rangle$, kde $\mathcal{Z}$ je ultrafiltr svazu $\mathcal{B}$ ($\mathcal{B} \subseteq \mathbb{U}$), tak jako výše, a $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{U}$ je $\mathcal{Z}$-rozkladový systém, nazveme *ultradata na* $\mathbb{U}$.

Typickým příkladem svazu $\mathcal{B}$ je úplná Booleova algebra, nebo algebra množin, resp. kódovaných podtříd nějaké třídy I. Později se ukáže, že pro konstrukci rozkladové ultramocniny jsou to příklady zcela obecné.

ROZKLADOVÁ ULTRAMOCNINA.

Nadále předpokládejme, že $\mathbb{U}$ je modelem ZFC nebo ZFS$^-$.

Pro $\mathcal{Z}$-rozklady u, v a funkce $f\colon u \to \mathbb{U}$, $g\colon v \to \mathbb{U}$, $f, g \in \mathbb{U}$, polož

$$\begin{aligned} f =_{\mathcal{Z}} g, &\text{ pokud } \bigvee \{\, a \wedge b \mid f(a) = g(b) \,\} \in \mathcal{Z}, \\ f \subseteq_{\mathcal{Z}} g, &\text{ pokud } \bigvee \{\, a \wedge b \mid f(a) \subseteq g(b) \,\} \in \mathcal{Z}, \\ f \in_{\mathcal{Z}} g, &\text{ pokud } \bigvee \{\, a \wedge b \mid f(a) \in g(b) \,\} \in \mathcal{Z}. \end{aligned}$$

Ke každé funkci f je $\{\, g \in \mathbb{U} \mid \mathrm{dom}(g) \text{ je } \mathcal{Z}\text{-rozklad } \&\ f =_{\mathcal{Z}} g \,\}$ třída ekvivalence funkcí, kterou budeme reprezentovat vhodnou množinou $[f]$:

(a) pomocí AS, nechť $[f] := g$ pro funkci $g =_{\mathcal{Z}} f$, s minimálním ordinálem $\mathcal{C}(g)$; nebo

(b) za použití AF jako $[f] := \{\, g\colon v \to \mathbb{U} \mid v \text{ je } \mathcal{Z}\text{-rozklad } \&\ f =_{\mathcal{Z}} g \,\} \cap V_\alpha$, kde α je minimální takové, že průnik je neprázdný.

Dále položíme $[f] \mathrel{\epsilon} [g]$ pokud $f \in_{\mathcal{Z}} g$.

Rozkladová ultramocnina universa je struktura $\langle \mathbb{U}^{\mathcal{U}}/_{\mathcal{Z}}, \epsilon \rangle$ s doménou

$$\mathbb{U}^{\mathcal{U}}/_{\mathcal{Z}} := \{\, [f] \mid f \in \mathbb{U} \text{ funkce, } \mathrm{dom}(f) \in \mathcal{U} \,\}.$$

Kanonické vnoření $\mathfrak{k}\colon \mathbb{U} \hookrightarrow \mathbb{U}^{\mathcal{U}}/_{\mathcal{Z}}$ je dáno $\mathfrak{k}(x) := [\{\langle c, x \rangle\}]$, kde c je libovolný prvek $\mathcal{Z}$.

Upozorněme, že rozkladovou ultramocninu definujeme vnitřně, její prvky jsou třídy ekvivalence funkcí zevnitř universa $\mathbb{U}$ (přesněji: jsou to množinové reprezentace těchto tříd). Je-li $\mathcal{Z}$ takový, že $\forall u \in \mathcal{U}\ \mathcal{Z}_u \in \mathbb{U}$, anebo je-li $\mathbb{U} \models$AS (případ (a) výše), tak je $\mathbb{U}^{\mathcal{U}}/_{\mathcal{Z}} \subseteq \mathbb{U}$. Zřejmě $\mathbb{U}^{\mathcal{U}}/_{\mathcal{Z}} = \bigcup_{u\in\mathcal{U}} \mathbb{U}^{\{u\}}/_{\mathcal{Z}}$.

Je-li $\mathcal{G}$ ultrafiltr na množině $I \in \mathbb{U}$, tak *ultramocnina* $\mathbb{U}^I/_{\mathcal{G}}$, je rozkladová ultramocnina určená ultradaty $\Big\langle \wp(I),\ \mathcal{G},\ \Big\{\{\{i\} \mid i \in I\}\Big\}\Big\rangle$.

1.7. Jednoduchá pozorování.

(a) Pro rozklad u je rozkladová ultramocnina $\mathbb{U}^{\{u\}}/_{\mathcal{Z}}$ izomorfní ultramocnině $\mathbb{U}^u/_{\mathcal{Z}_u}$.

(b) Je-li rozklad u jemnější než rozklad v $(u \geq_{\mathcal{Z}} v)$, pak zřejmě pro každou funkci $g\colon v \to \mathbb{U}$ existuje $f\colon u \to \mathbb{U}$ taková, že $f =_{\mathcal{Z}} g$, a tedy $\mathbb{U}^{\{v\}}/_{\mathcal{Z}} \subseteq \mathbb{U}^{\{u\}}/_{\mathcal{Z}}$.

(c) Důsledek: $\mathcal{W} \leq_{\mathcal{Z}} \mathcal{U} \Longrightarrow \mathbb{U}^{\mathcal{W}}/_{\mathcal{Z}} \subseteq \mathbb{U}^{\mathcal{U}}/_{\mathcal{Z}}$.

(d) Je-li $\mathcal{U}$ kofinální část $\mathcal{W}$, je $\mathcal{U} \simeq_{\mathcal{Z}} \mathcal{W}$, a proto $\mathbb{U}^{\mathcal{U}}/_{\mathcal{Z}} = \mathbb{U}^{\mathcal{W}}/_{\mathcal{Z}}$. Konkrétně, je-li rozklad u maximální v $\mathcal{U}$, pak $\mathbb{U}^{\mathcal{U}}/_{\mathcal{Z}} \cong \mathbb{U}^u/_{\mathcal{Z}_u}$.

Důkazy jsou zřejmé. ◆

Vždy, když uvažujeme konečně mnoho prvků $[f_1]\dots[f_n] \in \mathbb{U}^{\mathcal{U}}/_{\mathcal{Z}}$, je díky usměrněnosti $\mathcal{U}$ možné vzít funkce $f_1 \dots f_n$ všechny se stejnou doménou. Nadále to budeme implicitně předpokládat.

1.8. Fundamentální tvrzení.

(1) *Łośova věta:*

$$\mathbb{U}^{\mathcal{U}}/_{\mathcal{Z}} \models \phi([f_1]\dots[f_n]) \iff \bigvee\{\, a \in \mathrm{dom}(f_i) \mid \phi(f_1(a)\dots f_n(a))\,\} \in \mathcal{Z}.$$

(2) *Nechť $\mathcal{U}$, $\mathcal{W}$ jsou rozkladové systémy na $\mathcal{B}$, $\mathcal{W} \leq_{\mathcal{Z}} \mathcal{U}$, pak $\mathbb{U}^{\mathcal{W}}/_{\mathcal{Z}} \preceq \mathbb{U}^{\mathcal{U}}/_{\mathcal{Z}}$. Speciálně:*

(a) *Pro prvek $c \in \mathcal{Z}$ je množina $\{c\}$ $\mathcal{Z}$-rozklad a $\{\{c\}\} \leq_{\mathcal{Z}} \mathcal{U}$ pro každý rozkladový systém $\mathcal{U}$, takže*

$$\mathfrak{k}``\mathbb{U} = \mathbb{U}^{\{\{c\}\}}/_{\mathcal{Z}} \preceq \mathbb{U}^{\mathcal{U}}/_{\mathcal{Z}}$$

a $\mathfrak{k}$ je proto elementární vnoření universa do rozkladové ultramocniny:

$$\mathbb{U}^{\mathcal{U}}/_{\mathcal{Z}} \models \phi(\mathfrak{k}(x_1)\dots\mathfrak{k}(x_n)) \iff \mathbb{U} \models \phi(x_1\dots x_n), \quad \textit{pro}\ \ x_1\dots x_n \in \mathbb{U}.$$

(b) *Je-li u rozklad zjemňující $\mathcal{U}$, tj. $\mathcal{U} \leq_{\mathcal{Z}} \{u\}$, je $\mathbb{U}^{\mathcal{U}}/_{\mathcal{Z}}$ elementární podstrukturou ultramocniny $\mathbb{U}^{\{u\}}/_{\mathcal{Z}}$.*

(3) *Realce ϵ je extenzionální na $\mathbb{U}^{\mathcal{U}}/_{\mathcal{Z}}$. Je-li $\mathcal{U}$ množina, je ϵ úzká.*

Důkaz. (1) Postupuje se indukcí podle složitosti ϕ — spojka "&"je triviální, stejně tak negace, která plyne z vlastnosti (iv) definice ultrafiltru. Na kvantifikátor $\exists$ je nutné se podívat blíže. Implikace zleva doprava je jasná: když $\mathbb{U}^{\mathcal{U}}/_{\mathcal{Z}} \models \phi([g],[f_1],\dots,[f_n])$ pro nějakou $g \in \mathbb{U}$, $\mathrm{dom}(g) = u \in \mathcal{U}$, tak podle indukčního předpokladu

$$m := \{\, a \in u \mid \exists x\ \phi(x, f_1(a),\dots,f_n(a))\,\} \in \mathcal{Z}_u.$$

Naopak, nechť poslední formule platí a nechť $t\colon u \to \mathbb{U}$, $t \in \mathbb{U}$, je zobrazení získané pomocí AS nebo AF takové, že

$$\forall a \in u\ \Big(a \in m \Longrightarrow \emptyset \neq t(a) \subseteq \{\, x \mid \phi(x, f_1(a),\dots,f_n(a))\,\}\Big),$$

pak výběrová funkce $g \in \mathbb{U}$, $\mathrm{dom}(g) = u$, $g(a) \in t(a)$, získaná pomocí AC, zajišťuje $\mathbb{U}^{\mathcal{U}}/_{\mathcal{Z}} \models \phi([g], [f_1], \ldots, [f_n])$.

(2) Elementarita je okamžitým důsledkem toho, že pravá strana v (1) je nezávislá na volbě rozkladového systému.

(3) $\mathbb{U} \models \mathrm{Ext} \implies \mathbb{U}^{\mathcal{U}}/_{\mathcal{Z}} \models \mathrm{Ext}$, kde Ext značí axiom extensionality. Pro $u \in \mathcal{U}$ je $\epsilon \restriction \mathbb{U}^{\{u\}}/_{\mathcal{Z}}$ úzké (neboť u je množina); tvrzení pak plyne z toho, že $\mathbb{U}^{\mathcal{U}}/_{\mathcal{Z}} = \bigcup_{u \in \mathcal{U}} \mathbb{U}^{\{u\}}/_{\mathcal{Z}}$. ◆

DIREKTNÍ LIMITA.

Nyní, když toho o rozkladové ultramocnině víme dostatek, ukážeme, že to je direktní limita systému ultramocnin $\mathbb{U}^u/_{\mathcal{Z}_u}$, $u \in \mathcal{U}$.

1.9. Definice. $\langle \mathcal{P}, \leq \rangle$ ať je nahoru usměrněná třída, $\{\,\mathfrak{A}_p \mid p \in \mathcal{P}\,\}$ soubor modelů a $\{\,\mathfrak{e}_{pq} : \mathfrak{A}_p \hookrightarrow \mathfrak{A}_q \mid p \leq q \in \mathcal{P}\,\}$ elementární vnoření taková, že $\mathfrak{e}_{pp} = \mathbf{id}_{\mathfrak{A}_p}$,a $\mathfrak{e}_{qs} \circ \mathfrak{e}_{pq} = \mathfrak{e}_{ps}$ pro $p \leq q \leq s \in \mathcal{P}$. Struktura $\mathfrak{A}$ je *direktní limita* systému $\{\,\mathfrak{A}_p, \mathfrak{e}_{pq}\,\}_{p \leq q \in \mathcal{P}}$ pokud existují elementární vnoření $\mathfrak{e}_{p\infty} : \mathfrak{A}_p \hookrightarrow \mathfrak{A}$ tak, že $\mathfrak{e}_{q\infty} \circ \mathfrak{e}_{pq} = \mathfrak{e}_{p\infty}$ pro $p \leq q \in \mathcal{P}$ a navíc $\mathfrak{A} = \bigcup_{p \in \mathcal{P}} \mathrm{rng}(\mathfrak{e}_{p\infty})$. V takovém případě píšeme

$$\mathfrak{A} \cong \lim \mathrm{dir}_{p \in \mathcal{P}} \mathfrak{A}_p.$$

1.10. Fakt (AF nebo AS). Direktní limita usměrněného systému modelů existuje a je určena až na izomorfismus jednoznačně (sestrojíme ji jako jistý kvocient direktní sumy $\coprod_{p \in \mathcal{P}} \mathfrak{A}_p$).

Důkaz v [JECH, 12.2.]. ◆

1.11. Lemma. Když $\{\mathfrak{A}_p, \mathfrak{e}_{qp}\}_{q \leq p \in \mathcal{P}}$ je usměrněný systém modelů a usměrnění $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$, pak direktní limita $\lim \mathrm{dir}_{q \in \mathcal{Q}} \mathfrak{A}_q$ je elementárně vnořena do $\lim \mathrm{dir}_{p \in \mathcal{P}} \mathfrak{A}_p$. Je-li navíc $\mathcal{Q}$ kofinální v $\mathcal{P}$ je $\lim \mathrm{dir}_{q \in \mathcal{Q}} \mathfrak{A}_q \cong \lim \mathrm{dir}_{q \in \mathcal{Q}} \mathfrak{A}_q$.

Důkaz. Nechť $\mathfrak{A}^{\mathcal{P}} = \bigcup \mathrm{rng}(\mathfrak{e}^{\mathcal{P}}_{p\infty})$ a $\mathfrak{A}^{\mathcal{Q}} = \bigcup \mathrm{rng}(\mathfrak{e}^{\mathcal{Q}}_{q\infty})$ jsou příslušné direktní limity. Snadno se ověří, že zobrazení $\mathfrak{e} : \mathfrak{A}^{\mathcal{Q}} \hookrightarrow \mathfrak{A}^{\mathcal{P}}$ dané $\mathfrak{e}(a) = \mathfrak{e}^{\mathcal{P}}_{q\infty}(z)$ pokud $a = \mathfrak{e}^{\mathcal{Q}}_{q\infty}(z)$, $q \in \mathcal{Q}$ je dobře definované elementární vnoření. Kofinální případ plyne z tvrzení o jednoznačnosti direktní limity (1.10.). ◆

Z bodu (2) fundamentálního tvrzení (1.8.) víme, že pro rozklady u, $w \in \mathcal{U}$,

$$w \leq_{\mathcal{Z}} u \implies \mathbb{U}^{\{w\}}/_{\mathcal{Z}} \preceq \mathbb{U}^{\{u\}}/_{\mathcal{Z}} \preceq \mathbb{U}^{\mathcal{U}}/_{\mathcal{Z}}.$$

To spolu s $\mathbb{U}^{\mathcal{U}}/_{\mathcal{Z}} = \bigcup_{u \in \mathcal{U}} \mathbb{U}^{\{u\}}/_{\mathcal{Z}}$ a $\mathbb{U}^{\{u\}}/_{\mathcal{Z}} \cong \mathbb{U}^u/_{\mathcal{Z}_u}$ znamená, že rozkladová ultramocnina je direktní limita usměrněného systému ultramocnin

$$\{\,\mathbb{U}^u/_{\mathcal{Z}_u},\ \mathfrak{e}_{wu} : \mathbb{U}^w/_{\mathcal{Z}_w} \hookrightarrow \mathbb{U}^u/_{\mathcal{Z}_u} \mid w \leq_{\mathcal{Z}} u \in \mathcal{U}\,\},$$

kde vnoření $\mathfrak{e}_{wu}$ jsou dána příslušnými izomorfismy — podívejme se na ně blíže:

1.12. Tvrzení. Když rozklad u zjemňuje rozklad w, tj. když $\forall a \in u\ \exists\, b \in w\ (a \wedge d \leqslant b)$ pro nějaké $d \in \mathcal{Z}$, pak množina

$$d_u := \{\, a \in u \mid a \wedge d \neq \emptyset \,\}$$

je prvkem $\mathcal{Z}_u$ a existuje přirozená projekce $\iota_{uw}\colon d_u \to w$, definovaná

$$\iota_{uw}(a) := b \Longleftrightarrow a \wedge d \leqslant b.$$

Platí pro ni:

(i) $h \in \mathcal{Z}_w \Longleftrightarrow \iota_{uw}^{-1} h \in \mathcal{Z}_u$.

(ii) $w \leq_{\mathcal{Z}} v \leq_{\mathcal{Z}} u \Longrightarrow \iota_{vw} \circ \iota_{uv} =_{\mathcal{Z}_u} \iota_{uw}$.

(iii) Zobrazení $\mathfrak{e}_{wu}$ definované $\mathfrak{e}_{wu}([f]) := [f \circ \iota_{uw}]$ je elementární vnoření $\mathfrak{e}_{wu}\colon \mathbb{U}^w/_{\mathcal{Z}_w} \hookrightarrow \mathbb{U}^u/_{\mathcal{Z}_u}$.

Důkaz. (i) Pro $h \subseteq w$ je $\bigvee \iota_{uw}^{-1}``h = \bigvee h \wedge d_u$.
(ii) Nechť $d \in \mathcal{Z}$ je takové, že $\forall a \in u\ \exists\, b \in v\ (a \wedge d \leqslant b)\ \&\ \forall b \in v\ \exists\, c \in w\ (b \wedge d \leqslant c)$ a $d \leqslant \bigvee \mathrm{dom} \iota_{uv} \wedge \bigvee \mathrm{dom} \iota_{vw} \wedge \bigvee \mathrm{dom} \iota_{uw}$. Pak $\iota_{vw} \circ \iota_{uv} = \iota_{uw}$ na prvcích množiny $d_u \in \mathcal{Z}_u$.
(iii) Prozatím si všimněme, že díky platnosti (i) je zobrazení $\mathfrak{e}_{wu}$ definováno korektně; vlastní důkaz tohoto intuitivního tvrzení odložíme do následující kapitoly (2.5.). ◆

§ 2. ULTRAFILTRY, ULTRAGRAMY A JEJICH RUDIN–KEISLEROVO USPOŘÁDÁNÍ

Ultragram zachycuje esenci potřebnou pro získání rozkladové ultramocniny jakožto direktní limity usměrněného systému ultramocnin. Ukážeme, jak ultradata vymezují ultragram i jakým způsobem lze naopak k ultragamu sestrojit vhodná ultradata. Nastíníme vztah k Rudin–Keislerovu usměrnění na ultrafiltrech a jak toto kvaziuspořádání rozšířit na strukturu ultragramů a dokážeme, že Rudin–Keislerovo kvaziuspořádání ultragramů charakterizuje elementární vnořitelnost rozkladových ultramocnin jedné do druhé.

2.1. Definice (*Součin ultrafiltrů***).** Nechť $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n$ jsou ultrafiltry v $\mathbb{U}$ po řadě na množinách $I_1, \dots, I_n$. Ultrafiltr $\mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2$ na kartézském součinu $I_1 \times I_2$ se definuje následující podmínkou:

$$\text{Pro } A \subseteq I_1 \times I_2 \text{ je } A \in \mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2 \iff \{\, j \in I_2 \mid \{\, i \in I_1 \mid \langle i, j\rangle \in A \,\} \in \mathcal{G}_1 \,\} \in \mathcal{G}_2.$$

2.2. Fakta.

(i) $\mathbb{U}^{I_1 \times I_2}/_{\mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2} \cong (\mathbb{U}^{I_1}/_{\mathcal{G}_1})^{\mathfrak{k}_1(I_2)}/_{\mathfrak{k}_1(\mathcal{G}_2)}$, (jestliže $\mathfrak{k}_1$ značí vnoření $\mathbb{U} \hookrightarrow \mathbb{U}^{I_1}/_{\mathcal{G}_1}$).

(ii) Vnoření $\mathbb{U}^{I_{\alpha_i}}/_{\mathcal{G}_{\alpha_i}} \hookrightarrow \mathbb{U}^{I_1 \times I_2}/_{\mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_1}$, $(i = 1, 2)$, dané složením s přirozenou projekcí

$$[f] \mapsto [f \circ \pi_i], \quad \pi_i \colon I_1 \times I_2 \to I_i,$$

jsou dobře definovaná elementární vnoření. [CK, 6.5.2] ◆

2.3. Definice (*Rudin–Keislerovo usměrnění na ultrafiltrech***).** Nechť $\mathcal{G}$ a $\mathcal{H}$ jsou ultrafiltry na množinách I resp. J. Pro $a \subseteq I$ a zobrazení $\iota \colon a \to J$ je ultrafiltr $\iota_*(\mathcal{G})$ dán vztahem:

$$d \in \iota_*(\mathcal{G}) \iff d \subseteq J \;\&\; \iota^{-1}``d \in \mathcal{G}.$$

Dále definujeme RK-nerovnost a RK-ekvivalenci:

- $\langle \mathcal{H}, J\rangle \leq_{RK} \langle \mathcal{G}, I\rangle$, pokud $\exists\, a \in \mathcal{G},\ \iota \colon a \to J : \ \mathcal{H} = \iota_*(\mathcal{G})$,
- $\langle \mathcal{H}, J\rangle \simeq_{RK} \langle \mathcal{G}, I\rangle$, pokud $\langle \mathcal{G}, I\rangle \leq_{RK} \langle \mathcal{H}, J\rangle$ & $\langle \mathcal{H}, J\rangle \leq_{RK} \langle \mathcal{G}, I\rangle$.

2.4. Známá fakta.

(i) Je-li $a \in \mathcal{G}$ a $\iota \colon a \to I$ takové, že $\mathcal{G} = \iota_*(\mathcal{G})$, pak je $\iota =_{\mathcal{G}} \mathbf{id}_I$.

(ii) $\langle \mathcal{H}, J\rangle \simeq_{RK} \langle \mathcal{G}, I\rangle \iff \exists\, a \in \mathcal{G},\ \iota \colon a \to J$ prostá: $\mathcal{H} = \iota_*(\mathcal{G})$.

(iii) $\langle \mathcal{G}_i, I_i\rangle \leq_{RK} \langle \mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2, I_1 \times I_2\rangle$, $i = 1, 2$. Proto relace $\leq_{RK}$ je usměrnění na třídě ultrafiltrů.

Důkaz. (i) viz [CN Thm. 9.2], (ii) snadný důsledek (i); platnost (iii) dosvědčují přirozené projekce $\pi_i,\ i = 1, 2$. ◆

2.5. Tvrzení. Je-li $\mathbb{U} \models \langle \mathcal{H}, J\rangle \leq_{RK} \langle \mathcal{G}, I\rangle$, je ultramocnina $\mathbb{U}^J/_{\mathcal{H}}$ elementárně vnořena do ultamocniny $\mathbb{U}^I/_{\mathcal{G}}$.

Důkaz. Když $\iota \subseteq I \times J,\ \iota \in \mathbb{U}$ je zobrazení z definice $\leq_{RK}$, pak $\mathfrak{e}\colon \mathbb{U}^J/_{\mathcal{H}} \hookrightarrow \mathbb{U}^I/_{\mathcal{G}}$, $\mathfrak{e}([f]) := [f \circ \iota]$, je dobře definované vnoření. Krom toho pro každou $\in$-formuli ϕ a funkce $f_1, \ldots , f_n \in \mathbb{U}$ s $\operatorname{dom}(f_i) = H$ platí:

$$\{\, x \in J \mid \phi(f_1(x), \ldots , f_n(x)) \,\} \in \mathcal{H} \iff \{\, y \in I \mid \phi(f_1 \circ \iota(y), \ldots , f_n \circ \iota(y)) \,\} \in \mathcal{G}.$$ ◆

2.6. Definice. *Ultragram* je usměrněný systém ultrafiltrů na množinách $\{\langle \mathcal{Z}_p, I_p\rangle\}_{p\in\mathcal{P}}$ přiřazených prvkům nahoru usměrněné třídy $\langle \mathcal{P}, \leq\rangle$ a zobrazení (projekcí) $\iota_{pq} \subseteq I_p \times I_q$, $p \geq q \in \mathcal{P}$, pro něž platí $\mathcal{Z}_q = (\iota_{pq})_*\mathcal{Z}_p$ (a tedy $\operatorname{dom}(\iota_{pq}) \in \mathcal{Z}_p$) a které navzájem komutují:

$$p \geq q \geq r \in \mathcal{P} \implies \iota_{qr} \circ \iota_{pq} =_{\mathcal{Z}_r} \iota_{pr}$$

(poznamenejme, že $\operatorname{dom}(\iota_{qr} \circ \iota_{pq}) = \iota_{pq}^{-1}``\operatorname{dom}(\iota_{qr}) \in \mathcal{Z}_p$).

Ultragramy budeme značit symbolem $\nabla = \{\langle \mathcal{Z}_p, I_p\rangle,\ \iota_{pq}\}_{p\leq q\in\mathcal{P}}$.

2.7. Definice. *Direktní limita souboru ultramocnin určená ultragramem* $\nabla \subseteq \mathbb{U}$ je direktní limita systému ultramocnin $\{\, \mathbb{U}^{I_p}/_{\mathcal{Z}_p}, \mathfrak{e}_{qp} \mid q \leq p \in \mathcal{P}\,\}$, kde $\mathfrak{e}_{qp}\colon \mathbb{U}^{I_q}/_{\mathcal{Z}_q} \hookrightarrow \mathbb{U}^{I_p}/_{\mathcal{Z}_p}$ jsou elementární vnoření $\mathfrak{e}_{qp}([f]) := [f \circ \iota_{pq}]$, pro $f\colon I_q \to \mathbb{U}$. Značíme ji $\lim\operatorname{dir}_\nabla\mathbb{U}$. Zřejmě $\lim\operatorname{dir}_\nabla\mathbb{U} \subseteq \mathbb{U}$.

Kanonické vnoření universa $\mathfrak{k}\colon \mathbb{U} \hookrightarrow \lim\operatorname{dir}_\nabla\mathbb{U}$ je dáno jako složení kanonického vnoření do ultramocniny $\mathbb{U}^{I_q}/_{\mathcal{Z}_q}$ s vnořením do direktní limity $\mathfrak{e}_{q\infty}$ (na výběru $q \in \mathcal{Q}$ nezáleží).

2.8. Definice (*Rudin–Keislerovo usměrnění ultragramů***).**

Nechť $\nabla_\mathcal{P}$ a $\nabla_\mathcal{Q}$ jsou ultragramy nad usměrněními $\langle \mathcal{P}, \leq^\mathcal{P}\rangle$ a $\langle \mathcal{Q}, \leq^\mathcal{Q}\rangle$.

(0) Pro relaci $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}\times\mathcal{Q} \cup \mathcal{Q}\times\mathcal{P}$ a soubor projekcí $\{\, \rho_{\langle r,s\rangle} \subseteq I_r \times I_s \mid \langle r, s\rangle \in \mathcal{R}\,\}$, definujeme *spojení ultragramů* $\nabla_\mathcal{P}$ *a* $\nabla_\mathcal{Q}$ *projekcemi* $\{\, \rho_t \mid t \in \mathcal{R}\,\}$, jako strukturu

$$\nabla_\mathcal{P} \cup \nabla_\mathcal{Q} \cup \{\, \rho_t \,\}_{t\in\mathcal{R}}$$

nad třídou $\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}$ částečně uspořádanou kvaziuspořádáním generovaným množinou $\leq^\mathcal{P} \cup \leq^\mathcal{Q} \cup \mathcal{R}^{-1}$.

(i) Píšeme $\nabla_\mathcal{Q} \leq_{RK} \nabla_\mathcal{P}$, pokud existuje zobrazení $S\colon \mathcal{Q} \to \mathcal{P}$ a soubor projekcí $\{\, \sigma_q \subseteq I_{S(q)} \times I_q \mid q \in \mathcal{Q}\,\}$ takových, že spojení $\nabla_\mathcal{P} \cup \nabla_\mathcal{Q} \cup \{\sigma_q\}_{q\in\mathcal{Q}}$ tvoří ultragram.

(ii) $\nabla_\mathcal{P}$ a $\nabla_\mathcal{Q}$ jsou *RK-stejné*, pokud existují třídová zobrazení

$$R\colon \mathcal{Q} \to \mathcal{P} \text{ a } S\colon \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$$

a soubory projekcí $\{\, \rho_q \subseteq I_{R(q)} \times I_q \mid q \in \mathcal{Q}\,\}$, $\{\, \sigma_p \subseteq I_{S(p)} \times I_p \mid p \in \mathcal{P}\,\}$ takové, že spojení $\nabla_\mathcal{P} \cup \nabla_\mathcal{Q} \cup \{\rho_p\}_{p\in\mathcal{P}} \cup \{\sigma_q\}_{q\in\mathcal{Q}}$, tvoří ultragram.

2.9. Pozorování. Nechť $\nabla_{\mathcal{P}}$ a $\nabla_{\mathcal{Q}}$ jsou ultragramy na usměrněních $\langle \mathcal{P}, \leq^{\mathcal{P}} \rangle$ a $\langle \mathcal{Q}, \leq^{\mathcal{Q}} \rangle$. Usměrnění $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ kartézského součinu budiž definováno po složkách:

$$\langle p_1, q_1 \rangle \leq^{\mathcal{P}\times\mathcal{Q}} \langle p_2, q_2 \rangle \iff p_1 \leq^{\mathcal{P}} p_2 \ \&\ q_1 \leq^{\mathcal{Q}} q_2,$$

a položme

$$\nabla_{\mathcal{P}\times\mathcal{Q}} := \{\, \langle \mathcal{Z}_p \otimes \mathcal{Z}_q, I_p \times I_q \rangle,\ \langle \iota_{p_2 p_1} \circ \pi_0, \iota_{q_2 q_1} \circ \pi_1 \rangle \,\}_{\langle p,q \rangle \in \mathcal{P}\times\mathcal{Q}},$$

když π_i značí přirozenou projekci kartézského součinu na i-tou složku. Potom $\nabla_{\mathcal{P}\times\mathcal{Q}}$ je ultragram a

$$\nabla_{\mathcal{P}}, \nabla_{\mathcal{Q}} \leq_{RK} \nabla_{\mathcal{P}\times\mathcal{Q}}.$$

To znamená, že $\leq_{RK}$ je "usměrnění" (zde je nutné poznamenat, že ultragramy jsou obecně vlastní třídy, a tedy mluvit o usměrnění lze pouze v syntaktickém smyslu, nikoliv ve smyslu definice 1.3.). Toto usměrnění je dokonce třídově úplné: Jsou-li $\nabla_{\mathcal{P}_\alpha}$, $\alpha \in Ord$ ultragramy, pak sjednocení všech $\nabla_{\mathcal{P}_{\alpha_1}\times\cdots\times\mathcal{P}_{\alpha_k}}$, $\alpha_1 < \cdots < \alpha_k$, sestrojených podle předcházejícího vzoru, je ultragramem, který je RK-větší než každý $\nabla_{\mathcal{P}_\alpha}$.

2.10. Pozorování. Nechť $\nabla_{\mathcal{P}} \subseteq \mathbb{U}$ a $\nabla_{\mathcal{Q}} \subseteq \mathbb{U}$ jsou ultragramy nad usměrněními $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$.

(i) Když $\mathbb{U} \models \nabla_{\mathcal{Q}} \leq_{RK} \nabla_{\mathcal{P}}$, tak je direktní limita $\lim \mathrm{dir}_{\nabla_{\mathcal{Q}}} \mathbb{U}$ elementárně vnořena do $\lim \mathrm{dir}_{\nabla_{\mathcal{P}}} \mathbb{U}$.

(ii) Když $\mathbb{U} \models$ "$\nabla_{\mathcal{P}}$ a $\nabla_{\mathcal{Q}}$ jsou RK-stejné", tak $\lim \mathrm{dir}_{\nabla_{\mathcal{P}}} \mathbb{U} \cong \lim \mathrm{dir}_{\nabla_{\mathcal{Q}}} \mathbb{U}$.

Důkaz. Nechť ultragram $\nabla_{\mathcal{O}}$ je spojení ultragramů $\nabla_{\mathcal{P}}$ a $\nabla_{\mathcal{Q}}$ příslušným systémem projekcí z definice 2.8. Pak je $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{O}$, přičemž v (i) je $\mathcal{P}$ kofinální $\mathcal{O}$ a v (ii) jsou obě dvě $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$ kofinální $\mathcal{O}$. Tvrzení dále plyne z lemmatu 1.11. ◆

2.11. Lemma. Nechť $\mathfrak{k}\colon \mathbb{U} \hookrightarrow \mathbb{U}^I/_{\mathcal{Z}}$ je kanonické vnoření do ultramocniny.

(i) Pak pro každou funkci $f \in \mathbb{U}$ s $\mathrm{dom}(f) = I$ je

$$\langle \mathbb{U}^I/_{\mathcal{Z}}, \epsilon \rangle \models (\mathfrak{k}(f))([\mathbf{id}_I]) = [f].$$

(ii) Když $a \subseteq I$, tak $a \in \mathcal{Z} \iff [\mathbf{id}_I] \,\epsilon\, \mathfrak{k}(a)$.

Důkaz. (i) Je-li $[f] \in \mathbb{U}^I/_{\mathcal{Z}}$, $f\colon I \to \mathbb{U}$, pak $\mathfrak{k}(f)$ je funkce ve smyslu ultramocniny a prvek $[\mathbf{id}_I] \,\epsilon\, \mathfrak{k}(I) = \mathrm{dom}(\mathfrak{k}(f))$; evaluace přitom probíhá po složkách, takže $\mathfrak{k}(f)([\mathbf{id}_I]) = [f]$. (ii) Zřejmé. ◆

2.12. Věta. *Nechť ∇_1 a ∇_2 jsou ultragramy v $\mathbb{U}$.*

(i) $\mathbb{U} \models \nabla_1 \leq_{RK} \nabla_2$ *právě tehdy, když existuje elementární vnoření*

$$\mathfrak{e} : \lim \mathrm{dir}_{\nabla_1} \mathbb{U} \hookrightarrow \lim \mathrm{dir}_{\nabla_2} \mathbb{U}$$

s vlastností $\mathfrak{k}_2 = \mathfrak{e} \circ \mathfrak{k}_1$, *kde* $\mathfrak{k}_i$ *je kanonické vnoření universa* $\mathbb{U}$ *do* $\lim \mathrm{dir}_{\nabla_i} \mathbb{U}$.

(ii) $\mathbb{U} \models$ *"∇_1 a ∇_2 jsou RK-stejné" právě tehdy, když existuje izomorfismus*

$$\mathfrak{e} : \lim \mathrm{dir}_{\nabla_1} \mathbb{U} \hookrightarrow \lim \mathrm{dir}_{\nabla_2} \mathbb{U}$$

s vlastností $\mathfrak{k}_2 = \mathfrak{e} \circ \mathfrak{k}_1$, *kde* $\mathfrak{k}_i$ *je kanonické vnoření universa* $\mathbb{U}$ *do* $\lim \mathrm{dir}_{\nabla_i} \mathbb{U}$.

Důkaz. Levopravé implikace máme z 2.10.; dokážeme ty opačné. Nechť $\langle \mathcal{H}, J\rangle \in \nabla_1$ a $\mathfrak{e}_{J\infty}$ je vnoření ultramocniny $\mathbb{U}^J/_{\mathcal{H}}$ do $\lim\operatorname{dir}_{\nabla_1}\mathbb{U}$. Pro prvek $[\mathbf{id}_J] \in \mathbb{U}^J/_{\mathcal{H}}$ je

$$\mathfrak{e} \circ \mathfrak{e}_{J\infty}([\mathbf{id}_J]) \in \lim\operatorname{dir}_{\nabla_2}\mathbb{U},$$

takže existuje dvojice $\langle \mathcal{G}, I\rangle \in \nabla_2$ a $f\colon I \to \mathbb{U}$ taková, že $\mathfrak{e} \circ \mathfrak{e}_{J\infty}([\mathbf{id}_J]) = \mathfrak{e}_{I\infty}([f])$, $f \in \mathbb{U}$ lze zvolit tak, aby $\operatorname{rng}(f) = J$. Potom $\mathcal{H} = f_*(\mathcal{G})$:

$$\begin{aligned} a \in \mathcal{H} \iff [\mathbf{id}_J]\,\epsilon_1\,\mathfrak{k}_J(a) &\iff [f]\,\epsilon_2\,\mathfrak{k}_I(a) \\ &\iff (\mathfrak{k}_I(f))([\mathbf{id}_I])\,\epsilon_2\,\mathfrak{k}_I(a) \\ &\iff [\mathbf{id}_I]\,\epsilon_2\,\mathfrak{k}_2(f)^{-1}``\mathfrak{k}_2(a) = \mathfrak{k}_2(f^{-1}``a) \iff f^{-1}``a \in \mathcal{G}. \end{aligned}$$

Projekce ultrafiltrů z ∇_2 do ∇_1 získané tímto způsobem jistě komutují — tím je dokázán bod (i). Důkaz (ii) probíhá stejným způsobem. ◆

2.13. Příklad. Jsou-li ultramocniny $\mathbb{U}^{I_1}/_{\mathcal{Z}_1}$ a $\mathbb{U}^{I_1}/_{\mathcal{Z}_1}$ navzájem do sebe vnořitelné vnořeními, která bodově fixují $\mathbb{U}$, pak jsou izomorfní.

Důkaz. Podle předchozího tvrzení je v takovém případě $\langle \mathcal{Z}_1, I_1\rangle \simeq_{RK} \langle \mathcal{Z}_2, I_2\rangle$ a podle 2.4. existují množiny $a \in \mathcal{Z}_1$, $b \in \mathcal{Z}_2$ a bijekce $f\colon a \to b$, která je izomorfismem ultrafiltrů $\langle \mathcal{Z}_1{\restriction} a, a\rangle$ a $\langle \mathcal{Z}_2{\restriction} b, b\rangle$. Tj. $\mathbb{U}^{I_1}/_{\mathcal{Z}_1} \cong \mathbb{U}^a/_{\mathcal{Z}_1\restriction a} \cong \mathbb{U}^b/_{\mathcal{Z}_2\restriction b} \cong \mathbb{U}^{I_2}/_{\mathcal{Z}_2}$. ◆

ULTRAGRAMY INDUKOVANÉ ULTRADATY

Obraťme nyní naši pozornost ke vzájemnému vztahu ultradat a ultragramů. V předchozí kapitole jsme pro ultradata $\langle \mathcal{B}, \mathcal{Z}, \mathcal{U}\rangle$ sestrojili projekce ι_{uw}, $u \geq_{\mathcal{Z}} w \in \mathcal{U}$. Ty zřejmě svědčí pro

$$w \leq_{\mathcal{Z}} u \implies \langle w, \mathcal{Z}_w\rangle \leq_{RK} \langle u, \mathcal{Z}_u\rangle.$$

Nabízí se otázka, zda též platí

$$\langle w, \mathcal{Z}_w\rangle \leq_{RK} \langle u, \mathcal{Z}_u\rangle \implies w \leq_{\mathcal{Z}} u?,\ \text{případně}\ \langle w, \mathcal{Z}_w\rangle \simeq_{RK} \langle u, \mathcal{Z}_u\rangle \implies w \simeq_{\mathcal{Z}} u\,?$$

Ani jedno není pravda: vezměme libovolný netriviální ultrafiltr $\mathcal{G}$ na množině I a uvažujme kartézský součin $I \times I$ s ultrafiltrem $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ a přirozenými projekcemi $\pi_i\colon I \times I \to I$, $i = 0, 1$, které generují rozklady $u_i := \pi_i^{-1}``I$ Booleovy algebry $\wp(I)$. Potom je

$$\langle u_0, (\mathcal{G} \otimes \mathcal{G})_{u_0}\rangle \simeq_{RK} \langle u_1, (\mathcal{G} \otimes \mathcal{G})_{u_1}\rangle \simeq_{RK} \langle I, \mathcal{G}\rangle,$$

ale rozklady u_0 a u_1 jsou v $(\mathcal{G} \otimes \mathcal{G})$-usměrnění neporovnatelné.

Situace je jasná uvědomíme-li si, že zjemňování rozkladů odpovídá tomu, kdy jedna (rozkladová) ultramocnina je elementární podstrukturou druhé, zatímco RK-usměrnění zachycuje elementární vnořitelnost jedné ultramocniny do druhé — tedy dva různé pojmy. Přesto platí alespoň následující poněkud kompromisní výsledek, který je triviální aplikací faktu 2.4.(i):

$$v \leq_{\mathcal{Z}} u \;\&\; \langle u, \mathcal{Z}_u\rangle \leq_{RK} \langle v, \mathcal{Z}_v\rangle \implies v \simeq_{\mathcal{Z}} u.$$

2.14. Definice (*Indukovaný ultragram*). K ultradatům $\langle \mathcal{B}, \mathcal{Z}, \mathcal{U} \rangle \subseteq \mathbb{U}$ označme

$$\nabla^{\mathcal{U}} := \{ \langle \mathcal{Z}_u, u \rangle, \iota_{uw} \}_{u \geq_{\mathcal{Z}} w \in \mathcal{U}}$$

ultragram s projekcemi ι_{uw} podle 1.12. Dle téhož tvrzení je

$$\mathbb{U}^{\mathcal{U}}/_{\mathcal{Z}} \cong \lim \operatorname{dir}_{u \in \mathcal{U}} \mathbb{U}^u/_{\mathcal{Z}_u} \cong \lim \operatorname{dir}_{\nabla^{\mathcal{U}}} \mathbb{U}.$$

Je-li $\mathcal{Z}$ takový, že $\forall u \in \mathcal{U}\ \mathcal{Z}_u \in \mathbb{U}$, pak je $\nabla^{\mathcal{U}} \subseteq \mathbb{U}$.

KONSTRUKCE ULTRADAT Z ULTRAGRAMŮ.

Ukážeme způsob, jak k danému ultragramu $\nabla \subseteq \mathbb{U}$ sestrojit ultradata $\langle \mathcal{B}^\nabla, \mathcal{Z}^\nabla, \mathcal{U}^\nabla \rangle$, $\mathcal{B}^\nabla, \mathcal{Z}^\nabla, \mathcal{U}^\nabla \subseteq \mathbb{U}$, taková, aby jimi indukovaný ultragram $\nabla^{\mathcal{U}^\nabla}$ byl RK-stejný jako ∇. Tím získáme direktní limitu universa určenou ∇ ve formě rozkladové ultramocniny

$$\lim \operatorname{dir}_\nabla \mathbb{U} \cong \mathbb{U}^{\mathcal{U}^\nabla}/_{\mathcal{Z}^\nabla}.$$

Nechť $\nabla = \{ \langle \mathcal{Z}_p, I_p \rangle, \iota_{pq} \}_{p \leq q \in \mathcal{P}}$; rozlišme dva případy:

(1) $\mathcal{P}$ je množina.

$I := \coprod_{p \in \mathcal{P}} I_p$ buď disjunktní sjednocení množin I_p. Pro $a \subseteq I_p \subseteq I$ polož

$$\Theta(a) := \coprod_{s \geq p} \iota_{sp}^{-1}“a \subseteq I.$$

Nechť $\mathcal{B}^\nabla := \langle \wp(I), \subseteq, \bigcap, \bigcup, -, \emptyset, I \rangle$ je potenční Booleova algebra a

$$\{ d \in \mathcal{B}^\nabla \mid \exists p \in \mathcal{P}\ \forall q \geq p\ (d \cap I_q \in \mathcal{Z}_q) \}$$

je její filtr (protože $\mathcal{P}$ je usměrnění), který obsahuje množiny $\Theta(a)$, $a \in \mathcal{Z}_p$, $p \in \mathcal{P}$ ($a \in \mathcal{Z}_p \Longrightarrow \iota_{qp}^{-1}“a \in \mathcal{Z}_q$, když $p \leq q$); $\mathcal{Z}^\nabla$ buď nějaké jeho rozšíření na ultrafiltr algebry $\mathcal{B}^\nabla$. Množiny $u_p^\nabla := \{ \Theta(\{x\}) \mid x \in I_p \}$, $p \in \mathcal{P}$, jsou disjunktní soubory podmnožin množiny $\Theta(I_p) = \bigcup u_p^\nabla \in \mathcal{Z}^\nabla$, tzn. $\mathcal{U}^\nabla := \{ u_p^\nabla \mid p \in \mathcal{P} \}$ je $\mathcal{Z}^\nabla$-rozkladový systém: $p, q \leq r \in \mathcal{P} \Longrightarrow u_p^\nabla, u_q^\nabla \leq_{\mathcal{Z}^\nabla} u_r^\nabla$.

Restrikce ultrafiltru $\mathcal{Z}^\nabla$ na každý rozklad u_p^∇ je izomorfní ultrafiltru $\mathcal{Z}_p$ na I_p, navíc $\forall u_p^\nabla \in \mathcal{U}^\nabla\ \mathcal{Z}^\nabla_{u_p^\nabla} \in \mathbb{U}$. Zobrazení $S\colon \mathcal{P} \to \mathcal{U}^\nabla$, které prvku $p \in \mathcal{P}$ přiřadí rozklad u_p^∇, je bijekce, která ukazuje, že ultragramy ∇ a $\nabla^{\mathcal{U}^\nabla}$ jsou RK-stejné.

(2) $\mathcal{P}$ je vlastní třída.

Ultradata z předchozího případu se imitují jakožto kódovaný systém podtříd třídy $I := \coprod_{p \in \mathcal{P}} I_p$.

Předpokládejme, že $\mathbb{U} \models$AS. Transfinitní indukcí přes $\alpha \in \mathit{Ord}$ definujeme řetězec tříd $B_0 \subseteq B_1 \subseteq \ldots$ a booleovské operace $\bigvee, -$, tak aby $B_{\alpha+1}$ bylo uzavřené na sumy a doplňky prvků B_α. K tomu nám poslouží průběžně definovaná třídová interpretace $\Theta(x) \subseteq I$, $x \in B_\alpha$.

- $B_0 := I$, $\Theta(a) := \coprod_{s \geq p} \iota_{sp}^{-1}“\{a\} \subseteq I$, pro $a \in I_p$.

- V hladině $\alpha+1$:

(i) Pomocí AS se očíslují prvky z B_α ordinály a dále se postupuje transfinitní indukcí — pro $b \in B_\alpha$ nastane jedna ze tří možností:

  a) $-b$ je již definováno.

  b) $\exists\, c \in B_\alpha\ \Theta(c) = I - \Theta(b)$, (tj. $\forall x\ (x \in \Theta(c) \iff x \in I\ \&\ x \notin \Theta(b)\ )$, pak polož $-b := c$.

  c) jinak: přidej nový prvek c do $B_{\alpha+1}$ a polož $-b := c,\ \Theta(c) = I - \Theta(b)$.

(ii) Pomocí AS se očíslují podmnožiny B_α ordinály a dále se postupuje transfinitní indukcí — pro $b \subseteq B_\alpha$ nastane jedna ze tří možností:

  a) $\bigvee s$ je již definováno.

  b) $\exists\, c \in B_\alpha\ \Theta(c) = \bigcup_{a\in s}\Theta(a)$, (ie. $\forall x\ (x \in \Theta(c) \iff \exists\, a \in s\ x \in \Theta(a)\ )$, pak polož $\bigvee s := c$.

  c) jinak: přidej nový prvek c do $B_{\alpha+1}$ a polož $\bigvee s := c,\ \ \Theta(c) = \bigcup_{a\in s}\Theta(a)$.

- V limitní hladině γ: $\ B_\gamma := \bigcup_{\alpha<\gamma} B_\alpha$.
- $B := \bigcup_{\alpha\in Ord} B_\alpha$.

Dodefinujeme nekonečnou operaci $\bigwedge$ a uspořádání $\leqslant$ ($a \leqslant b$ když $\Theta(a) \subseteq \Theta(b)$). Potom je $\mathcal{B}^\nabla := \langle B, \leq, \bigvee, \bigwedge, \emptyset, -\emptyset\rangle$ množinově úplná třídová Booleova algebra.

Zbývá zkonstruovat ultrafiltr $\mathcal{Z}^\nabla$. Pomocí AS se očíslují prvky $\mathcal{B}^\nabla$ ordinály (b_0 ať je $\emptyset$) a transfinitní indukcí postupně definujeme:

- $\mathcal{F}_0 := \{\bigvee h \mid h \in \mathcal{Z}_p,\ p \in \mathcal{P}\}$ — to je soubor s konečnou průnikovou vlastností: když $h_i \in \mathcal{Z}_{p_i},\ i = 1\ldots n$ nechť $r \in \mathcal{P}$ je $r \geq p_1,\ldots,p_n$, $h := \bigcup \iota^{-1}_{rp_1}“d_1 \cap \ldots \cap \bigcup \iota^{-1}_{rp_n}“d_n \in \mathcal{Z}_r$, a tedy $\emptyset \neq h \subseteq \Theta(\bigvee d_1) \cap \ldots \cap \Theta(\bigvee d_n)$.
- $\mathcal{F}_{\alpha+1}$: Když $\bar{\mathcal{F}}_\alpha$ vznikne uzavřením $\mathcal{F}_\alpha$ na všechny konečné průseky, položme

$$\mathcal{F}_{\alpha+1} := \begin{cases} \bar{\mathcal{F}}_\alpha \cup \{-b_\alpha\}, & \text{pokud } \exists\, x \in \bar{\mathcal{F}}_\alpha\ \ x \wedge b_\alpha = \emptyset; \\ \bar{\mathcal{F}}_\alpha \cup \{b_\alpha\}, & \text{jinak.} \end{cases}$$

- $\mathcal{F}_\gamma := \bigcup_{\alpha\leq\gamma} \mathcal{F}_\alpha$ pro γ limitní.

Potom $\mathcal{Z}^\nabla := \bigcup_{\alpha\in Ord} \mathcal{F}_\alpha$ je ultrafiltr v $\mathcal{B}^\nabla$ a pro $d \subseteq I_p$ platí

$$\bigvee d \in \mathcal{Z}^\nabla \iff \bigvee d \in \mathcal{F}_0 \iff d \in \mathcal{Z}_p.$$

To znamená, že I_p je rozklad prvku $\bigvee I_p \in \mathcal{Z}^\nabla$ a $\mathcal{U}^\nabla := \{\, I_p \mid p \in \mathcal{P}\,\}$ je $\mathcal{Z}^\nabla$-rozkladový systém.

Tím jsou sestrojena ultradata $\langle \mathcal{B}^\nabla, \mathcal{Z}^\nabla, \mathcal{U}^\nabla\rangle$. Stejně jako v množinovém případě (1) jsou ultragramy ∇ a $\nabla^{\mathcal{U}^\nabla}$ RK-stejné.

Pokud bychom pracovali v universu splňujícím AF namísto AS (tj. $\mathbb{U} = \bigcup_{\beta\in Ord} V^{\mathbb{U}}_\beta$), probíhalo by postupné uzavírání třídy B_α na infinitní Booleovské operace (a následně rozšiřování filtru $\mathcal{F}_\alpha$) naráz přes množiny $\wp(B_\alpha) \cap V^{\mathbb{U}}_\gamma$ ($\gamma \in Ord$) faktorizované podle formule, kterou se definuje příslušná operace $-$ nebo $\bigvee$.

2.15. Shrnutí. *K libovolnému ultragramu ∇ jsme sestrojili ultradata $\langle \mathcal{B}^\nabla, \mathcal{Z}^\nabla, \mathcal{U}^\nabla \rangle$, kterými indukovaný ultragram $\nabla^{\mathcal{U}^\nabla}$ (viz 2.14.) je RK-stejný jako ∇, a tedy*

$$\lim \mathrm{dir}_\nabla \mathbb{U} \cong \mathbb{U}^{\mathcal{U}^\nabla} /_{\mathcal{Z}^\nabla} .$$

Navíc, je-li $\nabla \in \mathbb{U}$ množina (tj. usměrnění $\mathcal{P}$ je množina), je $\mathcal{B}^\nabla$ potenční algebra nějaké množiny $I^\nabla \in \mathbb{U}$, takže rozklad I^∇ na prvky zjemňuje všechny rozklady z $\mathcal{U}^\nabla$ a $\lim \mathrm{dir}_\nabla \mathbb{U}$ je elementárně vnořena do ultramocniny $\mathbb{U}^{I^\nabla} /_{\mathcal{Z}^\nabla}$. ◆

Obecná ultradata $\langle \mathcal{B}, \mathcal{Z}, \mathcal{U} \rangle$ můžeme takto nahradit ultradaty $\langle \mathcal{B}^{\nabla^\mathcal{U}}, \mathcal{Z}^{\nabla^\mathcal{U}}, \mathcal{U}^{\nabla^\mathcal{U}} \rangle$ na úplné Booleově algebře $\mathcal{B}^{\nabla^\mathcal{U}}$, které dají stejnou (izomorfní) rozkladovou ultramocninu.

§ 3. TEORIE wBST A JEJÍ MODELY

Teorie wBST je zeslabený fragment nestandardní teorie množin BST, která sama o sobě tvoří společné jádro většiny nestandardních teorií; je to přímočaré rozšíření teorie ZFC^- o predikát být standardní. Modely wBST jsou omezené části elementárních rozšíření modelů teorie množin pro které platí slabá standardizace — typicky například rozkladových ultramocnin. Je ukázáno, že tento příklad je plně charakteristický — internální universum modelu wBST je reprezentovatelné rozkladovou ultramocninou standardního universa. Zkoumáním jejich Rudin–Keislerovské strukturace ukážeme vztah k různým typům rozkladové ultramocniny a zodpovíme otázky vzájemné vnořitelnosti.

3.1. Definice. $\mathtt{st}$-$\in$-*jazyk* je formální jazyk obsahující rovnost, relaci náležení $\in$ a unární predikát $\mathtt{st}$; $\mathtt{st}(x)$ čteme x je *standardní.* Formule tohoto jazyka jsou nazývány $\mathtt{st}$-$\in$-formule. Kvantifikátor $\exists^{\mathtt{st}} x$ znamená "existuje standardní x"a podobně $\forall^{\mathtt{st}} x$ znamená "pro všechny standardní x"; formule $\phi^{\mathtt{st}}$ vznikne nahrazením všech kvantifikací formule ϕ jejich $\mathtt{st}$-verzemi.

3.2. Axiomy teorie wBST**.**

(A1) ZFC^- v $\in$-jazyce.

(A2) *Omezenost*: $\forall x \, \exists^{\mathtt{st}} y \; (x \in y)$.

(A3) *Transfer*: $\forall^{\mathtt{st}} x_1, \dots, x_n \; \phi(x_1, \dots, x_n) \iff \phi^{\mathtt{st}}(x_1, \dots, x_n)$, kde ϕ je libovolná $\in$-formule s volnými proměnnými mezi $x_1, \dots, x_n$.

(A4) *Slabá standardizace*: $\forall x \, \exists^{\mathtt{st}} y \, \forall^{\mathtt{st}} z \; (z \in x \iff z \in y)$.

Prvek y z (A4) je určen jednoznačně (díky platnosti axiomu extenzionality relativizovaného na třídu $\{ a \mid \mathtt{st}(a) \}$), nazývá se *standardizace množiny x.*

3.3. Pozorování. Třídová struktura $\langle \mathbb{I}, \mathbb{S}, \epsilon \rangle$ je *model wBST* právě tehdy, když:

(0) $\mathbb{S} = \{ x \mid \mathtt{st}(x) \}$,

(1) $\mathbb{S} \models \mathrm{ZFC}^-$,

(2) $\mathbb{I} = \bigcup \mathbb{S}$,

(3) $\langle \mathbb{S}, \epsilon \rangle \preceq \langle \mathbb{I}, \epsilon \rangle$,

(4) $\forall x \in \mathbb{I} \; \exists y \in \mathbb{S} \; \forall z \in \mathbb{S} \; (z \,\epsilon\, x \iff z \,\epsilon\, y)$, v takovém případě říkáme, že y je $\mathbb{S}$-*standardizace x.*

Třída $\mathbb{S}$ se nazývá *standardní universum* a třída $\mathbb{I}$ *internální universum.*

Námi požadovaná slabá standardizace (A4) je mnohem slabší než klasický

Princip standardizace: $\forall^{\mathtt{st}} x\ \exists^{\mathtt{st}} y\ \forall^{\mathtt{st}} z\ (z \in y \iff z \in x\ \&\ \phi(z))$ pro každou $\mathtt{st}$-$\in$-formuli ϕ s libovolnými parametry v $\mathbb{I}$,

který je jedním ze základních pilířů nestandardní analýzy. *Teorie* BST *(=Bounded Set Theory)* je teorie obsahující ZFC v $\in$-jazyce, omezenost, transfer, princip standardizace a princip omezené idealizace (viz např. [DN]).

Libovolné elementární vnoření univers, které je "standardizovatelné" dá vzniknout modelu wBST následujícím způsobem.

3.4. Definice. Nechť $\langle \mathbb{W}, \in^{\mathbb{W}} \rangle$ a $\langle \mathbb{M}, \epsilon \rangle$ jsou dvě universa a zobrazení $\star\colon \mathbb{W} \to \mathbb{M}$ je Δ_0-elementární vnoření, tj. značí-li ${}^\star a$ obraz prvku $a \in \mathbb{W}$ když

$$\forall a_1 \dots a_n \in \mathbb{W}\ \Big(\mathbb{W} \models \phi(a_1 \dots a_n) \iff \mathbb{M} \models \phi({}^\star a_1 \dots {}^\star a_n)\Big)$$

pro všechny omezené formule $\phi(x_1 \dots x_n)$.

Prvek $b \in \mathbb{M}$ je
- $\star$-*standardní*, když $\exists x \in \mathbb{W}\ (b = {}^\star x)$,
- $\star$-*internální*, když $\exists x \in \mathbb{W}\ (b \,\epsilon\, {}^\star x)$.

$\mathbb{S}_\star := \{\, b \in \mathbb{M} \mid b \text{ je } \star\text{-standardní} \,\} = \operatorname{rng}(\star)$.

$\mathbb{I}_\star := \{\, b \in \mathbb{M} \mid b \text{ je } \star\text{-internální} \,\} = \bigcup \mathbb{S}_\star$.

3.5. Pozorování.
(a) $\mathbb{S}_\star \preceq \mathbb{I}_\star$, tedy $\star\colon \langle \mathbb{W}, \in^{\mathbb{W}} \rangle \hookrightarrow \langle \mathbb{I}_\star, \epsilon \rangle$ je elementární vnoření.
(b) $I_\star$ je ϵ-tranzitivní podtřída $\mathbb{M}$. Konkrétně jsou všechny Gödelovy operace absolutní pro $\mathbb{M}$ a $\mathbb{I}_\star$.

Důkaz. (a) Protože internální universum je tvořeno právě všemi standardně omezenými prvky je každá existenční formule v $\mathbb{I}_\star$ ekvivalentní standardně omezené existenční formuli.
(b) $a \,\epsilon\, b \in \mathbb{I}_\star \iff \exists\, x \in \mathbb{W}\ b \,\epsilon\, {}^\star x$, tedy $a \,\epsilon\, TC^{\mathbb{M}}({}^\star x) = TC^{\mathbb{I}_\star}({}^\star x) = {}^\star(TC^{\mathbb{W}}(x))$, neboť formule "$t = TC(s)$" je omezená, takže $a \in \mathbb{I}_\star$. ◆

3.6. Definice. Vnoření $\star$ z předchozí definice je:
(i) *standardně omezené* (*minimální*), pokud $\mathbb{M} = \mathbb{I}_\star$,
(ii) *standardizovatelné*, pokud

$$\forall x \in \mathbb{M}\ \exists\, b \in \mathbb{W}\ \forall c \in \mathbb{W}\ ({}^\star c \,\epsilon\, x \iff c \in^{\mathbb{W}} b).$$

Prvek ${}^\star b$ je potom $\star$-*standardizace* x.

3.7. Důsledek. Je-li $\star\colon \langle \mathbb{W}, \in^{\mathbb{W}} \rangle \hookrightarrow \langle \mathbb{M}, \epsilon \rangle$ standardizovatelné Δ_0-elementární vnoření, je $\langle \mathbb{I}_\star, \mathbb{S}_\star, \epsilon \rangle$ model wBST.

3.8. Příklad. Nechť $\langle \mathcal{B}, \mathcal{Z}, \mathcal{U} \rangle$ jsou ultradata na universu $\mathbb{U}$ taková, že $u \in \mathcal{U} \implies \mathcal{Z}_u \in \mathbb{U}$. Pak kanonické vnoření $\mathfrak{k}\colon \langle \mathbb{U}, \in \rangle \hookrightarrow \langle \mathbb{U}^{\mathcal{U}}/_{\mathcal{Z}}, \epsilon \rangle$ je standardně omezené a standardizovatelné elementární vnoření.

Důkaz. Když $[f] \in \mathbb{U}^{\mathcal{U}}/_{\mathcal{Z}}$, $\operatorname{dom}(f) = u \in \mathcal{U}$. Tak $y := \{\, a \in \mathbb{U} \mid u \times \{a\} \in_{\mathcal{Z}_u} f \,\}$ je množina definovaná formulí s parametry v $\mathbb{U}$, takže $y \in \mathbb{U}$ a zřejmě $\mathfrak{k}(y)$ je standardizace $[f]$. Dále, $f \in_{\mathcal{Z}_u} u \times \{\operatorname{rng}(f)\}$, takže $[f] \,\epsilon\, \mathfrak{k}(\operatorname{rng}(f))$, což dokazuje standardní omezenost. ◆

Nyní postupně zformulujeme dvě základní věty, které objasní povahu modelů wBST — větu o kanonickém tvaru a větu o typech modelů wBST; dokážeme je později.

3.9. Věta (O kanonickém tvaru). *Nechť $\langle \mathbb{I}, \mathbb{S}, \epsilon \rangle$ je model teorie wBST, a $\mathbb{I} \models AS$ nebo AF. Pak existují ultradata $\langle \mathcal{B}, \mathcal{G}, \mathcal{U} \rangle$ na $\mathbb{S}$ s vlastností $\{ \mathcal{G}_u \mid u \in \mathcal{U} \} \subseteq \mathbb{S}$ a izomorfismus $\mathfrak{e} : \mathbb{S}^{\mathcal{U}}/_{\mathcal{G}} \to \mathbb{I}$.*

Ve světle předchozího příkladu poskytuje toto tvrzení kompletní korespondenci mezi modely wBST a rozkladovými ultramocninami přes "internální" ultradata. Následná věta tuto charakterizaci rozvede do větší hloubky. Před jejím vyslovením je třeba zavést důležité pojmy okolo Rudin–Keislerovské strukturace modelů wBST.

STANDARDNÍ GENEROVÁNÍ A RUDIN–KEISLEROVO USMĚRNĚNÍ NA INTERNÁLNÍM UNIVERSU

$\langle \mathbb{I}, \mathbb{S}, \epsilon \rangle$ buď model wBST, $\mathbb{S} \models$ AS nebo AF.

3.10. Definice.

(i) $\leq_{\mathbb{S}}$-*usměrnění* na $\mathbb{I}$:

$$q \leq_{\mathbb{S}} p \quad \equiv \quad \exists f \in \mathbb{S} \text{ funkce} : f(p) = q\,,$$
$$p \simeq_{\mathbb{S}} q \quad \equiv \quad p \leq_{\mathbb{S}} q \ \&\ q \leq_{\mathbb{S}} p \quad \text{pro } p, q \in \mathbb{I}\,.$$

(ii) Pro třídu $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{I}$, $d \in \mathbb{I}$:

$$\mathbb{S}[\![\mathcal{X}]\!] := \{ f(x_1, \ldots, x_n) \mid f \in \mathbb{S} \text{ standardní funkce, } \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in \mathcal{X}^n,\ n \in \omega \},$$
$$\mathbb{S}[d] := \mathbb{S}[\![\{d\}]\!].$$

Říkáme, že $\mathcal{X}$ $\mathbb{S}$-generuje $\mathbb{S}[\![\mathcal{X}]\!]$.

Zřejmě je $q \leq_{\mathbb{S}} p \iff \mathbb{S}[q] \subseteq \mathbb{S}[p]$. Záhy spatříme jak usměrnění $\leq_{\mathbb{S}}$ přirozeně koresponduje s Rudin–Keislerovým usměrněním na ultrafiltrech.

3.11. Fakta.

(a) $\langle x, y \rangle$ je supremum prvků x, y v kvaziuspořádání $\leq_{\mathbb{S}}$.

(b) $p \simeq_{\mathbb{S}} q \iff \exists f \in \mathbb{S}$ prostá funkce, $f(p) = q$.

(c) Faktor $\leq_{\mathbb{S}} / \simeq_{\mathbb{S}}$ je úzké uspořádání na $\mathbb{I}/\simeq_{\mathbb{S}}$. Důkaz: [JEŘ, 2.3.4]. ◆

3.12. Označení. Třída $\mathcal{P}_{\mathbb{I}} \subseteq \mathbb{I}$ buď taková, aby $\mathbb{I} = \mathbb{S}[\![\mathcal{P}_{\mathbb{I}}]\!]$ a aby $\leq_{\mathbb{S}}$ bylo úzké usměrnění na $\mathcal{P}_{\mathbb{I}}$. ($\mathcal{P}_{\mathbb{I}}$ se získá pomocí AS nebo AF).

3.13. Definice. Model wBST je:

- *jednoduchý*, je-li $\mathbb{I} = \mathbb{S}[d]$ pro nějaký prvek $d \in \mathbb{I}$.
- *polojednoduchý*, je-li $\mathbb{I} = \mathbb{S}[\![e]\!]$ pro nějakou množinu $e \subseteq \mathbb{I}$.

Zdůrazněme, že pojem polojednoduchosti je definovám zcela externálně a závisí významně na podobě universa ve kterém se pohybujeme ($\mathbb{V}$).

Je lehké si rozmyslet:

$$\langle \mathbb{I}, \mathbb{S}, \epsilon \rangle \text{ je jednoduchý } \iff \mathcal{P}_{\mathbb{I}} \text{ (viz výše) má největší prvek,}$$
$$\langle \mathbb{I}, \mathbb{S}, \epsilon \rangle \text{ je polojednoduchý } \iff \mathcal{P}_{\mathbb{I}} \text{ je množina.}$$

3.14. Definice. Zobrazení $\mathfrak{e}\colon \mathbb{I}_1 \hookrightarrow \mathbb{I}_2$ je `st`-*vnoření modelů* $\langle \mathbb{I}_1, \mathbb{S}_1, \epsilon_1 \rangle$ do $\langle \mathbb{I}_2, \mathbb{S}_2, \epsilon_2 \rangle$, pokud $\mathfrak{e}\colon \langle \mathbb{I}_1, \epsilon_1 \rangle \hookrightarrow \langle \mathbb{I}_2, \epsilon_2 \rangle$ je elementární vnoření a $\mathfrak{e} \restriction \mathbb{S}_1$ je izomorfismus $\langle \mathbb{S}_1, \epsilon_1 \rangle$ a $\langle \mathbb{S}_2, \epsilon_2 \rangle$.

3.15. Věta (O typech modelů wBST). *Nechť $\langle \mathbb{I}, \mathbb{S}, \epsilon \rangle$ je model teorie wBST a $\mathbb{I} \models AS$ nebo AF.*

(i) (a) *Model $\langle \mathbb{I}, \mathbb{S}, \epsilon \rangle$ je jednoduchý právě tehdy, když existuje množina $I \in \mathbb{S}$, ultrafiltr $\mathcal{G} \in \mathbb{S}$ na I a internálně definovatelný (=pomocí $\in$-formule s parametrem z $\mathbb{I}$) izomorfismus $\mathfrak{e}$ mezi ultramocninou $\mathbb{S}^I/_{\mathcal{G}}$ a universem $\mathbb{I}$.*

(b) *Model $\langle \mathbb{I}, \mathbb{S}, \epsilon \rangle$ je polojednoduchý právě tehdy, když je jeho internální universum izomorfní rozkladové ultramocnině $\mathbb{S}^{\mathcal{U}}/_{\mathcal{G}}$ s množinovým systémem rozkladů $\mathcal{U}$.*

(ii) *Je-li $\mathbb{J}$ elementární rozšíření standardního universa, $\mathbb{S} \preceq \mathbb{J} \subseteq \mathbb{I}$, pak existují ultradata $\langle \mathcal{B}, \mathcal{G}, \mathcal{U} \rangle$ a $\langle \mathcal{B}, \mathcal{G}, \mathcal{W} \rangle$, $\mathcal{W} \leq_{\mathcal{G}} \mathcal{U}$, a třídové zobrazení $\mathfrak{e} : \mathbb{S}^{\mathcal{U}}/_{\mathcal{G}} \hookrightarrow \mathbb{I}$, které je izomorfismem jak $\mathbb{S}^{\mathcal{U}}/_{\mathcal{G}} \cong \mathbb{I}$, tak i $\mathbb{S}^{\mathcal{W}}/_{\mathcal{G}} \cong \mathbb{J}$. Speciálně to znamená, že je $\mathbb{J} \preceq \mathbb{I}$ a inkluze $\langle \mathbb{J}, \mathbb{S}, \epsilon \rangle$ do $\langle \mathbb{I}, \mathbb{S}, \epsilon \rangle$ je `st`-vnoření modelů wBST.*

(iii) *Každý polojednoduchý model $\langle \mathbb{I}, \mathbb{S}, \epsilon \rangle$ je `st`-vnořen do nějakého jednoduchého. Konkrétně existuje množina $I \in \mathbb{S}$, ultrafiltr $\mathcal{G} \in \mathbb{S}$ na I a elementární vnoření $\mathfrak{e}\colon \mathbb{I} \hookrightarrow \mathbb{S}^I/_{\mathcal{G}}$, jehož restrikce na $\mathbb{S}$ odpovídá kanonickému vnoření $\mathfrak{k} : \mathbb{S} \hookrightarrow \mathbb{S}^I/_{\mathcal{G}}$, jak vyjadřuje následující komutativní diagram:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{I} \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathbb{S}^{\mathcal{U}}/_{\mathcal{G}} \arrow[r, phantom, "\preceq"] & \mathbb{S}^I/_{\mathcal{G}} \\
\mathbb{S} \arrow[u, "\preceq"] \arrow[ur, hook, "\mathfrak{k}"'] & &
\end{tikzcd}$$

(iv) *Každý podmodel $\langle \mathbb{J}, \mathbb{S}, \epsilon \rangle$ polojednoduchého modelu $\langle \mathbb{I}, \mathbb{S}, \epsilon \rangle$ — $\mathbb{S} \preceq \mathbb{J} \subseteq \mathbb{I}$ — je polojednoduchý.*

Důkaz vět 3.9. & 3.15.

Ultragram odpovídající modelu sestrojíme ve stylu [JEŘ] pomocí známé charakterizace jednoduchých modelů wBST jako ultramocnin. $\mathcal{P}_{\mathbb{I}}$ buď dle 3.12.

(A) *V definici $\mathbb{S}[\![\mathcal{X}]\!]$ stačí uvažovat jen funkce na pevně zvolených doménách.*

Je-li $d \,\epsilon\, I_d \in \mathbb{S}$, $f \in \mathbb{S}$, $d \,\epsilon\, \mathrm{dom}(f)$, pak $f' = (f{\restriction}\mathrm{dom}(f) \cap I_d) \cup (I_d - \mathrm{dom} f) \times \{0\} \in \mathbb{S}$ má $\mathrm{dom}(f') = I_d$. Je vidět, že v definici $\mathbb{S}[d]$ stačí brát jen funkce na pevné množině I_d,

$$\mathbb{S}[d] := \{\, f(d) \mid f \in \mathbb{S} \text{ standardní funkce, } \mathrm{dom}(f) = I_d \,\}.$$

Podobným způsobem se v případě potřeby upraví i $\mathrm{rng}(f)$, takže pro $p, q \in \mathcal{P}_{\mathbb{I}}$ je možné fixovat množiny $I_p, I_q \in \mathbb{S}$ a standardní zobrazení $\iota_{pq}\colon I_p \to I_q$, $\iota_{pq}(p) = q$, pro $p \geq_{\mathbb{S}} q$. K tomu se použije AS, případně AF, kdy pro $p \in \mathcal{P}_{\mathbb{I}}$ dostaneme obecně více různých množin I_p, bude jich však jen množinově mnoho, což stačí.

(B) *Důkaz* (i)(a).

Nechť $\mathbb{I} = \mathbb{S}[d]$, $d \in I_d \in \mathbb{S}$ a nechť $\mathcal{G}_d$ je standardizace ultrafiltru

$$\mathcal{G}_d^\sharp := \{ K \subseteq I_d \mid d \in K \}$$

definovaného v $\mathbb{I}$ a generovaného prvkem d. Pak pro standardní funkce $f, f' \in \mathbb{S}$ na I_d je

$$f(d) = f'(d) \iff \{ i \in I_d \mid f(i) = f'(i) \} \in \mathcal{G}_d^\sharp \iff \{ i \in I_d \mid f(i) = f'(i) \} \in \mathcal{G}_d,$$

neboť uvažovaná množina indexů je standardní. Zobrazení $\mathfrak{e}\colon \mathbb{S}^{I_d}/_{\mathcal{G}_d} \to \mathbb{I}$, $\mathfrak{e}([f]) := f(d)$ je dobře definovaný izomorfismus, pro který $\mathfrak{e}([\mathbf{id}_{I_d}]) = d$.

Povšimněme si přitom, že $\mathbb{S}^I/_{\mathcal{G}_d} \subseteq \mathbb{S}$ je standardně definovaná ultramocnina a zobrazení $\mathfrak{e}$ — evaluace v bodě $d \in I$ — je internální izomorfismus.

Tím je dokázána implikace zleva doprava v (i) (a), tu opačnou známe z 2.11.

(C) *Konstrukce ultragramu, ze kterého se získají ultradata potřebná pro důkaz obou vět.*

Podle (A) fixujeme ke každému $d \in \mathcal{P}_\mathbb{I}$ množinu $I_d \in \mathbb{S}$ obsahující d a ultrafiltr $\mathcal{G}_d$, který je $\mathbb{S}$-standardizací $\{ a \subseteq_\mathbb{I} I_d \mid d \in a \}$, a pro $p \geq_\mathbb{S} q \in \mathcal{P}_\mathbb{I}$ také standardní projekci $\iota_{pq}\colon I_p \to I_q$, $\iota_{pq}(p) = q$; tím pádem $\mathcal{G}_q = \iota_{pq*}(\mathcal{G}_q)$ a $\iota_{pq} \circ \iota_{rp} =_{\mathcal{G}_r} \iota_{rq}$.

Jak je patrno, $\nabla := \{\langle \mathcal{G}_d, I_d \rangle, \iota_{qp}\}_{p \leq_\mathbb{S} q \in \mathcal{P}_\mathbb{I}}$ je ultragram; $\langle \mathcal{B}^\nabla, \mathcal{U}^\nabla, \mathcal{G}^\nabla \rangle$ ať jsou jemu odpovídající ultradata na $\mathbb{S}$ sestrojená podle § 2.

(D) *Série jednoduchých pozorování vede k důkazu věty 3.9.*

- $\mathbb{S}[p] \cong \mathbb{S}^{I_p}/_{\mathcal{G}_p}$: platí podle (B).
- $p \geq_\mathbb{S} q \Longrightarrow S[q] \preceq \mathbb{S}[p]$: Zřejmě $p \geq_\mathbb{S} q \iff \langle \mathcal{G}_p, I_p \rangle \geq_{RK} \langle \mathcal{G}_q, I_q \rangle$ a ι_{pq} indukuje elementární vnoření $\mathfrak{e}_{qp}\colon \mathbb{S}^{I_q}/_{\mathcal{G}_q} \hookrightarrow \mathbb{S}^{I_p}/_{\mathcal{G}_p}$, $\mathfrak{e}_{qp}([f]) := [f \circ \iota_{pq}]$ (viz 2.5.). Je-li $x = f[q]$ pro nějakou standardní funkci f, $\mathrm{dom}(f) = I_q$, je také $x = f \circ \iota_{pq}[p]$, takže řetěz izomorfismů zaručí $\mathbb{S}[q] \preceq \mathbb{S}[p]$.
- Pro $\leq_\mathbb{S}$-usměrněnou třídu $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{I}$ je $\mathbb{S}[\![\mathcal{X}]\!] = \bigcup_{p \in \mathcal{X}} \mathbb{S}[p] = \lim\mathrm{dir}_{p \in \mathcal{X}} \mathbb{S}[p]$.
- A tedy $\mathbb{I} = \lim\mathrm{dir}_{p \in \mathcal{P}_\mathbb{I}} \mathbb{S}[p] \cong \lim\mathrm{dir}_{p \in \mathcal{P}_\mathbb{I}} \mathbb{S}^{I_p}/_{\mathcal{G}_p} \cong \mathbb{S}^{\mathcal{U}^\nabla}/_{\mathcal{G}^\nabla}$, jak víme z § 2.

Tím je dokončen důkaz věty 3.9.

(E) *Povšimněme si.*

Prvky $d \in \mathcal{P}_\mathbb{I}$, které $\mathbb{S}$-generují $\mathbb{I}$, odpovídají v tomto izomorfismu prvkům $[\mathbf{id}_{u_d^\nabla}]$, kde $u_d^\nabla \in \mathcal{U}^\nabla$ jsou rozklady příslušné k I_d.

(F) *Důkaz* (i) (b).

Když je model $\langle \mathbb{I}, \mathbb{S}, \epsilon \rangle$ polojednoduchý, je $\mathcal{P}_\mathbb{I}$ množina a ultradata ∇ jsou množinová, $\mathcal{U}^\nabla$ je proto množinový systém rozkladů. Naopak, když $\mathcal{U}$ je množina, tak rozkladová ultramocnina je polojednoduchá, neboť $\mathbb{S}^\mathcal{U}/_\mathcal{G} = \bigcup_{u \in \mathcal{U}} \mathbb{S}^{\{u\}}/_\mathcal{G}$ je generována množinou prvků $\{[\mathbf{id}_u]\}_{u \in \mathcal{U}}$.

(G) *Důkaz* (ii).

Když $\mathbb{J} = \mathbb{S}[\![\mathcal{Q}_\mathbb{J}]\!]$ a $\mathcal{Q}_\mathbb{J}$ je nahoru usměrněná $\leq_\mathbb{S}$-úzká třída, zvolme v (C) usměrnění $\mathcal{P}_\mathbb{I}$ tak, aby $\mathbb{I} = \mathbb{S}[\![\mathcal{P}_\mathbb{I}]\!]$ a $\mathcal{Q}_\mathbb{J} \subseteq \mathcal{P}_\mathbb{I}$. Hledané $\mathcal{W}$ nyní sestrojíme jako systém těch rozkladů z $\mathcal{U}^\nabla$, které odpovídají prvkům $\mathcal{Q}_\mathbb{J}$ v námi sestrojených ultradatech $\langle \mathcal{B}^\nabla, \mathcal{G}^\nabla, \mathcal{U}^\nabla \rangle$. Zbytek už plyne z věty 3.9. a bodu (2) fundamentálního tvrzení o rozkladové ultramocnině (1.8.).

(H) *Důkaz* (iii).

Bod (iii) plyne ze způsobu konstrukce ultradat, která se pro množinový ultragram ∇ sestrojí na potenční algebře $\mathcal{B}^\nabla = \wp(I)$ (2.15.). Rozklad množiny I na jednotlivé prvky v tom případě zjemňuje všechny rozklady z $\mathcal{U}^\nabla$.

(I) *Důkaz* (iv).

Konečně (iv) plyne z úzkosti uspořádání $\leq_{\mathbb{S}}$ na $\mathcal{P}_{\mathbb{I}}$: je-li $\mathcal{P}_{\mathbb{I}}$ množina a je-li $\leq_{\mathbb{S}}$ úzké na $\mathcal{Q} \subseteq \mathbb{S}[\![\mathcal{P}_{\mathbb{I}}]\!]$, tak je nutně i $\mathcal{Q}$ množina. ◆

Z předchozího důkazu je zřetelně vidět, že slabá standardizace (z axiomů wBST) byla nutná pouze k tomu, aby ultragram $\{\, \langle \mathcal{G}_p, I_p \rangle, \iota_{qp} \,\}_{p \leq_{\mathbb{S}} q \in \mathcal{P}_{\mathbb{I}}}$ popisující $\mathbb{I}$ jako direktní limitu ultramocnin universa $\mathbb{S}$, byl částí $\mathbb{S}$. Neboli, byla nutná (a to esenciálně) k nahrazení ultrafiltru $\mathcal{G}_d^\sharp \in \mathbb{I}$ jeho standardizací $\mathcal{G}_d \in \mathbb{S}$. Sestrojit ultradata $\langle \mathcal{B}^\nabla, \mathcal{U}^\nabla, \mathcal{G}^\nabla \rangle$ na standardním universu tak, jak je to popsáno v § 2, lze však i bez toho: podstatné je, že všechny I_p a ι_{qp} jsou standardní, externí množiny $\mathcal{G}_p^\sharp \cap \mathbb{S}$ jsou přitom ultrafiltry na $\wp(I_p) \cap \mathbb{S}$. Vynecháním onoho standardizačního momentu získáme následující charakterizaci (standardně omezených) elementárních rozšíření.

3.16. Tvrzení. *Nechť v universu $\langle \mathbb{W}, \in^{\mathbb{W}} \rangle$ platí AS nebo AF. Ke každému elementárnímu vnoření univers $\star\colon \langle \mathbb{W}, \in^{\mathbb{W}} \rangle \to \langle \mathbb{M}, \epsilon \rangle$ (s $\mathbb{M}$ splňujícím AF nebo AS) existují ultradata $\langle \mathcal{B}, \mathcal{Z}, \mathcal{U} \rangle$ na $\mathbb{W}$ a zobrazení $\mathfrak{e}\colon \mathbb{W}^{\mathcal{U}}/_{\mathcal{Z}} \hookrightarrow \mathbb{M}$, které je izomorfismem rozkladové ultramocniny $\mathbb{W}$ a internálního universa $\mathbb{I}_\star = \bigcup \mathrm{rng}(\star)$ (to je transitivní uzávěr třídy $\mathbb{S}_\star = \mathrm{rng}(\star)$ v $\mathbb{M}$) tak, jak zachycuje komutativní diagram:*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{W} \arrow[r, hook, "\star"] \arrow[dr, hook, "\mathfrak{k}"'] & \mathbb{I}_\star \arrow[r, phantom, "\preceq"] & \mathbb{M} \\ & \mathbb{W}^{\mathcal{U}}/_{\mathcal{Z}} \arrow[u, hook, "\mathfrak{e}", "\cong"'] & \end{tikzcd}$$

◆

3.17. Příklad. Mějme množinu $X \in \mathbb{U}$ a $\mathcal{G} \subseteq \wp(X) \cap \mathbb{U}$ externí ultrafiltr této algebry ($\mathcal{G}$ nemusí ležet v $\mathbb{U}$). Potom $\mathbb{U}^X/_{\mathcal{G}} = \{\, [f] \mid f \in \mathbb{U},\ \mathrm{dom}(f) = X \,\}$ — klasicky definovaná ultramocnina universa $\mathbb{U}$ — je nejmenší standardizovatelné elementární rozšíření universa $\mathbb{U}$, které obsahuje prvek společný všem množinám z $\mathcal{G} \cap \mathbb{U}$.

Důkaz. Nechť $\mathfrak{k}\colon \mathbb{U} \hookrightarrow \mathbb{U}^X/_{\mathcal{G}}$ je kanonické vnoření. Pak

$$\mathcal{G}^\sharp := \{\, h \mid \mathbb{U}^X/_{\mathcal{G}} \models h \subseteq \mathfrak{k}(X) \ \&\ [\mathbf{id}_X] \,\epsilon\, h \,\}$$

je hlavní ultrafiltr na množině $\mathfrak{k}(X) \in \mathbb{U}^X/_{\mathcal{G}}$, pro který platí $\mathcal{G}^\sharp \cap \mathfrak{k}``\mathbb{U} = \mathfrak{k}``\mathcal{G}$.

Naopak, když d je prvek nějakého elementárního rozšíření, který je společný všem množinám z $\mathcal{G} \cap \mathbb{U}$: $\forall x \in \mathbb{U}\ (x \in \mathcal{G} \Longleftrightarrow d \in x)$, tak

$$\mathbb{U}[d] = \{ f(d) \mid f \in \mathbb{U},\ \mathrm{dom}(f) = X \,\} \;\cong\; \mathbb{U}^X/_{\mathcal{G}},$$

(viz (B) v předchozím důkazu). ◆

§ 4. SLABÁ STANDARDIZACE MEZI PODUNIVERSY MODELŮ wBST

Naším cílem v této části bude zjistit, pro které dvojice elementárních podunivers modelu $\langle \mathbb{I}, \mathbb{S}, \epsilon \rangle$ platí slabá standardizace — takové dvojice jsou potom samy modelem wBST. Z předchozí kapitoly víme, že to jsou ty třídy $\langle \mathbb{K}, \mathbb{J}, \epsilon \rangle$, $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{J} \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{I}$, kdy $\langle \mathbb{K}, \epsilon \rangle$ je direktní limitou ultramocnin universa $\langle \mathbb{J}, \epsilon \rangle$ přes ultrafiltry obsažené v $\mathbb{J}$.

Pro začátek se podívame na případ, kdy je universum $\mathbb{J}$ jednoduché nad $\mathbb{S}$ (model $\langle \mathbb{J}, \mathbb{S}, \epsilon \rangle$ je jednoduchý). Nechť tedy $\mathbb{J} = \mathbb{U}^I/_{\mathcal{G}}$ a nechť $\langle \mathcal{H}, J \rangle \in \mathbb{J}$ je ultrafiltr ve smyslu $\mathbb{J}$, tj. $\mathcal{H} = [\{\langle i, H_i \rangle \mid i \in I\}]$ je třída ekvivalence nějakého zobrazení $i \mapsto H_i$ $(\in \mathbb{U})$ a podobně $\mathcal{J} = [\{\langle i, J_i \rangle \mid i \in I\}]$, když H_i jsou ultrafiltry na J_i. Na množině $\coprod_{i \in I} J_i$, disjunktním sjednocení množin J_i, definujeme ultrafiltr

$$\Sigma_{i \in I} H_i \,/\, \mathcal{G} := \Big\{ A \subseteq \textstyle\coprod_{i \in I} J_i \mid \{ i \in I \mid A \cap J_i \in H_i \} \in \mathcal{G} \Big\}.$$

Všimněme si, že tento ultrafiltr nezávisí na volbě ultrafiltrů $\{H_i \mid i \in I\} \in \mathbb{U}$ reprezentujících $\mathcal{H}$ (přesněji, vhodné restrikce ultrafiltrů takto sestrojených ke dvěma reprezentacím $\mathcal{H}$ budou shodné). Zřejmá korespondence mezi prvky $\mathbb{J}$, které jsou funkce s doménou na J (ve smyslu $\mathbb{J}$), a funkcemi na $\coprod_{i \in I} J_i$ v $\mathbb{U}$ tak dává izomorfismus

$$\left(\mathbb{U}^I/_{\mathcal{G}}\right)^J/_{\mathcal{H}} \cong \mathbb{U}^{\amalg J_i}/_{\Sigma H_i / \mathcal{G}}.$$

Možnost vyjádřit nějaký ultrafiltr jako $\Sigma H_i \,/\, \mathcal{G}$ nad ultrafiltrem $\mathcal{G}$ odpovídá tzv. Rudin–Frolíkovu (kvazi)uspořádání ultrafiltrů; originálně definovaném na prvcích $\boldsymbol{\beta}(\omega)$.

4.1. Definice *(Rudin–Frolíkovo kvaziuspořádání)***.** Pro ultrafiltry $\langle \mathcal{G}, I \rangle$, $\langle \mathcal{E}, X \rangle$ je

$$\langle \mathcal{E}, X \rangle \geq_{RF} \langle \mathcal{G}, I \rangle,$$

pokud existuje indexovaná množina ultrafiltrů $\{\langle H_i, J_i \rangle \mid i \in I\}$ taková, že

$$\langle \mathcal{E}, X \rangle \simeq_{RK} \langle \Sigma_{i \in I} H_i \,/\, \mathcal{G}, \coprod_{i \in I} J_i \rangle.$$

Relace $\leq_{RF}$ tvoří kvaziuspořádání ultrafiltrů silnější než $\leq_{RK}$ (přirozená projekce $p : \coprod_{i \in I} J_i \to I$, $p(x) = i \Leftrightarrow x \in J_i$, přenese $p_*(\Sigma H_i / \mathcal{G}) = \mathcal{G}$). Další vlastnosti v [BLA].

4.2. Věta. *Pro ultrafiltry $\langle\mathcal{G}, I\rangle \leq_{RK} \langle\mathcal{E}, X\rangle$ (a projekci $\iota\colon X \to I$, $\iota_*(\mathcal{E}) = \mathcal{G}$) jsou následující výroky ekvivalentní:*

(a) *Vnoření $\mathbb{U}^I/_\mathcal{G} \preceq \mathbb{U}^X/_\mathcal{E}$ je standardizovatelné.*

(b) *Třída $\{\,[f] \in \mathbb{U}^I/_\mathcal{G} \mid f(i) \subseteq \iota^{-1}(i)\ \&\ \bigcup_{i\in I} f(i) \in \mathcal{E}\,\}$ je prvkem $\mathbb{U}^I/_\mathcal{G}$ — v tom případě to je $\mathbb{U}^I/_\mathcal{G}$-standardizace restrikce ultrafiltru $\{A \subseteq X \mid [\mathbf{id}_X] \mathrel{\epsilon} A\} \restriction [\iota^{-1}]$, definovaného v $\mathbb{U}^X/_\mathcal{E}$.*

(c) $\langle\mathcal{G}, I\rangle \leq_{RF} \langle\mathcal{E}, X\rangle$.

Důkaz. Vnoření $\mathbb{U}^I/_\mathcal{G} \preceq \mathbb{U}^X/_\mathcal{E}$ je standardizovatelné právě tehdy, když existuje ultrafiltr $\langle\mathcal{H}, J\rangle \in \mathbb{U}^I/_\mathcal{G}$, který je $\mathbb{U}^I/_\mathcal{G}$-standardizací ultrafiltru $\{\,A \subseteq X \mid [\mathbf{id}_X] \mathrel{\epsilon} A\,\}$ (nebo jeho restrikce). Je snadné si rozmyslet, že tato standardizace obsahuje právě ty $[f]$ pro které $[\mathbf{id}_X] \mathrel{\epsilon} [f \circ \iota]$, neboli $\bigcup_{i\in I}(f(i) \cap \iota^{-1}(i)) \in \mathcal{E}$. Přitom, když je ultrafiltr $\langle\mathcal{H}, J\rangle$ touto standardizací, tak $\mathbb{U}^X/_\mathcal{E} \cong \left(\mathbb{U}^I/_\mathcal{G}\right)^J/_\mathcal{H}$, a z úvah na začátku této kapitoly spolu s $\simeq_{RK}$-jednoznačností ultrafiltrů (2.4.(ii) + 2.12.) plyne $\langle\mathcal{G}, I\rangle \leq_{RF} \langle\mathcal{E}, X\rangle$.

Naopak je-li $\langle\mathcal{E}, X\rangle \simeq_{RK} \langle\Sigma_{i\in I} H_i\,/\mathcal{G},\ \coprod_{i\in I} J_i\rangle$, tak $\mathbb{U}^X/_\mathcal{E} \cong \left(\mathbb{U}^I/_\mathcal{G}\right)^J/_\mathcal{H}$ pro ultrafiltr $\mathcal{H} = [\{\langle i, H_i\rangle \mid i \in I\}] \in \mathbb{U}^I/_\mathcal{G}$, a standardizovatelnost plyne okamžitě (3.8.). ◆

Uvažujme nyní obecné podinternální universum $\mathbb{J} \cong \lim\operatorname{dir}_\nabla\mathbb{U}$, s ultragramem $\nabla = \{\,\langle\mathcal{G}_p, I_p\rangle,\ \iota_{qp}\,\}_{p\leq q\in\mathcal{P}}$, a ultrafiltr $\langle\mathcal{H}, J\rangle \in \mathbb{J}$, jemuž odpovídá nějaké zobrazení $(i \mapsto \langle H_i, J_i\rangle)_{i\in I}$ — jako výše. Pak

$$\widetilde{\nabla} := \left\{\, \langle\Sigma_{i\in I_p} H_{\iota_{pd}(i)}/\mathcal{G}_p,\ \textstyle\coprod_{i\in I_p} J_{\iota_{pd}(i)}\rangle,\ \widetilde{\iota}_{qp} \mid p, q \geq d \,\right\}$$

je ultragram (když projekce $\widetilde{\iota}_{qp}\colon \coprod_{i\in I_q} J_{\iota_{qd}(i)} \to \coprod_{i\in I_p} J_{\iota_{pd}}$ jsou sjednocení souboru identit), pro který

$$\lim\operatorname{dir}_{\widetilde{\nabla}}\mathbb{U} \cong \mathbb{J}^J/_\mathcal{H} \cong \mathbb{J}[\,[\{\,\langle i, \mathbf{id}_{J_i}\rangle \mid i \in I\}]\,].$$

Každé internální universum $\mathbb{K}$, $\mathbb{S} \preceq \mathbb{J} \preceq \mathbb{K} \preceq \mathbb{I}$, je direktní limita takovýchto jednoduchých rozšíření $\mathbb{J}[d]$, $d \in \mathbb{K}$, tj., je-li vnoření $\mathbb{J} \preceq \mathbb{K}$ standardizovatelné, je direktní limitou určitých ultramocnin $\mathbb{J}^{J_d}/_{\mathcal{H}_d}$, $\langle\mathcal{H}_d, J_d\rangle \in \mathbb{J}$.

4.3. Poznámka. Standardizovatelnost vnoření $\mathbb{J} \preceq \mathbb{K}$ implikuje, že $\omega^\mathbb{I} \cap \mathbb{K}$ je koncové rozšíření $\omega^\mathbb{I} \cap \mathbb{J}$, tj. přirozená čísla z $\mathbb{K} - \mathbb{J}$ leží až za těmi z $\mathbb{J}$. Vskutku, každé $b \mathrel{\epsilon} \omega^\mathbb{I}$ je rovné množině svých předchůdců, a je-li $b \in \mathbb{K} - \mathbb{J}$, tak jeho $\mathbb{J}$-standardizace obsahuje nulu a je uzavřená na následníka, tedy to je celé $\omega^\mathbb{J}$; proto všechny $\mathbb{J}$-prvky $\omega^\mathbb{I}$ leží pod b — [BLA].

V následujícím odstavci se podíváme, co lze říct o standardizovatelnosti vnoření $\mathbb{J} \preceq \mathbb{K}$ v termínech jejich $\mathbb{S}$-strukturace. Nejprve ilustrativní příklad modelu, kde slabá standardizace selhává (přitom koncové rozšíření ω platí):

4.4. Příklad. $\mathcal{Z}$ buď nějaký uniformní ultrafiltr na ω_1, $\mathcal{U}$ množina všech rozkladů ω_1 na ω částí, $\mathbb{I} := \mathbb{U}^{\omega_1}/_\mathcal{Z}$, $\mathbb{J} := \mathbb{U}^\mathcal{U}/_\mathcal{Z}$. Pak $\mathbb{J} \cap \mathfrak{k}(\omega) = \mathbb{I} \cap \mathfrak{k}(\omega)$, přičemž prvek $[\mathbf{id}_{\omega_1}] \mathrel{\epsilon} \mathfrak{k}(\omega_1) \cap \mathbb{I} - \mathbb{J}$ svědčí o různosti univers $\mathbb{J} \neq \mathbb{I} = \mathbb{J}[[\mathbf{id}_{\omega_1}]]$.

Pokud by toto vnoření bylo standardizovatelné, existovala by $\mathbb{J}$-standardizace $\mathcal{G}$ ultrafiltru $\{\,a \subseteq \omega_1 \mid [\mathbf{id}_{\omega_1}] \mathrel{\epsilon} a\,\}$, takže $\mathbb{I} \cong \mathbb{J}^{\omega_1}/_\mathcal{G}$. Ultrafiltr $\mathcal{G}$ by ale musel nutně být ω_1-úplný (ve smyslu $\mathbb{J}$), což je ve sporu s ZFC [JECH, 10.13]. ◆

Význačným rysem tohoto příkladu je, že, zatímco model $\langle \mathbb{I}, \mathbb{S}, \epsilon \rangle$ je jednoduchý, jeho st-elementární podmodel $\langle \mathbb{J}, \mathbb{S}, \epsilon \rangle$ nikoliv. V následujícím tvrzení ukážeme, že slabá standardizace nemůže platit pro žádnou takovou dvojici modelů.

4.5. Definice. *Kontrakce* usměrněné třídy $\langle \mathcal{P}, \leq \rangle$ na $\langle \mathcal{Q}, \leq \rangle$, $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$, je surjektivní zobrazení $F\colon \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$, které zachovává (kvazi)uspořádání a které je identita na $\mathcal{Q}$.

4.6. Tvrzení. *Když je vnoření $\mathbb{J} \preceq \mathbb{K}$ elementárních podtříd modelu wBST $\langle \mathbb{I}, \mathbb{S}, \epsilon \rangle$, $\mathbb{S} \preceq \mathbb{J} \preceq \mathbb{K} \preceq \mathbb{I}$, standardizovatelné, tak existuje třídové zobrazení $F\colon \mathbb{K} \to \mathbb{J}$, které je kontrakcí $\langle \mathbb{K}, \leq_{\mathbb{S}} \rangle$ na $\langle \mathbb{J}, \leq_{\mathbb{S}} \rangle$.*

4.7. Důkaz. Pro $d \in \mathbb{K}$ definujeme ultrafiltr $\mathcal{F}_d$ jako $\mathbb{J}$-standardizaci ultrafiltru

$$\{\, a \in \mathbb{J} \mid a \subseteq^{\mathbb{J}} I_d \ \&\ d \,\epsilon\, a \,\} \in \mathbb{K} \ \ (d \,\epsilon\, I_d \in \mathbb{S}).$$

Zobrazení F definujeme jako $F(d) := \mathcal{F}_d$. Platí následující:

- $d \simeq_{\mathbb{S}} \{\, a \subseteq^{\mathbb{J}} I_d \mid d \,\epsilon\, a \,\} \quad (d = \bigcap \{\, a \subseteq^{\mathbb{J}} I_d \mid d \,\epsilon\, a \,\})$.
- $q \leq_{\mathbb{S}} p \implies F(q) \leq_{\mathbb{S}} F(p)$, neboť $(\iota_{pq})_*$ je standardní funkce, pro kterou

  $$(\iota_{pq})_* \{\, a \subseteq^{\mathbb{J}} I_p \mid \ p \,\epsilon\, a \,\} = \{\, b \subseteq^{\mathbb{J}} I_q \mid q \,\epsilon\, b \,\},$$

  a tedy též $(\iota_{pq})_* \mathcal{F}_p = \mathcal{F}_q$. ◆

Kontrakce F z předchozího důkazu přitom ukazuje, kde hledat $\mathbb{J}$-standardizaci prvku $a \in \mathbb{K}$ (označme ji b):

$$a \in \mathbb{S}[d] \implies b \in \mathbb{S}[F(d)],$$

neboť je-li $a = f(d)$ pro standardní funkci f, pak

$$\mathbb{J} \models b = \{\, z \mid \{\, x \in I_d \mid z \in f(x) \,\} \in \mathcal{F}_d \,\},$$

přitom množina vpravo leží v $\mathbb{S}[\mathcal{F}_d]$, protože je standardně definovaná z parametru $\mathcal{F}_d$.

Pro úplnost ještě dodávám, že je-li $\mathbb{K} \cong \mathbb{J}^{\mathcal{U}}/_{\mathcal{Z}}$, kde $\langle \mathcal{B}, \mathcal{Z}, \mathcal{U} \rangle$ jsou ultradata v $\mathbb{S}$ taková, že $\forall u \in \mathcal{U}\ (\mathcal{Z}_u \in \mathbb{S})$, pak

$$\mathcal{F}_d \leq_{\mathbb{S}} d,$$

a $\mathbb{S}[d] \cap \mathbb{J}$ má $\leq_{\mathbb{S}}$-maximální prvek pro každé $d \in \mathbb{K}$ (tím je $\mathbb{J}$-standardizace množiny d).

4.8. Poznámka. V protikladu k platnosti slabé standardizovatelnosti do každé ultramocniny, Petr Andreev a Karel Hrbáček dokázali (v [AH]), že plná standardizace selhává pro všechna poduniverza definovatelná v modelech BST a tak v nich činí standardní universum zcela unikátním. Konkrétně zde (v BST) není žádná třída $\mathbb{X} \preceq \mathbb{I}$, $\mathbb{X} \neq \mathbb{S}, \mathbb{I}$, pro kterou by $\langle \mathbb{I}, \mathbb{X}, \epsilon \rangle \models$ "standardizace". To ukazuje, jak mnoho se tyto dva principy liší v jejich síle.

§ 5. SATUROVANOST

Kapitola pojednává o saturovanosti modelů wBST s ohledem na ultradata.

Nadále nechť $\kappa > \omega$ je kardinál, $\mathfrak{k}\colon \mathbb{U} \hookrightarrow \mathbb{U}^{\mathcal{U}}/_{\mathcal{Z}}$ kanonické vnoření.

5.1. Definice. Nechť $\langle \mathbb{S}, \epsilon \rangle \preceq \langle \mathbb{I}, \epsilon \rangle$. Řekneme, že $\mathbb{I}$ je *κ-saturovný nad* $\mathbb{S}$, pokud pro každý soubor $K \subseteq \mathbb{S}$ kardinality $|K| < \kappa$ s konečnou průnikovou vlastností, existuje $x \in \mathbb{I}$: $\forall b \in K\ (x \,\epsilon\, b)$. Rozkladová ultramocnina $\mathbb{U}^{\mathcal{U}}/_{\mathcal{Z}}$ je *κ-saturovaná nad konstantami*, je-li κ-saturovaná nad $\mathfrak{k}``\mathbb{U}$. Universum $\mathbb{I}$ je *κ-saturované*, je-li κ-saturované nad sebou samým.

5.2. Definice.
(i) Usměrnění $\langle \mathcal{P}, \leq \rangle$ je *κ-úplné*, pokud pro každou množinu $K \subseteq \mathcal{P}$, $|K| < \kappa$, existuje $p \in \mathcal{P}$ takové, že $\forall b \in K\ (p \geq b)$.
(ii) Ultrafiltr $\mathcal{G}$ je *κ-úplný*, pokud jeho uspořádaní obrácenou inkluzí $\langle \mathcal{G}, \supseteq \rangle$ je κ-úplné.
(iii) Ultrafiltr $\mathcal{G}$ je *κ-regulární*, pokud existuje množina $R \subseteq \mathcal{G}$, $|R| = \kappa$, pro kterou $S \subseteq R$, $|S| \geq \omega \implies \bigcap S = \emptyset$.

5.3. Definice. Ultradata $\langle \mathcal{B}, \mathcal{Z}, \mathcal{U} \rangle$ jsou:

- *ω_1-neúplná*, pokud $\exists\, u \in \mathcal{U}$ ($\mathcal{Z}_u$ je ω_1-neúplný ultrafiltr na u).
- *κ-regulární*, pokud $\exists\, u \in \mathcal{U}$ ($\mathcal{Z}_u$ je κ-regulární ultrafiltr na u).
- *κ-dobrá*, pokud pro každé $\gamma < \kappa$, $u \in \mathcal{U}$ a $\Psi\colon [\gamma]^{<\omega} \to \mathcal{Z}_u$ monotónní $$(F \subseteq G \implies \Psi(F) \geqslant \Psi(G)),$$ existují $v \in \mathcal{U}$, $h \in \mathcal{Z}$ a $\Phi\colon [\gamma]^{<\omega} \to \mathcal{Z}_v$ multiplikativní, které na h zjemňuje Ψ (tzn. $\forall F \subseteq \gamma$ konečnou je $\Phi(F) \wedge h \leqslant \Psi(F)$).

5.4. Tvrzení. ω_1-neúplná & κ^+-dobrá ultradata jsou κ-regulární. (Viz [CN, 9.9]). ◆

5.5. Definice. Universum $\mathbb{U}$ je *plné* (neboli kotranzitivní), pokud $x \subseteq \mathbb{U} \implies x \in \mathbb{U}$.

5.6. Tvrzení. *Nechť $\mathbb{U}$ je plné universum, $\langle \mathcal{B}, \mathcal{Z}, \mathcal{U} \rangle$ jsou ultradata v $\mathbb{U}$ a $\lambda \in \mathbb{U}$ je kardinál vzhledem k $\mathbb{U}$. Rozkladová ultramocnina $\mathbb{U}^{\mathcal{U}}/_{\mathcal{Z}}$ je κ^+-saturovaná nad konstantami právě tehdy, když ultradata $\langle \mathcal{B}, \mathcal{Z}, \mathcal{U} \rangle$ jsou κ-regulární.*

Důkaz.
($\Rightarrow$) Vezmi $u \in \mathcal{U}$ a funkci $t\colon u \to \mathbb{U}$ takovou, aby
$$\forall \xi \in \kappa\ [t] \,\epsilon\, \mathfrak{k}(\{\, \sigma \in [\kappa]^{<\omega} \mid \xi \in \sigma \,\})$$

— její existence plyne z předpokladu. Pak $\forall\xi \in \kappa\ (\mathfrak{k}(\xi) \epsilon [t])$ a $\mathbb{U}^{\mathcal{U}}/_{\mathcal{Z}} \models$ "$[t]$ je konečná", tj. existuje $d \in \mathcal{Z}_u$ takové, že $\forall a \in d\ |t(a)| < \omega$. Množiny $E_\xi := \{\, a \in d \mid \xi \in t(a) \,\} \in \mathcal{Z}_u$ jsou dokladem κ-regularity $\mathcal{Z}_u$.

($\Leftarrow$) Když $\mathcal{Z}_u$ je κ-regulární, tak $\mathbb{U}^u/_{\mathcal{Z}_u}$ je podle známého tvrzení (viz [CN]) κ^+-saturovaná nad konstantami, a tím spíše to platí pro $\mathbb{U}^{\mathcal{U}}/_{\mathcal{Z}}$. Je třeba dát pozor, potřebujem aby dotyčná funkce, jejíž třída ekvivalencí leží v průsečíku daného systému standardních prvků, byla obsažena v $\mathbb{U}$, proto předpoklad plnosti. ◆

5.7. Příklad *konstrukce κ^+-saturovaného modelu jako κ^+-krát iterované extrní ultramocnině přes κ-regulární ultrafiltr.*

Také zde budeme předpokládat, že $\mathbb{U}$ je plné universum. Nechť $\mathcal{G}$ je κ-regulární ultrafiltr na I. Induktivně definujeme posloupnost ultradat $\langle \mathcal{B}_\alpha, \mathcal{Z}_\alpha, \mathcal{U}_\alpha \rangle_{\alpha \le \kappa^+}$, tak aby pro $\beta > \alpha$ $\mathbb{U}^{\mathcal{U}_\beta}/_{\mathcal{Z}_\beta}$ elementárně obsahovala $\mathbb{U}^{\mathcal{U}_\alpha}/_{\mathcal{Z}_\alpha}$ a byla nad ním standardně κ^+-saturovaná. Potom $\mathbb{U}^{\mathcal{U}_{\kappa^+}}/_{\mathcal{Z}_{\kappa^+}}$ bude κ^+-saturované universum, neboť κ^+ je vždy regulární kardinál.

$\mathcal{B}_\alpha := \wp({}^\alpha I)$ buď algebra podmnožin produktu α kopií I, a $\pi^\alpha_\beta\colon {}^\alpha I \to {}^\beta I$ přirozená projekce. Položme

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_1 &:= \mathcal{G},\\
\mathcal{U}_1 &:= \{\, \{i\} \mid i \in I \,\},\\
\mathcal{Z}_{\alpha+1} &:= \mathcal{Z}_\alpha \otimes \mathcal{G},\\
\mathcal{U}_{\alpha+1} &:= \{\, \{\, a \times \{i\} \mid a \in u(i),\ i \in I \,\} \mid u\colon I \to \mathcal{U}_\alpha \text{ funkce v } \mathbb{U} \,\},\\
\mathcal{Z}_\gamma &\text{ nějaké rozšíření filtru } \bigcup_{\alpha<\gamma} \{\, (\pi^\gamma_\alpha)^{-1}``a \mid a \in \mathcal{Z}_\alpha \,\} \text{ na ultrafiltr na } \mathcal{B}_\gamma,\\
\mathcal{U}_\gamma &:= \bigcup_{\alpha<\gamma} \{\, (\pi^\gamma_\alpha)^{-1}``a \mid a \in \mathcal{U}_\alpha \,\}, \text{ pro } \gamma \text{ limitní.}
\end{aligned}$$

Vnoření $\mathfrak{e}_{\beta\alpha} : \mathbb{U}^{\mathcal{U}_\beta}/_{\mathcal{Z}_\beta} \hookrightarrow \mathbb{U}^{\mathcal{U}_\alpha}/_{\mathcal{Z}_\alpha}$ budiž dána složením reprezentujících funkcí s projekcemi π^α_β. Je vidět, že $\mathbb{U}^{\mathcal{U}_{\alpha+1}}/_{\mathcal{Z}_{\alpha+1}}$ je izomorfní $\{\, [f] \mid f\colon I \to \mathbb{U}^{\mathcal{U}_\alpha}/_{\mathcal{Z}_\alpha},\ f \in \mathbb{U} \,\}$, tj. vnější ultramocnině α-tého modelu přes κ-regulární ultrafiltr, a tedy je nad ním κ^+-saturovaná, stejně jako je $\mathbb{U}^I/_{\mathcal{G}}$ κ^+-saturovaná nad $\mathbb{U}$.

$$\mathbb{U}^{\mathcal{U}_{\kappa^+}}/_{\mathcal{Z}_{\kappa^+}} = \lim\operatorname{dir}\{\, \mathbb{U}^{\mathcal{U}_\alpha}/_{\mathcal{Z}_\alpha},\ \mathfrak{e}_{\alpha\kappa^+} \,\}_{\alpha<\kappa^+}.$$

◆

5.8. Tvrzení. *Nechť $\mathbb{U}$ je plné universum a $\langle \mathcal{B}, \mathcal{Z}, \mathcal{U} \rangle$ jsou ultradata v $\mathbb{U}$. Rozkladová ultramocnina $\mathbb{U}^{\mathcal{U}}/_{\mathcal{Z}}$ je κ-saturovaná právě tehdy, když $\langle \mathcal{B}, \mathcal{Z}, \mathcal{U} \rangle$ jsou ω_1-neúplná & κ-dobrá ultradata a usměrnění $\langle \mathcal{U}, \le_{\mathcal{Z}} \rangle$ (neboli $\langle \mathbb{I}, \le_{\mathbb{S}} \rangle$) je κ-úplné.*

Důkaz. ($\Rightarrow$) $\mathbb{U}^{\mathcal{U}}/_{\mathcal{Z}}$ buď κ-saturovaný model.

(a) *κ-úplnost:* Ať soubor $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$, $|\mathcal{V}| < \kappa$ je dán, jeho prvky budeme bez újmy na obecnosti chápat jako rozklady na nějaké množině I, a funkce $\mathbf{id}_u$ jako zobrazení $I \to \wp(I)$. Takže $u \le_{\mathcal{Z}} v \Longleftrightarrow \mathbf{id}_u \supseteq_{\mathcal{Z}} \mathbf{id}_v$. Nechť rozklad $w \in \mathcal{U}$ a $t\colon w \to \mathbb{U}$ jsou takové, že $\forall u \in \mathcal{V}\ [t] \epsilon [\mathbf{id}_u]$. Pak pro libovolné $u \in \mathcal{V}$ existuje $d \in \mathcal{Z}$ takové, že pro každé $x \in d$ je $x \in a \in u \Longrightarrow t(x) \in a$. Je-li nyní $y \in d$ ze stejné komponenty b rozkladu w jako x $(\in a \cap b \cap d)$, je $t(y) = t(x) \in a$, a tedy též $y \in a$ $(\in u)$; tzn. $w \ge_{\mathcal{Z}} u$.

(b) ω_1-*neúplnost:* Vezmi $[a] \in \mathbb{U}^{\mathcal{U}}/_{\mathcal{Z}}$ nestandardní prvek $\mathfrak{k}(\omega)$, $a\colon u \to \omega$.
Množiny $I_n := \{ A \in u \mid a(A) \geq n \} \in \mathcal{Z}_u$ ukazují ω_1-neúplnost $\mathcal{Z}_u$.

(c) κ-*dobrost:* Mějme $\omega \leq \gamma < \kappa$ a $\Psi\colon [\gamma]^{<\omega} \to \mathcal{Z}_u$ monotonní zobrazení.

Zvolme libovolnou bijekci $t\colon [\gamma]^{<\omega} \to \gamma$ a definujeme funkci $e\colon u \times [\gamma]^{<\omega} \to \wp(\gamma)$ jako:

$$e(a, F) = \{ t(G) \mid G \in [\gamma]^{<\omega}, F \subseteq G, a \in \Psi(G) \}.$$

Lehce se ověří, že:
- $e(a, F) = \emptyset \iff a \notin \Psi(F)$,
- $e(a, F \cup G) = e(a, F) \cap e(a, G)$,
- $\{ a \in u \mid t(F) \in e(a, F) \} = \Psi(F) \in \mathcal{Z}_u$.

Nechť $f_\zeta(a) := e(a, \{\zeta\})$, pak $\{ f_\zeta\colon u \to \wp(\gamma) \mid \zeta \in \gamma \}$ je soubor funkcí z $\mathbb{U}$ (je plné). A nechť funkce $s\colon v \to \wp(\gamma)$ je taková, že $\forall \zeta \in \gamma \ [s] \epsilon [f_\zeta]$, a navíc $v \geq_{\mathcal{Z}} u$ (tj. existuje $h \in \mathcal{Z}$ tak, že prvky z restrikce $v{\restriction}h$ jsou pod prvky z rozkladu u).

Pak $\Phi\colon [\gamma]^{<\omega} \to \wp(v)$ dané předpisem

$$\Phi(F) := \{ b \in v \mid b \wedge h \leqslant b' \in u \implies s(b) \in e(b', F) \}$$

je multiplikativní, nabývá hodnot ze $\mathcal{Z}_v$ a na prvku $h \in \mathcal{Z}$ zjemňuje Ψ.

(Podrobnosti v [CN, 13.13]).

($\Leftarrow$) Nechť $u = I_0 \subset I_1 \subset \cdots \in \mathcal{Z}_u$ je řetězec svědčící o ω_1-neúplnosti ultradat. Mějme $K \subseteq \mathbb{U}^{\mathcal{U}}/_{\mathcal{Z}}$, $|K| < \kappa$; o elementech z K lze díky κ-úplnosti $\mathcal{U}$ předpokládat, že jsou reprezentovány funkcemi s doménou na stejném rozkladu u. Zobrazení $\Psi\colon [K]^{<\omega} \to \mathcal{Z}_u$ definujeme klasickým způsobem:

$$\Psi(F) = \{ a \in u \mid \bigcap\nolimits_{[f] \in F} f(a) \neq \emptyset \} \ \cap \ I_{|F|}, \quad \text{pro } F \subseteq K \text{ konečnou.}$$

Multiplikativní $\Phi\colon [K]^{<\omega} \to \mathcal{Z}_v$ ať na nějakém $h \in \mathcal{Z}$ zjemňuje Ψ. Pro $a \in v$ se položí $g(a)$ prvek z průniku konečné (!) množiny

$$\{ f'(a \wedge h) \mid [f'] \in K \ \ \& \ \ a \in \Phi(\{[f']\}) \},$$

(kde reprezentující funkce f' se berou tak, aby $\mathrm{dom}(f') \supseteq \{ a \wedge h \mid a \in v \}$). Plnost universa $\mathbb{U}$ pak zaručí, že $g \in \mathbb{U}$.

Pro každou $[f'] \in K$ je $\Phi(\{[f']\}) \subseteq \{ a \in v \mid g(a) \in f'(a \wedge h) \}$, takže $[g] \epsilon [f']$.
(Podrobnosti v [CK, 6.1.8]). ◆

§ 6. NEPOLOJEDNODUCHÉ MODELY wBST

Kapitola, ve které zjistíme, že existence modelů wBST, které jsou úzké a nejsou polojednoduché, úzce souvisí s existencí měřitelných kardinálů, a proto nelze (v ZFS) dokázat jejich konzistenci.

6.1. Definice. O modelu wBST $\langle \mathbb{I}, \mathbb{S}, \epsilon \rangle$ řekneme, že je *úzký*, pokud relace ϵ je úzká na třídě $\mathbb{I}$.

Sestrojit model wBST, který není polojednoduchý *(nepolojednoduchý model)*, tzn. takový, kde pro nagenerování internálního universa je nutné přidat ke standardní části vlastní třídu dalších prvků, není obecně problém; dá se to dokonce udělat tak, aby byl plně saturovaný — např. iterovaným ultramocněním (externím — viz 5.7.) přes sekvenci regulárních ultrafiltrů na množinách $\kappa \in Ord$. Avšak pro současnou existenci rozumně silného (ZFC$^-$) externálního universa, jež je důležitá pro rozvoji nestandardních metod, je zcela nezbytné, aby relace ϵ byla úzká. (O nestandardní teorii množin a tzv. Hrbáčkových paradoxech např. [DN]).

Ukážeme, že úzký nepolojednoduchý modelu wBST nelze v ZFS zkonstruovat a že relativní síla jeho konsistence leží někde mezi existencí měřitelného kardinálu a existencí vlastní třídy měr.

6.2. Fakt (Donder**).** (ZFC) Předpokládejme, že neexistuje vnitřní model s měřitelným kardinálem. Nechť $\mathcal{Z}$ je uniformní ultrafiltr na nekonečném kardinálu κ. Pak $\mathcal{Z}$ je λ-regulární pro každé $\lambda < \kappa$. [DON, 4.5] ◆

6.3. Fakt. Je-li $\mathcal{Z}$ λ-regulární ultrafiltr na množině I, pak pro každou množinu a platí $|a^I/_{\mathcal{Z}}| \geq |a|^\lambda$ $(a^I/_{\mathcal{Z}} = \{\, [f] \mid f\colon I \to a \text{ je funkce}\,\})$. [CN, 12.15] ◆

6.4. Lemma. Každý ultrafiltr je RK-ekvivalentní uniformnímu.

Důkaz. $H \in \mathcal{Z}$ buď množina minimální kardinality v $\mathcal{Z}$, pak $\mathcal{Z}{\restriction}H$ je uniformní ultrafiltr na H. ◆

6.5. Věta. *Pokud existuje nepolojednoduchý model wBST $\langle \mathbb{I}, \mathbb{S}, \epsilon \rangle$, který je úzký, pak*

$$\mathbb{S} \models \exists\, \lambda\ \forall \kappa\ \exists \langle \mathcal{H}, X \rangle\ (\mathcal{H} \text{ je uniformní ultrafiltr na } X,\ |X| \geq \kappa\ \&\ \mathcal{H} \text{ není } \lambda\text{-regulární}).$$

Speciálně v takovém případě existuje vnitřní model ZFC s měřitelným kardinálem.

Formulace tohoto tvrzení ve vlastnosti "nepolojednoduchosti" odkazuje mnohem více k podobě universa $\mathbb{V}$ než takového modelu. V následujícím důkazu je proto nezbytné pečlivě rozlišovat mezi množinami z $\mathbb{I}$ a jejich externími extenzemi, mezi kardinální aritmetikou v $\mathbb{I}$ a ve $\mathbb{V}$.

Důkaz. Pro $a \in \mathbb{K} \subseteq \mathbb{I}$ nechť $a_{\mathbb{K}} := \{\, x \in \mathbb{K} \mid x \,\epsilon\, a \,\}$ značí externální extenzi prvku a v $\mathbb{K}$. Je-li ϵ úzké, je $a_{\mathbb{K}}$ množina.

Nechť $\mathbb{I} = \mathbb{S}[\![\mathcal{P}]\!]$, kde $\mathcal{P}$ je vlastní třída uspořádaná relací $\leq_{\mathbb{S}}$: $\forall p, q \in \mathcal{P}\ p \neq q \Longleftrightarrow p \not\simeq_{\mathbb{S}} q$, a ke každému $p \in \mathcal{P}$ buď $\mathcal{H}_p \in \mathbb{S}$ uniformní ultrafitr na $X_p \in \mathbb{S}$, pro který je $\mathbb{S}[p] \cong \mathbb{S}^{X_p}/_{\mathcal{H}_p}$ izomorfismem určeným evaluací v bodě $p \,\epsilon\, X_p$. Důkaz věty plyne z následujících pozorování.

(A) *$\mathcal{P}$ má vlastní podtřídu $\mathcal{Q}$ takovou, že $p \neq q \in \mathcal{Q} \Longrightarrow \mathbb{S} \models |X_p| \neq |X_q|$.*
V opačném případě by musela existovat vlastní třída $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$ a kardinál κ v $\mathbb{S}$ tak, že
$$q \in \mathcal{Q} \Longrightarrow \mathbb{S} \models |X_q| = \kappa.$$
Když potom $b_q\colon X_q \to \kappa$, $q \in \mathcal{Q}$ jsou bijekce v $\mathbb{S}$, tak $[b_q]$ je prvkem $\mathbb{S}^{X_p}/_{\mathcal{H}_p}$, kterému odpovídá prvek $b_q(q) \in \mathbb{S}[q]$, přitom $b_q(q) \,\epsilon\, \kappa$. Zřejmě $b_q(q) \simeq_{\mathbb{S}} q$, takže pro $p, q \in \mathcal{Q}\ p \neq q$ je $b_p(p) \not\simeq_{\mathbb{S}} b_q(q)$ a třída $\{\, b_q(q) \mid q \in \mathcal{Q} \,\}$ by byla vlastní třída ϵ-elementů κ, což je ve sporu s předpokladem, že ϵ je úzká relace.

(B) *Důsledek: Kardinality množin X_p, $p \in \mathcal{P}$ v $\mathbb{S}$ jsou neomezené v $\mathbb{I}$.*

(C) $\forall \kappa\ \exists a \in \mathbb{S}\ |a_{\mathbb{S}}| \geq \kappa$.
Ke každému kardinálu κ lze podle (A) vybrat ostře rostoucí sekvenci $\{a_\alpha\}_{\alpha \leq \kappa} \subseteq \mathbb{S}$ ordinálů z $\mathbb{S}$: $\alpha < \beta \Longrightarrow a_\alpha \,\epsilon\, a_\beta$. Potom $\{\, a_\alpha \mid \alpha < \kappa \,\} \subseteq (a_\kappa)_{\mathbb{S}}$, a tedy $|(a_\kappa)_{\mathbb{S}}| \geq \kappa$.

Nechť ${}^\star\omega$ značí prvek $\omega^{\mathbb{I}} \in \mathbb{S}$ a $\lambda \in \mathbb{S}$ je kardinál v $\mathbb{S}$ takový, že $|\lambda_{\mathbb{S}}| > |({}^\star\omega)_{\mathbb{I}}|$.

(D) *Pak $\mathbb{S} \not\models$ "$\langle \mathcal{H}_p, X_p \rangle$ je λ-regulární" pro žádné $p \in \mathcal{P}$.*
Pro spor předpokládejme, že nějaký $\mathcal{H}_p$ je λ-regulární v $\mathbb{S}$. $\mathbb{I} \models \mathbb{S}[p] \cong \mathbb{S}^{X_p}/_{\mathcal{H}_p}$, což znamená, že v $\mathbb{I}$ existuje bijektivní zobrazení mezi prvky $({}^\star\omega)_{\mathbb{S}[p]}$ a $({}^\star\omega^{X_p}/_{\mathcal{H}_p})_{\mathbb{S}}$. Snadno ji transformujeme na (externí) bijekci množin $({}^\star\omega)_{\mathbb{S}[p]}$ a $({}^\star\omega^{X_p}/_{\mathcal{H}_p})_{\mathbb{S}}$. Protože $\mathbb{S} \models |\omega^{X_p}/_{\mathcal{H}_p}| \geq \omega^\lambda > \lambda$ (lemma 6.3.), je z týchž důvodů jako v předešlé větě $|\lambda_{\mathbb{S}}| \leq |({}^\star\omega^{X_p}/_{\mathcal{H}_p})_{\mathbb{S}}|$. A tak
$$|({}^\star\omega)_{\mathbb{I}}| \geq |({}^\star\omega)_{\mathbb{S}[p]}| = |({}^\star\omega^{X_p}/_{\mathcal{H}_p})_{\mathbb{S}}| \geq |\lambda_{\mathbb{S}}| \geq |({}^\star\omega)_{\mathbb{I}}|$$
je spor ($|({}^\star\omega)_{\mathbb{I}}| \neq |({}^\star\omega)_{\mathbb{I}}|$).

Tvrzení (B) a (D) dokazují existenci velmi neregulárních ultrafiltrů v $\mathbb{S}$ a tedy i v $\mathbb{S}^{\mathbb{WF}}$. Donderova věta (6.2.) potom vynucuje existenci modelu s mírou. ◆

Naproti tomu za předpokladu existence vlastní třídy měřitelných kardinálů se iterovaným ultramocněním, přes stále více úplné ultrafiltry, snadno sestrojí nepolojednoduchý úzký model wBST (ten je pak možné např. dále κ-saturovat pro libovolně velké κ); viz [JEŘ, 2.4.5]. Problém existence úzkého nepolojednoduchého modelu wBST je tak z kategorie tvrzení o existenci velkých kardinálů.

ODKAZY

[AH] P. Andreev and K. Hrbáček, *Standard sets in nonstandard set theory*, ***J. Symb. Logic***, vol. 69 (2004), pp. 165-182.

[BH] D. Ballard and K. Hrbáček, *Standard foundations for nonstandard analysis*, ***J. Symb. Logic***, vol. 57 (1992), pp. 741-748.

[BLA] A. Blass, *End extensions, conservative extensions, and the Rudin–Frolík ordering*, ***Trans. Amer. Math. Soc.***, vol. 225 (1977), pp. 325-340.

[CK] C. C. Chang and H. J. Keisler, ***Model Theory***, 2nd ed. North-Holland, Amsterdam, 1977.

[CN] W. W. Comfort and S. Negrepontis, ***The Theory of Ultrafilters***, Springer–Verlag, Berlin, 1974.

[DN] M. Di Nasso, *On the foundations of nonstandard mathematics*, ***Mathematica Japonica***, vol. 50 (1999), pp. 131-160.

[DON] H.–D. Donder, *Regularity of ultrafilters and the core model*, ***Israel J. Math.***, vol. 63 (1988), pp. 289-322.

[JECH] T. Jech, ***Set Theory***, 3rd millenium ed., Springer-Verlag, Berlin, 2002

[JEŘ] E. Jeřábek, ***Reflexe v neregulárních univerzech***, diplomová práce MFF UK, Praha, 2001.

[PAJ] P. Pajas, ***Endomorfismy, invariantní třídy a nestandardní principy v neregulárním universu množin***, diplomová práce MFF UK, Praha, 1999.

ZNAČENÍ

$A \subseteq B$	podtřída třídy	5
$A \times B$	kartézský součin tříd	5
$A - B$	rozdíl tříd	5
$\wp(A)$	potenční třída	5
$\langle \mathbb{M}, \in^{\mathbb{M}} \rangle$, $\mathbb{M}$	model $\in$-jazyka ($\in$-struktura)	5
$\phi^{\mathbb{M}}$, $\phi^{\mathbb{M}, \in^{\mathbb{M}}}$	relativizace formule do $\in$-struktury	5
$\mathbb{M} \models \phi$	platnost formule v modelu	5
$\mathbb{W} \preceq \mathbb{M}$	elementární vnoření univers	5
$\mathbb{V}$	universální třída	5
$\mathbb{WF}$	fundované jádro	5
$\mathbb{U}$	tranzitivní universum, $\langle \mathbb{U}, \in \rangle \models \mathrm{ZFC}^-$	6
Ord	ordinální čísla	6
$\mathcal{C}(x, y)$, $\mathcal{C}(x)$	očíslování universa pomocí AS	6
$\mathcal{B}$, $\langle \mathcal{B}, \leqslant, \wedge, \vee, 0 \rangle$	svaz	7
$\mathcal{Z} \restriction a$	restrikce ultrafiltru	7
$\mathcal{P}$, $\langle \mathcal{P}, \leq \rangle$	usměrněná třída (usměrnění)	7
$u \geq_{\mathcal{Z}} v$	"rozklad u zjemňuje v"	8
$\mathcal{U}$, $\mathcal{W}$	rozkladové systémy	8
$\mathcal{Z}_u$	ultrafiltr na rozkladu, $\mathcal{Z}_u = \{ s \subseteq u \mid \bigvee s \in \mathcal{Z} \}$	8
$\langle \mathcal{B}, \mathcal{Z}, \mathcal{U} \rangle$	ultradata	8
$=_{\mathcal{Z}}$, $\in_{\mathcal{Z}}$, $\subseteq_{\mathcal{Z}}$	platnost (po složkách) na množině z ultrafiltru	8
$[f]$	třída ekvivalence funkce (její reprezentace)	8
$[f] \mathrel{\epsilon} [g]$	$f \in_{\mathcal{Z}} g$	8
$\mathbb{U}^{\mathcal{U}}/_{\mathcal{Z}}$	rozkladová ultramocnina	8
$\mathfrak{k} \colon \mathbb{U} \hookrightarrow \mathbb{U}^{\mathcal{U}}/_{\mathcal{Z}}$	kanonické vnoření	8
$\langle x, y \rangle$	uspořádaná dvojice	8
$\mathbf{id}_X$	identita na X, $\mathbf{id}_X = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in X \}$	10
$\lim \mathrm{dir}_{p \in \mathcal{P}} \mathfrak{A}_p$	direktní limita usměrněného systému modelů $\{ \mathfrak{A}_p, \mathfrak{e}_{pq} \}_{p \leq q \in \mathcal{P}}$	10
$\mathfrak{e}_{wu}$	elementární vnoření $\mathbb{U}^w/_{\mathcal{Z}_w} \hookrightarrow \mathbb{U}^u/_{\mathcal{Z}_u}$	11

REJSTŘÍK